Παράρτημα B

Ακριβείς ακολουθίες και μόδιοι ομολογίας και συνομολογίας

Στα παραρτήματα B, C και D εισάγονται μόνον ορισμένες *θεμελιώδεις έννοιες* και αποδεικνύονται μόνον κάποια *βασικά θεωρήματα* από τη λεγομένη *Ομολογική Άλγεβρα* [1] που απαιτούνται για την απρόσκοπτη ανάγνωση των κεφαλαίων 3 έως 7.

B.1 ΑΚΡΙΒΕΙΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ακολουθίες R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων καλούνται *ακριβείς* όταν ο πυρήνας καθενός των υπεισερχόμενων ομομορφισμών ισούται με την εικόνα τού προηγούμενου ομομορφισμού. Τέτοιου είδους ακολουθίες συναντώνται κατά τρόπο φυσικό σε πληθώρα σημαντικών θεωρημάτων τής Ομολογικής Άλγεβρας και τής Αλγεβρικής Τοπολογίας.

B.1.1 Ορισμός. Μια ακολουθία

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+2} \xrightarrow{f_{n+2}} \cdots \tag{B.1}$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, η οποία είναι *είτε* πεπερασμένη (και διαθέτει τουλάχιστον τρεις R-μοδίους) *είτε* μονοπλεύρως ή αμφιπλεύρως απείρως εκτεινόμενη, καλείται **ακριβής στην n-οστή θέση** M_n (όπου $n \in \mathbb{Z}$) όταν

[1] Για τη συγγραφή των παραρτημάτων B, C και D χρησιμοποιήθηκαν κατά κύριο λόγο οι σημειώσεις παραδόσεων [85] (από τα «Θέματα Άλγεβρας» τα διδαχθέντα κατά το χειμερινό εξάμηνο 2006-2007). Ως εισαγωγικά βιβλία Ομολογικής Άλγεβρας συνιστώνται, για περαιτέρω μελέτη, αυτά των Hu [51] και Vermani [121]. Για πιο προκεχωρημένα συγγράμματα, βλ. Cartan & Eilenberg [16], Hilton & Stammbach [47], Mac Lane [69], Rotman [103] και Weibel [124].

$\mathrm{Im}(f_{n-1}) = \mathrm{Ker}(f_n)$. Η (B.1) λέγεται **ακριβής ακολουθία** όταν είναι ακριβής σε κάθε μη ληκτικό (εκ των άνω ή εκ των κάτω) R-μόδιο.

B.1.2 Σημείωση. (i) Προφανώς,

$$\mathrm{Im}(f_{n-1}) = \mathrm{Ker}(f_n) \Leftrightarrow [f_n \circ f_{n-1} = 0 \text{ και } \mathrm{Ker}(f_n) \subseteq \mathrm{Im}(f_{n-1})].$$

(ii) Ο ορισμός B.1.1 παραμένει εν ισχύ ακόμη και όταν οι δείκτες είναι «κατιόντες», αρκεί ο πυρήνας καθενός ομομορφισμού να ισούται με την εικόνα τού προηγουμένου του. Επίσης, ορισμένες φορές (σε διαγράμματα) οι ακριβείς ακολουθίες παρατίθενται κατακορύφως εν είδει «στηλών».

(iii) Οιαδήποτε ακριβής ακολουθία τής μορφής[2]

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\}$$

καλείται **βραχεία ακριβής ακολουθία**.

B.1.3 Παραδείγματα. (i) Ένας ομομορφισμός R-μοδίων $f : M \longrightarrow N$ είναι

- μονομορφισμός $\Longleftrightarrow$ η $\{0\} \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ είναι ακριβής,
- επιμορφισμός $\Longleftrightarrow$ η $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow \{0\}$ είναι ακριβής,
- ισομορφισμός $\Longleftrightarrow$ η $\{0\} \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow \{0\}$ είναι ακριβής.

Επίσης, εάν μια ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\cdots \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{h} \cdots$$

είναι ακριβής, τότε ο f είναι

- μονομορφισμός $\Longleftrightarrow$ $g = 0$,
- επιμορφισμός $\Longleftrightarrow$ $h = 0$,
- ισομορφισμός $\Longleftrightarrow$ $[g = 0$ και $h = 0]$.

(ii) Εάν $f : M \longrightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός R-μοδίων, τότε υφίστανται πάντοτε δύο βραχείες ακολουθίες: Η

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \overset{\iota}{\hookrightarrow} M \xrightarrow{\pi^M_{\mathrm{Ker}(f)}} \mathrm{Coim}(f) \longrightarrow \{0\}\ ,$$

όπου ι η συνήθης ένθεση και $\mathrm{Coim}(f) := M/\mathrm{Ker}(f)$ η λεγόμενη **συνεικόνα τού** f, και η

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Im}(f) \hookrightarrow N \xrightarrow{\pi^N_{\mathrm{Im}(f)}} \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow \{0\}\ ,$$

[2] Ως $\{0\} \longrightarrow M'$ συμβολίζεται η *συνήθης ένθεση* (που απεικονίζει το μοναδικό στοιχείο ενός τετριμμένου R-μοδίου στο $0_{M'}$) και ως $M'' \longrightarrow \{0\}$ ο *μηδενικός ομομορφισμός* (που απεικονίζει κάθε στοιχείο τού M'' στο μοναδικό στοιχείο ενός τετριμμένου R-μοδίου).

όπου $\mathrm{Coker}(f) := N/\mathrm{Im}(f)$ είναι ο λεγόμενος **συμπυρήνας τού** f. Εξ αυτών προκύπτει και η ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \xhookrightarrow{\iota} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi^N_{\mathrm{Im}(f)}} \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow \{0\}\,. \tag{B.2}$$

(iii) Έστω $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Εάν επιλέξουμε έναν γεννήτορα $[a]_k$ τής (προσθετικής, αβελιανής) ομάδας $\mathbb{Z}_k$ και έναν γεννήτορα $[b]_{k^2}$ τής $\mathbb{Z}_{k^2}$, τότε σχηματίζεται μια βραχεία ακριβής ακολουθία $\mathbb{Z}$-μοδίων και ομομορφισμών $\mathbb{Z}$-μοδίων

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}_k \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_{k^2} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_k \longrightarrow \{0\}\,,$$

όπου $f([a]_k) := k[b]_{k^2}$ (απεικόνιση επεκτεινόμενη γραμμικώς επί ολοκλήρου τού $\mathbb{Z}$-μοδίου $\mathbb{Z}_k$) και $g([b]_{k^2}) := [a]_k$ (επεκτεινόμενη γραμμικώς επί τού $\mathbb{Z}_{k^2}$).

(iv) Εάν $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, τότε υφίσταται μια βραχεία ακριβής ακολουθία $\mathbb{Z}$-μοδίων και ομομορφισμών $\mathbb{Z}$-μοδίων

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_k \longrightarrow \{0\}\,,$$

όπου $f := k\,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$, ήτοι $f(\xi) := k\xi$ και $g(\xi) := [\xi]_k$ για κάθε $\xi \in \mathbb{Z}$.

(v) Εάν $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, και $l \in \mathbb{Z}$ με $l \mid k$, τότε θεωρώντας τήν υποομάδα $l\mathbb{Z}_k$ τής $\mathbb{Z}_k$ έχουμε τη δυνατότητα κατασκευής μιας βραχείας ακριβούς ακολουθίας $\mathbb{Z}_k$-μοδίων και ομομορφισμών $\mathbb{Z}_k$-μοδίων

$$\{0\} \longrightarrow \tfrac{k}{l}\,\mathbb{Z}_k \xhookrightarrow{\iota} \mathbb{Z}_k \xrightarrow{g} l\mathbb{Z}_k \longrightarrow \{0\}\,,$$

όπου $g([\xi]_k) := l[\xi]_k$ για κάθε $\xi \in \mathbb{Z}$, καθώς ο g είναι επιμορφισμός και

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(g) &= \{\,[\xi]_k \in \mathbb{Z}_k |\, \xi \in \mathbb{Z} \text{ με } l[\xi]_k = [l\xi]_k = [0]_k\}\\ &= \{\,[\xi]_k \in \mathbb{Z}_k |\, \xi \in \mathbb{Z} \text{ με } l\xi = mk, \text{ για κάποιον } m \in \{0,1,...,k-1\}\}\\ &= \tfrac{k}{l}\,\mathbb{Z}_k = \mathrm{Im}(\iota).\end{aligned}$$

(vi) Έστω $\mathbb{K}$ τυχόν σώμα. Η βραχεία ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \langle \mathsf{X} \rangle \xhookrightarrow{\iota} \mathbb{K}[\mathsf{X}] \xrightarrow{g} \mathbb{K} \longrightarrow \{0\}\,,$$

όπου $g(\varphi(\mathsf{X})) :=$ ο σταθερός όρος τού πολυωνύμου $\varphi(\mathsf{X})$ για κάθε $\varphi(\mathsf{X}) \in \mathbb{K}[\mathsf{X}]$, είναι ακριβής τόσον όταν οι όροι της θεωρηθούν $\mathbb{K}$-μόδιοι (ήτοι $\mathbb{K}$-διανυσματικοί χώροι) όσον και όταν οι όροι της θεωρηθούν $\mathbb{K}[\mathsf{X}]$-μόδιοι.

(vii) Εάν I_1, I_2 είναι δυο ιδεώδη ενός μεταθετικού δακτυλίου R, τότε η

$$\{0\} \longrightarrow I_1 \cap I_2 \xhookrightarrow{\iota} R \xrightarrow{f} (R/I_1) \times (R/I_2) \xrightarrow{g} R/(I_1 + I_2) \longrightarrow \{0\}\,,$$

όπου $f(r) := (r + I_1, r + I_2),\ \forall r \in R$, και

$$g(r_1 + I_1, r_2 + I_2) := (r_1 + r_2) + (I_1 + I_2),\ \forall\,(r_1, r_2) \in R \times R,$$

αποτελεί μια ακριβή ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων.

B.1.4 Πρόταση. (i) *Οιαδήποτε ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων τής μορφής*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \tag{B.3}$$

είναι ακριβής εάν και μόνον εάν $A \cong \mathrm{Ker}(\beta)$.
(ii) *Οιαδήποτε ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων τής μορφής*

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0 \tag{B.4}$$

είναι ακριβής εάν και μόνον εάν $\mathrm{Coker}(\alpha) \cong C$.

Αποδειξη. (i) Εάν η (B.3) είναι ακριβής, τότε ο ομομορφισμός α είναι μονομορφισμός και $A \underset{\breve{\alpha}}{\xrightarrow{\cong}} \mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta)$ (όπου $\breve{\alpha}$ όπως στο A.3.14 (iii)). Και αντιστρόφως· εάν υπάρχει ένας ισομορφισμός $f : A \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ker}(\beta)$, τότε δημιουργείται ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f", "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \\
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\beta) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\mathrm{Ker}(\beta),B}"'] & B \arrow[u, "\mathrm{id}_B"] \arrow[r, "\beta"'] & C \arrow[u, "\mathrm{id}_C"']
\end{tikzcd}$$

με την κάτω του γραμμή ακριβή. Ο $\alpha = \mathrm{id}_B \circ \mathrm{in}_{\mathrm{Ker}(\beta),B} \circ f$ είναι μονομορφισμός (ως σύνθεση τριών μονομορφισμών) και

$$\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{id}_B(\mathrm{in}_{\mathrm{Ker}(\beta),B}(f(A))) = \mathrm{id}_B(\mathrm{in}_{\mathrm{Ker}(\beta),B}(\mathrm{Ker}(\beta))) = \mathrm{id}_B(\mathrm{Ker}(\beta)) = \mathrm{Ker}(\beta),$$

οπότε η (B.3) είναι ακριβής.
(ii) Εάν η (B.4) είναι ακριβής, τότε ο β είναι επιμορφισμός και

$$\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta) \Rightarrow \mathrm{Coker}(\alpha) := B/\,\mathrm{Im}(\alpha) = B/\mathrm{Ker}(\beta) \underset{\text{A.4.7}}{\xrightarrow{\cong}} \mathrm{Im}(\beta) = C.$$

Και αντιστρόφως· εάν υπάρχει ισομορφισμός $f : \mathrm{Coker}(\alpha) \xrightarrow{\cong} C$, τότε τότε δημιουργείται ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\mathrm{id}_B"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r] & \{0\} \\
A \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\pi^B_{\mathrm{Im}(\alpha)}"'] & \mathrm{Coker}(\alpha) \arrow[u, "f", "\cong"'] \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

με την κάτω του γραμμή ακριβή. Ο $\beta = f \circ \pi^B_{\mathrm{Im}(\alpha)} \circ \mathrm{id}_B$ είναι επιμορφισμός (ως σύνθεση τριών επιμορφισμών) και

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(\beta) &= \mathrm{Ker}(f \circ \pi^B_{\mathrm{Im}(\alpha)} \circ id_B) = \mathrm{Ker}(f \circ \pi^B_{\mathrm{Im}(\alpha)}) = \left\{ x \in B |\, f(\pi^B_{\mathrm{Im}(\alpha)}(x)) = 0_C \right\} \\
&= \left\{ x \in B |\, \pi^B_{\mathrm{Im}(\alpha)}(x) = 0_{\mathrm{Coker}(\alpha)} \right\} = \{ x \in B |\, x \in \mathrm{Im}(\alpha) \} = \mathrm{Im}(\alpha),
\end{aligned}$$

οπότε η (B.4) είναι ακριβής. □

B.1.5 Πρόταση. *Έστω ότι οι* $(f'_j : M'_j \longrightarrow M_j)_{j\in J}$, $(f_j : M_j \longrightarrow M''_j)_{j\in J}$ *είναι δυο οικογένειες ομομορφισμών* R*-μοδίων (με το ίδιο σύνολο δεικτών). Εάν οι ακολουθίες* $M'_j \underset{f'_j}{\longrightarrow} M_j \underset{f_j}{\longrightarrow} M''_j$ *είναι ακριβείς για κάθε* $j \in J$*, τότε και οι ακολουθίες*

$$\prod_{j\in J} M'_j \xrightarrow{\prod_{j\in J} f'_j} \prod_{j\in J} M_j \xrightarrow{\prod_{j\in J} f_j} \prod_{j\in J} M''_j$$

και

$$\bigoplus_{j\in J} M'_j \xrightarrow{\bigoplus_{j\in J} f'_j} \bigoplus_{j\in J} M_j \xrightarrow{\bigoplus_{j\in J} f_j} \bigoplus_{j\in J} M''_j$$

είναι ακριβείς.

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από τις ισότητες (A.15) και (A.16). □

▶ **Τεχνικές χειρισμού μεταθετικών διαγραμμάτων και ακριβών ακολουθιών**. Παρατίθεται μια σειρά από χρήσιμα θεωρητικά λήμματα τα οποία αποσκοπούν στη διευκόλυνση των χειρισμών που απαιτούνται κατά την επίλυση προβλημάτων σχετιζομένων με τη μελέτη *μεγάλων* μεταθετικών διαγραμμάτων.

B.1.6 Λήμμα. («Λήμμα των τεσσάρων») *Δοθέντος ενός μεταθετικού διαγράμματος ομομορφισμών* R*-μοδίων τής μορφής*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D \arrow[d, "\delta"] \\ A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & D' \end{tikzcd}$$

με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς, ισχύουν τα εξής:

(i) *Εάν οι* α *και* γ *είναι επιμορφισμοί και ο* δ *μονομορφισμός, τότε ο* β *είναι επιμορφισμός.*

(ii) *Εάν ο* α *είναι επιμορφισμός και οι* β *και* δ *μονομορφισμοί, τότε ο* γ *είναι μονομορφισμός.*

Απόδειξη. (i) Έστω τυχόν στοιχείο $b' \in B'$. Επειδή η απεικόνιση γ είναι επιρριπτική, υπάρχει $c \in C : g'(b') = \gamma(c)$. Λόγω τής μεταθετικότητας στο δεξιό τετράγωνο, $\delta(h(c)) = h'(\gamma(c)) = h'(g'(b')) = (\underbrace{h' \circ g'}_{=0})(b') = 0_{D'}$. Επομένως έχουμε $h(c) \in \mathrm{Ker}(\delta) = \{0_D\}$ (διότι ο δ είναι μονομορφισμός), οπότε

$$h(c) = 0_D \Rightarrow c \in \mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Im}(g) \Rightarrow [\exists b \in B : c = g(b)].$$

Λόγω τής μεταθετικότητας στο μεσαίο τετράγωνο λαμβάνουμε

$$g'(b') = \gamma(c) = \gamma(g(b)) = g'(\beta(b)) \Rightarrow b' - \beta(b) \in \operatorname{Ker}(g') = \operatorname{Im}(f'),$$

οπότε $b' - \beta(b) = f'(a')$ για κάποιο $a' \in A'$. Επειδή η απεικόνιση α είναι επιρριπτική, υπάρχει $a \in A : a' = \alpha(a)$. Η μεταθετικότητα στο αριστερό τετράγωνο δίδει $b' - \beta(b) = f'(\alpha(a)) = \beta(f(a)) \Rightarrow b' = \beta(b + f(a)) \in \operatorname{Im}(\beta)$. Κατά συνέπειαν, ο ομομορφισμός β είναι όντως επιμορφισμός.

(ii) Έστω τυχόν $c \in \operatorname{Ker}(\gamma)$. Προφανώς,

$$\delta\,(h(c)) = h'(\gamma(c)) = h'(0_{C'}) = 0_{D'} \Rightarrow h(c) \in \operatorname{Ker}(\delta) = \{0_D\},$$

οπότε $c \in \operatorname{Ker}(h) = \operatorname{Im}(g) \Rightarrow [\exists b \in B : c = g(b)]$. Ως εκ τούτου,

$$0_{C'} = \gamma(c) = \gamma(g(b)) = g'(\beta(b)) \Rightarrow \beta(b) \in \operatorname{Ker}(g') = \operatorname{Im}(f'),$$

απ' όπου έπεται η ύπαρξη ενός $a' \in A'$ με $\beta(b) = f'(a')$. Επειδή η απεικόνιση α είναι επιρριπτική, υπάρχει $a \in A : a' = \alpha(a)$, οπότε

$$\begin{aligned} &\beta(b) = f'(a') = \beta(f(a)) \Rightarrow b - f(a) \in \operatorname{Ker}(\beta) = \{0_B\} \\ &\Rightarrow b = f(a) \Rightarrow c = g(b) = (\underbrace{g \circ f}_{=0})(a) = 0_C. \end{aligned}$$

Άρα ο ομομορφισμός γ είναι όντως μονομορφισμός. □

B.1.7 Λήμμα. («Λήμμα των πέντε») *Δοθέντος ενός μεταθετικού διαγράμματος ομομορφισμών R-μοδίων τής μορφής*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E \arrow[d, "\varepsilon"] \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E' \end{tikzcd}$$

με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς, ισχύουν τα εξής:

(i) *Εάν ο α είναι επιμορφισμός και οι β και δ μονομορφισμοί, τότε ο γ είναι μονομορφισμός.*

(ii) *Εάν οι β και δ είναι επιμορφισμοί και ο ε μονομορφισμός, τότε ο γ είναι επιμορφισμός.*

(iii) *Εάν οι α, β, δ και ε είναι ισομορφισμοί, τότε και ο γ είναι ισομορφισμός.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Αρκεί η εφαρμογή τού (ii) τού λήμματος B.1.6 για το υποδιάγραμμα

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D \arrow[d, "\delta"] \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \end{tikzcd}$$

(ii) Τούτο έπεται ύστερα από εφαρμογή τού (i) τού λήμματος B.1.6 για το υποδιάγραμμα

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E \arrow[d, "\varepsilon"] \\ B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E' \end{tikzcd}$$

Τέλος, το (iii) έπεται άμεσα από τα (i) και (ii). □

B.1.8 Πόρισμα. («Βραχύ λήμμα των πέντε») *Δοθέντος ενός μεταθετικού διαγράμματος ομομορφισμών R-μοδίων τής μορφής*

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \{0\} \arrow[d, equal] \\ \{0\} \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς, ισχύουν τα εξής:

(i) *Εάν οι α και γ μονομορφισμοί, τότε και ο β είναι μονομορφισμός.*

(ii) *Εάν οι α και γ επιμορφισμοί, τότε και ο β είναι επιμορφισμός.*

(iii) *Εάν οι α και γ ισομορφισμοί, τότε και ο β είναι ισομορφισμός.*

B.1.9 Λήμμα. («Λήμμα των 3×3», [69], II.5.1, σελ. 49-50)
Έστω ότι το διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\begin{tikzcd} & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \\ \{0\} \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & \{0\} \\ \{0\} \arrow[r] & B' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B'' \arrow[r] \arrow[d, "g''"] & \{0\} \\ \{0\} \arrow[r] & C' \arrow[r, "\alpha''"'] \arrow[d] & C \arrow[r, "\beta''"'] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \\ & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό με τις τρεις στήλες του ακριβείς. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) *Εάν οι δύο άνω γραμμές του είναι ακριβείς, τότε και η τρίτη του γραμμή είναι ακριβής.*

(ii) *Εάν οι δύο κάτω γραμμές του είναι ακριβείς, τότε και η τρίτη του γραμμή είναι ακριβής.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) (a) *Ακρίβεια στη θέση* C'. Εάν $c' \in \mathrm{Ker}(\alpha'')$, τότε λόγω τής επιρριπτικότητας τού g' υπάρχει κάποιο $b' \in B'$, τέτοιο ώστε να ισχύει $g'(b') = c'$, οπότε

$$g(\alpha(b')) = \alpha''(g'(b')) = \alpha''(c') = 0_{C'}$$
$$\Rightarrow \alpha(b') \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f) \Rightarrow [\exists a \in A : \alpha(b') = f(a)].$$

Από την άλλη μεριά,

$$0_{B''} = (\underbrace{\beta \circ \alpha}_{=0})(b') = \beta(\alpha(b')) = \beta(f(a)) = f''(\beta'(a))$$
$$\Rightarrow \beta'(a) \in \mathrm{Ker}(f'') = \{0_{A''}\} \Rightarrow \beta'(a) = 0_{A''}$$
$$\Rightarrow a \in \mathrm{Ker}(\beta') = \mathrm{Im}(\alpha') \Rightarrow [\exists a' \in A' : \alpha'(a') = a],$$

οπότε $\alpha(b') = f(a) = f(\alpha'(a')) = \alpha(f'(a'))$, απ' όπου έπεται ότι

$$b' - f'(a') \in \mathrm{Ker}(\alpha) = \{0_{B'}\} \Rightarrow b' = f'(a')$$
$$\Rightarrow c' = g'(b') = (\underbrace{g' \circ f'}_{=0})(a') = 0_{C'} \Rightarrow \mathrm{Ker}(\alpha'') = \{0_{C'}\}.$$

(b) *Ακρίβεια στη θέση* C. Εάν $c' \in C'$, τότε λόγω τής επιρριπτικότητας τού g' υπάρχει κάποιο $b' \in B'$, τέτοιο ώστε να ισχύει $g'(b') = c'$, οπότε

$$(\beta'' \circ \alpha'')(c') = \beta''(\alpha''(c')) = \beta''(\alpha''(g'(b'))) = \beta''(g(\alpha(b')))$$
$$= g''(\beta(\alpha(b'))) = g''((\underbrace{\beta \circ \alpha}_{=0})(b')) = g''(0_{B''}) = 0_{C''}$$
$$\Rightarrow \beta'' \circ \alpha'' = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(\alpha'') \subseteq \mathrm{Ker}(\beta'').$$

Και αντιστρόφως· εάν $c \in \mathrm{Ker}(\beta'')$, τότε λόγω τής επιρριπτικότητας τού g υπάρχει κάποιο $b \in B$, τέτοιο ώστε να ισχύει $g(b) = c$. Προφανώς,

$$0_C = \beta''(c) = \beta''(g(b)) = g''(\beta(b))$$
$$\Rightarrow \beta(b) \in \mathrm{Ker}(g'') = \mathrm{Im}(f'') \Rightarrow [\exists a'' \in A'' : \beta(b) = f''(a'')].$$

Επίσης, λόγω τής επιρριπτικότητας τού β' υπάρχει κάποιο $a \in A$, τέτοιο ώστε να ισχύει $\beta'(a) = a''$. Κατά συνέπειαν,

$$\beta(b) = f''(a'') = f''(\beta'(a)) = \beta(f(a)) \Rightarrow b - f(a) \in \mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Im}(\alpha)$$
$$\Rightarrow [\exists b' \in B' : \alpha(b') = b - f(a)] \Rightarrow c = g(b) = g(b) - (\underbrace{g \circ f}_{=0})(a) = g(b - f(a))$$
$$= g(\alpha(b')) = \alpha''(g'(b')) \in \mathrm{Im}(\alpha'') \Rightarrow \mathrm{Ker}(\beta'') \subseteq \mathrm{Im}(\alpha'').$$

(c) *Ακρίβεια στη θέση* C''. Εάν $c'' \in C''$, τότε λόγω τής επιρριπτικότητας τού g'' υπάρχει κάποιο $b'' \in B''$, τέτοιο ώστε να ισχύει $g''(b'') = c''$. Επίσης, λόγω τής επιρριπτικότητας τού β, $\exists\, b \in B : b'' = \beta(b)$. Επομένως,

$$c'' = g''(b'') = g''(\beta(b)) = \beta''(g(b)) \in \mathrm{Im}(\beta'') \Rightarrow C'' = \mathrm{Im}(\beta'').$$

(ii) Τούτο αποδεικνύεται παρομοίως (μόνον μέσω *κυνηγητού στο διάγραμμα*). □

► **Το λήμμα τού φιδιού**. Εν συνεχεία, διατυπώνεται και αποδεικνύεται το λεγόμενο *λήμμα τού φιδιού* (που είναι γνωστό και ως *λήμμα πυρήνων και συμπυρήνων* ή ως *λήμμα τού ζικ-ζακ συνδετικού ομομορφισμού*), μέσω τού οποίου κατασκευάζεται η μακρά ακριβής ακολουθία R-μοδίων ομολογίας που επάγεται από μια βραχεία ακριβή ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων. (Βλ. θεώρημα B.2.12.) Επειδή η κλασική απόδειξή του (μόνον μέσω *κυνηγητού στο διάγραμμα*) είναι μακροσκελής, παρατίθεται εδώ μια διαφορετική, κομψή και *σύντομη* απόδειξη που οφείλεται στον J. Lambek και κάνει χρήση τού *λήμματος* B.1.17 *των δύο τετραγώνων*. Προηγούνται οι αποδείξεις κάποιων *στοιχειωδών* βοηθητικών προτάσεων.

B.1.10 Πρόταση. *Δοθέντων R-μοδίων M, M', M'', N, N', N'' και ακριβών ακολουθιών*

$$M' \xrightarrow{f'} M \xrightarrow{f} M'' \text{ και } \{0\} \longrightarrow N' \xrightarrow{g'} N \xrightarrow{g} N'',$$

καθώς και $\phi \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, $\phi'' \in \mathrm{Hom}_R(M'', N'')$ με $\phi'' \circ f = g \circ \phi$, υφίσταται μονοσημάντως ορισμένος $\phi' \in \mathrm{Hom}_R(M', N')$ που καθιστά το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, dashed, "\phi'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'' \arrow[d, "\phi''"] \\
\{0\} \arrow[r] & N' \arrow[r, "g'"'] & N \arrow[r, "g"'] & N''
\end{tikzcd}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $x \in M'$. Προφανώς,

$$g(\phi(f'(x))) = ((g \circ \phi) \circ f')(x) = ((\phi'' \circ f) \circ f')(x) = (\phi'' \circ \underbrace{(f \circ f')}_{=0})(x) = 0_{N''}$$

$$\Rightarrow \phi(f'(x)) \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(g') \Rightarrow \mathrm{Im}(\phi \circ f') \subseteq \mathrm{Im}(g').$$

Επειδή ο g' είναι μονομορφισμός (βλ. B.1.3 (i)), αρκεί η εφαρμογή τού θεωρήματος A.3.25 για το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[dl, dashed, "\exists!\phi'"'] \arrow[dr, "\phi\circ f'"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
N' \arrow[rr, "g'"'] & & N
\end{tikzcd}$$

(βάσει τού οποίου $\exists!\, \phi' \in \mathrm{Hom}_R(M', N') : g' \circ \phi' = \phi \circ f'$). □

B.1.11 Πόρισμα. *Δοθέντων R-μοδίων M, N, M', N' και ομομορφισμών*

$$f \in \mathrm{Hom}_R(M, M'), \qquad g \in \mathrm{Hom}_R(N, N'),$$
$$\phi \in \mathrm{Hom}_R(M, N), \qquad \phi' \in \mathrm{Hom}_R(M', N'),$$

με $\phi' \circ f = g \circ \phi$, υφίσταται μονοσημάντως ορισμένος

$$\boxed{\overline{\phi} \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ker}(f), \mathrm{Ker}(g))}$$

που καθιστά το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(f) \arrow[r, dashed, "\overline{\phi}"] \arrow[d, "\iota_f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Ker}(g) \arrow[d, "\iota_g"] \\ M \arrow[r, "\phi"'] & N \end{tikzcd}$$

(*Οι ι_f, ι_g είναι οι συνήθεις ενθέσεις.*)

Απόδειξη. Αρκεί να εφαρμοσθεί η πρόταση B.1.10 στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "\iota_f"] \arrow[d, dashed, "\exists!\, \overline{\phi}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M' \arrow[d, "\phi'"] \\ \{0\} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(g) \arrow[r, "\iota_g"'] & N \arrow[r, "g"'] & N' \end{tikzcd}$$

Σημειωτέον ότι $\overline{\phi}(x) := \phi(x)$ για κάθε $x \in \mathrm{Ker}(f)$. □

B.1.12 Πρόταση. *Δοθέντων R-μοδίων M, M', M'', N, N', N'' και ακριβών ακολουθιών*

$$M' \xrightarrow{f'} M \xrightarrow{f} M'' \longrightarrow \{0\} \;\; \textit{και} \;\; N' \xrightarrow{g'} N \xrightarrow{g} N'',$$

καθώς και $\phi \in \mathrm{Hom}_R(M, N), \phi' \in \mathrm{Hom}_R(M', N')$ με $\phi \circ f' = g' \circ \phi'$, υφίσταται μονοσημάντως ορισμένος $\phi'' \in \mathrm{Hom}_R(M'', N'')$ που καθιστά το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\phi'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\phi''"] & \{0\} \\ N' \arrow[r, "g'"'] & N \arrow[r, "g"'] & N'' & \end{tikzcd}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $y \in \mathrm{Ker}(f)$. Επειδή $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f')$, υπάρχει κάποιο στοιχείο $x \in M'$,τέτοιο ώστε να ισχύει $y = f'(x)$, οπότε

$$\phi(y) = \phi(f'(x)) = (\phi \circ f')(x) = (g' \circ \phi')(x) = g'(\phi'(x))$$
$$\Rightarrow (g \circ \phi)(y) = g(\phi(y)) = g(g'(\phi'(x))) = (\underbrace{g \circ g'}_{=0} \circ \phi')(x) = 0_{N''},$$

απ' όπου έπεται ότι $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g \circ \phi)$. Επειδή (κατά το B.1.3 (i)) ο f είναι επιμορφισμός, αρκεί η εφαρμογή τού θεωρήματος A.3.24 για το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft", near start] & N'' \\ M'' \arrow[ur, dashed, "\exists! \phi''"'] & \end{tikzcd}$$

(βάσει τού οποίου $\exists!\, \phi'' \in \mathrm{Hom}_R(M'', N'') : \phi'' \circ f = g \circ \phi$). □

B.1.13 Πόρισμα. *Έστω ότι οι*

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f'} M \xrightarrow{f} M'' \longrightarrow \{0\}$$

$$\{0\} \longrightarrow N' \xrightarrow{g'} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow \{0\}$$

είναι δυο βραχείες ακριβείς ακολουθίες και ότι

$$\phi \in \mathrm{Hom}_R(M, N),\ \phi' \in \mathrm{Hom}_R(M', N')$$

είναι τέτοιοι, ώστε να ισχύει $\phi \circ f' = g' \circ \phi'$. Βάσει τής προτάσεως B.1.12 *υπάρχει ένας μονοσημάντως ορισμένος $\phi'' \in \mathrm{Hom}_R(M'', N'')$ ο οποίος καθιστά το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\phi'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\phi''"] & \{0\} \\ \{0\} \arrow[r] & N' \arrow[r, "g'"'] & N \arrow[r, "g"'] & N'' \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Εν προκειμένω,

$$\mathrm{Ker}(\phi'') = f(\phi^{-1}(\mathrm{Ker}(g))), \quad \mathrm{Im}(\phi'') = \mathrm{Im}(g \circ \phi),$$

