ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η θεμελιώδης ομάδα

Μια πρώτη δόση «αλγεβροποιήσεως» τοπολογικών δεδομένων αναφύεται από την εισαγωγή τής λεγομένης *θεμελιώδους ομάδας*. Στο κεφάλαιο αυτό δίδονται οι απαραίτητοι σχετικοί ορισμοί και παρατίθενται οι κύριες ιδιότητες τής εν λόγω ομάδας[1].

2.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΘΕΜΕΛΙΩΔΟΥΣ ΟΜΑΔΑΣ

2.1.1 Ορισμός. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Εάν $\alpha, \beta : \mathbf{I} \longrightarrow X$ είναι δυο δρόμοι εντός τού X (υπό την έννοια τού ορισμού 1.9.18, όπου $\mathbf{I} := [0,1]$), για τους οποίους ισχύει $\alpha(1) = \beta(0)$, τότε ως **γινόμενο** των α, β ορίζεται ο δρόμος[2]

$$\boxed{\mathbf{I} \ni t \longmapsto (\alpha \circledast \beta)(t) := \begin{cases} \alpha(2t), & \text{όταν } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(2t-1), & \text{όταν } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}}$$

Εξάλλου, για κάθε δρόμο $\alpha : \mathbf{I} \longrightarrow X$ εντός τού X θέτουμε

$$\boxed{\overline{\alpha} : \mathbf{I} \longrightarrow X, \ \ t \longmapsto \overline{\alpha}(t) := \alpha(1-t) \, .}$$

[1] Για μια λεπτομερέστερη μελέτη αυτής βλ. Lima [65].

[2] Επειδή οι περιορισμοί $(\alpha \circledast \beta)|_{[0,\frac{1}{2}]}$ και $(\alpha \circledast \beta)|_{[\frac{1}{2},1]}$ είναι συνεχείς απεικονίσεις, η απεικόνιση $\alpha \circledast \beta$ είναι καθ' ολοκληρίαν (ήτοι επί ολοκλήρου τού $\mathbf{I}$) συνεχής επί τη βάσει τής προτάσεως 1.4.6. (Η εν λόγω πρόταση χρησιμοποιείται κατ' επανάληψη -αλλ' ενίοτε σιωπηρώς- σε αρκετές από τις αποδείξεις που ακολουθούν προκειμένου να εξασφαλίζεται η συνέχεια απεικονίσεων με *διαφορετικούς* τύπους ορισμού σε διαφορετικά, πεπερασμένου πλήθους κλειστά υποδιαστήματα που διαμελίζουν το $\mathbf{I}$.)

2.1.2 Πρόταση. *Εάν $\alpha, \beta : \mathbf{I} \longrightarrow X$ είναι δυο δρόμοι εντός ενός τοπολογικού χώρου X, για τους οποίους ισχύει $\alpha(1) = \beta(0)$, τότε*

$$\overline{\alpha \circledast \beta} = \overline{\beta} \circledast \overline{\alpha}. \tag{2.1}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε $t \in \mathbf{I}$ έχουμε προφανώς

$$(\overline{\alpha \circledast \beta})(t) = (\alpha \circledast \beta)(1-t) = \begin{cases} \alpha(2-2t), & \text{όταν } t \in [\frac{1}{2}, 1], \\ \beta(1-2t), & \text{όταν } t \in [0, \frac{1}{2}]. \end{cases}$$

Από την άλλη μεριά, $\big(\overline{\beta} \circledast \overline{\alpha}\big)(t) = (\alpha \circledast \beta)(1-t)$, οπότε η ισότητα (2.1) είναι όντως αληθής. $\square$

2.1.3 Πρόταση. *Ας υποθέσουμε ότι $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ είναι δρόμοι εντός ενός τοπολογικού χώρου X, όπου*

$$\alpha(0) = \alpha'(0), \ \alpha(1) = \alpha'(1) = \beta(0) = \beta'(0), \ \beta(1) = \beta'(1)$$

και $\alpha \simeq \alpha'$ ΣΧ.$\{0,1\}$, $\beta \simeq \beta'$ΣΧ.$\{0,1\}$. Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) $\alpha \circledast \beta \simeq \alpha' \circledast \beta'$ΣΧ.$\{0,1\}$.

(ii) $\overline{\alpha} \simeq \overline{\alpha'}$ ΣΧ.$\{0,1\}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Εάν $H' : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow X$ είναι μια ομοτοπία σχετικώς προς το $\{0,1\}$ από τον δρόμο α στον δρόμο α' και $H'' : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow X$ μια ομοτοπία σχετικώς προς το $\{0,1\}$ από τον δρόμο β στον δρόμο β', τότε ορίζεται μια ομοτοπία

$$H(t,s) := \begin{cases} H'(2t,s), & \text{όταν } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ H''(2t-1,s), & \text{όταν } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

με $H(0,s) = \alpha(0) = \alpha'(0)$, $H(1,s) = \beta(1) = \beta'(1)$ και

$$H(t,0) = (\alpha \circledast \beta)(t), \ \ H(t,1) = (\alpha' \circledast \beta')(t),$$

απ' όπου έπεται ότι $\alpha \circledast \beta \simeq \alpha' \circledast \beta'$ΣΧ.$\{0,1\}$.