Εξ αυτών συνάγεται ότι

(i) *ο ϕ'' είναι μονομορφισμός εάν και μόνον εάν $\phi^{-1}(\mathrm{Ker}(g)) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, και*

(ii) *ο ϕ'' είναι επιμορφισμός εάν και μόνον εάν ο $g \circ \phi$ είναι επιμορφισμός.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προφανώς,

$$\phi^{-1}(\mathrm{Ker}(g)) = \phi^{-1}(g^{-1}(\{0_{N''}\})) = (g \circ \phi)^{-1}(\{0_{N''}\}) = \mathrm{Ker}(\phi'' \circ f)$$

$$\Rightarrow f(\phi^{-1}(\mathrm{Ker}(g))) = f(\mathrm{Ker}(\phi'' \circ f)) \underset{\text{A.3.11}}{=} \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(\phi'') = M'' \cap \mathrm{Ker}(\phi'') = \mathrm{Ker}(\phi'')$$

και $\mathrm{Im}(g \circ \phi) = \mathrm{Im}(\phi'' \circ f) = (\phi'' \circ f)(M) = \phi''(f(M)) = \phi''(M'') = \mathrm{Im}(\phi'')$.
(i) Ο ϕ'' είναι μονομορφισμός εάν και μόνον εάν

$$\mathrm{Ker}(\phi'') = \{0_{M''}\} \Leftrightarrow f(\phi^{-1}(\mathrm{Ker}(g))) = \{0_{M''}\} \Leftrightarrow \phi^{-1}(\mathrm{Ker}(g)) \subseteq \mathrm{Ker}(f).$$

(ii) Τούτο είναι προφανές από την ισότητα $\mathrm{Im}(\phi'') = \mathrm{Im}(g \circ \phi)$. □

B.1.14 Πόρισμα. *Δοθέντων R-μοδίων M, N, M', N' και ομομορφισμών*

$$f \in \mathrm{Hom}_R(M', M), \qquad g \in \mathrm{Hom}_R(N', N),$$
$$\phi \in \mathrm{Hom}_R(M, N), \qquad \phi' \in \mathrm{Hom}_R(M', N'),$$

με $\phi \circ f = g \circ \phi'$, υφίσταται μονοσημάντως ορισμένος

$$\boxed{\underline{\phi} \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Coker}(f), \mathrm{Coker}(g))}$$

που καθιστά το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi^M_{\mathrm{Im}(f)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N \arrow[d, "\pi^N_{\mathrm{Im}(g)}"] \\ \mathrm{Coker}(f) \arrow[r, dashed, "\underline{\phi}"'] & \mathrm{Coker}(g) \end{tikzcd}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρκεί να εφαρμοσθεί η πρόταση B.1.12 στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r, "\pi^M_{\mathrm{Im}(f)}"] \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists!\underline{\phi}"] & \{0\} \\ N' \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r, "\pi^N_{\mathrm{Im}(g)}"'] & \mathrm{Coker}(g) \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

Σημειωτέον ότι $\underline{\phi}(m + \mathrm{Im}(f)) := \phi(m) + \mathrm{Im}(g)$ για κάθε $m \in M$. □

B.1.15 Ορισμός. Έστω "□" ένα τετράγωνο μεταθετικό διάγραμμα ομομορφισμών R-μοδίων:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & B \arrow[d, "\beta"] \\ C \arrow[r, "g"'] & D \end{tikzcd}$$

Ορίζουμε ως **λόγο εικόνων** (image ratio) **τού** $\square$ τον πηλικομόδιο[3]

$$\boxed{\mathrm{Im.rat.}(\square) := (\mathrm{Im}(\beta) \cap \mathrm{Im}(g)) / \mathrm{Im}(g \circ \alpha)}$$

και ως **λόγο πυρήνων** (kernel ratio) **τού** $\square$ τον πηλικομόδιο[4]

$$\boxed{\mathrm{Ker.rat.}(\square) := \mathrm{Ker}(g \circ \alpha) / (\mathrm{Ker}(\alpha) + \mathrm{Ker}(f)).}$$

B.1.16 Σημείωση. Για διαγράμματα "$\square'$" τής μορφής

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ C \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\square'"] & D \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

(με τα κατακόρυφα βέλη στραμμένα *προς τα άνω*) ορίζουμε κατ' αναλογίαν

$$\boxed{\mathrm{Im.rat.}(\square') := (\mathrm{Im}(\beta) \cap \mathrm{Im}(f)) / \mathrm{Im}(f \circ \alpha)}$$

και

$$\boxed{\mathrm{Ker.rat.}(\square') := \mathrm{Ker}(f \circ \alpha) / (\mathrm{Ker}(\alpha) + \mathrm{Ker}(g)).}$$

B.1.17 Λήμμα. («Λήμμα των δύο τετραγώνων», J. Lambek [62], 1964) *Για οιοδήποτε μεταθετικό διάγραμμα ομομορφισμών R-μοδίων αποτελούμενο από δύο τετράγωνα τής μορφής*

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "1"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "2"] & M'' \arrow[d, "\gamma"] \\ N' \arrow[r, "f'"'] & N \arrow[r, "g'"'] & N'' \end{tikzcd}$$

και έχον αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς, υφίσταται ισομορφισμός

$$\boxed{\mathrm{Im.rat.}(1) \cong \mathrm{Ker.rat.}(2).}$$

[3] Εάν $y \in \mathrm{Im}(g \circ \alpha)$, τότε υπάρχει $x \in A : y = g(\alpha(x))$, οπότε $y \in \mathrm{Im}(g)$. Εξάλλου, επειδή (εξ υποθέσεως) $y = g(\alpha(x)) = \beta(f(x))$, έχουμε $y \in \mathrm{Im}(\beta)$. Επομένως, $y \in \mathrm{Im}(\beta) \cap \mathrm{Im}(g)$.

[4] Εάν $x \in \mathrm{Ker}(\alpha) + \mathrm{Ker}(f)$, τότε $x = x_1 + x_2$, για κάποια $x_1 \in \mathrm{Ker}(\alpha)$ και $x_2 \in \mathrm{Ker}(f)$. Επειδή

$$g(\alpha(x)) = g(\underbrace{\alpha(x_1)}_{=0_C} + \alpha(x_2)) = g(\alpha(x_2)) = \beta(f(x_2)) = \beta(0_B) = 0_D,$$

συνάγεται ότι $x \in \mathrm{Ker}(g \circ \alpha)$. Άρα $\mathrm{Ker}(\alpha) + \mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g \circ \alpha)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Λόγω τής ακριβείας των γραμμών έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\beta) \cap \mathrm{Im}(f') &= \mathrm{Im}(\beta) \cap \mathrm{Ker}(g') \\ &= \{\beta(x) \,|\, x \in M \text{ με } g'(\beta(x)) = 0_{N''}\} \\ &= \beta(\mathrm{Ker}(g' \circ \beta)) \end{aligned} \tag{B.5}$$

και

$$\mathrm{Im}(\beta \circ f) = \beta(\mathrm{Im}(f)) = \beta(\mathrm{Ker}(g)) = \beta(\mathrm{Ker}(\beta) + \mathrm{Ker}(g)). \tag{B.6}$$

Κατά συνέπειαν,

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ker.rat.}(2) := \mathrm{Ker}(g' \circ \beta)/(\mathrm{Ker}(\beta) + \mathrm{Ker}(g)) && \text{(εξ ορισμού)} \\ &\cong (\mathrm{Ker}(g' \circ \beta)/\mathrm{Ker}(\beta))/((\mathrm{Ker}(\beta) + \mathrm{Ker}(g))/\mathrm{Ker}(\beta)) && \text{(βλ. θεώρημα A.4.13)} \\ &\cong \beta\,(\mathrm{Ker}(g' \circ \beta))\,/\beta(\mathrm{Ker}(\beta) + \mathrm{Ker}(g)) && \text{(βλ. θεώρημα A.4.7)} \\ &= (\mathrm{Im}(\beta) \cap \mathrm{Im}(f'))/\,\mathrm{Im}(\beta \circ f) && \text{(από τις (B.5) και (B.6))} \\ &= \mathrm{Im.rat.}(1) && \text{(εξ ορισμού)} \end{aligned}$$

και ο ισχυρισμός είναι αληθής. □

B.1.18 Παρατήρηση. Το λήμμα B.1.17 (Im.rat.(1) $\cong$ Ker.rat.(2)) εξακολουθεί να ισχύει και για διαγράμματα τής μορφής

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "f"] \arrow[dr, phantom, "1"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[dr, phantom, "2"] & M'' \\ N' \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "f'"'] & N \arrow[u, "\beta"'] \arrow[r, "g'"'] & N'' \arrow[u, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

(που στρέφουν τα κατακόρυφα βέλη *προς τα άνω*) υπό την προϋπόθεση τού ορισμού των λόγων εικόνων και πυρήνων όπως στο εδ. B.1.16.

B.1.19 Θεώρημα. («Λήμμα τού φιδιού») *Εάν δοθούν δυο τριάδες R-μοδίων*

$$M, M', M'' \text{ και } N, N', N'',$$

δυο ακριβείς ακολουθίες

$$M' \xrightarrow{\alpha'} M \xrightarrow{\alpha} M'' \longrightarrow \{0\} \text{ και } \{0\} \longrightarrow N' \xrightarrow{\beta'} N \xrightarrow{\beta} N''$$

και τρεις ομομορφισμοί

$$\phi \in \mathrm{Hom}_R(M,N),\ \phi' \in \mathrm{Hom}_R(M',N'),\ \phi'' \in \mathrm{Hom}_R(M'',N''),$$

και εάν υποτεθεί ότι το κάτωθι διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$
\begin{tikzcd}
 & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \\
 & \mathrm{Ker}(\phi') \arrow[r, "\overline{\alpha}'"] \arrow[d, "\iota_{\phi'}"'] & \mathrm{Ker}(\phi) \arrow[r, "\overline{\alpha}"] \arrow[d, "\iota_{\phi}"'] & \mathrm{Ker}(\phi'') \arrow[d, "\iota_{\phi''}"'] \arrow[dddll, rounded corners, "\delta"] & \\
 & M' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\phi'"'] & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\phi"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\phi''"'] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & N' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\pi^{N'}_{\mathrm{Im}(\phi')}"'] & N \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\pi^{N}_{\mathrm{Im}(\phi)}"'] & N'' \arrow[d, "\pi^{N''}_{\mathrm{Im}(\phi'')}"'] & \\
 & \mathrm{Coker}(\phi') \arrow[r, "\underline{\beta}'"] \arrow[d] & \mathrm{Coker}(\phi) \arrow[r, "\underline{\beta}"] \arrow[d] & \mathrm{Coker}(\phi'') \arrow[d] & \\
 & \{0\} & \{0\} & \{0\} &
\end{tikzcd}
$$

όπου οι τρεις στήλες του είναι οι ακριβείς ακολουθίες (B.2) *οι επαγόμενες από τους* ϕ, ϕ', ϕ'' *και* $\underline{\beta}, \underline{\beta}', \overline{\alpha}, \overline{\alpha}'$ *οι μονοσημάντως ορισμένοι ομομορφισμοί που αποκτώνται μέσω των πορισμάτων* B.1.11 *και* B.1.14, *τότε υπάρχει ομομορφισμός* δ *που καθιστά την ακολουθία*

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\phi') \xrightarrow{\overline{\alpha}'} \mathrm{Ker}(\phi) \xrightarrow{\overline{\alpha}} \mathrm{Ker}(\phi'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}(\phi') \xrightarrow{\underline{\beta}'} \mathrm{Coker}(\phi) \xrightarrow{\underline{\beta}} \mathrm{Coker}(\phi'')}$$

ακριβή (και υποδηλούται μέσω τού οφιοειδούς βέλους στο διάγραμμα).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) *Η ανωτέρω ακολουθία είναι ακριβής στη θέση* $\mathrm{Ker}(\phi)$. Έστω τυχόν στοιχείο $y \in \mathrm{Im}(\overline{\alpha} \circ \overline{\alpha}')$. Επειδή

$$\exists x \in \mathrm{Ker}(\phi') : y = (\overline{\alpha} \circ \overline{\alpha}')(x)$$

και $\iota_{\phi''}(y) \in M'' = \mathrm{Im}(\alpha)$, υπάρχει $z \in M$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned}
&\alpha(z) = \iota_{\phi''}(y) = (\iota_{\phi''} \circ \overline{\alpha})(\overline{\alpha}'(x)) = (\alpha \circ \iota_{\phi})(\overline{\alpha}'(x)) \\
&= \alpha((\iota_{\phi} \circ \overline{\alpha}')(x)) = \alpha((\alpha' \circ \iota_{\phi'})(x)) = ((\underbrace{\alpha \circ \alpha'}_{=0}) \circ \iota_{\phi})(x) = 0_{M''} \\
&\Rightarrow y \in \mathrm{Ker}(\iota_{\phi''}) = \{0_{M''}\} \Rightarrow y = 0_{M''}
\end{aligned}$$

(λόγω τής μεταθετικότητας τού διαγράμματος και τής ακριβείας τής δεύτερης γραμμής του). Επομένως,

$$\overline{\alpha} \circ \overline{\alpha}' = 0 \Longrightarrow \mathrm{Im}(\overline{\alpha}') \subseteq \mathrm{Ker}(\overline{\alpha}).$$

Και αντιστρόφως· εάν $x \in \mathrm{Ker}(\overline{\alpha})$, τότε

$$\begin{aligned}
&0_{M''} = \iota_{\phi''}(0_{M''}) = \iota_{\phi''}(\overline{\alpha}(x)) = (\iota_{\phi''} \circ \overline{\alpha})(x) = (\alpha \circ \iota_{\phi})(x) = \alpha(\iota_{\phi}(x)) \\
&\Rightarrow \iota_{\phi}(x) \in \mathrm{Ker}(\alpha) = \mathrm{Im}(\alpha') \Rightarrow [\exists y \in M' : \iota_{\phi}(x) = \alpha'(y)] \\
&\Rightarrow (\beta' \circ \phi')(y) = (\phi \circ \alpha')(y) = \phi(\alpha'(y)) = \phi(\iota_{\phi}(x)) = (\underbrace{\phi \circ \iota_{\phi}}_{=0})(x) = 0_N \\
&\Rightarrow \phi'(y) \in \mathrm{Ker}(\beta') = \{0_{N'}\} \Rightarrow \phi'(y) = 0_{N'} \Rightarrow y \in \mathrm{Ker}(\phi') = \mathrm{Im}(\iota_{\phi'}) \\
&\Rightarrow [\exists x' \in \mathrm{Ker}(\phi') : y = \iota_{\phi'}(x')] \Rightarrow \iota_{\phi}(x) = \alpha'(y) = (\alpha' \circ \iota_{\phi'})(x') = (\iota_{\phi} \circ \overline{\alpha}')(x') \\
&\Rightarrow x - \overline{\alpha}'(x') \in \mathrm{Ker}(\iota_{\phi}) = \{0_M\} \Rightarrow x = \overline{\alpha}'(x') \in \mathrm{Im}(\overline{\alpha}'),
\end{aligned}$$

οπότε ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός $\mathrm{Ker}(\overline{\alpha}) \subseteq \mathrm{Im}(\overline{\alpha}')$.

(ii) *Η ανωτέρω ακολουθία είναι ακριβής στη θέση* $\mathrm{Coker}(\phi)$. Έστω τυχόν στοιχείο $x \in \mathrm{Coker}(\phi')$. Επειδή η απεικόνιση $\pi^{N'}_{\mathrm{Im}(\phi')}$ είναι επιρριπτική,

$$\exists z \in N' : \pi^{N'}_{\mathrm{Im}(\phi')}(z) = z + \mathrm{Im}(\phi') = x,$$

οπότε

$$\begin{aligned}
&(\underline{\beta} \circ \underline{\beta}')(x) = (\underline{\beta} \circ (\underline{\beta}' \circ \pi^{N'}_{\mathrm{Im}(\phi')}))(z) = (\underline{\beta} \circ (\pi^{N}_{\mathrm{Im}(\phi)} \circ \beta'))(z) \\
&= ((\underline{\beta} \circ \pi^{N}_{\mathrm{Im}(\phi)}) \circ \beta')(z) = ((\pi^{N''}_{\mathrm{Im}(\phi'')} \circ \beta) \circ \beta')(z) \\
&= (\pi^{N''}_{\mathrm{Im}(\phi'')} \circ (\underbrace{\beta \circ \beta'}_{=0}))(z) = 0_{\mathrm{Coker}(\phi'')} \Rightarrow \underline{\beta} \circ \underline{\beta}' = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(\underline{\beta}') \subseteq \mathrm{Ker}(\underline{\beta}).
\end{aligned}$$

Και αντιστρόφως· εάν $x \in \mathrm{Ker}(\underline{\beta})$, τότε (επειδή η $\pi^{N}_{\mathrm{Im}(\phi)}$ είναι επιρριπτική) έχουμε $x = \pi^{N}_{\mathrm{Im}(\phi)}(y)$ για κάποιο στοιχείο $y \in N$, οπότε

$$\begin{aligned}
&0_{\mathrm{Coker}(\phi)} = \underline{\beta}(x) = (\underline{\beta} \circ \pi^{N}_{\mathrm{Im}(\phi)})(y) = (\pi^{N''}_{\mathrm{Im}(\phi'')} \circ \beta)(y) \Rightarrow \beta(y) \in \mathrm{Ker}(\pi^{N''}_{\mathrm{Im}(\phi'')}) = \mathrm{Im}(\phi'') \\
&\Rightarrow [\exists w \in M'' : \phi''(w) = \beta(y)] \underset{\mathrm{Im}(\alpha)=M''}{\Longrightarrow} [\exists u \in M : w = \alpha(u)] \\
&\Rightarrow [\exists u \in M : \phi''(w) = \phi''(\alpha(u)) = \beta(\phi(u))] \Rightarrow \beta(y) = \beta(\phi(u)) \\
&\Rightarrow y - \phi(u) \in \mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Im}(\beta') \Rightarrow [\exists v \in N' : y - \phi(u) = \beta'(v)] \\
&\Rightarrow \pi^{N}_{\mathrm{Im}(\phi)}(y) - (\underbrace{\pi^{N}_{\mathrm{Im}(\phi)} \circ \phi}_{=0})(u) = (\pi^{N}_{\mathrm{Im}(\phi)} \circ \beta')(v) = (\underline{\beta}' \circ \pi^{N'}_{\mathrm{Im}(\phi')})(v) \\
&\Rightarrow x = \pi^{N}_{\mathrm{Im}(\phi)}(y) = \underline{\beta}'(\pi^{N'}_{\mathrm{Im}(\phi')}(v)) \in \mathrm{Im}(\underline{\beta}') \Rightarrow \mathrm{Ker}(\underline{\beta}) \subseteq \mathrm{Im}(\underline{\beta}').
\end{aligned}$$

(iii) *Για να είναι η ανωτέρω ακολουθία ακριβής και στις θέσεις* $\mathrm{Ker}(\phi'')$ *και* $\mathrm{Coker}(\phi')$ *αρκεί να υφίσταται ισομορφισμός*

$$\boxed{\mathrm{Coker}(\overline{\alpha}) \xrightarrow[\theta]{\cong} \mathrm{Ker}(\underline{\beta}').} \tag{B.7}$$

Πράγματι· εν τοιαύτη περιπτώσει, θέτοντας $\delta := j \circ \theta \circ \pi^{\mathrm{Ker}(\phi'')}_{\mathrm{Im}(\overline{\alpha})}$ (όπου j η συνήθης ένθεση) συμπεραίνουμε μέσω τού διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ker}(\phi) \arrow[r, "\overline{\alpha}"] & \mathrm{Ker}(\phi'') \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, "\pi^{\mathrm{Ker}(\phi'')}_{\mathrm{Im}(\overline{\alpha})}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Coker}(\phi') \arrow[r, "\underline{\beta'}"] & \mathrm{Coker}(\phi) \\
\mathrm{Ker}(\phi'')/\mathrm{Im}(\overline{\alpha}) \arrow[rr, equal] & & \mathrm{Coker}(\overline{\alpha}) \arrow[r, "\cong", "\theta"'] & \mathrm{Ker}(\underline{\beta'}) \arrow[u, hook, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

ότι

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(\delta) &= \left\{ x \in \mathrm{Ker}(\phi'') \,\middle|\, j(\theta(\pi^{\mathrm{Ker}(\phi'')}_{\mathrm{Im}(\overline{\alpha})}(x))) = \theta(\pi^{\mathrm{Ker}(\phi'')}_{\mathrm{Im}(\overline{\alpha})}(x)) = 0_{\mathrm{Coker}(\phi')} \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathrm{Ker}(\phi'') \,\middle|\, \pi^{\mathrm{Ker}(\phi'')}_{\mathrm{Im}(\overline{\alpha})}(x) \in \mathrm{Ker}(\theta) = \{0_{\mathrm{Coker}(\overline{\alpha})}\} \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathrm{Ker}(\phi'') \,|\, x + \mathrm{Im}(\overline{\alpha}) = \mathrm{Im}(\overline{\alpha}) \right\} = \left\{ x \in \mathrm{Ker}(\phi'') \,|\, x \in \mathrm{Im}(\overline{\alpha}) \right\} = \mathrm{Im}(\overline{\alpha})
\end{aligned}$$

και

$$\mathrm{Im}(\delta) = j(\theta(\pi^{\mathrm{Ker}(\phi'')}_{\mathrm{Im}(\overline{\alpha})}(\mathrm{Ker}(\phi'')))) = j(\theta(\mathrm{Coker}(\overline{\alpha}))) = j(\mathrm{Ker}(\underline{\beta'})) = \mathrm{Ker}(\underline{\beta'}).$$

(iv) *Απόδειξη υπάρξεως ενός ισομορφισμού* (B.7). Προς τούτο θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα το οποίο έχει την 2η, 3η, 4η και 5η γραμμή του, καθώς και όλες τις στήλες του ακριβείς.

$$\begin{tikzcd}
 & & & \{0\} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "1"] & \mathrm{Coker}(\overline{\alpha}) \arrow[d, equal] \\
 & & \mathrm{Ker}(\phi) \arrow[r, "\overline{\alpha}"] \arrow[d, "\iota_\phi"] \arrow[dr, phantom, "3"] & \mathrm{Ker}(\phi'') \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\iota_{\phi''}"] \arrow[dr, phantom, "2"] & \mathrm{Coker}(\overline{\alpha}) \arrow[d] \\
 & M' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\phi'"] \arrow[dr, phantom, "5"] & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, phantom, "4"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\phi''"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "7"] & N' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\pi^{N'}_{\mathrm{Im}(\phi')}"] \arrow[dr, phantom, "6"] & N \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\pi^{N}_{\mathrm{Im}(\phi)}"] & N'' & \\
\mathrm{Ker}(\underline{\beta'}) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "8"] & \mathrm{Coker}(\phi') \arrow[r, "\underline{\beta'}"] \arrow[d] & \mathrm{Coker}(\phi) & & \\
\mathrm{Ker}(\underline{\beta'}) \arrow[r] & \{0\} & & &
\end{tikzcd}$$

Επειδή (εκ κατασκευής) $\mathrm{Coker}(\overline{\alpha}) = \mathrm{Im.rat.}(1)$, εφαρμόζοντας διαδοχικώς το λήμμα B.1.17 των δύο τετραγώνων (*και στις δύο του εκδοχές*, βλ. B.1.18) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Im.rat.}(1) \cong \mathrm{Ker.rat.}(2) \cong \mathrm{Im.rat.}(3) \\
&\cong \mathrm{Ker.rat.}(4) \cong \mathrm{Im.rat.}(5) \cong \mathrm{Ker.rat.}(6) \\
&\cong \mathrm{Im.rat.}(7) \cong \mathrm{Ker.rat.}(8),
\end{aligned}$$

όπου (εκ νέου, εκ κατασκευής) $\mathrm{Ker.rat.}(8) = \mathrm{Ker}(\underline{\beta}')$. □

B.1.20 Παρατήρηση. (i) Έστω τυχόν στοιχείο $y \in \mathrm{Ker}(\phi'')$. Επειδή ο α είναι επιμορφισμός, υπάρχει κάποιο στοιχείο $x \in M$ με $\alpha(x) = \iota_{\phi''}(y) = y$ και[5] $\phi(x) \in \mathrm{Im}(\beta')$. Επειδή ο β' είναι μονομορφισμός, η ίνα $\beta'^{-1}(\{\phi(x)\})$ αυτού υπεράνω τού $\phi(x)$ είναι ένα *μονοσύνολο,* ας πούμε το $\{z\}$. Είναι εύκολο να ελεγχθεί (είτε βάσει των προαναφερθέντων διαδοχικών ισομορφισμών είτε απευθείας) ότι ως $\mathrm{Ker}(\phi'') \overset{\delta}{\longrightarrow} \mathrm{Coker}(\phi')$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο ομομορφισμός ο οριζόμενος μέσω τού τύπου[6]

$$\boxed{\delta(y) := \pi^{N'}_{\mathrm{Im}(\phi')}(z) = z + \mathrm{Im}(\phi').} \tag{B.8}$$

(ii) Εάν ο $\overline{\alpha}'$ είναι μονομορφισμός, τότε και ο α' είναι μονομορφισμός. (Και αντιστοίχως, εάν ο α' είναι επιμορφισμός, τότε και ο $\overline{\alpha}'$είναι επιμορφισμός.) Τούτο (επειδή ο β' είναι εξ υποθέσεως μονομορφισμός) έπεται ύστερα από εφαρμογή τού λήμματος B.1.6 των τεσσάρων στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Ker}(\phi') \arrow[r, hook] \arrow[d, "\overline{\alpha}'"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M' \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "\alpha'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N' \arrow[d, "\beta'"] \\
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\phi) \arrow[r, hook] & M \arrow[r, "\phi"'] & N
\end{tikzcd}$$

(iii) Εάν ο $\underline{\beta}$ είναι επιμορφισμός, τότε και ο β είναι επιμορφισμός. (Και αντιστοίχως, εάν ο β είναι μονομορφισμός, τότε και ο $\underline{\beta}$ είναι μονομορφισμός.) Τούτο

[5]Προφανώς, $\beta(\phi(x)) = \phi''(\alpha(x)) = \phi''(y) = 0_{N''}$, οπότε $\phi(x) \in \mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Im}(\beta')$.

[6]Ο εν λόγω ορισμός τού δ είναι *ανεξάρτητος* τής επιλογής τού x. Πράγματι· εάν $x_1, x_2 \in \alpha^{-1}(\{y\})$, τότε για $j = 1, 2$ έχουμε $\phi(x_j) \in \mathrm{Im}(\beta')$, οπότε υπάρχει *μοναδικό* $z_j \in N'$ με $\beta'(z_j) = \phi(x_j)$ (ή, ισοδυνάμως, με το μονοσύνολο $\{z_j\}$ ως την ίνα τού β' υπεράνω τού $\phi(x_j)$). Επειδή $x_1 - x_2 \in \mathrm{Ker}(\alpha) = \mathrm{Im}(\alpha')$, υπάρχει $u \in M'$ με $\alpha'(u) = x_1 - x_2$, απ' όπου έπεται ότι

$$\beta'(z_1 - z_2) = \phi(x_1 - x_2) = \phi(\alpha'(u)) = \beta'(\phi'(u)) \underset{\mathrm{Ker}(\beta') = \{0_{N'}\}}{\Longrightarrow} z_1 - z_2 = \phi'(u),$$

ήτοι $z_1 - z_2 \in \mathrm{Im}(\phi')$ ή, ισοδυνάμως, $z_1 + \mathrm{Im}(\phi') = z_2 + \mathrm{Im}(\phi')$.

(επειδή ο α είναι εξ υποθέσεως επιμορφισμός) έπεται ύστερα από εφαρμογή τού λήμματος B.1.6 των τεσσάρων στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \operatorname{Coker}(\phi) \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\beta}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \{0\} \arrow[d, equal] \\
M'' \arrow[r, "\phi''"'] & N'' \arrow[r, two heads] & \operatorname{Coker}(\phi'') \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

(iv) Εάν ο ϕ' είναι επιμορφισμός, τότε προκύπτει η ακριβής ακολουθία

$$\operatorname{Ker}(\phi') \xrightarrow{\overline{\alpha}'} \operatorname{Ker}(\phi) \overset{\overline{\alpha}}{\twoheadrightarrow} \operatorname{Ker}(\phi'') \longrightarrow \{0\}\,.$$

(v) Εάν ο ϕ'' είναι μονομορφισμός, τότε προκύπτει η ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \operatorname{Coker}(\phi') \overset{\underline{\beta}'}{\hookrightarrow} \operatorname{Coker}(\phi) \xrightarrow{\underline{\beta}} \operatorname{Coker}(\phi'').$$

► **Αλληλοεμπλεκόμενες ακριβείς ακολουθίες.** Υπάρχει πληθώρα μεγάλων και περίπλοκων διαγραμμάτων (πέραν αυτού τού λήμματος τού φιδιού) που οδηγούν στη δημιουργία λίαν χρήσιμων ακριβών ακολουθιών. Θα περιορισθούμε εδώ στην παράθεση τού λήμματος B.1.24 των Barratt και Whitehead, τού θεωρήματος B.1.25 και τού θεωρήματος B.1.26 τού Wall, η σπουδαιότητα τής εφαρμογής των οποίων (στην Αλγεβρική Τοπολογία) αναφαίνεται στο κεφάλαιο 3.

B.1.21 Λήμμα. *Εάν δοθεί ένα διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων*

$$\begin{tikzcd}
M_1' & & & & M_2' \\
& \circlearrowleft & L \arrow[ull, "j_1"'] \arrow[urr, "j_2"] & \circlearrowleft & \\
M_1 \arrow[uu, "k_1"] \arrow[urr, "i_1"] & & & & M_2 \arrow[uu, "k_2"'] \arrow[ull, "i_2"']
\end{tikzcd}$$

με $j_1 \circ i_1 = k_1$ και $j_2 \circ i_2 = k_2$, όπου

$$\{0\} \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} L \xrightarrow{j_2} M_2' \longrightarrow \{0\}\,,\ \{0\} \longrightarrow M_2 \xrightarrow{i_2} L \xrightarrow{j_1} M_1' \longrightarrow \{0\}$$

είναι βραχείες ακριβείς ακολουθίες και ο ομομορφισμός

$$\varphi : M_1 \oplus M_2 \longrightarrow L,\ (x_1, x_2) \longmapsto \varphi(x_1, x_2) := (i_1 \oplus i_2)(x_1, x_2) = i_1(x_1) + i_2(x_2)$$

ισομορφισμός, τότε αμφότεροι οι k_1, k_2 οφείλουν να είναι ισομορφισμοί.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω τυχόν στοιχείο $z \in M_1'$. Επειδή ο j_1 είναι επιμορφισμός, υπάρχει κάποιο $y \in L$, τέτοιο ώστε να ισχύει $j_1(y) = z$. Επίσης, επειδή ο φ είναι επιμορφισμός, υπάρχει κάποιο ζεύγος $(x_1, x_2) \in M_1 \oplus M_2$, τέτοιο ώστε να ισχύει $y = \varphi(x_1, x_2)$. Επομένως,

$$z = j_1(y) = j_1(i_1(x_1) + i_2(x_2)) = (j_1 \circ i_1)(x_1) + (j_1 \circ i_2)(x_2) = k_1(x_1).$$

Παρομοίως (κατόπιν εναλλαγής των ρόλων των j_1 και j_2) αποδεικνύεται ότι *και* ο k_2 είναι επιμορφισμός. Εν συνεχεία, θεωρούμε τυχόν στοιχείο $x \in \mathrm{Ker}(k_1)$. Προφανώς,

$$\begin{aligned} & j_1(i_1(x)) = 0_{M_1} \Rightarrow i_1(x) \in \mathrm{Ker}(j_1) = \mathrm{Im}(i_2) \Rightarrow [\exists x' \in M_2 : i_1(x) = i_2(x')] \\ & \Rightarrow 0_L = i_1(-x) + i_2(x') = \varphi(x, x') \underset{\mathrm{Ker}(\varphi) = \{(0_{M_1}, 0_{M_2})\}}{\Longrightarrow} (x, x') = (0_{M_1}, 0_{M_2}). \end{aligned}$$

Άρα ο k_1 είναι μονομορφισμός. Η απόδειξη τής ενριπτικότητας τού k_2 είναι παρόμοια. □

Β.1.22 Λήμμα. *Εάν δοθεί ένα διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων με $j_1 \circ i_1 = k_1$ και $j_2 \circ i_2 = k_2$*

$$\begin{tikzcd}
M_1' & & M_2' \\
& L \arrow[ul, "j_1"'] \arrow[ur, "j_2"] & \\
M_1 \arrow[uu, "k_1", "\cong"'] \arrow[ur, "i_1"'] & & M_2 \arrow[uu, "k_2"', "\cong"] \arrow[ul, "i_2"]
\end{tikzcd}$$

στο οποίο οι $M_1 \xrightarrow{i_1} L \xrightarrow{j_2} M_2'$, $M_2 \xrightarrow{i_2} L \xrightarrow{j_1} M_1'$ είναι ακριβείς και οι k_1, k_2 ισομορφισμοί, τότε οι ομομορφισμοί

$$\varphi : M_1 \oplus M_2 \longrightarrow L,\ (x_1, x_2) \longmapsto \varphi(x_1, x_2) := (i_1 \oplus i_2)(x_1, x_2) = i_1(x_1) + i_2(x_2)$$

και

$$\psi : L \longrightarrow M_1' \times M_2',\ x \longmapsto \psi(x) := (j_1(x), j_2(x))$$

είναι ισομορφισμοί έχοντες ως σύνθεσή τους την $\psi \circ \varphi = k_1 \times k_2$. Επιπροσθέτως,

$$i_1 \circ k_1^{-1} \circ j_1 + i_2 \circ k_2^{-1} \circ j_2 = \mathrm{id}_L. \tag{B.9}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή η σύνθεση $j_1 \circ i_1 = k_1$ είναι ένας ισομορφισμός, από την πρόταση Α.3.11 έπεται ότι $L = \mathrm{Im}\,(i_1) \oplus \mathrm{Ker}(j_1)$. Επομένως,

$$\mathrm{Ker}(j_1) \cap \mathrm{Ker}(j_2) = \mathrm{Ker}(j_1) \cap \mathrm{Im}\,(i_1) = \{0_L\}. \tag{B.10}$$

(i) Ο φ είναι *μονομορφισμός*. Εάν $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, τότε

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1(x_1) = j_1(i_1(x_1)) = j_1(i_1(x_1) + i_2(x_2)) = j_1(\varphi(x_1, x_2)) = j_1(0_L) = 0_{M_1'} \\ \\ k_2(x_2) = j_2(i_2(x_2)) = j_2(i_1(x_1) + i_2(x_2)) = j_2(\varphi(x_1, x_2)) = j_2(0_L) = 0_{M_2'} \end{array} \right\}$$

και επειδή οι k_1, k_2 είναι ισομορφισμοί, $(x_1, x_2) = (0_{M_1}, 0_{M_2})$.
(ii) Ο φ είναι *επιμορφισμός*. Έστω τυχόν στοιχείο $x \in L$. Θέτοντας

$$x_1 := k_1^{-1}(j_1(x)),\ x_2 := k_2^{-1}(j_2(x)),\ y := \varphi(x_1, x_2) - x = i_1(x_1) + i_2(x_2) - x,$$

παρατηρούμε ότι $(x_1, x_2) \in M_1 \oplus M_2$ και ότι

$$\left\{ \begin{array}{l} j_1(y) = j_1(i_1(x_1) + i_2(x_2) - x) = (j_1 \circ i_1)(x) - j_1(x) = k_1(x) - j_1(x) = 0_{M_1'} \\ \\ j_2(y) = j_2(i_1(x_1) + i_2(x_2) - x) = (j_2 \circ i_2)(x) - j_2(x) = k_2(x) - j_2(x) = 0_{M_2'} \end{array} \right\},$$

οπότε $y \in \mathrm{Ker}(j_1) \cap \mathrm{Ker}(j_2) \underset{\text{(B.10)}}{=} \{0_L\} \Rightarrow \varphi(x_1, x_2) = x$.
(iii) Ο ψ είναι *μονομορφισμός*. Εάν $x \in \mathrm{Ker}(\psi)$, τότε

$$(0_{M_1'}, 0_{M_2'}) = \psi(x) = (j_1(x), j_2(x)) \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(j_1) \cap \mathrm{Ker}(j_2) \underset{\text{(B.10)}}{=} \{0_L\}.$$

(iv) Ο ψ είναι *επιμορφισμός*. Θεωρούμε τυχόν $(z_1, z_2) \in M_1' \times M_2'$. Θέτοντας

$$x := i_1(k_1^{-1}(z_1)) + i_2(k_2^{-1}(z_2))$$

λαμβάνουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} j_1(x) = j_1(i_1(k_1^{-1}(z_1)) + i_2(k_2^{-1}(z_2))) = (j_1 \circ i_1)(k_1^{-1}(z_1)) = z_1 \\ \\ j_2(x) = j_2(i_1(k_1^{-1}(z_1)) + i_2(k_2^{-1}(z_2))) = (j_2 \circ i_2)(k_2^{-1}(z_2)) = z_2 \end{array} \right\},$$

οπότε $\psi(x) = (z_1, z_2)$.
(v) $\psi \circ \varphi = k_1 \times k_2$. Προφανώς,

$$\begin{aligned} \psi(\varphi(x_1, x_2)) &= (j_1(i_1(x_1) + i_2(x_2)), j_2(i_1(x_1) + i_2(x_2))) \\ &= ((j_1 \circ i_1)(x_1), (j_2 \circ i_2)(x_2)) = (k_1(x_1), k_2(x_2)) = (k_1 \times k_2)(x_1, x_2), \end{aligned}$$

για κάθε $(x_1, x_2) \in M_1 \oplus M_2$.
(vi) Για *κάθε* $x \in L$ έχουμε

$$\begin{gathered} j_1((\mathrm{id}_L - i_1 \circ k_1^{-1} \circ j_1 - i_2 \circ k_2^{-1} \circ j_2)(x)) \\ = j_1(x) - (\underbrace{j_1 \circ i_1}_{=k_1} \circ k_1^{-1} \circ j_1)(x) - (\underbrace{j_1 \circ i_2}_{=0} \circ k_2^{-1} \circ j_2)(x) = j_1(x) - j_1(x) = 0_{M_1'} \end{gathered}$$

και κατ' αναλογίαν $j_2((\mathrm{id}_L - i_1 \circ k_1^{-1} \circ j_1 - i_2 \circ k_2^{-1} \circ j_2)(x)) = 0_{M_2'}$. Άρα

$$(\mathrm{id}_L - i_1 \circ k_1^{-1} \circ j_1 - i_2 \circ k_2^{-1} \circ j_2)(x) \in \mathrm{Ker}(j_1) \cap \mathrm{Ker}(j_2) \underset{\text{(B.10)}}{=} \{0_L\}.$$

και η (B.9) είναι αληθής. □

B.1.23 Λήμμα. («Λημμα τού εξαγώνου», [31], I.15.1, σελ.38) *Εάν δοθεί ένα «εξαγωνικό» διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων*

$$\begin{tikzcd}
 & M_0' \arrow[dl, "\beta_1"'] \arrow[dr, "\beta_2"] \arrow[dd, "i_0"] & \\
M_1' & & M_2' \\
 & L \arrow[ul, "j_1"] \arrow[ur, "j_2"'] \arrow[dd, "j_0"] & \\
M_1 \arrow[uu, "k_1", "\cong"'] \arrow[ur, "i_1"'] \arrow[dr, "\alpha_1"'] & & M_2 \arrow[uu, "k_2"', "\cong"] \arrow[ul, "i_2"] \arrow[dl, "\alpha_2"] \\
 & M_0 &
\end{tikzcd}$$

στο οποίο κάθε τρίγωνο είναι μεταθετικό [7]*, οι*

$$M_1 \xrightarrow{i_1} L \xrightarrow{j_2} M_2', \;\; M_2 \xrightarrow{i_2} L \xrightarrow{j_1} M_1'$$

είναι ακριβείς και οι k_1, k_2 ισομορφισμοί, τότε ισχύουν τα εξής:

(i) $\mathrm{Ker}(j_1) \cap \mathrm{Ker}(j_2) = \{0_L\}$,

(ii) $L = \mathrm{Im}\,(i_1) \oplus \mathrm{Im}\,(i_2)$, και

(iii) $\alpha_1 \circ k_1^{-1} \circ \beta_1 + \alpha_2 \circ k_2^{-1} \circ \beta_2 = j_0 \circ i_0$. Ιδιαιτέρως, ισχύει η συνεπαγωγή

$$j_0 \circ i_0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 \circ k_1^{-1} \circ \beta_1 = -\alpha_2 \circ k_2^{-1} \circ \beta_2.$$

Αποδειξη. Το (i) είναι προφανές (βάσει των προαναφερθέντων στην αρχή τής αποδείξεως τού λήμματος B.1.22), ενώ το (ii) έπεται από την (B.10) καθώς έχουμε (εξ υποθέσεως) $\mathrm{Ker}(j_1) = \mathrm{Im}(i_2)$. Για την απόδειξη τού (iii) εφαρμόζουμε την (B.9) στο στοιχείο $i_0(x)$ *για κάθε* $x \in M_0'$ και λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
& i_0(x) = (i_1 \circ k_1^{-1} \circ j_1 + i_2 \circ k_2^{-1} \circ j_2)(i_0(x)) \\
& = (i_1 \circ k_1^{-1} \circ \underbrace{j_1 \circ i_0}_{=\beta_1} + i_2 \circ k_2^{-1} \circ \underbrace{j_2 \circ i_0}_{=\beta_2})(x) \\
& \Rightarrow (j_0 \circ i_0)\,(x) = j_0(i_0(x)) = j_0((i_1 \circ k_1^{-1} \circ \beta_1 + i_2 \circ k_2^{-1} \circ \beta_2)(x)) \\
& = (\underbrace{j_0 \circ i_1}_{=\alpha_1} \circ k_1^{-1} \circ \beta_1 + \underbrace{j_0 \circ i_2}_{=\alpha_2} \circ k_2^{-1} \circ \beta_2)(x) = (\alpha_1 \circ k_1^{-1} \circ \beta_1 + \alpha_2 \circ k_2^{-1} \circ \beta_2)(x),
\end{aligned}$$

οπότε ο ισχυρισμός είναι όντως αληθής. □

[7] Προσοχή! Το εν λόγω διάγραμμα ναι μεν έχει *όλα* τα τρίγωνά του μεταθετικά, αλλά δεν είναι *καθ' ολοκληρίαν* μεταθετικό (όπως δείχνει η σχέση στο (iii)).

B.1.24 Λήμμα. (M.G. Barratt και J.H.C. Whitehead [9], 1956) *Για οιοδήποτε (κλιμακωτό) μεταθετικό διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων (απείρως εκτεινόμενο προς τα δεξιά και προς τα αριστερά) τής μορφής*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "h_{n+1}"] & A_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\alpha_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "\beta_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C_n \arrow[r, "h_n"] \arrow[d, "\gamma_n"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] \arrow[d, "\beta_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "h'_{n+1}"'] & A'_n \arrow[r, "f'_n"'] & B'_n \arrow[r, "g'_n"'] & C'_n \arrow[r, "h'_n"'] & A'_{n-1} \arrow[r, "f'_{n-1}"'] & B'_{n-1} \arrow[r, "g'_{n-1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς και τον γ_n ισομορφισμό, $\forall n \in \mathbb{Z}$, υφίσταται μια ακριβής ακολουθία

$$\boxed{\cdots \xrightarrow{\triangle_{n+1}} A_n \xrightarrow{\psi_n} A'_n \oplus B_n \xrightarrow{\varphi_n} B'_n \xrightarrow{\triangle_n} A_{n-1} \xrightarrow{\psi_{n-1}} \cdots}$$

όπου $\triangle_n := h_n \circ \gamma_n^{-1} \circ g'_n$ και

$$A_n \ni x \longmapsto \psi_n(x) := (\alpha_n(x), f_n(x)) \in A'_n \oplus B_n,$$

$$A'_n \oplus B_n \ni (x,y) \longmapsto \varphi_n(x,y) := (f'_n \oplus (-\beta_n))(x,y) = f'_n(x) - \beta_n(y) \in B'_n.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σε έξι βήματα, μέσω κυνηγητού στο διάγραμμα.
(i) $\psi_n \circ \triangle_{n+1} = 0$. Επειδή $f_n \circ \triangle_{n+1} = \underbrace{f_n \circ h_{n+1}}_{=0} \circ \gamma_{n+1}^{-1} \circ g'_{n+1} = 0$ και

$$\begin{aligned}
\alpha_n \circ \triangle_{n+1} &= \underbrace{\alpha_n \circ h_{n+1}}_{=h'_{n+1}\circ\gamma_{n+1}} \circ \gamma_{n+1}^{-1} \circ g'_{n+1} \\
&= h'_{n+1} \circ g'_{n+1} = 0,
\end{aligned}$$

συμπεραίνουμε ότι $\psi_n \circ \triangle_{n+1} = 0$.
(ii) $\mathrm{Ker}(\psi_n) \subseteq \mathrm{Im}(\triangle_{n+1})$. Εάν $x \in \mathrm{Ker}(\psi_n)$, τότε $x \in \mathrm{Ker}(\alpha_n) \cap \mathrm{Ker}(f_n)$. Και επειδή (εξ υποθέσεως) $\mathrm{Ker}(f_n) = \mathrm{Im}(h_{n+1})$, υπάρχει κάποιο $z \in C_{n+1}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $x = h_{n+1}(z)$. Επιπροσθέτως, επειδή $\mathrm{Im}(\gamma_{n+1}^{-1}) = C_{n+1}$, υπάρχει $z' \in C'_{n+1}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $z = \gamma_{n+1}^{-1}(z')$. Ως εκ τούτου,

$$0_{A'_n} = \alpha_n(x) = (\underbrace{\alpha_n \circ h_{n+1}}_{=h'_{n+1}\circ\gamma_{n+1}} \circ \gamma_{n+1}^{-1})(z') = h'_{n+1}(z')$$

$$\Rightarrow z' \in \mathrm{Ker}(h_{n+1}) = \mathrm{Im}(g'_{n+1})$$

$$\Rightarrow [\exists w \in B'_{n+1} : z' = g'_{n+1}(w)]$$

$$\Rightarrow x = h_{n+1}(z) = (h_{n+1} \circ \gamma_{n+1}^{-1} \circ g'_{n+1})(w) = \triangle_{n+1}(w) \in \mathrm{Im}(\triangle_{n+1}).$$

(iii) $\varphi_n \circ \psi_n = 0$. Για κάθε $x \in A_n$ έχουμε $\varphi_n(\psi_n(x)) = \varphi_n(\alpha_n(x), f_n(x))$, οπότε

$$\begin{aligned}
\varphi_n(\psi_n(x)) &= f'_n(\alpha_n(x)) - \beta_n(f_n(x)) \\
&= (\underbrace{f'_n \circ \alpha_n - \beta_n \circ f_n}_{=0})(x) = 0_{A_n}.
\end{aligned}$$

(iv) $\mathrm{Ker}(\varphi_n) \subseteq \mathrm{Im}(\psi_n)$. Έστω τυχόν στοιχείο $(x, y) \in \mathrm{Ker}(\varphi_n)$. Προφανώς,

$$\begin{aligned}
&f'_n(x) = \beta_n(y)\\
&\Rightarrow 0_{C'_n} = g'_n(f'_n(x)) = g'_n(\beta_n(y)) = \gamma_n(g_n(y))\\
&\Rightarrow g_n(y) \in \mathrm{Ker}(\gamma_n) = \{0_{C_n}\} \Rightarrow g_n(y) = 0_{C_n}\\
&\Rightarrow y \in \mathrm{Ker}(g_n) = \mathrm{Im}(f_n)\\
&\Rightarrow [\exists z \in A_n : y = f_n(z)]\\
&\Rightarrow f'_n(x) = \beta_n(f_n(z)) = f'_n(\alpha_n(z))\\
&\Rightarrow x - \alpha_n(z) \in \mathrm{Ker}(f'_n) = \mathrm{Im}(h'_{n+1})\\
&\Rightarrow [\exists w \in C'_{n+1} : x - \alpha_n(z) = h'_{n+1}(w)].
\end{aligned}$$

Επειδή $\mathrm{Im}(\gamma_{n+1}) = C'_{n+1}$,

$$[\exists u \in C_{n+1} : w = \gamma_{n+1}(u)] \Rightarrow h'_{n+1}(w) = h'_{n+1}(\gamma_{n+1}(u)) = \alpha_n(h_{n+1}(u)),$$

οπότε

$$\left.\begin{array}{r} x = \alpha_n(z + h_{n+1}(u)) \\ f_n \circ h_{n+1} = 0 \Rightarrow y = f_n(z) = f_n(z + h_{n+1}(u)) \end{array}\right\} \Rightarrow (x, y) \in \mathrm{Im}(\psi_n).$$

(v) $\triangle_n \circ \varphi_n = 0$. Για κάθε $(x, y) \in A'_n \oplus B_n$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\triangle_n(\varphi_n(x, y)) = \triangle_n(f'_n(x) - \beta_n(y)) = \triangle_n(f'_n(x)) - \triangle_n(\beta_n(y))\\
&= (h_n \circ \gamma_n^{-1} \circ \underbrace{g'_n \circ f'_n}_{=0})(x) - (h_n \circ \gamma_n^{-1} \circ \underbrace{g'_n \circ \beta_n}_{=\gamma_n \circ g_n})(y)\\
&= \underbrace{h_n \circ g_n}_{=0}(y) = 0_{A_{n-1}}.
\end{aligned}$$

(vi) $\mathrm{Ker}(\triangle_n) \subseteq \mathrm{Im}(\varphi_n)$. Εάν $x \in \mathrm{Ker}(\triangle_n)$, τότε

$$\begin{aligned}
&h_n(\gamma_n^{-1}(g'_n(x))) = 0_{A_{n-1}}\\
&\Rightarrow \gamma_n^{-1}(g'_n(x)) \in \mathrm{Ker}(h_n) = \mathrm{Im}(g_n)\\
&\Rightarrow [\exists y \in B_n : \gamma_n^{-1}(g'_n(x)) = g_n(y)]\\
&\Rightarrow g'_n(x) = (\gamma_n \circ g_n)(y) = (g'_n \circ \beta_n)(y)\\
&\Rightarrow x - \beta_n(y) \in \mathrm{Ker}(g'_n) = \mathrm{Im}(f'_n) \Rightarrow [\exists w \in A'_n : x - \beta_n(y) = f'_n(w)],
\end{aligned}$$

οπότε $x = \beta_n(y) + f'_n(w) = f'_n(w) - \beta_n(-y) = \varphi_n(w, -y) \in \mathrm{Im}(\varphi_n)$. □

B.1.25 Θεώρημα. *Δοθέντος ενός διαγράμματος R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων (απείρως εκτεινομένου προς τα άνω και προς τα κάτω) τής μορφής*

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[dr, "s'_{n+1}"] & \vdots \arrow[d, "h_{n+1}"] & {} \arrow[dl, "s_{n+1}"'] \\
& A_n \arrow[dl, "\alpha_n"'] \arrow[dr, "\alpha'_n"] \arrow[dd, "f_n"] & \\
Y_n \arrow[dr, "\beta_n"'] \arrow[dddd, bend right=60, "\gamma_n"'] & & Y'_n \arrow[dl, "\beta'_n"] \arrow[dddd, bend left=60, "\gamma'_n"] \\
& B_n \arrow[dl, "l_n"'] \arrow[dr, "l'_n"] \arrow[dd, "g_n"] & \\
Z_n & & Z'_n \\
& C_n \arrow[ul, "j_n"'] \arrow[ur, "j'_n"] \arrow[dd, "h_n"] & \\
U_n \arrow[uu, "k_n", "\cong"'] \arrow[ur, "i_n"] \arrow[dr, "s_n"'] & & U'_n \arrow[uu, "k'_n"', "\cong"] \arrow[ul, "i'_n"'] \arrow[dl, "s'_n"] \\
& A_{n-1} \arrow[dl, "\alpha'_{n-1}"'] \arrow[dr, "\alpha_{n-1}"] \arrow[dd, "f_{n-1}"] & \\
Y'_{n-1} & & Y_{n-1} \\
& \vdots &
\end{tikzcd}
$$

με τους k_n, k'_n ισομορφισμούς, όλα τα τρίγωνά του μεταθετικά, $g_n \circ \beta_n = i_n \circ \gamma_n$, $g_n \circ \beta'_n = i'_n \circ \gamma'_n$, και με την ακολουθία την ευρισκομένη στην κατακόρυφη (κεντρική) γραμμή του, τις ακολουθίες

$$\cdots \xrightarrow{s_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} Y_n \xrightarrow{\gamma_n} U_n \xrightarrow{s_n} A_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} Y_{n-1} \xrightarrow{\gamma_{n-1}} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{s'_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha'_n} Y'_n \xrightarrow{\gamma'_n} U'_n \xrightarrow{s'_n} A_{n-1} \xrightarrow{\alpha'_{n-1}} Y'_{n-1} \xrightarrow{\gamma'_{n-1}} \cdots$$

τις ευρισκόμενες στο πλευρικό του περίγραμμα, καθώς και τις ακολουθίες (τριών όρων)

$$\left\{ \begin{array}{l} U_n \xrightarrow{i_n} C_n \xrightarrow{j'_n} Z'_n, \\ U'_n \xrightarrow{i'_n} C_n \xrightarrow{j_n} Z_n, \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_n \xrightarrow{\beta_n} B_n \xrightarrow{l'_n} Z'_n, \\ Y'_n \xrightarrow{\beta'_n} B_n \xrightarrow{l_n} Z_n, \end{array} \right\}$$

ακριβείς, υφίσταται μια ακριβής ακολουθία

$$\boxed{\cdots \xrightarrow{\triangle_{n+1}} A_n \xrightarrow{\psi_n} Y_n' \oplus Y_n \xrightarrow{\varphi_n} B_n \xrightarrow{\triangle_n} A_{n-1} \xrightarrow{\psi_{n-1}} \cdots ,} \tag{B.11}$$

όπου

$$\left\{ \begin{array}{c} A_n \ni x \longmapsto \psi_n(x) := (\alpha_n'(x), \alpha_n(x)) \in Y_n' \oplus Y_n, \\ Y_n' \oplus Y_n \ni (x,y) \longmapsto \varphi_n(x,y) := (\beta_n' \oplus (-\beta_n))(x,y) = \beta_n'(x) - \beta_n(y) \in B_n, \end{array} \right\}$$

και $\triangle_n := s_n \circ k_n^{-1} \circ l_n$*, καθώς και μια ακριβής ακολουθία*

$$\boxed{\cdots \xrightarrow{\triangle_{n+1}'} A_n \xrightarrow{\psi_n'} Y_n \oplus Y_n' \xrightarrow{\varphi_n'} B_n \xrightarrow{\triangle_n'} A_{n-1} \xrightarrow{\psi_{n-1}'} \cdots ,} \tag{B.12}$$

όπου

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n \ni x \longmapsto \psi_n'(x) := (\alpha_n(x), \alpha_n'(x)) \in Y_n \oplus Y_n', \\ Y_n \oplus Y_n' \ni (x,y) \longmapsto \varphi_n'(x,y) := (\beta_n \oplus (-\beta_n'))(x,y) = \beta_n(x) - \beta_n'(y) \in B_n, \end{array} \right\}$$

και $\triangle_n' := s_n' \circ k_n'^{-1} \circ l_n' = -\triangle_n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει

$$g_n \circ \beta_n = i_n \circ \gamma_n \Rightarrow k_n \circ \gamma_n = j_n \circ i_n \circ \gamma_n = j_n \circ g_n \circ \beta_n = l_n \circ \beta_n$$

και (κατ' αναλογίαν) $k_n' \circ \gamma_n' = l_n' \circ \beta_n'$. Το κλιμακωτό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & A_n \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, "\alpha_n'"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y_n \arrow[r, "\gamma_n"] \arrow[d, "\beta_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & U_n \arrow[r, "s_n"] \arrow[d, "k_n"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A_{n-1} \arrow[r, "\alpha_{n-1}"] \arrow[d, "\alpha_{n-1}'"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y_{n-1} \arrow[r, "\gamma_{n-1}"] \arrow[d, "\beta_{n-1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & Y_n' \arrow[r, "\beta_n'"'] & B_n \arrow[r, "l_n"'] & Z_n \arrow[r, "\alpha_{n-1}' \circ s_n \circ k_n^{-1}"'] & Y_{n-1}' \arrow[r, "\beta_{n-1}'"'] & B_{n-1} \arrow[r, "l_{n-1}"'] & \cdots \end{tikzcd}$$

είναι (εκ κατασκευής) μεταθετικό με την άνω γραμμή του ακριβή. Θα αποδείξουμε ότι η κάτω του γραμμή είναι ωσαύτως ακριβή.

(i) *Ακρίβεια στη θέση* B_n. Προφανώς, $l_n \circ \beta_n' = j_n \circ i_n' \circ \gamma_n' = 0$ (αφού εξ υποθέσεως $j_n \circ i_n' = 0$). Επίσης, για οιοδήποτε $x \in \mathrm{Ker}(l_n)$ έχουμε

$$\begin{aligned} & 0_{Z_n} = l_n(x) = j_n(g_n(x)) \Rightarrow g_n(x) \in \mathrm{Ker}(j_n) = \mathrm{Im}(i_n') \\ & \Rightarrow [\exists y \in U_n' : g_n(x) = i_n'(y)] \Rightarrow 0_{A_{n-1}} = h_n(g_n(x)) = h_n(i_n'(y)) = s_n'(y) \\ & \Rightarrow y \in \mathrm{Ker}(s_n') = \mathrm{Im}(\gamma_n') \Rightarrow [\exists z \in Y_n' : y = \gamma_n'(z) = (k_n'^{-1} \circ l_n' \circ \beta_n')(z)] \\ & \Rightarrow g_n(x) = i_n'(y) = (i_n' \circ k_n'^{-1} \circ l_n' \circ \beta_n')(z) = ((i_n' \circ k_n'^{-1} \circ j_n') \circ g_n \circ \beta_n')(z). \end{aligned}$$

Από το λήμμα B.1.22 γνωρίζουμε ότι $i_n' \circ k_n'^{-1} \circ j_n' = \mathrm{id}_{C_n} - i_n \circ k_n^{-1} \circ j_n$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} & (i_n' \circ k_n'^{-1} \circ j_n') \circ g_n \circ \beta_n' = (\mathrm{id}_{C_n} - i_n \circ k_n^{-1} \circ j_n) \circ g_n \circ \beta_n' \\ & = g_n \circ \beta_n' - i_n \circ k_n^{-1} \circ \underbrace{j_n \circ g_n}_{=l_n} \circ \beta_n' = g_n \circ \beta_n' - i_n \circ k_n^{-1} \circ \underbrace{l_n \circ \beta_n'}_{=0} = g_n \circ \beta_n' \end{aligned}$$

και, κατ' επέκταση, $g_n(x) = g_n(\beta'_n(z)) \Rightarrow x - \beta'_n(z) \in \mathrm{Ker}(g_n) = \mathrm{Im}(f_n)$, οπότε

$$[\exists w \in A_n : x - \beta'_n(z) = f_n(w) = \beta'_n(\alpha'_n(w))] \Rightarrow x = \beta'_n(z + \alpha'_n(w)) \in \mathrm{Im}(\beta'_n),$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{Ker}(l_n) \subseteq \mathrm{Im}(\beta'_n)$.
(ii) *Ακρίβεια στη θέση* Z_n. Επειδή $s_n = h_n \circ i_n$ και $l_n = j_n \circ g_n$, έχουμε

$$(\alpha'_{n-1} \circ s_n \circ k_n^{-1}) \circ l_n = \alpha'_{n-1} \circ h_n \circ (i_n \circ k_n^{-1} \circ j_n) \circ g_n.$$

Από το λήμμα B.1.22 γνωρίζουμε ότι $i_n \circ k_n^{-1} \circ j_n = \mathrm{id}_{C_n} - i'_n \circ k'^{-1}_n \circ j'_n$. Λόγω τής ακριβείας τής κατακόρυφης γραμμής και τού δεξιού περιγράμματος λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}(\alpha'_{n-1} \circ s_n \circ k_n^{-1}) \circ l_n &= \alpha'_{n-1} \circ \underbrace{h_n \circ g_n}_{=0} - \alpha'_{n-1} \circ \underbrace{h_n \circ i'_n}_{=s'_n} \circ k'^{-1}_n \circ j'_n \\ &= -\underbrace{\alpha'_{n-1} \circ s'_n}_{=0} \circ k'^{-1}_n \circ j'_n = 0.\end{aligned}$$

Επίσης, εάν $x \in \mathrm{Ker}(\alpha'_{n-1} \circ s_n \circ k_n^{-1})$, τότε $0_{Y'_{n-1}} = \alpha'_{n-1}(s_n(k_n^{-1}(x)))$, οπότε

$$\begin{aligned}& s_n(k_n^{-1}(x)) \in \mathrm{Ker}(\alpha'_{n-1}) = \mathrm{Im}(s'_n) \Rightarrow [\exists y \in U'_n : s_n(k_n^{-1}(x)) = s'_n(y)] \\ & \Rightarrow h_n(i_n(k_n^{-1}(x))) = s_n(k_n^{-1}(x)) = s'_n(y) = h_n(i'_n(y)) \\ & \Rightarrow i'_n(y) - i_n(k_n^{-1}(x)) \in \mathrm{Ker}(h_n) = \mathrm{Im}(g_n) \\ & \Rightarrow [\exists z \in B_n : i'_n(y) - i_n(k_n^{-1}(x)) = g_n(z)] \\ & x = (\underbrace{j_n \circ i'_n}_{=0})(y) - (\underbrace{j_n \circ i_n}_{=k_n} \circ k_n^{-1})(x) = j_n(i'_n(y) - i_n(k_n^{-1}(x))) = j_n(g_n(z)) = l_n(z) \\ & \Rightarrow x \in \mathrm{Im}(l_n) \Rightarrow \mathrm{Ker}(\alpha'_{n-1} \circ s_n \circ k_n^{-1}) \subseteq \mathrm{Im}(l_n).\end{aligned}$$

(iii) *Ακρίβεια στη θέση* Y'_{n-1}. Προφανώς,

$$\beta'_{n-1} \circ \alpha'_{n-1} \circ s_n \circ k_n^{-1} = f_{n-1} \circ s_n \circ k_n^{-1} = \underbrace{f_{n-1} \circ h_n}_{=0} \circ i_n \circ k_n^{-1} = 0.$$

Επίσης, εάν $x \in \mathrm{Ker}(\beta'_{n-1})$, τότε $l'_{n-1}(\beta'_{n-1}(x)) = l'_{n-1}(0_{B_{n-1}}) = 0_{Z'_{n-1}}$, οπότε

$$k'_{n-1}(\gamma'_{n-1}(x)) = 0_{Z'_{n-1}} \Rightarrow \gamma'_{n-1}(x) \in \mathrm{Ker}(k'_{n-1}) = \{0_{U'_{n-1}}\}$$

και, ως εκ τούτου, $x \in \mathrm{Ker}(\gamma'_{n-1}) = \mathrm{Im}(\alpha'_{n-1}) \Rightarrow [\exists y \in A_{n-1} : x = \alpha'_{n-1}(y)]$. Επομένως,

$$0_{B_{n-1}} = \beta'_{n-1}(x) = \beta'_{n-1}(\alpha'_{n-1}(y)) = f_{n-1}(y) \Rightarrow y \in \mathrm{Ker}(f_{n-1}) = \mathrm{Im}(h_n) \Rightarrow [\exists z \in C_n : y = h_n(z)].$$