(ii) Εάν $H : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow X$ είναι μια ομοτοπία σχετικώς προς το $\{0,1\}$ από τον δρόμο α στον δρόμο α', τότε ορίζεται μια ομοτοπία

$$\overline{H} : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow X, \ \ (t,s) \longmapsto \overline{H}(t,s) := H(1-t,s),$$

με $\overline{H}(0,s) = H(1,s) = \alpha(1) = \overline{\alpha}(0) = \alpha'(1) = \overline{\alpha'}(0)$,

$$\overline{H}(1,s) = H(0,s) = \alpha(0) = \overline{\alpha}(1) = \alpha'(0) = \overline{\alpha'}(1)$$

και $\overline{H}(t,0) = \overline{\alpha}(t)$, $\overline{H}(t,1) = \overline{\alpha'}(t)$, οπότε $\overline{\alpha} \simeq \overline{\alpha'}$ΣΧ.$\{0,1\}$. $\square$

2.1.4 Λήμμα. *Εάν α, α' είναι δρόμοι εντός ενός τοπολογικού χώρου X και $f : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ μια συνεχής απεικόνιση με $f(0) = 0, f(1) = 1$ και $\alpha' = \alpha \circ f$, τότε $\alpha \simeq \alpha'$ ΣΧ.$\{0, 1\}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή $sf(t) + (1 - s)t \in [0, 1]$ για κάθε ζεύγος $(t, s) \in \mathbf{I} \times \mathbf{I}$, ορίζεται καλώς η απεικόνιση

$$H : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow X, \quad (t, s) \longmapsto H(t, s) := \alpha(sf(t) + (1 - s)t),$$

η οποία είναι συνεχής. Προφανώς, $H_0 = \alpha$, $H_1 = \alpha \circ f = \alpha'$ και για κάθε $s \in \mathbf{I}$,

$$H(0, s) = \alpha(0) \;\text{ και }\; H(1, s) = \alpha(1).$$

Άρα η H είναι μια ομοτοπία σχετικώς προς το $\{0, 1\}$ από τον α στον α'. □

2.1.5 Πρόταση. *Εάν α, β, γ είναι δρόμοι εντός ενός τοπολογικού χώρου X με $\alpha(1) = \beta(0)$ και $\beta(1) = \gamma(0)$, τότε*

$$(\alpha \circledast \beta) \circledast \gamma \simeq \alpha \circledast (\beta \circledast \gamma) \,\text{ΣΧ.}\, \{0, 1\}. \tag{2.2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή

$$\begin{aligned} ((\alpha \circledast \beta) \circledast \gamma)(t) &= \begin{cases} (\alpha \circledast \beta)(2t), & \text{όταν } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma(2t - 1), & \text{όταν } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(2t), & \text{όταν } t \in [0, \frac{1}{4}], \\ \beta(4t - 1), & \text{όταν } t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ \gamma(2t - 1), & \text{όταν } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} (\alpha \circledast (\beta \circledast \gamma))(t) &= \begin{cases} \alpha(2t), & \text{όταν } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ (\beta \circledast \gamma)(2t - 1), & \text{όταν } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(2t), & \text{όταν } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(4t - 2), & \text{όταν } t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \\ \gamma(4t - 3), & \text{όταν } t \in [\frac{3}{4}, 1], \end{cases} \end{aligned}$$

ορίζοντας την απεικόνιση $f : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{I}$ μέσω τού τύπου

$$f(t) := \begin{cases} 2t, & \text{όταν } t \in [0, \frac{1}{4}], \\ t + \frac{1}{4}, & \text{όταν } t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}, & \text{όταν } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής με $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ και

$$(\alpha \circledast (\beta \circledast \gamma)) \circ f = (\alpha \circledast \beta) \circledast \gamma,$$

απ' όπου έπεται η (2.2) λόγω τού λήμματος 2.1.4. □

2.1.6 Συμβολισμός. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και έστω $x \in X$. Ως

$$\mathrm{const}_x : \mathbf{I} \longrightarrow X,\ t \longmapsto \mathrm{const}_x(t) := x,$$

θα συμβολίζεται ο **σταθερός δρόμος** (που στέλνει κάθε σημείο τού $\mathbf{I}$ να απεικονισθεί στο x).

2.1.7 Πρόταση. *Για κάθε δρόμο α εντός ενός τοπολογικού χώρου X έχουμε*

$$\mathrm{const}_{\alpha(0)} \circledast \alpha \simeq \alpha \Sigma \mathrm{X}.\,\{0,1\} \ \text{ και } \ \alpha \circledast \mathrm{const}_{\alpha(1)} \simeq \alpha \Sigma \mathrm{X}.\,\{0,1\}\,. \tag{2.3}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ορίζοντας τις συνεχείς απεικονίσεις

$$f(t) := \begin{cases} 0, & \text{όταν } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2t-1, & \text{όταν } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \quad \text{και} \quad g(t) := \begin{cases} 2t, & \text{όταν } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1, & \text{όταν } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

παρατηρούμε ότι $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ και

$$\mathrm{const}_{\alpha(0)} \circledast \alpha = \alpha \circ f,\ \ \alpha \circledast \mathrm{const}_{\alpha(1)} = \alpha \circ g,$$