Από το λήμμα B.1.22 γνωρίζουμε ότι $\mathrm{id}_{C_n} = i_n \circ k_n^{-1} \circ j_n + i'_n \circ k'^{-1}_n \circ j'_n$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}& y = h_n(\mathrm{id}_{C_n}(z)) = h_n((i_n \circ k_n^{-1} \circ j_n + i'_n \circ k'^{-1}_n \circ j'_n)(z)) \\ & = (\underbrace{h_n \circ i_n}_{=s_n} \circ k_n^{-1} \circ j_n)(z) + (\underbrace{h_n \circ i'_n}_{=s'_n} \circ k'^{-1}_n \circ j'_n)(z) \\ & \Rightarrow x = \alpha'_{n-1}(y) = (\alpha'_{n-1} \circ s_n \circ k_n^{-1})(j_n(z)) + (\underbrace{\alpha'_{n-1} \circ s'_n}_{=0} \circ k'^{-1}_n)(j'_n(z)) \\ & \Rightarrow x = (\alpha'_{n-1} \circ s_n \circ k_n^{-1})(j_n(z)) \in \mathrm{Im}(\alpha'_{n-1} \circ s_n \circ k_n^{-1}),\end{aligned}$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{Ker}(\beta'_{n-1}) \subseteq \mathrm{Im}(\alpha'_{n-1} \circ s_n \circ k_n^{-1})$. Λόγω των (i), (ii) και (iii) είναι δυνατόν να εφαρμόσουμε το λήμμα B.1.24 των Barratt και Whitehead. Μέσω αυτού κατασκευάζουμε την ακριβή ακολουθία (B.11). Εν συνεχεία, εκτελώντας τή «συμμετρική» διαδικασία τής προηγηθείσας (με πρόδηλες εναλλαγές ρόλων σε ζεύγη γραμμάτων που δηλούν R-μοδίους και ομομορφισμούς R-μοδίων και εμφανίζονται *και* με *και* χωρίς τόνους) για το κλιμακωτό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_n \arrow[r, "\alpha'_n"] \arrow[d, "\alpha_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y'_n \arrow[r, "\gamma'_n"] \arrow[d, "\beta'_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & U'_n \arrow[r, "s'_n"] \arrow[d, "k'_n"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A_{n-1} \arrow[r, "\alpha'_{n-1}"] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y'_{n-1} \arrow[r, "\gamma'_{n-1}"] \arrow[d, "\beta'_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y_n \arrow[r, "\beta_n"'] & B_n \arrow[r, "l'_n"'] & Z'_n \arrow[r, "\alpha_{n-1} \circ s'_n \circ k'^{-1}_n"'] & Y_{n-1} \arrow[r, "\beta_{n-1}"'] & B_{n-1} \arrow[r, "l'_{n-1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

ελέγχουμε την ακρίβεια τής κάτω του γραμμής και καταλήγουμε στην κατασκευή τής ακριβούς ακολουθίας (B.12). Τέλος, λαμβάνοντας υπ' όψιν την ακριβεία τής ακολουθίας τής ευρισκομένης στην κατακόρυφη (κεντρική) γραμμή τού αρχικού διαγράμματος, συμπεραίνουμε από τη συνεπαγωγή στο (iii) τού λήμματος B.1.23 (εφαρμοζόμενου για το εξάγωνο το καθοριζόμενο από τους R-μοδίους Z_n, B_n, Z'_n, U'_n, A_{n-1} και U_n) ότι $\triangle'_n = -\triangle_n, \forall n \in \mathbb{Z}$. □

Το μεγάλο διάγραμμα τού θεωρήματος B.1.25 ανήκει σε μια κατηγορία διαγραμμάτων που είναι γνωστά ως *αλληλεμπλεκόμενες ακολουθίες* (interlocking sequences) ή ως *διαγράμματα πλεξιδίων* (braid diagrams). Ένα εξίσου χρήσιμο θεώρημα που αφορά σε τέτοιου είδους διαγράμματα (οφειλόμενο στον C.T.C. Wall) είναι το εξής:

B.1.26 Θεώρημα. (C.T.C. Wall [123], 1966) *Εάν δοθεί ένα μεταθετικό διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
D_{n+1} \arrow[rr, bend left, "\delta^{(1)}_{n+1}"] \arrow[dr, "i^{(2)}_{n+1}"'] & & A_n \arrow[rr, bend left, "i^{(3)}_n"] \arrow[dr, "i^{(1)}_n"] & & B_n \arrow[rr, bend left, "j^{(4)}_n"] \arrow[dr, "j^{(3)}_n"'] & & C_n \arrow[rr, bend left, "\delta^{(2)}_n"] \arrow[dr, "\delta^{(4)}_n"'] & & D_{n-1} \\
\cdots & N_{n+1} \arrow[ur, "\delta^{(3)}_{n+1}"'] \arrow[dr, "j^{(2)}_{n+1}"] & & M_n \arrow[ur, "i^{(4)}_n"'] \arrow[dr, "j^{(1)}_n"] & & N_n \arrow[ur, "j^{(2)}_n"'] \arrow[dr, "\delta^{(3)}_n"] & & M_{n-1} \arrow[ur, "j^{(1)}_{n-1}"'] \arrow[dr, "i^{(4)}_{n-1}"] & \cdots \\
B_{n+1} \arrow[ur, "j^{(3)}_{n+1}"] \arrow[rr, bend right, "j^{(4)}_{n+1}"'] & & C_{n+1} \arrow[ur, "\delta^{(4)}_{n+1}"'] \arrow[rr, bend right, "\delta^{(2)}_{n+1}"'] & & D_n \arrow[ur, "i^{(2)}_n"] \arrow[rr, bend right, "\delta^{(1)}_n"'] & & A_{n-1} \arrow[ur, "i^{(1)}_{n-1}"] \arrow[rr, bend right, "i^{(3)}_{n-1}"'] & & B_{n-1}
\end{tikzcd}$$

τεσσάρων αλληλοεμπλεκομένων ακολουθιών ομομορφισμών R-μοδίων

$$\cdots \xrightarrow{j^{(1)}_{n+1}} D_{n+1} \xrightarrow{\delta^{(1)}_{n+1}} A_n \xrightarrow{i^{(1)}_n} M_n \xrightarrow{j^{(1)}_n} D_n \xrightarrow{\delta^{(1)}_n} A_{n-1} \xrightarrow{i^{(1)}_{n-1}} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{(2)}_{n+2}} D_{n+1} \xrightarrow{i^{(2)}_{n+1}} N_{n+1} \xrightarrow{j^{(2)}_{n+1}} C_{n+1} \xrightarrow{\delta^{(2)}_{n+1}} D_n \xrightarrow{i^{(2)}_n} N_n \xrightarrow{j^{(2)}_n} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{i^{(3)}_{n+1}} B_{n+1} \xrightarrow{j^{(3)}_{n+1}} N_{n+1} \xrightarrow{\delta^{(3)}_{n+1}} A_n \xrightarrow{i^{(3)}_n} B_n \xrightarrow{j^{(3)}_n} N_n \xrightarrow{\delta^{(3)}_n} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{i^{(4)}_{n+1}} B_{n+1} \xrightarrow{j^{(4)}_{n+1}} C_{n+1} \xrightarrow{\delta^{(4)}_{n+1}} M_n \xrightarrow{i^{(4)}_n} B_n \xrightarrow{j^{(4)}_n} C_n \xrightarrow{\delta^{(4)}_n} \cdots$$

(απείρως εκτεινόμενο προς τα δεξιά και προς τα αριστερά) και εάν υποτεθεί ότι η δεύτερη, η τρίτη και η τέταρτη εξ αυτών είναι ακριβείς, τότε

$$\mathrm{Ker}(\delta_{n+1}^{(1)}) = \mathrm{Im}(j_{n+1}^{(1)}),\ \mathrm{Ker}(i_n^{(1)}) = \mathrm{Im}(\delta_{n+1}^{(1)})$$

και $\mathrm{Ker}(j_n^{(1)})/\mathrm{Ker}(j_n^{(1)}) \cap \mathrm{Im}(i_n^{(1)}) \cong \mathrm{Im}(i_n^{(1)})/\mathrm{Ker}(j_n^{(1)}) \cap \mathrm{Im}(i_n^{(1)}), \forall n \in \mathbb{Z}$. *Επομένως, η πρώτη είναι ωσαύτως ακριβής εάν και μόνον εάν*[8]

$$\textit{είτε}\ \ \mathrm{Im}(i_n^{(1)}) \subseteq \mathrm{Ker}(j_n^{(1)})\ \ \textit{είτε}\ \ \mathrm{Ker}(j_n^{(1)}) \subseteq \mathrm{Im}(i_n^{(1)}), \forall n \in \mathbb{Z}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. *Και* αυτή η απόδειξη κάνει χρήση (αδυσώπητου) κυνηγητού στο διάγραμμα. (Για μια υπόδειξη για τον τρόπο επιλογής τής σειράς των ελεγχόμενων ομομορφισμών πρβλ. Bredon [12], Lemma IV.6.16, σελ. 189.) □

► **Διασπώμενες βραχείες ακριβείς ακολουθίες**. Για οιουσδήποτε R-μοδίους A, C ορίζεται η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow A \overset{\mathrm{in}_A}{\hookrightarrow} A \oplus C \overset{\mathrm{pr}_C}{\twoheadrightarrow} C \longrightarrow \{0\}\,.$$

Βραχείες ακριβείς ακολουθίες που τής «ομοιάζουν» με *προσέγγιση ισομορφισμού όρων* (κάτι που αποσαφηνίζεται μέσω τού θεωρήματος B.1.28 που ακολουθεί) χαρακτηρίζονται ως *διασπώμενες*.

B.1.27 Ορισμός. Λέμε ότι μια ακριβής ακολουθία

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+2} \xrightarrow{f_{n+2}} \cdots$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων **διασπάται στην n-οστή θέση** όταν ο M_n δεν είναι ληκτικός και όταν ο πυρήνας $\mathrm{Ker}(f_n)$ $(= \mathrm{Im}(f_{n-1}))$ είναι ευθύς προσθετέος τού M_n. (Βλ. A.5.18 (ii).) Ιδιαιτέρως, λέμε ότι μια βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$$

είναι **διασπώμενη** όταν διασπάται στον κεντρικό της όρο[9] B.

B.1.28 Θεώρημα. *Για οιαδήποτε βραχεία ακριβή ακολουθία*

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\} \tag{B.13}$$

οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:
(i) $\exists \beta \in \mathrm{Hom}_R(C, B) : g \circ \beta = \mathrm{id}_C$.

[8] Η πρώτη εξ αυτών των συνθηκών ικανοποιείται όταν η πρώτη ακολουθία αποτελεί *αλυσωτό σύμπλοκο* (υπό την έννοια τού ορισμού B.2.1).

[9] Προφανώς, στους όρους A και C αυτή διασπάται *πάντοτε*.

(ii) $\exists \alpha \in \mathrm{Hom}_R(B, A) : \alpha \circ f = \mathrm{id}_A$.
(iii) *Η* (B.13) *είναι διασπώμενη.*
Επιπροσθέτως, όταν η (B.13) *είναι διασπώμενη,*

$$A \oplus C \cong B = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(\alpha) = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(\beta),$$

με τους β *και* α *όπως στα* (i) *και* (ii)*, αντιστοίχως.*

Αποδειξη. (i)⇒(iii) Έστω $\varphi : A \oplus C \longrightarrow B$ ο ομομορφισμός R-μοδίων ο οριζόμενος μέσω τού τύπου

$$\varphi(a, c) := (f \oplus \beta)(a, c) = f(a) + \beta(c), \ \forall (a, c) \in A \oplus C.$$

Τότε το ακόλουθο διάγραμμα (με ακριβείς γραμμές) είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \arrow[r, hook, "\mathrm{in}_A"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"] & A \oplus C \arrow[r, two heads, "\mathrm{pr}_C"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_C"] \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"] & \{0\} \arrow[d, equal] \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"] \\
\{0\} \arrow[r] & A \arrow[r, hook, "f"'] & B \arrow[r, two heads, "g"'] & C \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

καθώς ισχύει $\varphi(\mathrm{in}_A(a)) = \varphi((a, 0_C)) = f(a) = f(\mathrm{id}_A(a)), \forall a \in A$, και

$$g(\varphi(a, c)) = \underbrace{(g \circ f)}_{=0}(a) + \underbrace{(g \circ \beta)}_{=\,\mathrm{id}_C}(c) = c = (\mathrm{id}_C \circ \ \mathrm{pr}_C)(a, c)$$

για κάθε $(a, c) \in A \oplus C$. Επειδή οι ταυτοτικές απεικονίσεις id_A και id_C είναι ισομορφισμοί, *και* ο φ είναι κατ' ανάγκην ισομορφισμός. (Βλ. B.1.8 (iii).) Έστω τυχόν στοιχείο $b \in B$. Προφανώς, υπάρχουν *μονοσημάντως ορισμένα* $a \in A$ και $c \in C$, τέτοια ώστε να ισχύει $b = \varphi(a, c) = f(a) + \beta(c)$ με $f(a) \in \mathrm{Im}(f)(= \mathrm{Ker}(g))$ και $\beta(c) \in \mathrm{Im}(\beta)$. Άρα $B = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(\beta)$.

(iii)⇒(i) Εάν υποτεθεί ότι η (B.13) είναι διασπώμενη, τότε $B = \mathrm{Ker}(g) \oplus D$, για κάποιον υπομόδιο D τού B. Επομένως κάθε $b \in B$ γράφεται *μονοσημάντως* ως άθροισμα $b = y + d$, όπου $y \in \mathrm{Ker}(g)$ και $d \in D$. Επειδή ο ομομορφισμός $g : B \longrightarrow C$ είναι επιμορφισμός και $g(b) = g(d)$, ο $g|_D : D \longrightarrow C$ είναι ωσαύτως επιμορφισμός. Όμως ο $g|_D$ είναι *και* μονομορφισμός, διότι $\mathrm{Ker}(g|_D) = \mathrm{Ker}(g) \cap D = \{0_B\}$. Άρα ο $g|_D$ είναι ισομορφισμός. Αρκεί λοιπόν να τεθεί $\beta(c) := (g|_D)^{-1}(c)$ για κάθε $c \in C$.

(ii)⇒(iii) Έστω $\psi : B \longrightarrow A \oplus C$ ο ομομορφισμός R-μοδίων ο οριζόμενος μέσω τού τύπου $\psi(b) := \alpha(b) + g(b)$ για κάθε $b \in B$. Το ακόλουθο διάγραμμα (με ακριβείς γραμμές) είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_C"] \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"] & \{0\} \arrow[d, equal] \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"] \\
\{0\} \arrow[r] & A \arrow[r, hook, "\mathrm{in}_A"'] & A \oplus C \arrow[r, two heads, "\mathrm{pr}_C"'] & C \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

Επειδή οι ταυτοτικές απεικονίσεις id_A και id_C είναι ισομορφισμοί, *και* ο ψ είναι κατ' ανάγκην ισομορφισμός. (Βλ. Β.1.8 (iii).). Έστω τώρα τυχόν $b \in B$. Αυτό γράφεται ως

$$b = \underbrace{f(\alpha(b))}_{\in \mathrm{Im}(f)} + \underbrace{(b - f(\alpha(b)))}_{\in \,\mathrm{Ker}(\alpha)},$$

διότι $\alpha(b - f(\alpha(b))) = \alpha(b) - (\underbrace{\alpha \circ f}_{= \mathrm{id}_A})(\alpha(b)) = 0_B$. Άρα $B = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(\alpha)$. Εξάλλου, εάν $y \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(\alpha)$, τότε υπάρχει κάποιο $x \in A$ με $y = f(x)$, οπότε

$$0_A = \alpha(y) = (\underbrace{\alpha \circ f}_{= \mathrm{id}_A})(x) = x$$

και $y = f(0_A) = 0_B$, απ' όπου έπεται ότι

$$\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(\alpha) = \{0_B\} \Rightarrow B = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(\alpha).$$

(iii)⇒(ii) Εάν υποτεθεί ότι η (Β.13) είναι διασπώμενη, τότε $B = \mathrm{Im}(f) \oplus E$, για κάποιον υπομόδιο E τού B. Επομένως κάθε $b \in B$ γράφεται *μονοσημάντως* ως άθροισμα $b = y + e$, όπου $y \in \mathrm{Im}(f)$ και $e \in E$. Επειδή ο f είναι μονομορφισμός, η ίνα $f^{-1}(\{y\})$ αυτού υπεράνω τού στοιχείου y είναι ένα μονοσύνολο, ας πούμε το $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$. Ορίζοντας λοιπόν την απεικόνιση $\alpha : B \longrightarrow A$ μέσω τού τύπου $\alpha(b) = \alpha(y + e) := x$ παρατηρούμε ότι αυτή αποτελεί ομομορφισμό R-μοδίων και για κάθε $a \in A$ ισχύει $\alpha(f(a)) = f^{-1}(\{f(a)\}) = a$. Κατά συνέπειαν, $\alpha \circ f = \mathrm{id}_A$.□

Β.1.29 Παραδείγματα. (i) Η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_k \longrightarrow \{0\}$$

η κατασκευασθείσα στο εδ. Β.1.3 (iv) δεν είναι διασπώμενη, διότι η f δεν διαθέτει κανέναν ομομορφισμό $\mathbb{Z}$-μοδίων ως αριστερό αντίστροφό της. (Βλ. Α.3.21 (i).)

(ii) Παρατηρούμε ότι η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \langle \mathsf{X} \rangle \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{K}[\mathsf{X}] \xrightarrow{g} \mathbb{K} \longrightarrow \{0\}\,,$$

(η ορισθείσα στο (vi) τού εδαφίου Β.1.3) είναι διασπώμενη ως ακολουθία ομομορφισμών $\mathbb{K}$-μοδίων (ήτοι $\mathbb{K}$-διανυσματικών χώρων), διότι η απεικόνιση

$$\alpha : \mathbb{K}[\mathsf{X}] \longrightarrow \langle \mathsf{X} \rangle\,, \quad \sum_{j=0}^{\nu} \lambda_j \mathsf{X}^j \longmapsto \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j \mathsf{X}^j,$$

είναι ομομορφισμός $\mathbb{K}$-διανυσματικών χώρων με $\alpha \circ \iota = \mathrm{id}_{\langle \mathsf{X} \rangle}$. Ωστόσο, *η ίδια* βραχεία ακριβής ακολουθία, θεωρούμενη ως ακολουθία ομομορφισμών $\mathbb{K}[\mathsf{X}]$-μοδίων, *δεν είναι διασπώμενη*. Πράγματι· εάν υπήρχε κάποιος $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}[\mathsf{X}]}(\mathbb{K}[\mathsf{X}], \langle \mathsf{X} \rangle)$ με

$\alpha \circ \iota = \mathrm{id}_{\langle \mathsf{X} \rangle}$ (ή, ισοδυνάμως, με $\alpha|_{\langle \mathsf{X} \rangle} = \mathrm{id}_{\langle \mathsf{X} \rangle}$), τότε η εικόνα τού $1_{\mathbb{K}}$ $(= \mathsf{X}^0)$ μέσω τού α θα εγράφετο υπό τη μορφή $\alpha(1_{\mathbb{K}}) = \mathsf{X}\,\varphi(\mathsf{X})$ για κατάλληλο $\varphi(\mathsf{X}) \in \mathbb{K}[\mathsf{X}]$ και θα ίσχυε

$$\mathsf{X} = \alpha(\mathsf{X}) = \alpha(\mathsf{X}\,1_{\mathbb{K}}) = \mathsf{X}\,\alpha(1_{\mathbb{K}}) = \mathsf{X}^2\,\varphi(\mathsf{X}),$$

ήτοι κάτι που είναι αδύνατο.

B.1.30 Πόρισμα. *Κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία*

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}\,, \tag{B.14}$$

όπου C ένας ελεύθερος R-μόδιος, είναι διασπώμενη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $(c_j)_{j\in J}$ μια βάση τού C. Επειδή ο g είναι επιμορφισμός, υπάρχει $b_j \in B$, τέτοιο ώστε να ισχύει $g(b_j) = c_j$ για κάθε $j \in J$. Εάν επί τού συνόλου των στοιχείων τής θεωρηθείσας βάσεως ορίσουμε την απεικόνιση φ θέτοντας $\varphi(c_j) := b_j$, $\forall\, j \in J$, και κατόπιν (μέσω τού θεωρήματος A.6.20) την επεκτείνουμε γραμμικώς, κατασκευάζουμε έναν ομομορφισμό R-μοδίων $\beta : C \longrightarrow B$ με $\beta|_{(c_j)_{j\in J}} = \varphi$ και $g \circ \beta = \mathrm{id}_C$. Άρα οιαδήποτε βραχεία ακριβής ακολουθία (B.14) αυτού τού είδους διασπάται στον όρο B λόγω τού θεωρήματος B.1.28. □

$\boxed{\text{B.2}}$ (ΣΥΝ)ΑΛΥΣΩΤΑ ΣΥΜΠΛΟΚΑ ΚΑΙ ΜΟΔΙΟΙ (ΣΥΝ)ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ

Έστω

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+2}} M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} M_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} \cdots \tag{B.15}$$

μια ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων με κατιόν σύνολο δεικτών. Ως γνωστόν, η (B.15) είναι ακριβής εάν και μόνον εάν

$$[d_n \circ d_{n+1} = 0 \ \text{ και } \ \mathrm{Ker}(d_n) \subseteq \mathrm{Im}(d_{n+1})],\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Η έννοια τού *αλυσωτού συμπλόκου* γενικεύει την έννοια τής ακριβούς ακολουθίας ως εξής:

B.2.1 Ορισμός. Μια ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων τής μορφής (B.15) καλείται **αλυσωτό σύμπλοκο** (ή **ημιακριβής ακολουθία με κατιόν σύνολο δεικτών**) όταν $d_n \circ d_{n+1} = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Για ένα αλυσωτό σύμπλοκο (B.15) εισάγεται η συντομογραφία: $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Οι ομομορφισμοί $d_n^{\mathbf{M}_\bullet} := d_n$, $n \in \mathbb{Z}$, καλούνται ενίοτε **συνοριακοί τελεστές** ή **διαφορικά** τού αλυσωτού συμπλόκου (που είναι όροι κληρονομηθέντες από την κλασική Συνδυαστική Τοπολογία). Στην ειδική περίπτωση όπου οι M_n είναι τετριμμένοι και $d_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, το $\mathbf{M}_\bullet$ συμβολίζεται απλώς ως $\mathbf{0}_\bullet$.

B.2.2 Ορισμός. Έστω $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο τής μορφής (B.15). Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ θέτουμε

$$\boxed{B_n(\mathbf{M}_\bullet) := \mathrm{Im}(d_{n+1})} \quad \text{και} \quad \boxed{Z_n(\mathbf{M}_\bullet) := \mathrm{Ker}(d_n).}$$

Προφανώς, αμφότεροι οι $B_n(\mathbf{M}_\bullet)$ και $Z_n(\mathbf{M}_\bullet)$ είναι υπομόδιοι τού R-μοδίου M_n και $B_n(\mathbf{M}_\bullet) \subseteq Z_n(\mathbf{M}_\bullet)$. Τα στοιχεία τού $B_n(\mathbf{M}_\bullet)$ καλούνται n-**οστά σύνορα** και τα στοιχεία τού $Z_n(\mathbf{M}_\bullet)$ n-**οστά κυκλήματα**[10] τού αλυσωτού συμπλόκου $\mathbf{M}_\bullet$. Ο πηλικομόδιος

$$\boxed{H_n(\mathbf{M}_\bullet) := Z_n(\mathbf{M}_\bullet)/B_n(\mathbf{M}_\bullet)}$$

καλείται n-**οστός μόδιος ομολογίας τού αλυσωτού συμπλόκου** $\mathbf{M}_\bullet$. (Στην περίπτωση όπου $R = \mathbb{Z}$, είθισται να ονομάζεται n-**οστή ομάδα ομολογίας τού** $\mathbf{M}_\bullet$.)

B.2.3 Παρατήρηση. Προφανώς, $H_n(\mathbf{M}_\bullet) = 0_{Z_n(\mathbf{M}_\bullet)/B_n(\mathbf{M}_\bullet)} = B_n(\mathbf{M}_\bullet)$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, εάν και μόνον εάν η ακολουθία (B.15) είναι ακριβής[11]. Ως εκ τούτου, οι μόδιοι ομολογίας μπορούν να εκληφθούν ως εκείνοι οι μόδιοι που εκφράζουν *το πόσο απέχει το αλυσωτό σύμπλοκο* $\mathbf{M}_\bullet$ *από το να είναι ακριβής ακολουθία.*

B.2.4 Ορισμός. Έστω ότι τα

$$\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \quad \cdots \xrightarrow{d_{n+2}} M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots$$

$$\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \quad \cdots \xrightarrow{d'_{n+2}} M'_{n+1} \xrightarrow{d'_{n+1}} M'_n \xrightarrow{d'_n} M'_{n-1} \xrightarrow{d'_{n-1}} \cdots$$

είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα. Μια **απεικόνιση** $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ είναι μια ακολουθία απεικονίσεων $(f_n : M_n \longrightarrow M'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Ως **σύνθεση** $(g \circ f)_\bullet$ δυο απεικονίσεων $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ και $g_\bullet : \mathbf{M}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}''_\bullet$ ορίζεται η $(g_n \circ f_n : M_n \longrightarrow M''_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Μια απεικόνιση αλυσωτών συμπλόκων $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ καλείται **αλυσωτός μετασχηματισμός** όταν για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ η $f_n : M_n \longrightarrow M'_n$ είναι ομομορφισμός R-μοδίων και (ταυτοχρόνως) το κάτωθι διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ M'_n \arrow[r, "d'_n"'] & M'_{n-1} \end{tikzcd}$$

[10] Πρόκειται και πάλι για «παραδοσιακή» ορολογία τοπολογικής προελεύσεως.

[11] Εν τοιαύτη περιπτώσει, $Z_n(\mathbf{M}_\bullet) = B_n(\mathbf{M}_\bullet)$.

B.2.5 Πρόταση. *Εάν $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ και $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα, τότε για κάθε αλυσωτό μετασχηματισμό $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ ισχύει*

$$f_n(Z_n(\mathbf{M}_\bullet)) \subseteq Z_n(\mathbf{M}'_\bullet) \ \ \textit{και} \ \ f_n(B_n(\mathbf{M}_\bullet)) \subseteq B_n(\mathbf{M}'_\bullet), \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Ως εκ τούτου, υπάρχει ένας και μόνον ομομορφισμός R-μοδίων

$$\boxed{H_n(f_\bullet) : H_n(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow H_n(\mathbf{M}'_\bullet),}$$

με την ιδιότητα $\pi^{Z_n(\mathbf{M}'_\bullet)}_{B_n(\mathbf{M}'_\bullet)} \circ f_n|_{Z_n(\mathbf{M}_\bullet)} = H_n(f_\bullet) \circ \pi^{Z_n(\mathbf{M}_\bullet)}_{B_n(\mathbf{M}_\bullet)}$, ήτοι αυτός που ορίζεται από τον τύπο

$$\boxed{H_n(f_\bullet)(x + B_n(\mathbf{M}_\bullet)) := f_n(x) + B_n(\mathbf{M}'_\bullet), \ \forall x \in Z_n(\mathbf{M}_\bullet).}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εξ ορισμού, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
M_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\
M'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & M'_n \arrow[r, "d'_n"'] & M'_{n-1}
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Έστω τυχόν στοιχείο $x \in Z_n(\mathbf{M}_\bullet)$. Προφανώς,

$$\begin{aligned}
&d_n(x) = 0_{M_{n-1}} \Rightarrow d'_n(f_n(x)) = f_{n-1}(d_n(x)) = f_{n-1}(0_{M_{n-1}}) = 0_{M'_{n-1}} \\
&\Rightarrow f_n(x) \in \mathrm{Ker}(d'_n) =: Z_n(\mathbf{M}'_\bullet) \Rightarrow f_n(Z_n(\mathbf{M}_\bullet)) \subseteq Z_n(\mathbf{M}'_\bullet).
\end{aligned}$$

Εξάλλου, για οιοδήποτε στοιχείο $y \in \mathrm{Im}(d_{n+1}) =: B_n(\mathbf{M}_\bullet)$ υπάρχει $z \in M_{n+1}$ με $y = d_{n+1}(z)$, οπότε

$$f_n(y) = f_n(d_{n+1}(z)) = d'_{n+1}(f_{n+1}(z)) \in \mathrm{Im}(d'_{n+1}) =: B_n(\mathbf{M}'_\bullet).$$

Η ύπαρξη, καθώς και ο συγκεκριμένος τύπος ορισμού τού ομομορφισμού $H_n(f_\bullet)$, ο οποίος είναι ο μόνος ομομορφισμός που συμπληρώνει το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
Z_n(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, "f_n|_{Z_n(\mathbf{M}_\bullet)}"] \arrow[d, two heads, "\pi^{Z_n(\mathbf{M}_\bullet)}_{B_n(\mathbf{M}_\bullet)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z_n(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[d, two heads, "\pi^{Z_n(\mathbf{M'}_\bullet)}_{B_n(\mathbf{M'}_\bullet)}"] \\
H_n(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, dashed, "H_n(f_\bullet)"'] & H_n(\mathbf{M'}_\bullet)
\end{tikzcd}$$

καθιστώντας το μεταθετικό, έπεται από το θεώρημα A.4.10. □

B.2.6 Πρόταση. *Εάν $f_\bullet : \mathbf{M}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}_\bullet$, $g_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}''_\bullet$ είναι αλυσωτοί μετασχηματισμοί, όπου $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ και $\mathbf{M}''_\bullet = (M''_n, d''_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, τότε*

$$H_n((g \circ f)_\bullet) = H_n(g_\bullet) \circ H_n(f_\bullet), \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
M'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] \arrow[dd, bend right=60, "(g\circ f)_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'_n \arrow[r, "d'_n"] \arrow[d, "f_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \arrow[dd, bend left=60, "(g\circ f)_{n-1}"] \\
M_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "g_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "g_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_{n-1} \arrow[d, "g_{n-1}"] \\
M''_{n+1} \arrow[r, "d''_{n+1}"'] & M''_n \arrow[r, "d''_n"'] & M''_{n-1}
\end{tikzcd}$$

έπεται ότι

$$\begin{aligned}
&H_n((g\circ f)_\bullet)(x+B_n(\mathbf{M}'_\bullet)) = (g_n\circ f_n)(x)+B_n(\mathbf{M}''_\bullet) \\
&= H_n(g_\bullet)(f_n(x)+B_n(\mathbf{M}_\bullet)) = (H_n(g_\bullet)\circ H_n(f_\bullet))(x+B_n(\mathbf{M}'_\bullet)),
\end{aligned}$$

για κάθε $x\in Z_n(\mathbf{M}'_\bullet)$ και για κάθε $n\in\mathbb{Z}$. □

B.2.7 Πρόταση. *Εάν* $\mathbf{M}_\bullet=(M_n,d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι ένα αλυσωτό σύμπλοκο, τότε*

$$H_n(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet})=\mathrm{id}_{H_n(\mathbf{M}_\bullet)},\ \forall n\in\mathbb{Z},$$

όπου $\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}:\mathbf{M}_\bullet\longrightarrow\mathbf{M}_\bullet$ *ο ταυτοτικός*[12] *αλυσωτός μετασχηματισμός.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε $x\in Z_n(\mathbf{M}_\bullet)$ έχουμε

$$H_n(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet})(x+B_n(\mathbf{M}_\bullet))=\mathrm{id}_{M_n}(x)+B_n(\mathbf{M}_\bullet)=\mathrm{id}_{H_n(\mathbf{M}_\bullet)}(x+B_n(\mathbf{M}_\bullet)),$$

οπότε πράγματι $H_n(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet})=\mathrm{id}_{H_n(\mathbf{M}_\bullet)}$ για κάθε $n\in\mathbb{Z}$. □

B.2.8 Ορισμός. Εάν $(\mathbf{M}_{j,\bullet}=(M_{j,n},d_{j,n})_{n\in\mathbb{Z}})_{j\in J}$ είναι μια οικογένεια αλυσωτών συμπλόκων, τότε τόσον το

$$\bigoplus_{j\in J}\mathbf{M}_{j,\bullet}:=(\bigoplus_{j\in J}M_{j,n},\bigoplus_{j\in J}d_{j,n})_{n\in\mathbb{Z}}\ \text{ όσον και το }\ \prod_{j\in J}\mathbf{M}_{j,\bullet}:=(\prod_{j\in J}M_{j,n},\prod_{j\in J}d_{j,n})_{n\in\mathbb{Z}}$$

είναι αλυσωτά σύμπλοκα. Το μεν πρώτο καλείται **ευθύ άθροισμα**, το δε δεύτερο **ευθύ γινόμενο** των μελών τής εν λόγω οικογενείας.

B.2.9 Πρόταση. *Εάν* $(\mathbf{M}_{j,\bullet}=(M_{j,n},d_{j,n})_{n\in\mathbb{Z}})_{j\in J}$ *είναι μια οικογένεια αλυσωτών συμπλόκων, τότε υφίστανται ισομορφισμοί*

$$\boxed{H_n(\bigoplus_{j\in J}\mathbf{M}_{j,\bullet})\xrightarrow{\ \cong\ }\bigoplus_{j\in J}H_n(\mathbf{M}_{j,\bullet})}$$

---

[12] $\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}:=(\mathrm{id}_{M_n}:M_n\longrightarrow M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

και

$$\boxed{H_n(\prod_{j\in J}\mathbf{M}_{j,\bullet}) \xrightarrow{\cong} \prod_{j\in J} H_n(\mathbf{M}_{j,\bullet})}$$

καθοριζόμενοι μέσω των τύπων

$$(x_j)_{j\in J} + \left(\bigoplus_{j\in J}\mathrm{Im}(d_{j,n+1})\right) \longmapsto (x_j + \mathrm{Im}(d_{j,n+1}))_{j\in J}$$

και

$$(x_j)_{j\in J} + \left(\prod_{j\in J}\mathrm{Im}(d_{j,n+1})\right) \longmapsto (x_j + \mathrm{Im}(d_{j,n+1}))_{j\in J}\,.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή $Z_n(\bigoplus_{j\in J}\mathbf{M}_{j,\bullet}) = \mathrm{Ker}\left(\bigoplus_{j\in J} d_{j,n}\right) = \bigoplus_{j\in J}\mathrm{Ker}(d_{j,n})$ και

$$B_n(\bigoplus_{j\in J}\mathbf{M}_{j,\bullet}) = \mathrm{Im}\left(\bigoplus_{j\in J} d_{j,n+1}\right) = \bigoplus_{j\in J}\mathrm{Im}\,(d_{j,n+1})$$

(βλ. A.5.23), έχουμε

$$H_n(\bigoplus_{j\in J}\mathbf{M}_{j,\bullet}) = Z_n(\bigoplus_{j\in J}\mathbf{M}_{j,\bullet})/B_n(\bigoplus_{j\in J}\mathbf{M}_{j,\bullet}) = \bigoplus_{j\in J}\mathrm{Ker}\,(d_{j,n}) \,/\, \bigoplus_{j\in J}\mathrm{Im}\,(d_{j,n+1})\,.$$

Μέσω τής προτάσεως A.5.24 ορίζεται ο ισομορφισμός

$$\bigoplus_{j\in J}\mathrm{Ker}\,(d_{j,n}) \,/\, \bigoplus_{j\in J}\mathrm{Im}\,(d_{j,n+1}) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{j\in J}(\mathrm{Ker}\,(d_{j,n}) \,/\, \mathrm{Im}\,(d_{j,n+1}))$$

$$(x_j)_{j\in J} + \left(\bigoplus_{j\in J}\mathrm{Im}(d_{j,n+1})\right) \longmapsto (x_j + \mathrm{Im}(d_{j,n+1}))_{j\in J}\,,$$

όπου $\bigoplus_{j\in J}(\mathrm{Ker}\,(d_{j,n}) \,/\, \mathrm{Im}\,(d_{j,n+1})) = \bigoplus_{j\in J}(Z_n(\mathbf{M}_{j,\bullet})/B_n(\mathbf{M}_{j,\bullet})) = \bigoplus_{j\in J} H_n(\mathbf{M}_{j,\bullet})$. Η αντίστοιχη απόδειξη για το ευθύ γινόμενο είναι πανομοιότυπη. □

B.2.10 Ορισμός. Μια ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων και αλυσωτών μετασχηματισμών τής μορφής

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathbf{M}_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathbf{M}''_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet,$$

όπου $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ και $\mathbf{M}''_\bullet = (M''_n, d''_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, καλείται **βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων** όταν η

$$\{0\} \longrightarrow M'_n \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{g_n} M''_n \longrightarrow \{0\}$$

είναι βραχεία ακριβής ακολουθία (υπό την έννοια τού εδ. B.1.2 (iii)), $\forall n\in\mathbb{Z}$.

Β.2.11 Λήμμα. *Δοθέντων τριών αλυσωτών συμπλόκων*

$$\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}},\ \mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}\ \text{και}\ \mathbf{M}''_\bullet = (M''_n, d''_n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

και μιας βραχείας ακριβούς ακολουθίας $\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathbf{M}_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathbf{M}''_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet$, *η*

$$H_n(\mathbf{M}'_\bullet) \xrightarrow{\ H_n(f_\bullet)\ } H_n(\mathbf{M}_\bullet) \xrightarrow{\ H_n(g_\bullet)\ } H_n(\mathbf{M}''_\bullet)$$

είναι ακριβής για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το μεταθετικό διάγραμμα (με ακριβείς στήλες)

$$\begin{tikzcd}
 & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & M'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'_n \arrow[r, "d'_n"] \arrow[d, "f_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & M_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "g_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "g_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & M''_{n+1} \arrow[r, "d''_{n+1}"'] \arrow[d] & M''_n \arrow[r, "d''_n"'] \arrow[d] & M''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \{0\} & \{0\} & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

(i) $H_n(g_\bullet) \circ H_n(f_\bullet) = 0$. Για κάθε $x \in Z_n(\mathbf{M}'_\bullet)$ έχουμε

$$(H_n(g_\bullet) \circ H_n(f_\bullet))(x + B_n(\mathbf{M}'_\bullet)) = H_n((g \circ f)_\bullet)(x + B_n(\mathbf{M}'_\bullet))$$
$$= (\underbrace{g_n \circ f_n}_{=0})(x) + B_n(\mathbf{M}''_\bullet) = B_n(\mathbf{M}''_\bullet) = 0_{H_n(\mathbf{M}''_\bullet)}.$$

(ii) $\mathrm{Ker}(H_n(g_\bullet)) \subseteq \mathrm{Im}(H_n(f_\bullet))$. Για κάθε στοιχείο $y \in Z_n(\mathbf{M}_\bullet)$ για το οποίο ισχύει $y + B_n(\mathbf{M}_\bullet) \in \mathrm{Ker}(H_n(g_\bullet))$ έχουμε

$$H_n(g_\bullet)(y + B_n(\mathbf{M}_\bullet)) = B_n(\mathbf{M}''_\bullet) \Rightarrow g_n(y) \in B_n(\mathbf{M}''_\bullet) = \mathrm{Im}(d''_{n+1}),$$

οπότε

$$\left.\begin{array}{l} \exists z \in M''_{n+1} : g_n(y) = d''_{n+1}(z) \\ \mathrm{Im}(g_{n+1}) = M''_{n+1} \Rightarrow [\exists w \in M_{n+1} : g_{n+1}(w) = z] \end{array}\right\} \Rightarrow (\underbrace{d''_{n+1} \circ g_{n+1}}_{=g_n \circ d_{n+1}})(w) = g_n(y)$$

και, ως εκ τούτου,

$$y - d_{n+1}(w) \in \mathrm{Ker}(g_n) = \mathrm{Im}(f_n) \Rightarrow [\exists x \in M'_n : f_n(x) = y - d_{n+1}(w)]$$
$$\Rightarrow f_n(x) + B_n(\mathbf{M}_\bullet) = (y - \underbrace{d_{n+1}(w)}_{\in B_n(\mathbf{M}_\bullet)}) + B_n(\mathbf{M}_\bullet) = y + B_n(\mathbf{M}_\bullet).$$

Επιπροσθέτως, επειδη $y \in Z_n(\mathbf{M}_\bullet) := \mathrm{Ker}(d_n)$, έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} f_n(x) = y - d_{n+1}(w) \Rightarrow f_{n-1}(d'_n(x)) = d_n(f_n(x)) \\ = d_n(y) - \underbrace{(d_n \circ d_{n+1})}_{=0}(w) = d_n(y) = 0_{M_{n-1}} \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(f_{n-1} \circ d'_n), \\ \mathrm{Ker}(f_{n-1}) = \{0_{M'_{n-1}}\} \Rightarrow \mathrm{Ker}(f_{n-1} \circ d'_n) \subseteq \mathrm{Ker}(d'_n) =: Z_n(\mathbf{M}'_\bullet) \end{array}\right\} \Rightarrow x \in Z_n(\mathbf{M}'_\bullet).$$

Αυτό σημαίνει ότι $y + B_n(\mathbf{M}_\bullet) = H_n(f_\bullet)(x + B_n(\mathbf{M}'_\bullet)) \in \mathrm{Im}(H_n(f_\bullet))$. □

B.2.12 Θεώρημα. (Κατασκευή μακράς ακριβούς ακολουθίας ομολογίας) *Δοθέντων τριών αλυσωτών συμπλόκων*

$$\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}},\ \mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}} \ \textit{και}\ \mathbf{M}''_\bullet = (M''_n, d''_n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

και μιας βραχείας ακριβούς ακολουθίας

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathbf{M}_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathbf{M}''_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet, \tag{B.16}$$

υφίσταται για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ένας ομομορφισμός R-μοδίων

$$\partial_n : H_n(\mathbf{M}''_\bullet) \longrightarrow H_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet)$$

(*ο λεγόμενος* ***συνδετικός ομομορφισμός*** *για την* (B.16)), *μέσω τού οποίου επάγεται μια ακριβής ακολουθία*

$$\begin{array}{l} \cdots \longrightarrow H_{n+1}(\mathbf{M}'_\bullet) \xrightarrow{H_{n+1}(f_\bullet)} H_{n+1}(\mathbf{M}_\bullet) \xrightarrow{H_{n+1}(g_\bullet)} H_{n+1}(\mathbf{M}''_\bullet) \\ \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(\mathbf{M}'_\bullet) \xrightarrow{H_n(f_\bullet)} H_n(\mathbf{M}_\bullet) \xrightarrow{H_n(g_\bullet)} H_n(\mathbf{M}''_\bullet) \\ \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \xrightarrow{H_{n-1}(f_\bullet)} \cdots \end{array}$$

(*η λεγόμενη* ***μακρά ακριβής ακολουθία ομολογίας*** *για την* (B.16)).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Το ότι η ανωτέρω ακολουθία είναι ακριβής στη θέση $H_n(\mathbf{M}_\bullet)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχει αποδειχθεί στο λήμμα B.2.11. Αρκεί λοιπόν να κατασκευασθεί ο ∂_n και να ελεγχθεί η ακρίβεια στις θέσεις $H_n(\mathbf{M}''_\bullet)$ και $H_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.
(ii) Εισάγονται οι συντομογραφίες $N_n := \mathrm{Coker}(d_{n+1})\ (= M_n/B_n(\mathbf{M}_\bullet))$,

$$N'_n := \mathrm{Coker}(d'_{n+1})\ (= M'_n/B_n(\mathbf{M}'_\bullet)) \ \text{και}\ N''_n := \mathrm{Coker}(d''_{n+1})\ (= M''_n/B_n(\mathbf{M}''_\bullet)).$$

Επειδή τα $\mathbf{M}_\bullet$, $\mathbf{M}'_\bullet$ και $\mathbf{M}''_\bullet$ είναι αλυσωτά σύμπλοκα, έχουμε

$$B_n(\mathbf{M}_\bullet) \subseteq Z_n(\mathbf{M}_\bullet),\ B_n(\mathbf{M}'_\bullet) \subseteq Z_n(\mathbf{M}'_\bullet)) \ \text{και}\ B_n(\mathbf{M}''_\bullet) \subseteq Z_n(\mathbf{M}''_\bullet),$$

οπότε μέσω τής προτάσεως A.4.6 διασφαλίζεται η ύπαρξη μοναδικών ομομορφισμών $\widetilde{d}_n, \widetilde{d}'_n$ και $\widetilde{d}''_n$ που καθιστούν το κάτωθι διάγραμμα και τα αντίστοιχα διαγράμματα με τόνους και τους δίστονους μεταθετικά.

$$\begin{tikzcd} & M_n \arrow[dl, "\pi^{M_n}_{B_n(\mathbf{M}_\bullet)}"'] \arrow[dr, "d_n"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ N_n \arrow[rr, dashed, "\widetilde{d}_n"'] & {} & Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \subseteq M_{n-1} \end{tikzcd}$$

Συγκεκριμένα, $\widetilde{d}_n(x + B_n(\mathbf{M}_\bullet)) := d_n(x)$, $\widetilde{d}'_n(x' + B_n(\mathbf{M}'_\bullet)) := d'_n(x')$ και

$$\widetilde{d}''_n(x'' + B_n(\mathbf{M}''_\bullet)) := d''_n(x''),\ \forall (x, x', x'') \in Z_n(\mathbf{M}_\bullet) \times Z_n(\mathbf{M}'_\bullet) \times Z_n(\mathbf{M}''_\bullet),$$

με $\mathrm{Im}(\widetilde{d}_n) = \mathrm{Im}(d_n)$, $\mathrm{Im}(\widetilde{d}'_n) = \mathrm{Im}(d'_n)$ και $\mathrm{Im}(\widetilde{d}''_n) = \mathrm{Im}(d''_n)$.

(iii) Κατά το πόρισμα B.1.11 (και λόγω τής ακριβείας τής (B.16)) κατασκευάζεται το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & Z_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[r, "\overline{f_{n-1}}"] \arrow[d, "\iota_{d'_{n-1}}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, "\overline{g_{n-1}}"] \arrow[d, "\iota_{d_{n-1}}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet) \arrow[d, "\iota_{d''_{n-1}}"'] & \\ \{0\} \arrow[r] & M'_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"'] & M_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"'] & M''_{n-1} \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

που έχει την κάτω του γραμμή ακριβή. Θα αποδείξουμε ότι η εξ αριστερών συμπληρωμένη άνω του γραμμή

$$\{0\} \longrightarrow Z_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \overset{\overline{f_{n-1}}}{\longrightarrow} Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \overset{\overline{g_{n-1}}}{\longrightarrow} Z_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet) \tag{B.17}$$

είναι ωσαύτως ακριβής.

(a) Επειδή η $\iota_{d_{n-1}} \circ \overline{f_{n-1}} = f_{n-1} \circ \iota_{d'_{n-1}}$ (ως σύνθεση των μονομορφισμών $\iota_{d'_{n-1}}$ και f_{n-1}) είναι μονομορφισμός και η $\iota_{d_{n-1}}$ είναι μονομορφισμός, *και η ίδια* η $\overline{f_{n-1}}$ οφείλει να είναι μονομορφισμός.

(b) Έστω τυχόν στοιχείο $y \in \mathrm{Im}(\overline{g_{n-1}} \circ \overline{f_{n-1}})$. Επειδή

$$\exists x \in Z_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) : y = (\overline{g_{n-1}} \circ \overline{f_{n-1}})(x)$$

και $\iota_{d''_{n-1}}(y) \in M''_{n-1} = \mathrm{Im}(g_{n-1})$, υπάρχει $z \in M_{n-1}$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned} g_{n-1}(z) &= \iota_{d''_{n-1}}(y) = (\iota_{d''_{n-1}} \circ \overline{g_{n-1}})(\overline{f_{n-1}}(x)) = (g_{n-1} \circ \iota_{d_{n-1}})(\overline{f_{n-1}}(x)) \\ &= g_{n-1}((\iota_{d_{n-1}} \circ \overline{f_{n-1}})(x)) = g_{n-1}((f_{n-1} \circ \iota_{d'_{n-1}})(x)) = (\underbrace{(g_{n-1} \circ f_{n-1})}_{=0} \circ \iota_{d'_{n-1}})(x) = 0_{Z_n(\mathbf{M}'_\bullet)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y \in \mathrm{Ker}(\iota_{d''_{n-1}}) = \{0_{Z_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet)}\} \Rightarrow y = 0_{Z_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet)} = 0_{M''_{n-1}}.$$

Κατά συνέπειαν, $\overline{g_{n-1}} \circ \overline{f_{n-1}} = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(\overline{f_{n-1}}) \subseteq \mathrm{Ker}(\overline{g_{n-1}})$. Και αντιστρόφως· εάν $x \in \mathrm{Ker}(\overline{g_{n-1}})$, τότε

$$\begin{aligned}
& 0_{M''_{n-1}} = \iota_{d''_{n-1}}(0_{M''_{n-1}}) = \iota_{d''_{n-1}}(\overline{g_{n-1}}(x)) = (\iota_{d''_{n-1}} \circ \overline{g_{n-1}})(x) \\
& = (g_{n-1} \circ \iota_{d_{n-1}})(x) = g_{n-1}(\iota_{d_{n-1}}(x)) \\
& \Rightarrow \iota_{d_{n-1}}(x) \in \mathrm{Ker}(g_{n-1}) = \mathrm{Im}(f_{n-1}) \Rightarrow [\exists y \in M'_{n-1} : \iota_{d_{n-1}}(x) = f_{n-1}(y)] \\
& \Rightarrow (f_{n-2} \circ d'_{n-1})(y) = (d_{n-1} \circ f_{n-1})(y) = d_{n-1}(f_{n-1}(y)) \\
& = d_{n-1}(\iota_{d_{n-1}}(x)) = \underbrace{(d_{n-1} \circ \iota_{d_{n-1}})}_{=0}(x) = 0_{M_{n-2}} \\
& \Rightarrow d'_{n-1}(y) \in \mathrm{Ker}(f_{n-2}) = \{0_{M'_{n-2}}\} \Rightarrow d'_{n-1}(y) = 0_{M'_{n-2}} \\
& \Rightarrow y \in \mathrm{Ker}(d'_{n-1}) = \mathrm{Im}(\iota_{d'_{n-1}}) \Rightarrow [\exists x' \in \mathrm{Ker}(d'_{n-1}) : y = \iota_{d'_{n-1}}(x')] \\
& \Rightarrow \iota_{d_{n-1}}(x) = f_{n-1}(y) = (f_{n-1} \circ \iota_{d'_{n-1}})(x') = (\iota_{d_{n-1}} \circ \overline{f_{n-1}})(x') \\
& \Rightarrow x - \overline{f_{n-1}}(x') \in \mathrm{Ker}(\iota_{d_{n-1}}) = \{0_{M_{n-1}}\} \Rightarrow x = \overline{f_{n-1}}(x') \in \mathrm{Im}(\overline{f_{n-1}}),
\end{aligned}$$

οπότε ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός $\mathrm{Ker}(\overline{g_{n-1}}) \subseteq \mathrm{Im}(\overline{f_{n-1}})$.

(iv) Κατά το πόρισμα B.1.14 (και λόγω τής ακριβείας τής (B.16)) κατασκευάζεται το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & M'_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, two heads, "\pi^{M'_n}_{\mathrm{Im}(d'_{n+1})}"'] & M_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, two heads, "\pi^{M_n}_{\mathrm{Im}(d_{n+1})}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M''_n \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\pi^{M''_n}_{\mathrm{Im}(d''_{n+1})}"] & \{0\} \\
& N'_n \arrow[r, "\underline{f_n}"'] & N_n \arrow[r, "\underline{g_n}"'] & N''_n &
\end{tikzcd}$$

που έχει την άνω του γραμμή ακριβή. Θα αποδείξουμε ότι η εκ δεξιών συμπληρωμένη κάτω του γραμμή

$$N'_n \xrightarrow{\underline{f_n}} N_n \xrightarrow{\underline{g_n}} N''_n \longrightarrow \{0\} \tag{B.18}$$

είναι ωσαύτως ακριβής.

(a) Επειδή η $\underline{g_n} \circ \pi^{M_n}_{\mathrm{Im}(d_{n+1})} = \pi^{M''_n}_{\mathrm{Im}(d''_{n+1})} \circ g_n$ (ως σύνθεση των επιμορφισμών g_n και $\pi^{M''_n}_{\mathrm{Im}(d''_{n+1})}$) είναι επιμορφισμός και η $\pi^{M_n}_{\mathrm{Im}(d_{n+1})}$ είναι επιμορφισμός, *και η ίδια* η $\underline{g_n}$ οφείλει να είναι επιμορφισμός.

(b) Έστω τυχόν στοιχείο $x \in N'_n$. Επειδή η $\pi^{M'_n}_{\mathrm{Im}(d'_{n+1})}$ είναι επιρριπτική,

$$\exists z \in M'_n : \pi^{M'_n}_{\mathrm{Im}(d'_{n+1})}(z) = z + \mathrm{Im}(d'_{n+1}) = x,$$

οπότε

$$\begin{aligned}(\underline{g_n} \circ \underline{f_n})(x) &= (\underline{g_n} \circ (\underline{f_n} \circ \pi^{M'_n}_{\mathrm{Im}(d'_{n+1})}))(z) = (\underline{g_n} \circ (\pi^{M_n}_{\mathrm{Im}(d_{n+1})} \circ f_n))(z) \\ &= ((\underline{g_n} \circ \pi^{M_n}_{\mathrm{Im}(d_{n+1})}) \circ f_n)(z) = ((\pi^{M''_n}_{\mathrm{Im}(d''_{n+1})} \circ g_n) \circ f_n)(z) \\ &= (\pi^{M''_n}_{\mathrm{Im}(d''_{n+1})} \circ \underbrace{(g_n \circ f_n)}_{=0})(z) = 0_{N'_n} \Rightarrow \underline{g_n} \circ \underline{f_n} = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(\underline{f_n}) \subseteq \mathrm{Ker}(\underline{g_n}).\end{aligned}$$

Και αντιστρόφως· εάν $x \in \mathrm{Ker}(\underline{g_n})$, τότε (επειδή η $\pi^{M_n}_{\mathrm{Im}(d_{n+1})}$ είναι επιρριπτική) έχουμε $x = \pi^{M_n}_{\mathrm{Im}(d_{n+1})}(y)$ για κάποιο στοιχείο $y \in M_n$, οπότε

$$\begin{aligned}&0_{N_n} = \underline{g_n}(x) = (\underline{g_n} \circ \pi^{M_n}_{\mathrm{Im}(d_{n+1})})(y) = (\pi^{M''_n}_{\mathrm{Im}(d''_{n+1})} \circ g_n)(y) \\ &\Rightarrow g_n(y) \in \mathrm{Ker}(\pi^{M''_n}_{\mathrm{Im}(d''_{n+1})}) = \mathrm{Im}(d''_{n+1}) \\ &\Rightarrow [\exists w \in M''_{n+1} : d''_{n+1}(w) = g_n(y)] \underset{\mathrm{Im}(g_{n+1})=M''}{\Longrightarrow} [\exists u \in M_{n+1} : w = g_{n+1}(u)] \\ &\Rightarrow [\exists u \in M_{n+1} : d''_{n+1}(w) = d''_{n+1}(g_{n+1}(u)) = g_n(d_{n+1}(u))] \Rightarrow g_n(y) = g_n(d_{n+1}(u)) \\ &\Rightarrow y - d_{n+1}(u) \in \mathrm{Ker}(g_n) = \mathrm{Im}(f_n) \Rightarrow [\exists v \in M'_n : y - d_{n+1}(u) = f_n(v)] \\ &\Rightarrow \pi^{M_n}_{\mathrm{Im}(d_{n+1})}(y) - \underbrace{(\pi^{M_n}_{\mathrm{Im}(d_{n+1})} \circ d_{n+1})}_{=0}(u) = (\pi^{M_n}_{\mathrm{Im}(d_{n+1})} \circ f_n)(v) = (\underline{f_n} \circ \pi^{M'_n}_{\mathrm{Im}(d'_{n+1})})(v) \\ &\Rightarrow x = \pi^{M_n}_{\mathrm{Im}(d_{n+1})}(y) = \underline{f_n}(\pi^{M'_n}_{\mathrm{Im}(d'_{n+1})}(v)) \in \mathrm{Im}(\underline{f_n}) \Rightarrow \mathrm{Ker}(\underline{g_n}) \subseteq \mathrm{Im}(\underline{f_n}).\end{aligned}$$

(v) Τοποθετώντας τήν (B.18) υπεράνω τής (B.17) και χρησιμοποιώντας τούς συνδέοντες ομομορφισμούς $\widetilde{d}_n, \widetilde{d}'_n$ και $\widetilde{d}''_n$ (τους ορισθέντες στο (i)) λαμβάνουμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & N'_n \arrow[r, "\underline{f_n}"] \arrow[d, "\widetilde{d}'_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N_n \arrow[r, "\underline{g_n}"] \arrow[d, "\widetilde{d}_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N''_n \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{d}''_n"] & \{0\} \\ \{0\} \arrow[r] & Z_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[r, "\overline{f_{n-1}}"'] & Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, "\overline{g_{n-1}}"'] & Z_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet) & \end{tikzcd} \quad \text{(B.19)}$$

(με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς), το οποίο είναι μεταθετικό, διότι για κάθε $z \in M'_n$ έχουμε

$$\begin{aligned}&\widetilde{d}_n(\underline{f_n}(z + B_n(\mathbf{M}'_\bullet))) = \widetilde{d}_n(f_n(z) + B_n(\mathbf{M}_\bullet)) = d_n(f_n(z)) \\ &= f_{n-1}(\underbrace{d'_n(z)}_{\in B_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet)}) \underset{\text{B.1.11}}{=} \overline{f_{n-1}}(d'_n(z)) = \overline{f_{n-1}}(\widetilde{d}'_n(z + B_n(\mathbf{M}'_\bullet)))\end{aligned}$$

και για κάθε $w \in M_n$ έχουμε

$$\begin{aligned}&\widetilde{d}''_n(\underline{g_n}(w + B_n(\mathbf{M}_\bullet))) = \widetilde{d}''_n(g_n(w) + B_n(\mathbf{M}''_\bullet)) = d''_n(g_n(w)) \\ &= g_{n-1}(\underbrace{d_n(w)}_{\in B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)}) \underset{\text{B.1.11}}{=} \overline{g_{n-1}}(d_n(w)) = \overline{g_{n-1}}(\widetilde{d}_n(w + B_n(\mathbf{M}_\bullet))).\end{aligned}$$

(vi) Εφαρμόζοντας το λήμμα τού φιδιού B.1.19 για το διάγραμμα (B.19) λαμβάνουμε έναν οφιοειδή συνδετικό ομομορφισμό $\partial_n : \mathrm{Ker}(\widetilde{d''_n}) \longrightarrow \mathrm{Coker}(\widetilde{d'_n})$.

$$\begin{tikzcd}
 & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \\
 & \mathrm{Ker}(\widetilde{d'_n}) \arrow[r] \arrow[d, "\iota_{\widetilde{d'_n}}"'] & \mathrm{Ker}(\widetilde{d_n}) \arrow[r] \arrow[d, "\iota_{\widetilde{d_n}}"'] & \mathrm{Ker}(\widetilde{d''_n}) \arrow[d, "\iota_{\widetilde{d''_n}}"'] \arrow[dddll, bend left, "\partial_n"] & \\
 & N'_n \arrow[r, "\underline{f_n}"] \arrow[d, "\widetilde{d'_n}"'] & N_n \arrow[r, "\underline{g_n}"] \arrow[d, "\widetilde{d_n}"'] & N''_n \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{d''_n}"'] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & Z_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[r, "\overline{f_{n-1}}"] \arrow[d, "\pi^{Z_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet)}_{\mathrm{Im}(\widetilde{d'_n})}"'] & Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, "\overline{g_{n-1}}"] \arrow[d, "\pi^{Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)}_{\mathrm{Im}(\widetilde{d_n})}"'] & Z_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet) \arrow[d, "\pi^{Z_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet)}_{\mathrm{Im}(\widetilde{d''_n})}"'] & \\
 & \mathrm{Coker}(\widetilde{d'_n}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Coker}(\widetilde{d_n}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Coker}(\widetilde{d''_n}) \arrow[d] & \\
 & \{0\} & \{0\} & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

(vii) Ταυτίζουμε τους πυρήνες και τους συμπυρήνες που περιλαμβάνονται στο ανωτέρω διάγραμμα με τους επιθυμητούς μοδίους ομολογίας ως εξής:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(\widetilde{d_n}) &= \left\{ x + B_n(\mathbf{M}_\bullet) \in N_n \,\middle|\, x \in M_n \ \text{και} \ \widetilde{d_n}(x + B_n(\mathbf{M}_\bullet)) = 0_{M_{n-1}} \right\} \\
&= \left\{ x + B_n(\mathbf{M}_\bullet) \in N_n \,|\, x \in M_n \ \text{και} \ d_n(x) = 0_{M_{n-1}} \right\} \\
&= \left\{ x + B_n(\mathbf{M}_\bullet) \in N_n \,|\, x \in M_n \ \text{και} \ x \in \ \mathrm{Ker}(d_n) \, (=: Z_n(\mathbf{M}_\bullet)) \right\} \\
&= Z_n(\mathbf{M}_\bullet)/B_n(\mathbf{M}_\bullet) = H_n(\mathbf{M}_\bullet)
\end{aligned}$$

και $\mathrm{Coker}(\widetilde{d_n}) = Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)/\operatorname{Im}(\widetilde{d_n}) \overset{\text{(i)}}{=} Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)/\operatorname{Im}(d_n) = H_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)$. Κατ' αναλογίαν, δείχνεται ότι

$$\begin{gathered}
\mathrm{Ker}(\widetilde{d'_n}) = H_n(\mathbf{M}'_\bullet), \ \mathrm{Ker}(\widetilde{d''_n}) = H_n(\mathbf{M}''_\bullet) \ \text{και} \\
\mathrm{Coker}(\widetilde{d'_n}) = H_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet), \ \mathrm{Coker}(\widetilde{d''_n}) = H_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet).
\end{gathered}$$

(viii) Το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
H_n(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[r, dashed, "H_n(f_\bullet)"] \arrow[d, hook, "\iota_{\widetilde{d'_n}}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_n(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, dashed, "H_n(g_\bullet)"] \arrow[d, hook, "\iota_{\widetilde{d_n}}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_n(\mathbf{M}''_\bullet) \arrow[d, hook, "\iota_{\widetilde{d''_n}}"'] \\
N'_n \arrow[r, "\underline{f_n}"'] & N_n \arrow[r, "\underline{g_n}"'] & N''_n
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, διότι για κάθε $\xi \in Z_n(\mathbf{M}'_\bullet)$ έχουμε

$$\begin{aligned} &\iota_{\widetilde{d}_n}(H_n(f_\bullet)(\xi + B_n(\mathbf{M}'_\bullet))) = H_n(f_\bullet)(\xi + \mathrm{Im}(d'_{n+1})) \\ = f_n(\xi) + \mathrm{Im}(d_{n+1}) = \underline{f_n}(\xi + \mathrm{Im}(d'_{n+1})) &= \underline{f_n}(\iota_{\widetilde{d}'_n}(\xi + B_n(\mathbf{M}'_\bullet))) \end{aligned}$$

και για κάθε $\nu \in Z_n(\mathbf{M}_\bullet)$ έχουμε

$$\begin{aligned} H_n(g_\bullet)(\iota_{\widetilde{d}''_n}(\nu + B_n(\mathbf{M}_\bullet))) &= H_n(g_\bullet)(\nu + \mathrm{Im}(d_{n+1})) \\ g_n(\nu) + \mathrm{Im}(d''_{n+1}) = \underline{g_n}(\nu + \mathrm{Im}(d_{n+1})) &= \underline{g_n}(\iota_{\widetilde{d}_n}(\nu + B_n(\mathbf{M}_\bullet))). \end{aligned}$$

Παρομοίως αποδεικνύεται ότι *και* το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} Z_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[r, "\overline{f_{n-1}}"] \arrow[d, two heads, "\pi^{Z_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet)}_{\mathrm{Im}(\widetilde{d}'_n)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, "\overline{g_{n-1}}"] \arrow[d, two heads, "\pi^{Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)}_{\mathrm{Im}(\widetilde{d}_n)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet) \arrow[d, two heads, "\pi^{Z_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet)}_{\mathrm{Im}(\widetilde{d}''_n)}"] \\ H_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[r, dashed, "H_{n-1}(f_\bullet)"'] & H_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, dashed, "H_{n-1}(g_\bullet)"'] & H_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet) \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Από την ιδιότητα *τής μοναδικότητας* (των ομομορφισμών συμπληρώσεως, βλ. πορίσματα B.1.11 και B.1.14) συμπεραίνουμε ότι οι $H_n(f_\bullet), H_n(g_\bullet)$ (και αντιστοίχως, οι $H_{n-1}(f_\bullet), H_{n-1}(g_\bullet)$) είναι αυτοί οι ομομορφισμοί που οφείλουν να εγγραφούν στην 2η (και αντιστοίχως, στην 4η) γραμμή τού διαγράμματος τού παρατεθέντος στο (vi). Κατ' αυτόν τον τρόπο οδηγούμεθα στον πλήρη σχηματισμό τής *μακράς ακριβούς ακολουθία ομολογίας* για την (B.16). □

B.2.13 Παρατήρηση. Παρότι ο ∂_n καθορίζεται *μέχρις ενός ισομορφισμού* $\mathrm{Coker}(H_n(g_\bullet)) \cong \mathrm{Ker}(H_{n-1}(f_\bullet))$ (πρβλ. (B.7)), ο πλέον «φυσικός» τύπος ορισμού του είναι ο αυτός που εδόθη στο εδάφιο B.1.20 (i): Εάν $y \in Z_n(\mathbf{M}''_\bullet)$, τότε

$$\exists x \in M_n : y + B_n(\mathbf{M}''_\bullet) = \underline{g_n}(x + B_n(\mathbf{M}_\bullet)) = g_n(x) + B_n(\mathbf{M}''_\bullet)$$

και $\widetilde{d}_n\,(x + B_n(\mathbf{M}_\bullet)) \in \mathrm{Im}(\overline{f_{n-1}})$, όπου $\overline{f_{n-1}}^{\,-1}(\{\widetilde{d}_n\,(x + B_n(\mathbf{M}_\bullet))\}) = \{z\}$ (ένα *μονοσύνολο* ανήκον στο $Z_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \subseteq M'_{n-1}$). Αρκεί λοιπόν να θέσουμε

$$\boxed{\partial_n\,(y + B_n(\mathbf{M}''_\bullet)) := z + B_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet).} \tag{B.20}$$

B.2.14 Ορισμός. Έστω $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο. Εάν για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ το M'_n παριστά έναν υπομόδιο τού M_n και ισχύει ο εγκλεισμός $d_n(M'_n) \subseteq M'_{n-1}$, τότε το αλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d_n|_{M'_n})_{n\in\mathbb{Z}}$ ονομάζεται **υποσύμπλοκο τού** $\mathbf{M}_\bullet$, ενώ το αλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{M}_\bullet/\mathbf{M}'_\bullet = (M_n/M'_n, d_n^{\text{πηλ.}})_{n\in\mathbb{Z}}$, όπου $d_n^{\text{πηλ.}}$ είναι ο μονοσημάντως ορισμένος ομομορφισμός R-μοδίων που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, two heads, "\pi^{M_n}_{M'_n}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_{n-1} \arrow[d, two heads, "\pi^{M_{n-1}}_{M'_{n-1}}"] \\ M_n/M'_n \arrow[r, "d_n^{\text{πηλ.}}"'] & M_{n-1}/M'_{n-1} \end{tikzcd}$$

μεταθετικό (βλ. A.4.10 και A.4.11), καλείται **πηλικοσύμπλοκο τού $\mathbf{M}_\bullet$ ως προς το $\mathbf{M}'_\bullet$**.