οπότε ύστερα από διπλή εφαρμογή τού λήμματος 2.1.4 διαπιστώνουμε ότι οι (2.3) είναι αληθείς. □

2.1.8 Πρόταση. *Για κάθε δρόμο α εντός ενός τοπολογικού χώρου X έχουμε*

$$\alpha \circledast \overline{\alpha} \simeq \mathrm{const}_{\alpha(0)}\, \Sigma \mathrm{X}.\,\{0,1\} \ \text{ και } \ \overline{\alpha} \circledast \alpha \simeq \mathrm{const}_{\alpha(1)}\, \Sigma \mathrm{X}.\,\{0,1\}\,. \tag{2.4}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προφανώς, $\alpha \circledast \overline{\alpha} = \alpha \circ f$, όπου

$$(\alpha \circledast \overline{\alpha})\,(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{όταν } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \overline{\alpha}(2t-1), & \text{όταν } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \quad \text{και} \quad f(t) := \begin{cases} 2t, & \text{όταν } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2-2t, & \text{όταν } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

με $\overline{\alpha}(2t-1) = \alpha(2-2t)$, $\forall t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Θέτοντας

$$H : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow X,\ \ (t,s) \longmapsto H(t,s) := \alpha(sf(t)),$$

λαμβάνουμε $H(t,0) = \alpha(0)$, $H(t,1) = \alpha\,(f(t)) = (\alpha \circledast \overline{\alpha})(t)$ και

$$H(0,s) = \alpha(0) = \alpha(sf(1)) = H(1,s).$$

Εξ αυτών έπεται ότι η H αποτελεί μια ομοτοπία σχετικώς προς το $\{0,1\}$ από τον σταθερό δρόμο $\mathrm{const}_{\alpha(0)}$ στον δρόμο $\alpha \circledast \overline{\alpha}$, οπότε η πρώτη εκ των (2.4) είναι αληθής. Για την επαλήθευση τής δεύτερης αρκεί κανείς να επαναλάβει την προηγηθείσα επιχειρηματολογία με τον δρόμο $\overline{\alpha}$ στη θέση τού δρόμου α και να λάβει υπ' όψιν ότι $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$. □

2.1.9 Ορισμός. Ένας δρόμος $\alpha : \mathbf{I} \longrightarrow X$ εντός ενός τοπολογικού χώρου X καλείται **βρόχος** (ή **κλειστός δρόμος**) έχων το $x_0 \in X$ ως **βασικό του σημείο** (ή **σημείο αναφοράς**) όταν $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. Το σύνολο όλων των βρόχων εντός τού X των εχόντων ως βασικό τους σημείο το x_0 θα σημειώνεται εφεξής ως $\Omega(X, x_0)$. Σημειωτέον ότι για οιουσδήποτε $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$ έχουμε $\alpha \circledast \beta \in \Omega(X, x_0)$.

2.1.10 Ορισμός. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και έστω x_0 ένα σημείο αυτού. Για κάθε $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ συμβολίζουμε εν συντομία ως $[\alpha]^{\text{ομ.}}$ την κλάση ομοτοπίας $[\alpha]^{\text{ομ.}}_{(\mathbf{I},\{0,1\}),X}$ τού α σχετικώς προς το $\{0, 1\}$ (βλ. εδ. 1.17.10) και θέτουμε

$$\boxed{\boldsymbol{\pi}_1(X, x_0) := \{ [\alpha]^{\text{ομ.}} \,|\, \alpha \in \Omega(X, x_0)\}\,.}$$

Βάσει των προτάσεων 2.1.5, 2.1.7 και 2.1.8, το $\boldsymbol{\pi}_1(X, x_0)$, εφοδιαζόμενο με την εσωτερική πράξη[3]

$$\boxed{\boldsymbol{\pi}_1(X, x_0) \times \boldsymbol{\pi}_1(X, x_0) \ni ([\alpha]^{\text{ομ.}}, [\beta]^{\text{ομ.}}) \longmapsto [\alpha]^{\text{ομ.}} \bullet [\beta]^{\text{ομ.}} := [\alpha \circledast \beta]^{\text{ομ.}} \in \boldsymbol{\pi}_1(X, x_0),}$$

καθίσταται ομάδα έχουσα ως ουδέτερό της στοιχείο την κλάση $[\mathrm{const}_{x_0}]^{\text{ομ.}}$ και ως αντίστροφο οιασδήποτε κλάσεως $[\alpha]^{\text{ομ.}} \in \boldsymbol{\pi}_1(X, x_0)$ (ως προς την "$\bullet$") την $[\overline{\alpha}]^{\text{ομ.}}$. Η $(\boldsymbol{\pi}_1(X, x_0), \bullet)$ καλείται **θεμελιώδης ομάδα** (ή **πρώτη ομάδα ομοτοπίας**) **τού** X **στο σημείο** x_0.

2.1.11 Σημείωση. Η έννοια τής θεμελιώδους ομάδας εισήχθη το 1895 (και, σε κάπως ακριβέστερη διατύπωση, το 1904) από τον Poincaré[4] (ως προϊόν των μελετών του περί τού συσχετισμού κλειστών δρόμων σε επιφάνειες και συστημάτων υποκαταστάσεως πλειότιμων συναρτήσεων επ' αυτών, στο πλαίσιο τής Θεωρίας Συναρτήσεων τού Fuchs), ενώ η αλγεβρική της υπόσταση ξεκίνησε να κεντρίζει το ενδιαφέρον των ερευνητών αργότερα, ιδίως περί τη δεύτερη και την τρίτη δεκαε-

[3] Το ότι η απεικόνιση $([\alpha]^{\text{ομ.}}, [\beta]^{\text{ομ.}}) \longmapsto [\alpha]^{\text{ομ.}} \bullet [\beta]^{\text{ομ.}}$ είναι *καλώς ορισμένη* έπεται από το (i) τής προτάσεως 2.1.3.

[4] Poincaré, *Jules-Henri* (29/4/1854-17/7/1912). Γάλλος μαθηματικός, φυσικός, αστρονόμος και φιλόσοφος. Εξάδελφος τού ενάτου προέδρου (1913-1920) τής Γαλλικής Δημοκρατίας, Raymond Poincaré. Σπούδασε μηχανολογία στο Πολυτεχνείο των Παρισίων, αλλά σύντομα ανακάλυψε την κλίση του στα Μαθηματικά. Το 1879 εξεπόνησε τη διδακτορική του διατριβή υπό τον G. Darboux επί ορισμένων διαφορικών εξισώσεων. Έκτοτε η σταδιοδρομία του υπήρξε υποδειγματική. Διετέλεσε μάλιστα καθηγητής τής Sorbonne (από το 1885), όπου δίδαξε Μαθηματική Φυσική, Ουράνιο Μηχανική και Ανάλυση. Ο μέγας γεωμέτρης F. Klein τον χαρακτήρισε στις αρχές τού εικοστού αιώνα ως τον «πλέον αναγνωρισμένο εκπρόσωπο των Γαλλικών Μαθηματικών». Πράγματι· την εποχή που έζησε πιθανώς να μην υπήρχε άλλος τόσο «καθολικός μαθηματικός» με τέτοια φαντασία και αποδοτικό έργο. Ο Poincaré ήταν ιδιαίτερα παραγωγικός. (250 ερευνητικές εργασίες και άλλες τόσες εκλαϊκευμένες δημοσιεύσεις, λόγοι και άρθρα φιλοσοφικού περιεχομένου κοσμούν το πνευματικό του κληροδότημα.) Οι κύριες περιοχές τής έρευνάς του περιλαμβάνουν τη Θεωρία των Μιγαδικών Συναρτήσεων, τη Θεωρία Δυναμικού, τη Θερμοδυναμική, την Υδρομηχανική, τη Θεωρία Ελαστικότητας, την Οπτική, την Ηλεκτροδυναμική, τον Ηλεκτρομαγνητισμό, την Κοσμολογία κ.α. Εξάλλου δίκαια θεωρείται ως ο πατέρας τής σύγχρονης «Αλγεβρικής Τοπολογίας» (που τότε ονομαζόταν «Analysis Situs»). Για μια σύγχρονη εισαγωγή στο τοπολογικό του έργο παραπέμπουμε στα δύο πρώτα κεφάλαια τού βιβλίου [24] τού J. Dieudonné. Για περισσότερα βιογραφικά στοιχεία βλ. E. T. Bell: *Οι μαθηματικοί. Τόμος* II. (*Από τον Lobatchewsky έως τον Cantor*), σε μετάφραση Ν. Σταματάκη, Π. Ε. Κ., 1993, κεφ. 28, σελ. 389-436.

τία τού 20ου αιώνα.

H. Poincaré

(Πρβλ. Scholz [108], σελ. 311-315, και Stillwell [113], σελ. 110-116.)

2.1.12 Πρόταση. *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Εάν $x_0, x_0' \in X$ και $\beta : \mathbf{I} \to X$ είναι ένας δρόμος εντός τού X με $\beta(0) = x_0'$ και $\beta(1) = x_0$, τότε η απεικόνιση*

$$\boxed{\boldsymbol{\pi}_1(X, x_0) \ni [\alpha]^{\text{ομ.}} \overset{\vartheta_\beta}{\longmapsto} [\beta \circledast \alpha \circledast \overline{\beta}]^{\text{ομ.}} \in \boldsymbol{\pi}_1(X, x_0')} \tag{2.5}$$

αποτελεί έναν ομομορφισμό ομάδων. Επιπροσθέτως, ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) *Εάν $\beta_1, \beta_2 : \mathbf{I} \longrightarrow X$ είναι δρόμοι εντός τού X με $\beta_1(1) = \beta_2(0)$, τότε $\vartheta_{\beta_1 \circledast \beta_2} = \vartheta_{\beta_1} \circ \vartheta_{\beta_2}$.*

(ii) *Ο (2.5) είναι ισομορφισμός ομάδων εξαρτώμενος μόνον από την κλάση $[\beta]^{\text{ομ.}}$.*

(iii) *Εάν $\gamma : \mathbf{I} \longrightarrow X$ είναι ένας δεύτερος δρόμος εντός τού X με $\gamma(0) = x_0'$ και $\gamma(1) = x_0$, τότε οι ϑ_β και ϑ_γ διαφέρουν μόνον μέχρις ενός εσωτερικού αυτομορφισμού τής ομάδας $\boldsymbol{\pi}_1(X, x_0')$. Ιδιαιτέρως, όταν η $\boldsymbol{\pi}_1(X, x_0)$ είναι αβελιανή, ο εν λόγω ισομορφισμός ϑ_β είναι μονοσημάντως ορισμένος.*