B.2.15 Σημείωση. Εάν $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d_n|_{M'_n})_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι ένα υποσύμπλοκο ενός αλυσωτού συμπλόκου $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, τότε η βραχεία ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow M'_n \overset{\iota_n}{\hookrightarrow} M_n \overset{\pi_n}{\twoheadrightarrow} M_n/M'_n \longrightarrow \{0\}$$

(όπου ι_n η συνήθης ένθεση και $\pi_n := \pi^{M_n}_{M'_n}$) είναι ακριβής για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, οπότε προκύπτει μια βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet \xrightarrow{\iota_\bullet} \mathbf{M}_\bullet \xrightarrow{\pi_\bullet} \mathbf{M}_\bullet/\mathbf{M}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet.$$

Μέσω αυτής επάγεται (σύμφωνα με το θεώρημα B.2.12) *η μακρά ακολουθία ομολογίας*

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_{n+1}(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[r, "H_{n+1}(\iota_\bullet)"] & H_{n+1}(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, "H_{n+1}(\pi_\bullet)"] & H_{n+1}(\mathbf{M}_\bullet/\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[dll, "\partial_{n+1}"] \\ & H_n(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[r, "H_n(\iota_\bullet)"] & H_n(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, "H_n(\pi_\bullet)"] & H_n(\mathbf{M}_\bullet/\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[dll, "\partial_n"] \\ & H_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[r, "H_{n-1}(\iota_\bullet)"] & \cdots & \end{tikzcd}$$

B.2.16 Πρόταση. *Εάν υποτεθεί ότι το*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbf{M}'_\bullet \arrow[r, "f'_\bullet"] \arrow[d, "\phi'_\bullet"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{M}_\bullet \arrow[r, "f_\bullet"] \arrow[d, "\phi_\bullet"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{M}''_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\phi''_\bullet"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbf{L}'_\bullet \arrow[r, "g'_\bullet"'] & \mathbf{L}_\bullet \arrow[r, "g_\bullet"'] & \mathbf{L}''_\bullet \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

είναι ένα μεταθετικό διάγραμμα αλυσωτών συμπλόκων και αλυσωτών μετασχηματισμών με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς, τότε το επαγόμενο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_n(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[r, "H_n(f'_\bullet)"] \arrow[d, "H_n(\phi'_\bullet)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_n(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, "H_n(f_\bullet)"] \arrow[d, "H_n(\phi_\bullet)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_n(\mathbf{M}''_\bullet) \arrow[r, "\partial_n^{(1)}"] \arrow[d, "H_n(\phi''_\bullet)"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "H_{n-1}(\phi'_\bullet)"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H_n(\mathbf{L}'_\bullet) \arrow[r, "H_n(g'_\bullet)"'] & H_n(\mathbf{L}_\bullet) \arrow[r, "H_n(g_\bullet)"'] & H_n(\mathbf{L}''_\bullet) \arrow[r, "\partial_n^{(2)}"'] & H_{n-1}(\mathbf{L}'_\bullet) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

το έχον τις μακρές ακριβείς ακολουθίες ως γραμμές (με τους $\partial_n^{(1)}, \partial_n^{(2)}$ ως συνδετικούς ομομορφισμούς) είναι ωσαύτως μεταθετικό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας συμβολίσουμε τους συνοριακούς τελεστές ως $d_n^{\mathbf{M}_\bullet}, d_n^{\mathbf{M}'_\bullet}, d_n^{\mathbf{M}''_\bullet}$ και $d_n^{\mathbf{L}_\bullet}, d_n^{\mathbf{L}'_\bullet}, d_n^{\mathbf{L}''_\bullet}$, αντιστοίχως. Η μεταθετικότητα στα πρώτα δύο τετράγωνα έπεται άμεσα από την πρόταση B.2.6. Για την απόδειξη τής μεταθετικότητας στο τρίτο τετράγωνο θεωρούμε τυχόν στοιχείο $y \in Z_n(\mathbf{M}''_\bullet) \subseteq M''_n$. Επειδή

$$\exists x \in M_n : y + B_n(\mathbf{M}''_\bullet) = \underline{f_n}(x + B_n(\mathbf{M}_\bullet)) = f_n(x) + B_n(\mathbf{M}''_\bullet)$$

με $\widetilde{d}_n^{\mathbf{M}_\bullet}(x + B_n(\mathbf{M}_\bullet)) \in \mathrm{Im}(\overline{f'_{n-1}})$ και

$$\exists! z \in Z_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \subseteq M'_{n-1} : \overline{f'_{n-1}}^{-1}(\{\widetilde{d}_n^{\mathbf{M}_\bullet}(x + B_n(\mathbf{M}_\bullet))\}) = f'^{-1}_{n-1}(\{d_n^{\mathbf{M}_\bullet}(x)\}) = \{z\},$$

έχουμε

$$\begin{aligned}(H_{n-1}(\phi'_\bullet) \circ \partial_n^{(1)})(y + B_n(\mathbf{M}''_\bullet)) &= H_{n-1}(\phi'_\bullet)(\partial_n^{(1)}(y + B_n(\mathbf{M}''_\bullet)))\\ &= H_{n-1}(\phi'_\bullet)(z + B_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet)) = \phi'_{n-1}(z) + B_{n-1}(\mathbf{L}'_\bullet).\end{aligned}$$

(Πρβλ. (B.20).) Εξάλλου, $f'_{n-1}(z) = \overline{f'_{n-1}}(z) = \widetilde{d}_n^{\mathbf{M}_\bullet}(x + B_n(\mathbf{M}_\bullet)) = d_n^{\mathbf{M}_\bullet}(x)$,

$$g'_{n-1} \circ \phi'_{n-1} = \phi_{n-1} \circ f'_{n-1} \ \text{ και } \ \phi_{n-1} \circ d_n^{\mathbf{M}_\bullet} = d_n^{\mathbf{L}_\bullet} \circ \phi_n$$

(διότι ο $\phi_\bullet$ είναι αλυσωτός μετασχηματισμός), οπότε η ενριπτικότητα των f'_{n-1} και g'_{n-1} δίδει

$$\begin{aligned}&\phi'_{n-1}(z) = \phi'_{n-1}(f'^{-1}_{n-1}(\{d_n^{\mathbf{M}_\bullet}(x)\})) = g'^{-1}_{n-1}(\{\phi_{n-1}(d_n^{\mathbf{M}_\bullet}(x))\}) = g'^{-1}_{n-1}(\{d_n^{\mathbf{L}_\bullet}(\phi_n(x))\})\\ &\Rightarrow (H_{n-1}(\phi'_\bullet) \circ \partial_n^{(1)})(y + B_n(\mathbf{M}''_\bullet)) = g'^{-1}_{n-1}(\{d_n^{\mathbf{L}_\bullet}(\phi_n(x))\}) + B_{n-1}(\mathbf{L}'_\bullet)\\ &= \partial_n^{(2)}(g_n(\phi_n(x)) + B_n(\mathbf{L}''_\bullet)) = \partial_n^{(2)}(\phi''_n(f_n(x)) + B_n(\mathbf{L}''_\bullet))\\ &= \partial_n^{(2)}(H_n(\phi''_\bullet)(f_n(x) + B_n(\mathbf{M}''_\bullet))) = \partial_n^{(2)}(H_n(\phi''_\bullet)(y + B_n(\mathbf{M}''_\bullet))),\end{aligned}$$

διότι $g_n \circ \phi_n = \phi''_n \circ f_n$. □

► **Μόδιοι συνομολογίας**. Αυτοί ορίζονται όπως οι μόδιοι ομολογίας *αλλά* εκκινώντας από ημιακριβείς ακολουθίες με *ανιόντα* σύνολα δεικτών.

B.2.17 Ορισμός. Έστω

$$\cdots \xrightarrow{d^{n-2}} M^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} M^n \xrightarrow{d^n} M^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} M^{n+2} \xrightarrow{d^{n+2}} \cdots \tag{B.21}$$

μια ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων με ανιόν σύνολο δεικτών και με τους δείκτες αναγραφόμενους «εν είδει δυνάμεων». Αυτή καλείται **συναλυσωτό σύμπλοκο** (ή **ημιακριβής ακολουθία με ανιόν σύνολο δεικτών**) όταν $d^n \circ d^{n-1} = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, και συμβολίζεται -εν συντομία- ως $\mathbf{M}^\bullet = (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Οι ομομορφισμοί $d^n_{\mathbf{M}^\bullet} := d^n$, $n \in \mathbb{Z}$, καλούνται ενίοτε **συσσυνοριακοί τελεστές** ή **συνδιαφορικά** τού συναλυσωτού συμπλόκου $\mathbf{M}^\bullet$. Στην ειδική περίπτωση όπου οι M^n είναι τετριμμένοι και $d^n = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, το $\mathbf{M}^\bullet$ συμβολίζεται απλώς ως $\mathbf{0}^\bullet$.

Β.2.18 Ορισμός. Έστω $\mathbf{M}^\bullet = (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα συναλυσωτό σύμπλοκο τής μορφής (Β.21). Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ θέτουμε

$$\boxed{B^n(\mathbf{M}^\bullet) := \mathrm{Im}(d^{n-1})} \quad \text{και} \quad \boxed{Z^n(\mathbf{M}^\bullet) := \mathrm{Ker}(d^n).}$$

Προφανώς, αμφότεροι οι $B^n(\mathbf{M}^\bullet)$ και $Z^n(\mathbf{M}^\bullet)$ είναι υπομόδιοι τού R-μοδίου M_n και $B^n(\mathbf{M}^\bullet) \subseteq Z^n(\mathbf{M}^\bullet)$. Τα στοιχεία τού $B^n(\mathbf{M}^\bullet)$ καλούνται n-**οστά συσσύνορα** και τα στοιχεία τού $Z^n(\mathbf{M}^\bullet)$ n-**οστά συγκυκλήματα**[13] τού $\mathbf{M}^\bullet$. Ο πηλικομόδιος

$$\boxed{H^n(\mathbf{M}^\bullet) := Z^n(\mathbf{M}^\bullet)/B^n(\mathbf{M}^\bullet)}$$

καλείται n-**οστός μόδιος συνομολογίας τού** $\mathbf{M}^\bullet$. (Στην περίπτωση όπου $R = \mathbb{Z}$, είθισται να ονομάζεται n-**οστή ομάδα συνομολογίας τού** $\mathbf{M}^\bullet$.)

Β.2.19 Παρατήρηση. Προφανώς, $H^n(\mathbf{M}^\bullet) = 0_{Z^n(\mathbf{M}^\bullet)/B^n(\mathbf{M}^\bullet)} = B^n(\mathbf{M}^\bullet)$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, εάν και μόνον εάν η ακολουθία (Β.21) είναι ακριβής. Ως εκ τούτου, οι μόδιοι συνομολογίας μπορούν να εκληφθούν ως εκείνοι οι μόδιοι που εκφράζουν *το πόσο απέχει το συναλυσωτό σύμπλοκο* $\mathbf{M}^\bullet$ *από το να είναι ακριβής ακολουθία.*

Β.2.20 Ορισμός. Έστω ότι τα

$$\mathbf{M}^\bullet = (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}: \quad \cdots \xrightarrow{d^{n-2}} M^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} M^n \xrightarrow{d^n} M^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots$$

$$\mathbf{M}'^\bullet = (M'^n, d'^n)_{n\in\mathbb{Z}}: \quad \cdots \xrightarrow{d'^{n-2}} M'^{n-1} \xrightarrow{d'^{n-1}} M'^n \xrightarrow{d'^n} M'^{n+1} \xrightarrow{d'^{n+1}} \cdots$$

είναι συναλυσωτά σύμπλοκα. Μια **απεικόνιση** $f^\bullet : \mathbf{M}^\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'^\bullet$ είναι μια ακολουθία απεικονίσεων $(f^n : M^n \longrightarrow M'^n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Ως **σύνθεση** $(g \circ f)^\bullet$ δυο απεικονίσεων $f^\bullet : \mathbf{M}^\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'^\bullet$ και $g^\bullet : \mathbf{M}'^\bullet \longrightarrow \mathbf{M}''^\bullet$ ορίζεται η $(g^n \circ f^n : M^n \longrightarrow M''^n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Μια απεικόνιση συναλυσωτών συμπλόκων $f^\bullet : \mathbf{M}^\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'^\bullet$ καλείται **συναλυσωτός μετασχηματισμός** όταν για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ η $f^n : M^n \longrightarrow M'^n$ είναι ομομορφισμός R-μοδίων και (ταυτοχρόνως) το κάτωθι διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "f^n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M^{n+1} \arrow[d, "f^{n+1}"] \\ M'^n \arrow[r, "d'^n"'] & M'^{n+1} \end{tikzcd}$$

[13] Πρόκειται και πάλι για «παραδοσιακή» ορολογία τοπολογικής προελεύσεως.

B.2.21 Πρόταση. *Εάν* $\mathbf{M}^\bullet = (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *και* $\mathbf{M}'^\bullet = (M'^n, d'^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι δυο συναλυσωτά σύμπλοκα, τότε για κάθε συναλυσωτό μετασχηματισμό* $f^\bullet : \mathbf{M}^\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'^\bullet$ *ισχύει*

$$f^n(Z^n(\mathbf{M}^\bullet)) \subseteq Z^n(\mathbf{M}'^\bullet) \;\; \textit{και} \;\; f^n(B^n(\mathbf{M}^\bullet)) \subseteq B^n(\mathbf{M}'^\bullet), \; \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Ως εκ τούτου, υπάρχει ένας και μόνον ομομορφισμός R*-μοδίων*

$$\boxed{H^n(f^\bullet) : H^n(\mathbf{M}^\bullet) \longrightarrow H^n(\mathbf{M}'^\bullet),}$$

με την ιδιότητα $\pi^{Z^n(\mathbf{M}'^\bullet)}_{B^n(\mathbf{M}'^\bullet)} \circ f^n|_{Z^n(\mathbf{M}^\bullet)} = H^n(f^\bullet) \circ \pi^{Z^n(\mathbf{M}^\bullet)}_{B^n(\mathbf{M}^\bullet)}$, *ήτοι αυτός που ορίζεται από τον τύπο*

$$\boxed{H^n(f^\bullet)(x + B^n(\mathbf{M}^\bullet)) := f^n(x) + B^n(\mathbf{M}'_\bullet), \; \forall x \in Z^n(\mathbf{M}^\bullet).}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εξ ορισμού, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
M^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "f^n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M^{n+1} \arrow[d, "f^{n+1}"] \\
M'^{n-1} \arrow[r, "d'^{n-1}"'] & M'^n \arrow[r, "d'^n"'] & M'^{n+1}
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Έστω τυχόν στοιχείο $x \in Z^n(\mathbf{M}^\bullet)$. Προφανώς,

$$\begin{aligned}
& d^n(x) = 0_{M^{n+1}} \Rightarrow 0_{M'^{n+1}} = f^{n+1}(0_{M^{n+1}}) = f^{n+1}(d^n(x)) = d'^n(f^n(x)) \\
& \Rightarrow f^n(x) \in \mathrm{Ker}(d'^n) =: Z^n(\mathbf{M}'^\bullet) \Rightarrow f^n(Z^n(\mathbf{M}^\bullet)) \subseteq Z^n(\mathbf{M}'^\bullet).
\end{aligned}$$

Εξάλλου, για οιοδήποτε στοιχείο $y \in \mathrm{Im}(d^{n-1}) =: B^n(\mathbf{M}^\bullet)$ υπάρχει $z \in M^{n-1}$ με $y = d^{n-1}(z)$, οπότε

$$f^n(y) = f^n(d^{n-1}(z)) = d'^{n-1}(f^{n-1}(z)) \in \mathrm{Im}(d'^{n-1}) =: B^n(\mathbf{M}'^\bullet).$$

Η ύπαρξη, καθώς και ο συγκεκριμένος τύπος ορισμού τού ομομορφισμού $H^n(f^\bullet)$, ο οποίος είναι ο μόνος ομομορφισμός που συμπληρώνει το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
Z^n(\mathbf{M}^\bullet) \arrow[r, "f^n|_{Z^n(\mathbf{M}^\bullet)}"] \arrow[d, two heads, "\pi^{Z^n(\mathbf{M}^\bullet)}_{B^n(\mathbf{M}^\bullet)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z^n(\mathbf{M}'^\bullet) \arrow[d, two heads, "\pi^{Z^n(\mathbf{M}'^\bullet)}_{B^n(\mathbf{M}'^\bullet)}"] \\
H^n(\mathbf{M}^\bullet) \arrow[r, dashed, "H^n(f^\bullet)"'] & H^n(\mathbf{M}'^\bullet)
\end{tikzcd}$$

καθιστώντας το μεταθετικό, έπεται από το θεώρημα A.4.10. □

B.2.22 Πρόταση. *Δοθέντων δυο συναλυσωτών μετασχηματισμών*

$$f^{\bullet} : \mathbf{M}^{\bullet} \longrightarrow \mathbf{M}'^{\bullet},\ \ g^{\bullet} : \mathbf{M}'^{\bullet} \longrightarrow \mathbf{M}''^{\bullet},$$

όπου $\mathbf{M}^{\bullet} = (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{M}'^{\bullet} = (M'^n, d'^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *και* $\mathbf{M}''^{\bullet} = (M''^n, d''^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, *έχουμε*

$$H^n((g\circ f)^{\bullet}) = H^n(g^{\bullet})\circ H^n(f^{\bullet}),\ \forall n\in\mathbb{Z}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Παρόμοια εκείνης τής προτάσεως B.2.6. □

B.2.23 Πρόταση. *Εάν* $\mathbf{M}^{\bullet} = (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι ένα συναλυσωτό σύμπλοκο, τότε*

$$H^n(\mathrm{id}_{\mathbf{M}^{\bullet}}) = \mathrm{id}_{H^n(\mathbf{M}^{\bullet})},\ \forall n\in\mathbb{Z},$$

όπου $\mathrm{id}_{\mathbf{M}^{\bullet}} : \mathbf{M}^{\bullet} \longrightarrow \mathbf{M}^{\bullet}$ *ο ταυτοτικός*[14] *συναλυσωτός μετασχηματισμός.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Παρόμοια εκείνης τής προτάσεως B.2.7. □

B.2.24 Ορισμός. Εάν $(\mathbf{M}^{j,\bullet} = (M^{j,n}, d^{j,n})_{n\in\mathbb{Z}})_{j\in J}$ είναι μια οικογένεια συναλυσωτών συμπλόκων, τότε τόσον το

$$\bigoplus_{j\in J}\mathbf{M}^{j,\bullet} := (\bigoplus_{j\in J} M^{j,n}, \bigoplus_{j\in J} d^{j,n})_{n\in\mathbb{Z}} \text{ όσον και το } \prod_{j\in J}\mathbf{M}^{j,\bullet} := (\prod_{j\in J} M^{j,n}, \prod_{j\in J} d^{j,n})_{n\in\mathbb{Z}}$$

είναι συναλυσωτά σύμπλοκα. Το μεν πρώτο καλείται **ευθύ άθροισμα**, το δε δεύτερο **ευθύ γινόμενο** των μελών τής εν λόγω οικογενείας.

B.2.25 Πρόταση. *Εάν* $(\mathbf{M}^{j,\bullet} = (M^{j,n}, d^{j,n})_{n\in\mathbb{Z}})_{j\in J}$ *είναι μια οικογένεια συναλυσωτών συμπλόκων, τότε υφίστανται ισομορφισμοί*

$$\boxed{H^n(\bigoplus_{j\in J}\mathbf{M}^{j,\bullet}) \xrightarrow{\ \cong\ } \bigoplus_{j\in J} H^n(\mathbf{M}^{j,\bullet})}$$

και

$$\boxed{H^n(\prod_{j\in J}\mathbf{M}^{j,\bullet}) \xrightarrow{\ \cong\ } \prod_{j\in J} H^n(\mathbf{M}^{j,\bullet})}$$

καθοριζόμενοι μέσω των τύπων

$$(x_j)_{j\in J} + \left(\bigoplus_{j\in J}\mathrm{Im}(d^{j,n-1})\right) \longmapsto \left(x_j + \mathrm{Im}(d^{j,n-1})\right)_{j\in J}$$

και

$$(x_j)_{j\in J} + \left(\prod_{j\in J}\mathrm{Im}(d^{j,n-1})\right) \longmapsto \left(x_j + \mathrm{Im}(d^{j,n-1})\right)_{j\in J}.$$

[14] $\mathrm{id}_{\mathbf{M}^{\bullet}} := (\mathrm{id}_{M^n} : M^n \longrightarrow M^n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Παρόμοια εκείνης τής προτάσεως B.2.9. □

B.2.26 Ορισμός. Μια ακολουθία συναλυσωτών συμπλόκων και συναλυσωτών μετασχηματισμών τής μορφής $\mathbf{0}^\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} \mathbf{M}^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} \mathbf{M}''^\bullet \longrightarrow \mathbf{0}^\bullet$, όπου $\mathbf{M}^\bullet = (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{M}'^\bullet = (M'^n, d'^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ και $\mathbf{M}''^\bullet = (M''^n, d''^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, καλείται **βραχεία ακριβής ακολουθία συναλυσωτών συμπλόκων** όταν η

$$\{0\} \longrightarrow M'^n \xrightarrow{f^n} M^n \xrightarrow{g^n} M''^n \longrightarrow \{0\}$$

είναι βραχεία ακριβής ακολουθία (υπό την έννοια τού εδ. B.1.2 (iii)), $\forall n \in \mathbb{Z}$.

B.2.27 Λήμμα. *Δοθέντων τριών αλυσωτών συμπλόκων*

$$\mathbf{M}^\bullet = (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}},\ \mathbf{M}'^\bullet = (M'^n, d'^n)_{n\in\mathbb{Z}} \ \textit{και}\ \mathbf{M}''^\bullet = (M''^n, d''^n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

και μιας βραχείας ακριβούς ακολουθίας $\mathbf{0}^\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} \mathbf{M}^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} \mathbf{M}''^\bullet \longrightarrow \mathbf{0}^\bullet$, *η*

$$H^n(\mathbf{M}'^\bullet) \xrightarrow{H^n(f^\bullet)} H^n(\mathbf{M}^\bullet) \xrightarrow{H^n(g^\bullet)} H^n(\mathbf{M}''^\bullet)$$

είναι ακριβής για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Παρόμοια εκείνης τού λήμματος B.2.11. □

B.2.28 Θεώρημα. (Κατασκευή μακράς ακριβούς ακολουθίας συνομολογίας) *Δοθέντων τριών συναλυσωτών συμπλόκων*

$$\mathbf{M}^\bullet = (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}},\ \mathbf{M}'^\bullet = (M'^n, d'^n)_{n\in\mathbb{Z}} \ \textit{και}\ \mathbf{M}''^\bullet = (M''^n, d''^n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

και μιας βραχείας ακριβούς ακολουθίας

$$\mathbf{0}^\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} \mathbf{M}^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} \mathbf{M}''^\bullet \longrightarrow \mathbf{0}^\bullet, \tag{B.22}$$

υφίσταται για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ *ένας ομομορφισμός* R*-μοδίων*

$$\partial^n : H^n(\mathbf{M}''^\bullet) \longrightarrow H^{n+1}(\mathbf{M}'^\bullet)$$

(*ο λεγόμενος* ***συνδετικός ομομορφισμός*** *για την* (B.22)), *μέσω τού οποίου επάγεται μια ακριβής ακολουθία*

$$\begin{array}{l}
\cdots \longrightarrow H^{n-1}(\mathbf{M}'^\bullet) \xrightarrow{H^{n-1}(f^\bullet)} H^{n-1}(\mathbf{M}^\bullet) \xrightarrow{H^{n-1}(g^\bullet)} H^{n-1}(\mathbf{M}''^\bullet) \xrightarrow{\partial^{n-1}} \\
H^n(\mathbf{M}'^\bullet) \xrightarrow{H^n(f^\bullet)} H^n(\mathbf{M}^\bullet) \xrightarrow{H^n(g^\bullet)} H^n(\mathbf{M}''^\bullet) \xrightarrow{\partial^n} \\
H^{n+1}(\mathbf{M}'^\bullet) \xrightarrow{H^{n+1}(f^\bullet)} \cdots
\end{array}$$

(*η λεγόμενη* ***μακρά ακριβής ακολουθία συνομολογίας*** *για την* (B.22)).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Παρόμοια εκείνης τού θεωρήματος B.2.12 (κάνοντας χρήση τόσον τού λήμματος B.2.27 όσον και τού λήμματος B.1.19 τού φιδιού). □

B.2.29 Σημείωση. Αναλόγως παραλλάσσονται και οι διατυπώσεις τού ορισμού B.2.14, τής σημειώσεως B.2.15 και τής προτάσεως B.2.16 για *συν*αλυσωτά σύμπλοκα και μοδίους *συν*ομολογίας. Αξίζει να επισημανθεί ότι κάθε συναλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{M}^\bullet = (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ μπορεί να μετατραπεί σε ένα αλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{N}_\bullet = (N_n, \delta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ με $H^{-n}(\mathbf{M}^\bullet) = H_n(\mathbf{N}_\bullet)$ εάν κανείς θέσει[15]

$$N_n := M^{-n} \text{ και } \delta_n := d^{-n}, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Είναι λοιπόν εύλογο το ερώτημα τού *γιατί να χρησιμοποιούνται* αμφότερες οι έννοιες *αλυσωτό* και *συναλυσωτό* σύμπλοκο, και μόδιοι *ομολογίας* και *συνομολογίας*, αντιστοίχως. Ο κύριος λόγος χρησιμοποιήσεως αμφοτέρων είναι ο εξής: Αφ' ενός μεν οι ημιακριβείς ακολουθίες με *ανιόν* σύνολο δεικτών συναντώνται συχνά στην *Άλγεβρα*, ενώ οι ημιακριβείς ακολουθίες με *κατιόν* σύνολο δεικτών συναντώνται συχνά στην *Αλγεβρική Τοπολογία*, αφ' ετέρου δε οι ομάδες (ή οι μόδιοι) συνομολογίας (που χειρίζεται κανείς εντός τού πλαισίου τής Αλγεβρικής Τοπολογίας) *δεν προέρχονται από απλή αλλαγή προσήμου δεικτών* των ομάδων (ή μοδίων) ομολογίας ενός αλυσωτού συμπλόκου, αλλά *από την εφαρμογή τού δυϊκού συναρτητή* "Hom" σε κάποιο κατάλληλο αλυσωτό σύμπλοκο (όπως, π.χ., στο σύμπλοκο των ιδιαζουσών αλυσίδων ενός τοπολογικού χώρου). Ως εκ τούτου, παρατηρείται *μετάβαση από συναλλοίωτους σε ανταλλοίωτους συναρτητές* (στην κατηγορία $\mathfrak{Abgroups}$ ή στην κατηγορία $\mathfrak{Mod}_R$).

B.3 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΤΟΥ EULER

Εάν R είναι μια περιοχή κυρίων ιδεωδών και M ένας πεπερασμένως παραγόμενος R-μόδιος, τότε $M = \text{tors}(M) \oplus \text{frp}(M)$, όπου $\text{tors}(M)$ ο υπομόδιος στρέψεως[16] τού M και $\text{frp}(M) \cong M/\text{tors}(M)$ το ελεύθερο μέρος του, έχων ως ελεύθερη βαθμίδα του $\text{fr-rank}(M) := \text{rank}(\text{frp}(M))$ τον κοινό πληθικό αριθμό όλων των βάσεων τού $\text{frp}(M)$. (Βλ. A.6.39 και A.7.6.)

B.3.1 Λήμμα. *Έστω R μια Π.Κ.Ι και έστω M ένας πεπερασμένως παραγόμενος R-μόδιος. Εάν $M = \sum_{j=1}^{k} Rm_j$ ($k \in \mathbb{N}, m_1, ..., m_k \in M$), τότε υπάρχει ένας $l \in \mathbb{N}_0$, $l \leq k$, και κάποια βραχεία ακριβής ακολουθία τής μορφής*

$$\{0\} \longrightarrow R^l \hookrightarrow R^k \twoheadrightarrow M \longrightarrow \{0\}.$$

(Κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία αυτής τής μορφής καλείται, ιδιαιτέρως, ***παράσταση*** τού M).

[15] Παρομοίως ένα αλυσωτό σύμπλοκο μπορεί να μετατραπεί σε συναλυσωτό.