Απόδειξη. Εάν $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega(X, x_0)$, τότε

$$\begin{aligned}
&\vartheta_\beta([\alpha_1]^{\text{ομ.}} \bullet [\alpha_2]^{\text{ομ.}}) = \vartheta_\beta([\alpha_1 \circledast \alpha_2]^{\text{ομ.}})\\
&= [\beta \circledast \alpha_1 \circledast \alpha_2 \circledast \overline{\beta}]^{\text{ομ.}} \underset{(2.4)}{=} [\beta \circledast \alpha_1 \circledast \overline{\beta} \circledast \beta \circledast \alpha_2 \circledast \overline{\beta}]^{\text{ομ.}}\\
&= [\beta \circledast \alpha_1 \circledast \overline{\beta}]^{\text{ομ.}} \bullet [\beta \circledast \alpha_2 \circledast \overline{\beta}]^{\text{ομ.}} = \vartheta_\beta([\alpha_1]^{\text{ομ.}}) \bullet \vartheta_\beta([\alpha_2]^{\text{ομ.}}).
\end{aligned}$$

(i) Εάν $\beta_1, \beta_2 : \mathbf{I} \longrightarrow X$ είναι δρόμοι εντός τού X με $\beta_1(1) = \beta_2(0)$, τότε για κάθε $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\vartheta_{\beta_1 \circledast \beta_2}([\alpha]^{\text{ομ.}}) = [(\beta_1 \circledast \beta_2) \circledast \alpha \circledast (\overline{\beta_1 \circledast \beta_2})]^{\text{ομ.}}\\
&\underset{(2.1)}{=} [(\beta_1 \circledast \beta_2) \circledast \alpha \circledast (\overline{\beta_2} \circledast \overline{\beta_1})]^{\text{ομ.}} = [\beta_1 \circledast (\beta_2 \circledast \alpha \circledast \overline{\beta_2}) \circledast \overline{\beta_1}]^{\text{ομ.}}\\
&= [\beta_1]^{\text{ομ.}} \bullet [\beta_2 \circledast \alpha \circledast \overline{\beta_2}]^{\text{ομ.}} \bullet [\overline{\beta_1}]^{\text{ομ.}} = [\beta_1]^{\text{ομ.}} \bullet \vartheta_{\beta_2}([\alpha]^{\text{ομ.}}) \bullet [\overline{\beta_1}]^{\text{ομ.}}\\
&= [\beta_1 \circledast \vartheta_{\beta_2}([\alpha]^{\text{ομ.}}) \circledast \overline{\beta_1}]^{\text{ομ.}} = \vartheta_{\beta_1}(\vartheta_{\beta_2}([\alpha]^{\text{ομ.}})) = (\vartheta_{\beta_1} \circ \vartheta_{\beta_2})([\alpha]^{\text{ομ.}}).
\end{aligned}$$

(ii) Ο ομομορφισμός (2.5) είναι *ισομορφισμός* έχων ως αντίστροφό του τον

$$\vartheta_{\overline{\beta}} : \boldsymbol{\pi}_1(X, x_0') \longrightarrow \boldsymbol{\pi}_1(X, x_0),$$

διότι (σύμφωνα με το (i) και την πρόταση 2.1.8)

$$\vartheta_\beta \circ \vartheta_{\overline{\beta}} = \vartheta_{\beta \circledast \overline{\beta}} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{\pi}_1(X, x_0')}, \ \ \vartheta_{\overline{\beta}} \circ \vartheta_\beta = \vartheta_{\overline{\beta} \circledast \beta} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{\pi}_1(X, x_0)}.$$

Το ότι αυτός εξαρτάται μόνον από την κλάση $[\beta]^{\text{ομ.}}$ έπεται από την πρόταση 2.1.3.
(iii) Για κάθε $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ έχουμε

$$\vartheta_\gamma([\alpha]^{\text{ομ.}}) = [\gamma \circledast \alpha \circledast \overline{\gamma}]^{\text{ομ.}} \underset{(2.4)}{=} [\gamma \circledast (\overline{\beta} \circledast \beta) \circledast \alpha \circledast (\overline{\beta} \circledast \beta) \circledast \overline{\gamma}]^{\text{ομ.}}$$

$$= [(\gamma \circledast \overline{\beta}) \circledast (\beta \circledast \alpha \circledast \overline{\beta}) \circledast (\beta \circledast \overline{\gamma})]^{\text{ομ.}} = [\gamma \circledast \overline{\beta}]^{\text{ομ.}} \bullet \vartheta_\beta([\alpha]^{\text{ομ.}}) \bullet ([\gamma \circledast \overline{\beta}]^{\text{ομ.}})^{-1},$$

οπότε ο ισχυρισμός είναι αληθής. □

2.1.13 Σημείωση. Στην περίπτωση κατά την οποία ο X είναι *δρομοσυνεκτικός*, οι θεμελιώδεις ομάδες του σε *διαφορετικά* βασικά σημεία του είναι *πάντοτε ισόμορφες*. Γι' αυτόν τον λόγο γράφουμε $\boldsymbol{\pi}_1(X)$ αντί $\boldsymbol{\pi}_1(X, x_0)$ (καλώντας τήν μέχρις ισομορφισμού μονοσημάντως ορισμένη $\boldsymbol{\pi}_1(X)$ **θεμελιώδη ομάδα τού** X) χωρίς να κάνουμε μνεία τού σημείου αναφοράς.

2.1.14 Πρόταση. *Εάν X, Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι, $x_0 \in X$ και $y_0 \in Y$, τότε*

$$\boxed{\boldsymbol{\pi}_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \boldsymbol{\pi}_1(X, x_0) \times \boldsymbol{\pi}_1(Y, y_0).}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Μέσω των προβολών

$$X \times Y \ni (x, y) \overset{\mathrm{pr}_1}{\longmapsto} x \in X, \ X \times Y \ni (x, y) \overset{\mathrm{pr}_2}{\longmapsto} y \in Y$$

επάγονται οι ομομορφισμοί ομάδων

$$\boldsymbol{\pi}_1(\mathrm{pr}_1) : \boldsymbol{\pi}_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \boldsymbol{\pi}_1(X, x_0), \ \boldsymbol{\pi}_1(\mathrm{pr}_2) : \boldsymbol{\pi}_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \boldsymbol{\pi}_1(Y, y_0).$$

Κάθε $\alpha \in \Omega(X \times Y, (x_0, y_0))$ είναι τής μορφής $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, όπου $\alpha_1 \in \Omega(X, x_0)$ και $\alpha_2 \in \Omega(Y, y_0)$. Εάν

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \beta = (\beta_1, \beta_2) \in \Omega(X \times Y, (x_0, y_0)),$$

τότε $\alpha \circledast \beta = (\alpha_1 \circledast \beta_1, \alpha_2 \circledast \beta_2)$. Επίσης, κάθε ομοτοπία $H : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow X \times Y$ σχετικώς προς το $\{0, 1\}$ από τον $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ στον $\alpha' = (\alpha_1', \alpha_2')$ είναι τής μορφής $H = (H_1, H_2)$, όπου H_1 είναι μια ομοτοπία σχετικώς προς το $\{0, 1\}$ από τον α_1 στον α_1' και H_2 μια ομοτοπία σχετικώς προς το $\{0, 1\}$ από τον α_2 στον α_2'. Επομένως ορίζεται ένας ομομορφισμός ομάδων

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}_1(X \times Y, (x_0, y_0)) &\longrightarrow \boldsymbol{\pi}_1(X, x_0) \times \boldsymbol{\pi}_1(Y, y_0) \\ [\alpha]^{\text{ομ.}} &\longmapsto (\boldsymbol{\pi}_1(\mathrm{pr}_1)([\alpha]^{\text{ομ.}}), \boldsymbol{\pi}_1(\mathrm{pr}_2)([\alpha]^{\text{ομ.}})) = ([\mathrm{pr}_1 \circ \alpha]^{\text{ομ.}}, [\mathrm{pr}_2 \circ \alpha]^{\text{ομ.}}). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Για κάθε $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \Omega(X \times Y, (x_0, y_0))$ έχουμε (εκ κατασκευής) $\mathrm{pr}_1 \circ \gamma = \gamma_1$ και $\mathrm{pr}_2 \circ \gamma = \gamma_2$, οπότε η κλάση $[\gamma]^{\text{ομ.}}$ απεικονίζεται μέσω τού (2.6) στο διατεταγμένο ζεύγος $([\gamma_1]^{\text{ομ.}}, [\gamma_2]^{\text{ομ.}})$ και ο (2.6) είναι *επιμορφισμός*. Από την άλλη μεριά, εάν $\alpha \in \Omega(X \times Y, (x_0, y_0))$ με

$$\mathrm{pr}_1 \circ \alpha \simeq \mathrm{const}_{x_0} \text{ σχ. } \{0,1\} \ \text{ και } \ \mathrm{pr}_2 \circ \alpha \simeq \mathrm{const}_{y_0} \text{ σχ. } \{0,1\}$$

μέσω δυο ομοτοπιών H_1 και H_2 σχετικώς προς το $\{0,1\}$, τότε η $H = (H_1, H_2)$ είναι μια ομοτοπία σχετικώς προς το $\{0,1\}$ από τον α στον $(\mathrm{const}_{x_0}, \mathrm{const}_{y_0})$, οπότε $[\alpha]^{\text{ομ.}} = [(\mathrm{const}_{x_0}, \mathrm{const}_{y_0})]^{\text{ομ.}}$ και ο (2.6) είναι *και μονομορφισμός*. □

$\boxed{2.2}$ Η ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΟΥ «ΟΜΟΤΟΠΙΚΩΣ ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΟΥ» ΤΗΣ ΘΕΜΕΛΙΩΔΟΥΣ ΟΜΑΔΑΣ

2.2.1 Πρόταση. *Εάν $\alpha, \beta : \mathbf{I} \longrightarrow X$ είναι δυο βρόχοι εντός ενός τοπολογικού χώρου X και $H : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow X$ μια ομοτοπία από τον α στον β* (βλ. εδ. 1.17.1), *ούτως ώστε η μονοπαραμετρική οικογένεια απεικονίσεων*

$$H_s(t) := H(t,s), \ \forall s \in \mathbf{I}, \ \textit{με } \ H_0 = \alpha \ \textit{ και } \ H_1 = \beta,$$