[16] $\text{tors}(M) := \{\, m \in M \mid \exists r \in R \smallsetminus \{0_R\} : rm = 0_M \}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $\{b_j | 1 \leq j \leq k\}$ μια βάση τού R^k και έστω $f : R^k \longrightarrow M$ ο επιμορφισμός ο οριζόμενος επί ολοκλήρου τού R^k θέτοντας $f(b_j) := m_j$ για κάθε $j \in \{1, ..., k\}$ και χρησιμοποιώντας γραμμική επέκταση. (Βλ. θεώρημα A.6.20.) Ο πυρήνας του $\mathrm{Ker}(f)$, ως υπομόδιος τού R^k, είναι ελεύθερος και πεπερασμένως παραγόμενος R-μόδιος και, ως εκ τούτου, $\mathrm{Ker}(f) \cong R^l$ για κάποιον $l \in \mathbb{N}_0$, $l \leq k$. (Βλ. A.6.47 και A.6.49.) Η

$$\{0\} \longrightarrow R^l \hookrightarrow R^k \overset{f}{\twoheadrightarrow} M \longrightarrow \{0\}$$

είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία τής ζητούμενης μορφής. □

B.3.2 Παρατήρηση. (i) Εάν

$$\{0\} \longrightarrow R^l \hookrightarrow R^k \overset{f}{\twoheadrightarrow} M \longrightarrow \{0\}$$

είναι τυχούσα παράσταση τού M και $\mathrm{Ker}(f) \overset{\iota}{\hookrightarrow} R^k$ η συνήθης ένθεση, τότε από την πρόταση B.1.12 γνωρίζουμε ότι υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος ομομορφισμός $M \dashrightarrow \mathrm{Coker}(\iota)$ που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & R^l \arrow[r, hook] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & R^k \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f) \arrow[r, hook, "\iota"'] & R^k \arrow[r, two heads, "\pi^{R^k}_{\mathrm{Ker}(f)}"'] & \mathrm{Coker}(\iota) \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd} \tag{B.23}$$

μεταθετικό. Επειδή $\mathrm{id}^{-1}_{R^k}(\mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{Ker}(f)$ και ο $\mathrm{id}_{R^k} \circ \pi^{R^k}_{\mathrm{Ker}(f)}$ είναι επιμορφισμός, ο εν λόγω ομομορφισμός είναι *ισομορφισμός*. (Βλ. πόρισμα B.1.13). Επιπροσθέτως, εάν h_1 είναι ένας αυτομορφισμός τού R^l και h_2 ένας αυτομορφισμός τού R^k, τότε

$$\mathrm{Coker}(h_2 \circ \iota \circ h_1) \cong \mathrm{Coker}(\iota) \cong M. \tag{B.24}$$

B.3.3 Λήμμα. *Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι. και M ένας πεπερασμένως παραγόμενος R-μόδιος, τότε η διαφορά $k - l$ σε οιαδήποτε παράσταση*

$$\{0\} \longrightarrow R^l \hookrightarrow R^k \twoheadrightarrow M \longrightarrow \{0\}$$

τού M είναι σταθερή. Μάλιστα, ισχύει $k - l = \mathrm{fr\text{-}rank}_R(M)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. **Βήμα 1ο**. Ας υποθέσουμε ότι

$$\{0\} \longrightarrow R^l \hookrightarrow R^k \overset{f}{\twoheadrightarrow} M \longrightarrow \{0\} \text{ και } \{0\} \longrightarrow R^{l'} \hookrightarrow R^{k'} \overset{g}{\twoheadrightarrow} M \longrightarrow \{0\}$$

είναι δυο τυχούσες παραστάσεις τού M. Τότε υφίσταται προφανώς και μια τρίτη παράσταση τού M:

$$
\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[dr] & & & \{0\} \arrow[d] & & & \{0\} \arrow[dl] \\
& R^l \cong \mathrm{Ker}(f) \arrow[rr, hook, "j_1 := \iota_1|_{\mathrm{Ker}(f)}"] \arrow[dr, hook] & & \mathrm{Ker}(f \oplus g) \arrow[d] & & \mathrm{Ker}(g) \cong R^{l'} \arrow[ll, hook', "j_2 := \iota_2|_{\mathrm{Ker}(g)}"'] \arrow[dl, hook'] & \\
& & R^k \arrow[r, hook, "\iota_1"] \arrow[dr, two heads, "f"'] & R^k \oplus R^{k'} \arrow[d, two heads, "f \oplus g"] & R^{k'} \arrow[l, hook', "\iota_2"'] \arrow[dl, "g"] & & \\
& & & M \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & & & \\
& & \{0\} & \{0\} & \{0\} & &
\end{tikzcd}
$$

όπου $(f \oplus g)(x, y) := f(x) + g(y), \forall (x, y) \in R^k \times R^{k'}$, και ι_1, ι_2 οι συνήθεις ενθέσεις. Εν συνεχεία θεωρούμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
& \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \\
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f) \cong R^l \arrow[r, hook] \arrow[d, "j_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & R^k \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, "\iota_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f \oplus g) \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & R^k \oplus R^{k'} \arrow[r, two heads, "f \oplus g"] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Coker}(j_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Coker}(\iota_1) \cong R^{k'} \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \\
& \{0\} & \{0\} & \{0\} &
\end{tikzcd}
$$

με τις τρεις του στήλες ακριβείς. Επειδή οι δύο άνω γραμμές του είναι ακριβείς, η τρίτη γραμμή είναι ωσαύτως αληθής (δυνάμει τού (i) τού λήμματος B.1.9 των 3×3). Επομένως, $\mathrm{Coker}(j_1) \cong \mathrm{Coker}(\iota_1) \cong R^{k'}$ και ο συμπυρήνας $\mathrm{Coker}(j_1)$ είναι ελεύθερος R-μόδιος. Σύμφωνα με την πρόταση B.1.30 η πρώτη στήλη είναι *διασπώμενη* βραχεία ακριβής ακολουθία. Ως εκ τούτου,

$$\mathrm{Ker}(f \oplus g) \cong \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Coker}(j_1) \cong R^l \oplus R^{k'} \cong R^{l+k'}. \tag{B.25}$$

(Βλ. θεώρημα B.1.28.) Κατ' αναλογίαν, από το μεταθετικό διάγραμμα (με ακριβείς στήλες):

$$\begin{tikzcd}
 & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \\
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f) \cong R^l \arrow[r, hook] \arrow[d, "j_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & R^k \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, "\iota_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f \oplus g) \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & R^k \oplus R^{k'} \arrow[r, two heads, "f \oplus g"] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Coker}(j_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Coker}(\iota_1) \cong R^{k'} \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \\
 & \{0\} & \{0\} & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

λαμβάνουμε

$$\mathrm{Ker}(f \oplus g) \cong \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Coker}(j_2) \cong R^{l'} \oplus R^k \cong R^{l'+k}. \tag{B.26}$$

Λόγω των (B.25) και (B.26) το θεώρημα A.6.38 δίδει $l'+k = l+k' \Rightarrow k-l = k'-l'$.

Βήμα 2ο. Έστω $\{0\} \longrightarrow R^l \hookrightarrow R^k \overset{f}{\twoheadrightarrow} M \longrightarrow \{0\}$ τυχούσα παράσταση τού M και έστω $R^l \cong \mathrm{Ker}(f) \overset{\iota}{\hookrightarrow} R^k$ η συνήθης ένθεση. Ως γνωστόν, $M \cong \mathrm{Coker}(\iota)$ (βλ. (B.23)). Εάν $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{k\times l}(R)$ είναι ο πίνακας παραστάσεως τού μονομορφισμού $\iota \in \mathrm{Hom}_R(R^l, R^k)$ ως προς δυο διατεταγμένες βάσεις $(v_1, ..., v_l)$ και $(w_1, ..., w_k)$ των R^l και R^k, αντιστοίχως[17], τότε ο συμπυρήνας τού ι είναι ισόμορφος με τον συμπυρήνα *οιουδήποτε ισοδύναμού του* (βλ. (B.24)), οπότε η αντικατάσταση τού $\mathbf{A}$ με έναν ισοδύναμό του *δεν επηρεάζει* την παράσταση τού M. Ως γνωστόν[18], υπάρχουν διατεταγμένες βάσεις $(v'_1, ..., v'_l)$ και $(w'_1, ..., w'_k)$ των R^l και R^k, τέτοιες ώστε

$$\iota(v'_j) = \begin{cases} d_j w'_j, & \text{όταν } 1 \leq j \leq r, \\ 0_R, & \text{όταν } r < j \leq l, \end{cases}$$

όπου $d_1, ..., d_r \in R \smallsetminus \{0_R\}$ με $d_\varrho \mid d_{\varrho+1}$, $\forall \varrho \in \{1, ..., r-1\}$, και $r := \mathrm{rank}(\mathbf{A})$. Κατά συνέπειαν, ο νέος πίνακας παραστάσεως τού ι ως προς αυτές (που είναι ισοδύναμος τού $\mathbf{A}$) είναι ο

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{D} & \mathbf{0}_{r\times(l-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(k-r)\times r} & \mathbf{0}_{(k-r)\times(l-r)} \end{array}\right), \quad \text{όπου } \mathbf{D} := \mathrm{diag}(d_1, ..., d_r).$$

[17] Εξ ορισμού, $\iota(v_j) = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} w_i$ για κάθε $j \in \{1, ..., l\}$.

[18] Βλ., π.χ., [52], Proposition VII.2.11, σελ. 339.

Τούτο σημαίνει ότι $\mathrm{Im}(\iota) = Rd_1w_1' \oplus \cdots \oplus Rd_rw_r'$, οπότε

$$\begin{aligned}
M &\cong \mathrm{Coker}(\iota) = R^k / Rd_1w_1' \oplus \cdots \oplus Rd_rw_r' \\
&\cong Rw_1' \oplus \cdots \oplus Rw_k' \,/ Rd_1w_1' \oplus \cdots \oplus Rd_rw_r' \oplus \underbrace{\{0\} \oplus \cdots \oplus \{0\}}_{k-r \text{ φορές}} \\
&\cong (Rw_1'/Rd_1w_1') \oplus \cdots \oplus (Rw_r'/Rd_rw_r') \oplus Rw_{r+1}' \oplus \cdots \oplus Rw_k' \\
&\underset{(\mathrm{A.43})}{\cong} (R/Rd_1) \oplus \cdots \oplus (R/Rd_r) \oplus Rw_{r+1}' \oplus \cdots \oplus Rw_k' \cong (\bigoplus_{\nu=1}^{r} R/Rd_\nu) \oplus R^{k-r},
\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $\mathrm{tors}(M) \cong \bigoplus_{\nu=1}^{r} R/Rd_\nu$ και $\mathrm{frp}(M) \cong R^{k-r}$. Εάν για τυχούσα βάση $\{b_1, ..., b_k\}$ τού R^k θεωρήσουμε (για οιαδήποτε $a_1, ..., a_k \in R$) τον επιμορφισμό

$$h : R^k \longrightarrow (\bigoplus_{\nu=1}^{r} R/Rd_\nu) \oplus R^{k-r},$$
$$h(\sum_{i=1}^{k} a_ib_i) := (a_1 + Rd_1, ..., a_r + Rd_r, a_{r+1}, ..., a_k)$$

με πυρήνα

$$\mathrm{Ker}(h) = Rd_1b_1 \oplus \cdots \oplus Rd_rb_r \cong R^r,$$

τότε η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Ker}(h) \cong R^r \hookrightarrow R^k \overset{h}{\twoheadrightarrow} (\bigoplus_{\nu=1}^{r} R/Rd_\nu) \oplus R^{k-r} \cong M \longrightarrow \{0\}$$

μπορεί να ιδωθεί ως μια νέα παράσταση τού M. Από τα προαναφερθέντα στο 1ο βήμα συνάγεται ότι $k - l = k - r \Rightarrow r = l$ και ότι $\text{fr-rank}(M) = k - l$. □

B.3.4 Λήμμα. *Έστω R μια Π.Κ.Ι. Εάν*

$$\{0\} \longrightarrow M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-2}} \cdots \xrightarrow{f_2} M_1 \xrightarrow{f_1} M_0 \longrightarrow \{0\}$$

είναι ακριβής ακολουθία πεπερασμένως παραγομένων R-μοδίων (*όπου* $n \in \mathbb{N}$), *τότε*

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \text{fr-rank}_R(M_j) = 0. \tag{B.27}$$

Απόδειξη. Για $n = 1$ η (B.27) είναι προφανής. Όταν $n = 2$ θεωρούμε παραστάσεις

$$\{0\} \longrightarrow R^l \hookrightarrow R^k \overset{g}{\twoheadrightarrow} M_0 \longrightarrow \{0\} \text{ και } \{0\} \longrightarrow R^{l'} \hookrightarrow R^{k'} \overset{g'}{\twoheadrightarrow} M_2 \longrightarrow \{0\}$$

των M_0 και M_2, αντιστοίχως. Μέσω αυτών κατασκευάζεται μια παράσταση

$$\{0\} \longrightarrow R^{l+l'} \hookrightarrow R^{k+k'} \twoheadrightarrow M_1 \longrightarrow \{0\}$$

τού M_1. Πράγματι· ας θεωρήσουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \\
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(g') \cong R^{l'} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Ker}(\alpha\oplus\beta) \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Ker}(g) \cong R^{l} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & R^{k'} \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads, "g'"'] \arrow[dr, "\alpha"] & R^{k+k'} \arrow[r, two heads, "\pi_{R^{k+k'}}^{R^{k'}}"] \arrow[d, two heads, "\alpha\oplus\beta"] & R^{k} \cong R^{k+k'}/R^{k'} \arrow[r] \arrow[d, two heads, "g"] \arrow[dl, "\beta"'] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & M_2 \arrow[r, "f_2"'] \arrow[d] & M_1 \arrow[r, "f_1"'] \arrow[d] & M_0 \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \\
 & \{0\} & \{0\} & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

όπου $\alpha := f_2 \circ g'$ και $\beta \in \mathrm{Hom}_R(R^k, M_1)$ ο μονοσημάντως ορισμένος ομομορφισμός για τον οποίο ισχύει[19] $f_1 \circ \beta = g$. (Βλ. θεώρημα A.3.25.) Αυτό έχει *και τις τρεις του στήλες* ακριβείς. Επειδή οι δύο κάτω γραμμές είναι ακριβείς, η πρώτη γραμμή είναι ωσαύτως ακριβής (δυνάμει τού (ii) τού λήμματος B.1.9 των 3×3). Επιπλέον, σύμφωνα με την πρόταση B.1.30 η πρώτη γραμμή είναι *διασπώμενη* βραχεία ακριβής ακολουθία, διότι ο $\mathrm{Ker}(g) \cong R^l$ είναι ελεύθερος R-μόδιος. Κατά το θεώρημα B.1.28, $\mathrm{Ker}(\alpha \oplus \beta) \cong R^{l'} \oplus R^l \cong R^{l+l'}$. Από το λήμμα B.3.3 συνάγεται ότι

$$\text{fr-rank}_R(M_1) = (k+k') - (l+l') = (k-l) + (k'-l') = \text{fr-rank}_R(M_0) + \text{fr-rank}_R(M_1),$$

οπότε ο ισχυρισμός είναι αληθής και για $n = 2$. Για $n \geq 3$ εργαζόμαστε επαγωγικώς: Διασπούμε την αρχική ακριβή ακολουθία σε δύο ακριβείς ακολουθίες

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & \{0\} \arrow[d] & \\
\{0\} \arrow[r] & M_n \arrow[r, "f_n"] & M_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "f_3"] & M_2 \arrow[r, two heads, "f_2'"] & \mathrm{Im}(f_2) = \mathrm{Ker}(f_1) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \{0\} \\
 & & & & & M_1 \arrow[d, two heads, "f_1"'] & \\
 & & & & & M_0 \arrow[d] & \\
 & & & & & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

[19] Προφανώς, $\mathrm{Im}(g) \subseteq M_0 = \mathrm{Im}(f_1)$.

(όπου f_2' είναι ο επιμορφισμός ο προκύπτων από τον ομομορφισμό f_2 ύστερα από περιορισμό τού πεδίου τιμών τού τελευταίου στην εικόνα του). Από την επαγωγική υπόθεση για καθεμιά εξ αυτών λαμβάνουμε

$$\sum_{j=2}^{n} (-1)^j \text{ fr-rank}_R(M_j) - \text{ fr-rank}_R(\mathrm{Im}(f_2)) = 0 \tag{B.28}$$

και

$$\text{fr-rank}_R(M_0) - \text{ fr-rank}_R(M_1) + \text{ fr-rank}_R(\mathrm{Im}(f_2)) = 0. \tag{B.29}$$

Κατόπιν προσθέσεως των (B.28) και (B.29) κατά μέλη προκύπτει η (B.27). □

B.3.5 Ορισμός. Έστω R μια Π.Κ.Ι. και έστω $\mathbf{M}_\bullet = (M_q, d_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο πεπερασμένως παραγομένων R-μοδίων. Εάν υπάρχει κάποιος $r \in \mathbb{N}_0$, τέτοιος ώστε να ισχύει $M_q \cong \{0\}$ για κάθε $q \in \mathbb{Z}$ με $|q| > r$, τότε το $\mathbf{M}_\bullet$ ονομάζεται **πεπερασμένο αλυσωτό σύμπλοκο**. Εν τοιαύτη περιπτώσει, ορίζεται καλώς το εναλλάσσον άθροισμα

$$\boxed{\chi_R(\mathbf{M}_\bullet) := \sum_{q\in\mathbb{Z}} (-1)^q \text{ fr-rank}_R(M_q) \in \mathbb{Z},}$$

το οποίο καλείται **χαρακτηριστική Euler τού** $\mathbf{M}_\bullet$ **ως προς την** R.

B.3.6 Πρόταση. *Έστω R μια Π.Κ.Ι. Εάν*

$$\mathbf{M}_\bullet = (M_q, d_q)_{q\in\mathbb{Z}},\ \mathbf{M}'_\bullet = (M'_q, d'_q)_{q\in\mathbb{Z}} \ \textit{και}\ \mathbf{M}''_\bullet = (M''_q, d''_q)_{q\mathbb{Z}},$$

είναι τρία πεπερασμένα αλυσωτά σύμπλοκα R-μοδίων και

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathbf{M}_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathbf{M}''_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet$$

μια βραχεία ακριβής ακολουθία, τότε

$$\boxed{\chi_R(\mathbf{M}_\bullet) = \chi_R(\mathbf{M}'_\bullet) + \chi_R(\mathbf{M}''_\bullet).}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή για κάθε $q \in \mathbb{Z}$ η

$$\{0\} \longrightarrow M'_q \xrightarrow{f_q} M_q \xrightarrow{g_q} M''_q \longrightarrow \{0\}$$

είναι βραχεία ακριβής ακολουθία, έχουμε (λόγω τής (B.27) για $n = 2$)

$$\begin{aligned}\chi_R(\mathbf{M}_\bullet) &= \sum_{q\in\mathbb{Z}} (-1)^q \text{ fr-rank}_R(M_q) = \sum_{q\in\mathbb{Z}} (-1)^q \ (\text{fr-rank}_R(M'_q) + \text{fr-rank}_R(M''_q)) \\ &= \sum_{q\in\mathbb{Z}} (-1)^q \text{ fr-rank}_R(M'_q) + \sum_{q\in\mathbb{Z}} (-1)^q \text{ fr-rank}_R(M''_q),\end{aligned}$$

όπου το τελευταίο ισούται με το άθροισμα $\chi_R(\mathbf{M}'_\bullet) + \chi_R(\mathbf{M}''_\bullet)$. □

B.3.7 Θεώρημα. *Έστω R μια Π.Κ.Ι. και έστω $\mathbf{M}_\bullet = (M_q, d_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ ένα πεπερασμένο αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων. Τότε κάθε μόδιος ομολογίας τού $\mathbf{M}_\bullet$ είναι πεπερασμένως παραγόμενος και*

$$\boxed{\chi_R(\mathbf{M}_\bullet) = \sum_{q\in\mathbb{Z}} (-1)^q \text{ fr-rank}_R(H_q(\mathbf{M}_\bullet)).} \tag{B.30}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εξ υποθέσεως, υπάρχει $r \in \mathbb{N}_0$, τέτοιος ώστε να ισχύει $M_q \cong \{0\}$ για κάθε $q \in \mathbb{Z}$ με $|q| > r$. Άρα $H_q(\mathbf{M}_\bullet) \cong \{0\}$ για κάθε $q \in \mathbb{Z}$ με $|q| > r$. Επιπροσθέτως, επειδή για κάθε $q \in \mathbb{Z}$ έχουμε $B_q(\mathbf{M}_\bullet) \subseteq Z_q(\mathbf{M}_\bullet) \subseteq M_q$, τόσον οι R-μόδιοι $B_q(\mathbf{M}_\bullet)$ και $Z_q(\mathbf{M}_\bullet)$ όσον και ο $H_q(\mathbf{M}_\bullet)$ είναι πεπερασμένως παραγόμενοι. (Βλ. πόρισμα A.6.49.) Θεωρούμε τις βραχείες ακριβείς ακολουθίες

$$\{0\} \longrightarrow B_q(\mathbf{M}_\bullet) \hookrightarrow Z_q(\mathbf{M}_\bullet) \overset{\pi^{Z_q(\mathbf{M}_\bullet)}_{B_q(\mathbf{M}_\bullet)}}{\twoheadrightarrow} H_q(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow \{0\} \tag{B.31}$$

και

$$\{0\} \longrightarrow Z_q(\mathbf{M}_\bullet) \hookrightarrow M_q \overset{\check{d}_n}{\twoheadrightarrow} B_{q-1}(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow \{0\}, \tag{B.32}$$

όπου $\check{d}_n$ ο επιμορφισμός ο προκύπτων από τον d_n (ύστερα από περιορισμό τού πεδίου τιμών αυτού στην εικόνα του), και υποθέτουμε δίχως βλάβη τής γενικότητας ότι $M_q \cong \{0\}$ για όλους τους *αρνητικούς* q (διότι αλλιώς υπάρχει η δυνατότητα μετονομασίας των δεικτών κατόπιν μετατοπίσεώς τους έως ότου καταστούν ≥ 0). Από την (B.32) και από το λήμμα B.3.4 έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\chi_R(\mathbf{M}_\bullet) &= \sum_{q\in\mathbb{Z}} (-1)^q \text{ fr-rank}_R(M_q) = \sum_{q=0}^{r} (-1)^q \text{ fr-rank}_R(M_q) \\
&= \sum_{q=0}^{r} (-1)^q \left(\text{fr-rank}_R(Z_q(\mathbf{M}_\bullet)) + \text{fr-rank}_R(B_{q-1}(\mathbf{M}_\bullet))\right) \\
&= \sum_{q=0}^{r} (-1)^q \text{ fr-rank}_R(Z_q(\mathbf{M}_\bullet)) + \sum_{q=0}^{r} (-1)^q \text{ fr-rank}_R(B_{q-1}(\mathbf{M}_\bullet))).
\end{aligned}$$

Επειδή (εξ υποθέσεως) $\text{fr-rank}_R(B_{-1}(\mathbf{M}_\bullet)) = 0 = \text{fr-rank}_R(B_r(\mathbf{M}_\bullet))$ (καθώς $d_0 = 0$ και $M_{r+1} \cong \{0\}$), ύστερα από αλλαγή τού δείκτη αθροίσεως στο τελευταίο άθροισμα η (B.31) και το λήμμα B.3.4 δίδουν

$$\begin{aligned}
\chi_R(\mathbf{M}_\bullet) &= \sum_{q=0}^{r} (-1)^q \text{ fr-rank}_R(Z_q(\mathbf{M}_\bullet)) + \sum_{q=0}^{r} (-1)^{q+1} \text{ fr-rank}_R(B_q(\mathbf{M}_\bullet))) \\
&= \sum_{q=0}^{r} (-1)^q \left(\text{fr-rank}_R(Z_q(\mathbf{M}_\bullet)) - \text{fr-ank}_R(B_q(\mathbf{M}_\bullet))\right) \\
&= \sum_{q=0}^{r} (-1)^q \text{ fr-rank}_R(H_q(\mathbf{M}_\bullet)),
\end{aligned}$$

οπότε η (B.30) είναι όντως αληθής. □

B.4 ΑΛΥΣΩΤΗ ΟΜΟΤΟΠΙΑ

Εάν $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα και $f_\bullet, g_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ αλυσωτοί μετασχηματισμοί, πότε έχουμε $H_n(f_\bullet) = H_n(g_\bullet)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$; Μια ικανή συνθήκη για να ισχύουν αυτές οι ισότητες είναι εύκολα περιγράψιμη μέσω τής εισαγωγής τής εννοίας τής *αλυσωτής ομοτοπίας*.

B.4.1 Ορισμός. Έστω ότι τα $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα. Δυο αλυσωτοί μετασχηματισμοί $f_\bullet, g_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ ονομάζονται **(αλυσωτώς) ομότοποι** όταν υπάρχει μια ακολουθία ομομορφισμών R-μοδίων

$$(h_n : M_n \longrightarrow M'_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}} \tag{B.33}$$

για την οποία ισχύει

$$\boxed{f_n - g_n = d'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n, \ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_{n+2}"] & M_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[dl, "h_{n+1}"'] \arrow[d, shift right, "f_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n+1}"] & M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[dl, "h_n"'] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] & M_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[dl, "h_{n-1}"'] \arrow[d, shift right, "f_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n-1}"] & \cdots \arrow[dl, "h_{n-2}"'] \\
\cdots \arrow[r, "d'_{n+2}"] & M'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & M'_n \arrow[r, "d'_n"] & M'_{n-1} \arrow[r, "d'_{n-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Συνήθης συμβολισμός[20]: $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : f_\bullet \simeq g_\bullet$. Εν προκειμένω, μια τέτοιου είδους ακολουθία $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ καλείται **αλυσωτή ομοτοπία**.

B.4.2 Σημείωση. Όταν $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet} \simeq \mathbf{0}_\bullet$, η $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ καλείται **συστέλλουσα ομοτοπία** (για το $\mathbf{M}_\bullet$) και το ίδιο το $\mathbf{M}_\bullet$ **συσταλτό αλυσωτό σύμπλοκο.**

B.4.3 Ορισμός. Έστω ότι τα $\mathbf{M}^\bullet = (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{M}'^\bullet = (M'^n, d'^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο συναλυσωτά σύμπλοκα. Δυο συναλυσωτοί μετασχηματισμοί $f^\bullet, g^\bullet : \mathbf{M}^\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'^\bullet$ ονομάζονται **(συναλυσωτώς) ομότοποι** όταν υπάρχει μια ακολουθία ομομορφισμών R-μοδίων

$$(h^n : M^n \longrightarrow M'^{n-1})_{n\in\mathbb{Z}} \tag{B.34}$$

για την οποία ισχύει

$$\boxed{f^n - g^n = d'^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ d^n, \ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

[20] Προσοχή! Μια τέτοια $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *δεν είναι* απεικόνιση αλυσωτών συμπλόκων από το $\mathbf{M}_\bullet$ στο $\mathbf{M}'_\bullet$ υπό την έννοια τού ορισμού B.2.4 (διότι γίνεται αναβίβαση δεικτών κατά 1).

Συνήθης συμβολισμός[21]: $(h^n)_{n\in\mathbb{Z}} : f^\bullet \simeq g^\bullet$. Εν προκειμένω, μια τέτοιου είδους ακολουθία $(h^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ καλείται **συναλυσωτή ομοτοπία**.

B.4.4 Σημείωση. Όταν $(h^n)_{n\in\mathbb{Z}} : \mathrm{id}_{\mathbf{M}^\bullet} \simeq \mathbf{0}^\bullet$, η $(h^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ καλείται **συστέλλουσα ομοτοπία** (για το $\mathbf{M}^\bullet$) και το ίδιο το $\mathbf{M}^\bullet$ **συσταλτό συναλυσωτό σύμπλοκο.**

B.4.5 Πρόταση. *Η σχέση "$\simeq$" τής ομοτοπίας αποτελεί σχέση ισοδυναμίας (υπό τη συνήθη έννοια) επί τής κλάσεως των αλυσωτών (και αντιστοίχως, των συναλυσωτών) μετασχηματισμών.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι τα $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα και $f_\bullet, g_\bullet, k_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ τρεις αλυσωτοί μετασχηματισμοί.

(i) Θέτοντας $h_n := 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, έχουμε προφανώς $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : f_\bullet \simeq f_\bullet$, οπότε η "$\simeq$" είναι ανακλαστική.

(ii) Υποθέτοντας ότι $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : f_\bullet \simeq g_\bullet$ για κάποια αλυσωτή ομοτοπία (B.33) διαπιστώνουμε ότι $(-h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : g_\bullet \simeq f_\bullet$, οπότε η "$\simeq$" είναι συμμετρική.

(iii) Εάν υποθέσουμε ότι $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : f_\bullet \simeq g_\bullet$ και $(h'_n)_{n\in\mathbb{Z}} : g_\bullet \simeq k_\bullet$,τότε

$$(h_n + h'_n)_{n\in\mathbb{Z}} : f_\bullet \simeq k_\bullet,$$

οπότε η "$\simeq$" είναι *και* μεταβατική. (Η απόδειξη για συναλυσωτά σύμπλοκα είναι παρόμοια.) □

B.4.6 Πρόταση. *Εάν* $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα και* $f_\bullet, g_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ *δυο αλυσωτοί μετασχηματισμοί, τότε ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή*[22]

$$\boxed{f_\bullet \simeq g_\bullet \Longrightarrow [H_n(f_\bullet) = H_n(g_\bullet),\ \forall n \in \mathbb{Z}].} \tag{B.35}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : f_\bullet \simeq g_\bullet$,τότε για οιοδήποτε $x \in Z_n(\mathbf{M}_\bullet)$ και οιονδήποτε $n \in \mathbb{Z}$ η διαφορά $H_n(f_\bullet)(x + B_n(\mathbf{M}_\bullet)) - H_n(g_\bullet)(x + B_n(\mathbf{M}_\bullet))$ ισούται με

$$\begin{aligned}(f_n(x) + B_n(\mathbf{M}'_\bullet)) - (g_n(x) + B_n(\mathbf{M}'_\bullet)) &= (f_n(x) - g_n(x)) + B_n(\mathbf{M}'_\bullet)\\ = (d'_{n+1}(h_n(x)) + h_{n-1}(d_n(x))) + B_n(\mathbf{M}'_\bullet) &= B_n(\mathbf{M}'_\bullet) = 0_{H_n(\mathbf{M}'_\bullet)},\end{aligned}$$

διότι $x \in Z_n(\mathbf{M}_\bullet) \Rightarrow d_n(x) = 0_{M_{n-1}}$ και $d'_{n+1}(h_n(x)) \in \mathrm{Im}(d'_{n+1}) = B_n(\mathbf{M}'_\bullet)$. Επομένως, $H_n(f_\bullet) = H_n(g_\bullet)$. □

B.4.7 Σημείωση. Η αντίστροφη συνεπαγωγή "$\Longleftarrow$" στην (B.35) δεν είναι πάντοτε αληθής. Επί παραδείγματι, παγιώνοντας έναν φυσικό αριθμό $k \geq 2$ και έναν

[21] Προσοχή! Μια τέτοια $(h^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *δεν είναι* απεικόνιση συναλυσωτών συμπλόκων από το $\mathbf{M}^\bullet$ στο $\mathbf{M}'^\bullet$ υπό την έννοια τού ορισμού B.2.20 (διότι γίνεται καταβίβαση δεικτών κατά 1).

[22] Όταν γράφουμε απλώς $f_\bullet \simeq g_\bullet$ εννοούμε ότι $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : f_\bullet \simeq g_\bullet$ για κάποια ακολουθία (B.33).

ακέραιο αριθμό ν, και θεωρώντας δύο αντίτυπα τού ιδίου αλυσωτού συμπλόκου $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, όπου

$$M_n := \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } n \in \{\nu, \nu+1\}, \\ \mathbb{Z}_k, & \text{όταν } n = \nu - 1, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \notin \{\nu-1, \nu, \nu+1\}, \end{cases} \quad \text{και } d_n := \begin{cases} k\,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}, & \text{όταν } n = \nu+1, \\ \varpi, & \text{όταν } n = \nu, \\ 0, & \text{όταν } n \notin \{\nu, \nu+1\}, \end{cases}$$

(με[23] $\mathbb{Z} \ni \xi \longmapsto \varpi(\xi) := [\xi]_k \in \mathbb{Z}_k$), καθώς και τους αλυσωτούς μετασχηματισμούς $f_\bullet, g_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}_\bullet$, όπου

$$f_n := \begin{cases} \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}, & \text{όταν } n \in \{\nu, \nu+1\}, \\ \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_k}, & \text{όταν } n = \nu - 1, \\ 0, & \text{όταν } n \notin \{\nu-1, \nu, \nu+1\}, \end{cases} \quad \text{και } g_n := 0, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

παρατηρούμε ότι οι $f_\bullet, g_\bullet$ *δεν είναι* ομότοποι. Πράγματι· εάν ίσχυε

$$(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : f_\bullet \simeq g_\bullet$$

για κάποια αλυσωτή ομοτοπία (B.33), τότε θα είχαμε κατ' ανάγκην $h_n = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{\nu-1, \nu\}$, και για την τιμή $n = \nu$ θα λαμβάναμε

$$\mathrm{id}_{\mathbb{Z}} = f_\nu - g_\nu = d_{\nu+1} \circ h_\nu + h_{\nu-1} \circ d_\nu = k\,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}} \circ h_\nu + h_{\nu-1} \circ \varpi. \tag{B.36}$$

Επειδή $h_{\nu-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_k, \mathbb{Z})$ και $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_k, \mathbb{Z}) \cong \{0\}$ (βλ. C.1.3 (iii)), ο $h_{\nu-1}$ θα ήταν ο μηδενικός ομομορφισμός, οπότε η (B.36) θα έδιδε

$$\mathrm{id}_{\mathbb{Z}} = k\,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}} \circ h_\nu \Rightarrow k h_\nu(\xi) = \xi, \ \forall \xi \in \mathbb{Z},$$

ήτοι κάτι το οποίο θα ήταν άτοπο (καθώς δεν μπορεί *κάθε* ακέραιος αριθμός να είναι ίσος με κάποιο ακέραιο πολλαπλάσιο τού k). Από την άλλη μεριά, είναι προφανές ότι $H_n(\mathbf{M}_\bullet) \cong \{0\}$, οπότε $H_n(f_\bullet) = H_n(g_\bullet) = 0, \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

B.4.8 Πρόταση. *Εάν* $\mathbf{M}^\bullet = (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{M}'^\bullet = (M'^n, d'^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι δυο συναλυσωτά σύμπλοκα και* $f^\bullet, g^\bullet : \mathbf{M}^\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'^\bullet$ *δυο συναλυσωτοί μετασχηματισμοί, τότε ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή* [24]

$$\boxed{f^\bullet \simeq g^\bullet \Longrightarrow [H^n(f^\bullet) = H^n(g^\bullet), \ \forall n \in \mathbb{Z}].}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Παρόμοια εκείνης τής προτάσεως B.4.6. □

B.4.9 Ορισμός. Λέμε ότι δυο αλυσωτά σύμπλοκα $\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M}'_\bullet$ (και αντιστοίχως, δυο συναλυσωτά σύμπλοκα $\mathbf{M}^\bullet$, $\mathbf{M}'^\bullet$) είναι **ομοτοπικώς ισοδύναμα** όταν υπάρχουν αλυσωτοί μετασχηματισμοί

$$f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet \ \text{ και } \ g_\bullet : \mathbf{M}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}_\bullet,$$

---

[23] Σημειωτέον ότι η $\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z} = M_{\nu+1} \xrightarrow{k\,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}} M_\nu = \mathbb{Z} \xrightarrow{\varpi} M_{\nu-1} = \mathbb{Z}_k \longrightarrow \{0\}$ δεν είναι τίποτε άλλο παρά η βραχεία ακριβής ακολουθία που είχε παρατεθεί στο (iv) τού εδαφίου B.1.3.

[24] Όταν γράφουμε απλώς $f^\bullet \simeq g^\bullet$ εννοούμε ότι $(h^n)_{n\in\mathbb{Z}} : f^\bullet \simeq g^\bullet$ για κάποια ακολουθία (B.34).

(και αντιστοίχως, όταν υπάρχουν συναλυσωτοί μετασχηματισμοί

$$f^\bullet : \mathbf{M}^\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'^\bullet \;\text{ και }\; g^\bullet : \mathbf{M}'^\bullet \longrightarrow \mathbf{M}^\bullet),$$

τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$(g \circ f)_\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet} \;\text{ και }\; (f \circ g)_\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{M}'_\bullet}$$

(και αντιστοίχως,

$$(g \circ f)^\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{M}^\bullet} \;\text{ και }\; (f \circ g)^\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{M}'^\bullet}).$$

Τέτοιοι αλυσωτοί μετασχηματισμοί (και αντιστοίχως, συναλυσωτοί μετασχηματισμοί) ονομάζονται **αλυσωτές ισοδυναμίες** (και αντιστοίχως, **συναλυσωτές ισοδυναμίες**) και ο ένας **ομοτοπικό αντίστροφο** τού άλλου.

B.4.10 Πρόταση. *Έστω ότι* $\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M}'_\bullet$ *είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα. Εάν υποθέσουμε ότι τα* $\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M}'_\bullet$ *είναι ομοτοπικώς ισοδύναμα και* $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ *μια αλυσωτή ισοδυναμία, τότε*

$$H_n(\mathbf{M}_\bullet) \xrightarrow[H_n(f_\bullet)]{\cong} H_n(\mathbf{M'}_\bullet) \ , \ \forall n \in \mathbb{Z},$$

Ως εκ τούτου, στην ειδική περίπτωση όπου ο δακτύλιος αναφοράς R *είναι μια Π.Κ.Ι. και τα* $\mathbf{M}_\bullet$ *και* $\mathbf{M}'_\bullet$ *πεπερασμένα, έχουμε*

$$\chi_R(\mathbf{M}_\bullet) = \chi_R(\mathbf{M}'_\bullet).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εξ υποθέσεως, υπάρχει αλυσωτός μετασχηματισμός $g_\bullet : \mathbf{M}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}_\bullet$ (συγκεκριμένα, κάποια αλυσωτή ισοδυναμία υπό την έννοια τού ορισμού B.4.9) με $(g \circ f)_\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}$ και $(f \circ g)_\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{M}'_\bullet}$. Σύμφωνα με τις προτάσεις B.2.6, B.2.7 και B.4.6,

$$H_n(g_\bullet) \circ H_n(f_\bullet) = H_n((g \circ f)_\bullet) = H_n(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}) = \mathrm{id}_{H_n(\mathbf{M}_\bullet)}$$

και (κατ' αναλογίαν) $H_n(f_\bullet) \circ H_n(g_\bullet) = \mathrm{id}_{H_n(\mathbf{M}'_\bullet)}$. Τούτο σημαίνει ότι αμφότεροι οι $H_n(f_\bullet)$ και $H_n(g_\bullet)$ είναι ισομορφισμοί (και ο ένας αντίστροφος τού άλλου). Η ισότητα των αριθμών Euler (στην ανωτέρω αναφερθείσα ειδική περίπτωση) έπεται άμεσα από το θεώρημα B.3.7. □

B.4.11 Σημείωση. Εάν $\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M}'_\bullet$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα και $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ ένας αλυσωτός μετασχηματισμός με την ιδιότητα

$$H_n(\mathbf{M}_\bullet) \xrightarrow[H_n(f_\bullet)]{\cong} H_n(\mathbf{M'}_\bullet) \ , \ \forall n \in \mathbb{Z},$$

τότε δεν ισχύει εν γένει το αντίστροφο τής προτάσεως B.4.10, δηλαδή ο $f_\bullet$ *δεν είναι κατ' ανάγκην αλυσωτή ισοδυναμία*. Ωστόσο, μια ικανή συνθήκη για να ισχύει και το αντίστροφο δίδεται στο θεώρημα B.4.22.

B.4.12 Πρόταση. *Έστω ότι* $\mathbf{M}^\bullet$, $\mathbf{M}'^\bullet$ *είναι δυο συναλυσωτά σύμπλοκα. Εάν υποθέσουμε ότι τα* $\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M}'_\bullet$ *είναι ομοτοπικώς ισοδύναμα και* $f^\bullet : \mathbf{M}^\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'^\bullet$ *μια συναλυσωτή ισοδυναμία, τότε*

$$H^n(\mathbf{M}^\bullet) \xrightarrow[H^n(f^\bullet)]{\cong} H^n(\mathbf{M}'^\bullet)\ ,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Παρόμοια εκείνης (τού πρώτου μέρους) τής προτάσεως B.4.10. □

B.4.13 Ορισμός. Εάν $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα και $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ ένας αλυσωτός μετασχηματισμός, τότε η ακολουθία $\mathbf{C}(f)_\bullet = (\mathrm{C}(f)_n, d_n^f)_{n\in\mathbb{Z}}$, όπου

$$\boxed{\mathrm{C}(f)_n := M_{n-1} \oplus M'_n}$$

και

$$\boxed{\begin{gathered} d_n^f : \mathrm{C}(f)_n \longrightarrow \mathrm{C}(f)_{n-1}, \\ (x,y) \longmapsto d_n^f(x,y) := (-d_{n-1}(x), d'_n(y) + f_{n-1}(x)) \end{gathered}}$$

είναι **ο αλγεβρικός κώνος τού** $f_\bullet$.

B.4.14 Λήμμα. *Η ανωτέρω ακολουθία* $\mathbf{C}(f)_\bullet = (\mathrm{C}(f)_n, d_n^f)_{n\in\mathbb{Z}}$ *αποτελεί αλυσωτό σύμπλοκο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η d_n^f είναι προδήλως ομομορφισμός R-μοδίων για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Επίσης, για οιαδήποτε $n \in \mathbb{Z}$, $x \in M_{n-1}$ και $y \in M'_n$ έχουμε

$$\begin{aligned} &(d_{n-1}^f \circ d_n^f)(x,y) = d_{n-1}^f(-d_{n-1}(x), d'_n(y) + f_{n-1}(x)) \\ &= (-d_{n-2}(-d_{n-1}(x)), d'_{n-1}(d'_n(y) + f_{n-1}(x)) + f_{n-2}(-d_{n-1}(x))) \\ &= ((\underbrace{d_{n-2} \circ d_{n-1}}_{=0})(x), (\underbrace{d'_{n-1} \circ d'_n}_{=0})(y) + (\underbrace{d'_{n-1} \circ f_{n-1} - f_{n-2} \circ d_{n-1}}_{=0})(x)) = 0_{\mathrm{C}(f)_{n-2}}, \end{aligned}$$

διότι τα $\mathbf{M}_\bullet$ και $\mathbf{M}'_\bullet$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα και ο $f_\bullet$ αλυσωτός μετασχηματισμός. Άρα η $\mathbf{C}(f)_\bullet$ είναι όντως ένα αλυσωτό σύμπλοκο. □

B.4.15 Πρόταση. *Εάν* $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα,* $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ *ένας αλυσωτός μετασχηματισμός και*

$$\begin{aligned} j_\bullet = (j_n : M'_n \longrightarrow \mathrm{C}(f)_n)_{n\in\mathbb{Z}}, &\qquad p_\bullet = (p_n : \mathrm{C}(f)_n \longrightarrow M_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}, \\ y \longmapsto j_n(y) := (0_{M_{n-1}}, y), &\qquad (x,y) \longmapsto p_n(x,y) := x, \end{aligned}$$

τότε η μακρά ακολουθία R-μοδίων ομολογίας

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(\mathbf{C}(f)_\bullet) \arrow[r, "H_{n+1}(p_\bullet)"] & H_n(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, "H_n(f_\bullet)"] & H_n(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[dll, rounded corners, "H_n(j_\bullet)"] \\
& H_n(\mathbf{C}(f)_\bullet) \arrow[r, "H_n(p_\bullet)"] & H_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, "H_{n-1}(f_\bullet)"] & H_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[dll, rounded corners, "H_{n-1}(j_\bullet)"] \\
& H_{n-1}(\mathbf{C}(f)_\bullet) \arrow[r, "H_{n-1}(p_\bullet)"] & \cdots &
\end{tikzcd}
$$

είναι ακριβής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Λόγω τού ορισμού B.4.13 και τού λήμματος B.4.14 η

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet \overset{j_\bullet}{\hookrightarrow} \mathbf{C}(f)_\bullet \overset{p_\bullet}{\twoheadrightarrow} \mathbf{M}_{\bullet-1} \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet \tag{B.37}$$

είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων. Εφαρμόζοντας το θεώρημα B.2.12 κατασκευάζουμε *τη μακρά ακριβή ακολουθία ομολογίας*

$$\cdots \overset{H_{n+1}(j_\bullet)}{\longrightarrow} H_{n+1}(\mathbf{C}(f)_\bullet) \overset{H_{n+1}(p_\bullet)}{\longrightarrow} H_{n+1}(\mathbf{M}_{\bullet-1}) \overset{\partial_{n+1}}{\longrightarrow} H_n(\mathbf{M}'_\bullet) \overset{H_n(j_\bullet)}{\longrightarrow} H_n(\mathbf{C}(f)_\bullet) \rightarrow \cdots$$

για την (B.37). Λαμβάνοντας υπ' όψιν το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
& \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & M_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[dl, dashed, "f_{n-1}"'] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & M_{n-2} \arrow[dl, dashed, "f_{n-2}"] \\
& M'_n \arrow[r, "d'_n"] \arrow[d, hook, "j_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'_{n-1} \arrow[r, "d'_{n-1}"] \arrow[d, hook, "j_{n-1}"] & M'_{n-2} & \\
& \mathrm{C}(f)_n \arrow[r, "d^f_n"'] \arrow[d, two heads, "p_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{C}(f)_{n-1} \arrow[d, two heads, "p_{n-1}"] & & \\
M_n \arrow[r, "d_n"'] & M_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"'] \arrow[d] & M_{n-2} \arrow[d] & & \\
& \{0\} & \{0\} & &
\end{tikzcd}
$$

αρκεί να δειχθεί ότι ο συνδετικός ομομορφισμός

$$\partial_n : H_n(\mathbf{M}_{\bullet-1}) = H_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow H_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet)$$

ταυτίζεται με τον ομομορφισμό $H_{n-1}(f_\bullet)$ τον επαγόμενον μέσω τού αλυσωτού μετασχηματισμού $f_\bullet$. Για οιοδήποτε $x \in Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)$ έχουμε $x = p_n(x, y)$ για κάποιο

$y \in M'_n$ (καθόσον ο p_n είναι επιμορφισμός). Κατά συνέπειαν,

$$0_{M_{n-2}} = (d_{n-1} \circ p_n)(x,y) = (p_{n-1} \circ d_n^f)(x,y) = p_{n-1}(\underbrace{-d_{n-1}(x)}_{=0_{M_{n-2}}}, d'_n(y) + f_{n-1}(x))$$
$$\Rightarrow (0_{M_{n-2}}, d'_n(y) + f_{n-1}(x)) \in \operatorname{Ker}(p_{n-1}) = \operatorname{Im}(j_{n-1}),$$

οπότε $j_{n-1}(d'_n(y) + f_{n-1}(x)) = (0_{M_{n-2}}, \underbrace{d'_n(y) + f_{n-1}(x)}_{\in M'_{n-1}})$. Τούτο σημαίνει ότι

$$d'_{n-1}(d'_n(y) + f_{n-1}(x)) = (\underbrace{d'_{n-1} \circ d'_n}_{=0})(y) + (d'_{n-1} \circ f_{n-1})(x) = (f_{n-2} \circ d_{n-1})(x),$$

ήτοι ότι[25]

$$\partial_n(x + B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)) = (\underbrace{d'_n(y)}_{\in B_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet)} + f_{n-1}(x)) + B_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet)$$
$$= f_{n-1}(x) + B_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) = H_{n-1}(f_\bullet)(x + B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)).$$

Εξ αυτού συνάγεται η ισότητα $\partial_n = H_{n-1}(f_\bullet)$. □

Β.4.16 Σημείωση. Αλγεβρικός κώνος $\mathrm{C}(f)^\bullet = (\mathrm{C}(f)^n, d_f^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ μπορεί να ορισθεί και για *συναλυσωτούς μετασχηματισμούς* $f^\bullet : \mathbf{M}^\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'^\bullet$ μεταξύ *συναλυσωτών συμπλόκων* $\mathbf{M}^\bullet = (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ και $\mathbf{M}'^\bullet = (M'^n, d'^n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Εν προκειμένω, $\mathrm{C}(f)^n := M^{n+1} \oplus M'^n$,

$$d_f^n : \mathrm{C}(f)^n \longrightarrow \mathrm{C}(f)^{n+1},$$
$$(x,y) \longmapsto d_f^n(x,y) := (-d^{n+1}(x), d'^n(y) + f^{n+1}(x)),$$

και οι αυτονόητες παραλλαγές τού λήμματος Β.4.14 και τής προτάσεως Β.4.15 εξακολουθούν να ισχύουν *και σε επίπεδο μοδίων συνομολογίας*.

Β.4.17 Πρόταση. *Εάν* $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα και* $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ *ένας αλυσωτός μετασχηματισμός, τότε ισχύει η συνεπαγωγή*:

$$[H_n(f_\bullet) \text{ ισομορφισμός}, \forall n \in \mathbb{Z}] \Rightarrow [\text{Ο } H_n(\mathbf{C}(f)_\bullet) \text{ είναι τετριμμένος}, \forall n \in \mathbb{Z}].$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα χρησιμοποιήσουμε την μακρά ακριβή ακολουθία τής κατασκευασθείσας στην πρόταση Β.4.15. Υποθέτωντας ότι ο $H_n(f_\bullet)$ είναι ισομορφισμός για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, οι $H_n(p_\bullet)$ και $H_n(j_\bullet)$ είναι μηδενικοί[26] ομομορφισμοί. Έστω τυχών $n \in \mathbb{Z}$. Για να αποδειχθεί ότι ο R-μόδιος $H_n(\mathbf{C}(f)_\bullet)$ είναι τετριμμένος αρκεί να

---

[25] Για τον τρόπο ορισμού τού ∂_n βλ. εδάφιο Β.2.13.

[26] $\operatorname{Im}(H_n(p_\bullet)) = \{0_{H_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)}\} = \operatorname{Ker}(H_{n-1}(f_\bullet))$ και $\operatorname{Ker}(H_n(j_\bullet)) = H_n(\mathbf{M}'_\bullet) = \operatorname{Im}(H_n(f_\bullet))$.

αποδειχθεί ότι $(x,y) \in B_n(\mathbf{C}(f)_\bullet)$ *για κάθε* $(x,y) \in Z_n(\mathbf{C}(f)_\bullet)$. Έστω λοιπόν *τυχόν* ζεύγος $(x,y) \in Z_n(\mathbf{C}(f)_\bullet) = \mathrm{Ker}(d_n^f)$. Προφανώς,

$$\begin{aligned}(0_{M_{n-1}}, 0_{M'_n}) &= d_n^f(x,y) = (-d_{n-1}(x), d'_n(y) + f_{n-1}(x)) \\ &\Longrightarrow [x \in Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \text{ και } d'_n(y) + f_{n-1}(x) = 0_{M'_{n-1}}]. \end{aligned} \tag{B.38}$$

Από την άλλη μεριά,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(H_n(p_\bullet)) &= \{0_{H_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)}\} \Rightarrow H_n(p_\bullet)((x,y) + B_n(\mathbf{C}(f)_\bullet)) = B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \\ &\Rightarrow p_n(x,y) + B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) = B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \\ &\Rightarrow p_n(x,y) \in B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) = \mathrm{Im}(d_n) \\ &\Rightarrow [\exists x' \in M_n : d_n(x') = x]. \end{aligned} \tag{B.39}$$

Από τις (B.38) και (B.39) έπεται ότι

$$\begin{aligned} & d'_n(y) + (f_{n-1} \circ d_n)(x') = 0_{M'_{n-1}} \Rightarrow d'_n(y) + (d'_n \circ f_n)(x') = 0_{M'_{n-1}} \\ & \Rightarrow y + f_n(x') \in \mathrm{Ker}(d'_n) =: Z_n(\mathbf{M}'_\bullet) \\ & \Rightarrow y + f_n(x') + B_n(\mathbf{M}'_\bullet) \in H_n(\mathbf{M}'_\bullet) \,(= \mathrm{Ker}(H_n(j_\bullet))) \\ & \Rightarrow H_n(j_\bullet)(y + f_n(x') + B_n(\mathbf{M}'_\bullet)) = 0_{H_n(\mathbf{C}(f)_\bullet)} = B_n(\mathbf{C}(f)_\bullet) \\ & \Rightarrow (0_{M_{n-1}}, y + f_n(x')) \in B_n(\mathbf{C}(f)_\bullet) := \mathrm{Im}(d_{n+1}^f) \\ & \Rightarrow [\exists (z,w) \in M_n \oplus M'_{n+1} = \mathbf{C}(f)_n : d_{n+1}^f(z,w) = (0_{M_{n-1}}, y + f_n(x'))], \end{aligned}$$

οπότε

$$d_n(z) = 0_{M_{n-1}} \text{ και } d'_{n+1}(W) + f_n(z) = y + f_n(x') \tag{B.40}$$

και

$$\begin{aligned} d_{n+1}^f(z - x', w) &= (-d_n(z - x'), d'_{n+1}(w) + f_n(z - x')) \\ &= (-\underbrace{d_n(z)}_{=0_{M_{n-1}}} + d_n(x'), d'_{n+1}(w) + f_n(z) - f_n(x')) \end{aligned} \tag{B.41}$$

Οι (B.40) και (B.41) δίδουν $(x,y) = (d_n(x'), y) = d_{n+1}^f(z - x', w) \in B_n(\mathbf{C}(f)_\bullet)$. □

B.4.18 Ορισμός. Ένα αλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ καλείται **ελεύθερο αλυσωτό σύμπλοκο**[27] όταν οι R-μόδιοι M_n είναι ελεύθεροι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

B.4.19 Θεώρημα. *Έστω* $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *ένα ελεύθερο αλυσωτό σύμπλοκο. Εάν ο δακτύλιος αναφοράς* R *είναι Π.Κ.Ι., τότε* το $\mathbf{M}_\bullet$ είναι συσταλτό $\Longleftrightarrow$ [Ο R-μόδιος $H_n(\mathbf{M}_\bullet)$ είναι τετριμμένος για κάθε $n \in \mathbb{Z}$].

[27] Κατ' αναλογίαν, ένα *συναλυσωτό* σύμπλοκο $\mathbf{M}^\bullet = (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ καλείται **ελεύθερο συναλυσωτό σύμπλοκο** όταν οι R-μόδιοι M^n είναι ελεύθεροι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. "$\Rightarrow$" Εάν $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet} \simeq \mathbf{0}_\bullet$, έχουμε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$

$$H_n(\mathbf{M}_\bullet) \underset{\text{B.2.7}}{=} H_n(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet})(H_n(\mathbf{M}_\bullet)) \underset{\text{B.4.6}}{=} H_n(\mathbf{0}_\bullet)(H_n(\mathbf{M}_\bullet)) = 0_{Z_n(\mathbf{M}_\bullet)/B_n(\mathbf{M}_\bullet)}.$$

"$\Leftarrow$" Εάν $H_n(\mathbf{M}_\bullet) = \{0_{Z_n(\mathbf{M}_\bullet)/B_n(\mathbf{M}_\bullet)}\}$, τότε $Z_n(\mathbf{M}_\bullet) = B_n(\mathbf{M}_\bullet)$, οπότε σχηματίζεται η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow Z_n(\mathbf{M}_\bullet) = B_n(\mathbf{M}_\bullet) \hookrightarrow M_n \overset{\check{d}_n}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Im}(d_n) = B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow \{0\}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Επειδή ο M_{n-1} είναι εξ υποθέσεως ελεύθερος R-μόδιος, ο $B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \subseteq M_{n-1}$ είναι ωσαύτως ελεύθερος (δυνάμει τού θεωρήματος A.6.47). Το πόρισμα B.1.30 μας πληροφορεί ότι η ως άνω βραχεία ακριβής ακολουθία είναι *διασπώμενη*. Τούτο (βάσει τού θεωρήματος B.1.28) σημαίνει ότι

$$\exists s_{n-1} \in \mathrm{Hom}_R(B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet), M_n) : d_n \circ s_{n-1} = \mathrm{id}_{B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)}.$$

Ως εκ τούτου, ορίζεται (καλώς) ο ομομορφισμός R-μοδίων

$$h_n : M_n \longrightarrow M_{n+1}, \;\; h_n := s_n \circ (\mathrm{id}_{M_n} - s_{n-1} \circ d_n), \; \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Επειδή

$$\begin{aligned}
& d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n \\
&= \underbrace{d_{n+1} \circ s_n}_{=\mathrm{id}_{B_n(\mathbf{M}_\bullet)}} \circ (\mathrm{id}_{M_n} - s_{n-1} \circ d_n) + s_{n-1} \circ (\mathrm{id}_{M_{n-1}} - s_{n-2} \circ d_{n-1}) \circ d_n \\
&= \underbrace{d_{n+1} \circ s_n}_{=\mathrm{id}_{B_n(\mathbf{M}_\bullet)}} - \underbrace{d_{n+1} \circ s_n}_{=\mathrm{id}_{B_n(\mathbf{M}_\bullet)}} \circ s_{n-1} \circ d_n + s_{n-1} \circ d_n - s_{n-1} \circ s_{n-2} \circ \underbrace{d_{n-1} \circ d_n}_{=0} \\
&= \mathrm{id}_{B_n(\mathbf{M}_\bullet)} - 0 = \mathrm{id}_{Z_n(\mathbf{M}_\bullet)} - 0,
\end{aligned}$$

έχουμε $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet} \simeq \mathbf{0}_\bullet$. □

B.4.20 Σημείωση. Εάν υποτεθεί ότι M_1, M_2, N_1, N_2 είναι τέσσερεις R-μόδιοι και $f \in \mathrm{Hom}_R(M_1 \oplus M_2, N_1 \oplus N_2)$, τότε η εικόνα $f(x,y)$ ενός $(x,y) \in M_1 \oplus M_2$ μέσω τού f μπορεί να γραφεί ως διατεταγμένο ζεύγος στον $N_1 \oplus N_2$ υπό τη μορφή

$$f(x,y) = (\alpha(x) + \beta(y), \gamma(x) + \delta(y)),$$

όπου $\alpha : M_1 \longrightarrow N_1, \beta : M_2 \longrightarrow N_1, \gamma : M_1 \longrightarrow N_2$ και $\delta : M_2 \longrightarrow N_2$ είναι καταλλήλως επιλεγόμενοι ομομορφισμοί R-μοδίων. Πράγματι· θεωρώντας τό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[rrrr, "\alpha"] \arrow[dr, hook, "\mathrm{in}_1"] & & & & N_1 \\
& M_1 \oplus M_2 \arrow[rr, "f"] & & N_1 \oplus N_2 \arrow[ur, two heads, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[dr, two heads, "\mathrm{pr}_2"'] & \\
M_2 \arrow[rrrr, "\delta"'] \arrow[ur, hook, "\mathrm{in}_2"'] & & & & N_2
\end{tikzcd}$$

αρκεί να θέσουμε

$$\alpha := \mathrm{pr}_1 \circ f \circ \mathrm{in}_1, \qquad \beta := \mathrm{pr}_1 \circ f \circ \mathrm{in}_2,$$
$$\gamma := \mathrm{pr}_2 \circ f \circ \mathrm{in}_1, \qquad \delta := \mathrm{pr}_2 \circ f \circ \mathrm{in}_2.$$

B.4.21 Θεώρημα. *Έστω ότι τα* $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι δυο ελεύθερα αλυσωτά σύμπλοκα και* $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ *ένας αλυσωτός μετασχηματισμός. Εάν ο δακτύλιος αναφοράς* R *είναι Π.Κ.Ι., τότε ισχύει η συνεπαγωγή :*

$$[\text{O } H_n(\mathbf{C}(f)_\bullet) \text{ είναι τετριμμένος}, \forall n \in \mathbb{Z}] \Longrightarrow [\text{O } f_\bullet \text{ είναι αλυσωτή ισοδυναμία}].$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $H_n(\mathbf{C}(f)_\bullet) = 0_{Z_n(\mathbf{C}(f)_\bullet)/B_n(\mathbf{C}(f)_\bullet)}, \forall n \in \mathbb{Z}$, τότε (σύμφωνα με το θεώρημα B.4.19) υπάρχει μια συστέλλουσα ομοτοπία $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \mathrm{id}_{\mathbf{C}(f)_\bullet} \simeq \mathbf{0}_\bullet$, ήτοι μια ακολουθία ομομορφισμών R-μοδίων $h_n : \mathrm{C}(f)_n \longrightarrow \mathrm{C}(f)_{n+1}$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$d^f_{n+1} \circ h_n - h_{n-1} \circ d^f_n = \mathrm{id}_{\mathrm{C}(f)_n}, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{B.42}$$

Βάσει των προαναφερθέντων στη σημείωση B.4.20, ορίζονται κατά τρόπο φυσικό ομομορφισμοί R-μοδίων

$$\alpha_{n-1} : M_{n-1} \longrightarrow M_n, \qquad \beta_n : M'_n \longrightarrow M_n,$$
$$\gamma_{n-1} : M_{n-1} \longrightarrow M'_{n+1}, \qquad \delta_n : M'_n \longrightarrow M'_{n+1},$$

με $h_n(x,y) = (\alpha_{n-1}(x) + \beta_n(y), \gamma_{n-1}(x) + \delta_n(y)), \ \forall (x,y) \in \mathrm{C}(f)_n$. Προφανώς,

$$d^f_{n+1}(h_n(x,y)) = (-d_n(\alpha_{n-1}(x) + \beta_n(y)), d'_{n+1}(\gamma_{n-1}(x) + \delta_n(y)) + f_n(\alpha_{n-1}(x) + \beta_n(y))) \tag{B.43}$$

και

$$\begin{aligned} &h_{n-1}(d^f_n(x,y)) = h_{n-1}(-d_{n-1}(x), d'_n(y) + f_{n-1}(x)) \\ &= (-\alpha_{n-2}(d_{n-1}(x)) + \beta_{n-1}(d'_n(y) + f_{n-1}(x)), -\gamma_{n-2}(d_{n-1}(x)) + \delta_{n-1}(d'_n(y) + f_{n-1}(x))). \end{aligned} \tag{B.44}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (B.43) και (B.44), και λαμβάνοντας υπ' όψιν την (B.42) συμπεραίνουμε τα ακόλουθα:
(i) Για $x = 0_{M_{n-1}}$ και τυχόν $y \in M'_n$:

$$(0_{M_{n-1}}, y) = (-d_n(\beta_n(y)) + \beta_{n-1}(d'_n(y)), d'_{n+1}(\delta_n(y)) + f_n(\beta_n(y)) + \delta_{n-1}(d'_n(y))),$$

απ' όπου έπεται ότι

$$[\beta_{n-1} \circ d'_n = d_n \circ \beta_n, \ \forall n \in \mathbb{Z}] \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{H } \beta_\bullet = (\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}} \text{ είναι} \\ \text{αλυσωτός μετασχηματισμός} \end{array} \right] \tag{B.45}$$

και

$$d'_{n+1} \circ \delta_n + \delta_{n-1} \circ d'_n = \mathrm{id}_{M'_n} = f_n \circ \beta_n, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{B.46}$$

(ii) Για τυχόν $x \in M_{n-1}$ και $y = 0_{M'_n}$:

$$(x, 0_{M'_n}) = (-d_n(\alpha_{n-1}(x)) - \alpha_{n-2}(d_{n-1}(x)) + \beta_{n-1}(f_{n-1}(x)), ...)$$

Εξισώνοντας τις πρώτες συντεταγμένες λαμβάνουμε

$$-d_n \circ \alpha_{n-1} - \alpha_{n-2} \circ d_{n-1} = \mathrm{id}_{M_{n-1}} - \beta_{n-1} \circ f_{n-1}$$

και (ανυψώνοντας τους δείκτες κατά 1)

$$-d_{n+1} \circ \alpha_n - \alpha_{n-1} \circ d_n = \mathrm{id}_{M_n} - \beta_n \circ f_n, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \qquad \text{(B.47)}$$

Από τις (B.45), (B.46) και (B.47) έπεται ότι $(f \circ \beta)_\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{M}'_\bullet}$ και $(\beta \circ f)_\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}$, ήτοι ότι ο $f_\bullet$ είναι αλυσωτή ομοτοπία. □

B.4.22 Θεώρημα. *Έστω ότι τα* $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι δυο ελεύθερα αλυσωτά σύμπλοκα και* $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ *ένας αλυσωτός μετασχηματισμός. Εάν ο δακτύλιος αναφοράς* R *είναι Π.Κ.Ι., τότε*

$$[\text{Ο } f_\bullet \text{ είναι αλυσωτή ισοδυναμία}] \Longleftrightarrow [H_n(f_\bullet) \text{ ισομορφισμός}, \forall n \in \mathbb{Z}].$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. "$\Rightarrow$" Βλ. πρόταση B.4.10.
"$\Leftarrow$" $[H_n(f_\bullet)$ ισομορφισμός για κάθε $n \in \mathbb{Z}]$ $\underset{\text{B.4.17}}{\Longrightarrow}$ [Ο $H_n(\mathbf{C}(f)_\bullet)$ είναι τετριμμένος για κάθε $n \in \mathbb{Z}]$ $\underset{\text{B.4.21}}{\Longrightarrow}$ [Ο $f_\bullet$ είναι αλυσωτή ισοδυναμία.] □

B.4.23 Σημείωση. Επί τη βάσει των προαναφερθέντων στη σημείωση B.4.16 οι αυτονόητες παραλλαγές τόσον τής προτάσεως B.4.17 όσον και των θεωρημάτων B.4.19, B.4.21 και B.4.22 εξακολουθούν να ισχύουν *και σε επίπεδο μοδίων συνομολογίας*.