να ικανοποιεί τη συνθήκη $H_s(0) = H_s(1), \ \forall s \in \mathbf{I}$, τότε ορίζοντας τον δρόμο

$$h : \mathbf{I} \longrightarrow X, \ s \longmapsto h(s) := H(0,s),$$

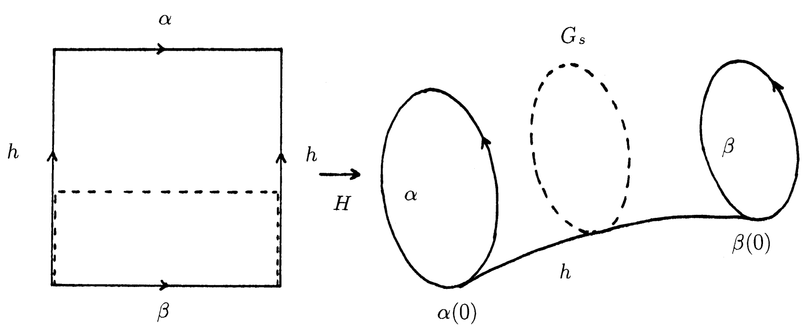
με σημείο αρχής του το $h(0) = \alpha(0)$ και σημείο λήξεώς του το $h(1) = \alpha(1) = \beta(0)$ λαμβάνουμε $[\alpha]^{\text{ομ.}} = [h \circledast \beta \circledast \overline{h}]^{\text{ομ.}} = \vartheta_h([\beta]^{\text{ομ.}})$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θέτοντας $h_s : \mathbf{I} \longrightarrow X, \ t \longmapsto h_s(t) := h(st)$, για κάθε $s \in \mathbf{I}$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$G : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow X, \ (t,s) \longmapsto G(t,s) := ((h_s \circledast H_s) \circledast \overline{h_s})(t),$$

όπου $G_s(t) := G(t,s), \ \forall s \in \mathbf{I}$, με

$$G_0 = (h_0 \circledast \alpha) \circledast \overline{h_0} \simeq \alpha \text{ σχ. } \{0,1\} \ \text{ και } \ G_1 = (h \circledast \beta) \circledast \overline{h}.$$



Σχήμα 2.1.

Αυτή μπορεί να εκφρασθεί διεξοδικώς μέσω τού πολλαπλού τύπου

$$G(t,s) = \begin{cases} h(4st), & \text{όταν } t \in [0, \frac{1}{4}], \\ H(4t-1, s), & \text{όταν } t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ h(s(2-2t)), & \text{όταν } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

και είναι συνεχής επί τη βάσει τής προτάσεως 1.4.6. Επιπροσθέτως, η G είναι εκ κατασκευής μια ομοτοπία σχετικώς προς το $\{0,1\}$ από τον δρόμο α στον δρόμο $(h \circledast \beta) \circledast \overline{h}$ με

$$G(0,s) = h(0) = \alpha(0) = \alpha(1) = G(1,s).$$

Επομένως, $\alpha \simeq h \circledast \beta \circledast \overline{h}$ σχ.$\{0,1\}$. □

2.2.2 Παρατήρηση. Ενορατικώς, η ανωτέρω πρόταση 2.2.1 μας πληροφορεί ότι όταν ο ένας εκ των δύο βρόχων μπορεί να αποκτηθεί από τον άλλον μέσω μιας *συνεχούς παραμορφώσεως*, η αντίστοιχη κλάση ομοτοπίας (σχετικώς προς το $\{0,1\}$) μεταφέρεται στην άλλη μέσω τού ισομορφισμού των θεμελιωδών ομάδων ο οποίος επάγεται από τον δρόμο τον συνδέοντα τα σημεία αναφοράς.

2.2.3 Πρόταση. *Εάν X, Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι και $x_0 \in X$, τότε μέσω οιασδήποτε συνεχούς απεικονίσεως*[5] $f : X \longrightarrow Y$ *επάγεται ένας ομομορφισμός ομάδων*

$$\boxed{\boldsymbol{\pi}_1(X, x_0) \ni [\alpha]^{\text{ομ.}} \overset{\boldsymbol{\pi}_1(f)}{\longmapsto} [f \circ \alpha]^{\text{ομ.}} \in \boldsymbol{\pi}_1(Y, f(x_0))} \tag{2.7}$$

με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) *Για κάθε συνεχή απεικόνιση* $g : Y \longrightarrow Z$ *έχουμε*

$$\boldsymbol{\pi}_1(g \circ f) = \boldsymbol{\pi}_1(g) \circ \boldsymbol{\pi}_1(f).$$

(ii) $\boldsymbol{\pi}_1(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\boldsymbol{\pi}_1(X, x_0)}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απεικόνιση (2.7) είναι ομομορφισμός ομάδων, διότι για οιουσδήποτε βρόχους $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega(X, x_0)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}_1(f)([\alpha_1]^{\text{ομ.}} \bullet [\alpha_2]^{\text{ομ.}}) &= \boldsymbol{\pi}_1(f)([\alpha_1 \circledast \alpha_2]^{\text{ομ.}}) \\ &= [f \circ (\alpha_1 \circledast \alpha_2)]^{\text{ομ.}} = [(f \circ \alpha_1) \circledast (f \circ \alpha_2)]^{\text{ομ.}} \\ &= [f \circ \alpha_1]^{\text{ομ.}} \bullet [f \circ \alpha_2]^{\text{ομ.}} = \boldsymbol{\pi}_1(f)([\alpha_1]) \bullet \boldsymbol{\pi}_1(f)([\alpha_2]^{\text{ομ.}}). \end{aligned}$$

(i) Για κάθε $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ είναι πρόδηλο ότι

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}_1(g \circ f)([\alpha]^{\text{ομ.}}) &= [(g \circ f) \circ \alpha]^{\text{ομ.}} = [g \circ (f \circ \alpha)]^{\text{ομ.}} \\ &= \boldsymbol{\pi}_1(g)([f \circ \alpha]^{\text{ομ.}}) = \boldsymbol{\pi}_1(g)(\boldsymbol{\pi}_1(f)([\alpha]^{\text{ομ.}})) = (\boldsymbol{\pi}_1(g) \circ \boldsymbol{\pi}_1(f))([\alpha]^{\text{ομ.}}). \end{aligned}$$

(ii) Προφανώς, $\boldsymbol{\pi}_1(\mathrm{id}_X)([\alpha]^{\text{ομ.}}) = [\mathrm{id}_X \circ \alpha]^{\text{ομ.}} = [\alpha]^{\text{ομ.}}, \forall \alpha \in \Omega(X, x_0)$. □

[5] Η f μπορεί να θεωρηθεί και ως συνεχής απεικόνιση μεταξύ *εστιγμένων χώρων* $f : (X, \{x_0\}) \longrightarrow (Y, \{y_0\})$, όπου (κατ' ανάγκην) $y_0 = f(x_0)$.

2.2.4 Πόρισμα. *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και έστω A μια σύμπτυξη τού X.* (Βλ. εδ. 1.17.14.) *Εάν $r : X \longrightarrow A$ είναι μια απεικόνιση συμπτύξεως και $\iota : A \hookrightarrow X$ η συνήθης ένθεση, τότε για κάθε $a \in A$ ο*

$$\boldsymbol{\pi}_1(\iota) : \boldsymbol{\pi}_1(A, a) \longrightarrow \boldsymbol{\pi}_1(X, a) \tag{2.8}$$

είναι μονομορφισμός και ο

$$\boldsymbol{\pi}_1(r) : \boldsymbol{\pi}_1(X, a) \longrightarrow \boldsymbol{\pi}_1(A, a) \tag{2.9}$$

επιμορφισμός ομάδων.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή $r \circ \iota = \mathrm{id}_A$, έχουμε

$$\mathrm{id}_{\boldsymbol{\pi}_1(A,a)} = \boldsymbol{\pi}_1(\mathrm{id}_A) = \boldsymbol{\pi}_1(r) \circ \boldsymbol{\pi}_1(\iota) : \boldsymbol{\pi}_1(A, a) \longrightarrow \boldsymbol{\pi}_1(A, a),$$

απ' όπου έπεται η ενριπτικότητα τού (2.8) και η επιρριπτικότητα τού (2.9). □

2.2.5 Παρατήρηση. (i) Εάν η $\boldsymbol{\pi}_1(X, a)$ είναι πεπερασμένως παραγόμενη ομάδα, τότε *και* η $\boldsymbol{\pi}_1(A, a)$ θα είναι πεπερασμένως παραγόμενη.

(ii) Για κάθε *παραμορφωτική σύμπτυξη* A τού X (βλ. εδ. 1.17.26) ο μονομορφισμός (2.8) είναι ισομορφισμός.

2.2.6 Λήμμα. *Εάν X, Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι, $x_0 \in X$, $f, g : X \longrightarrow Y$ δυο ομότοπες συνεχείς απεικονίσεις και $H : X \times \mathbf{I} \longrightarrow Y$ μια ομοτοπία από την f στην g* (βλ. εδ. 1.17.1), *τότε ορίζοντας τον δρόμο*

$$h : \mathbf{I} \longrightarrow X,\ s \longmapsto h(s) := H(x_0, s),$$

λαμβάνουμε $\boldsymbol{\pi}_1(f) = \vartheta_h \circ \boldsymbol{\pi}_1(g)$, όπου

$$\vartheta_h : \boldsymbol{\pi}_1(Y, g(x_0)) \xrightarrow{\cong} \boldsymbol{\pi}_1(Y, f(x_0))$$

ο ισομορφισμός ομάδων ο οριζόμενος μέσω τής προτάσεως 2.1.12.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ ισχύει η ισότητα $[f \circ \alpha]^{\text{ομ.}} = \vartheta_h([g \circ \alpha]^{\text{ομ.}})$. Πράγματι· θέτοντας

$$H' : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow X,\ (t, s) \longmapsto H'(t, s) := H(\alpha(t), s),$$

παρατηρούμε ότι η H' είναι μια ομοτοπία από τον βρόχο $f \circ \alpha$ στον βρόχο $g \circ \alpha$, καθώς

$$H'(t, 0) = (f \circ \alpha)(t),\ H'(t, 1) = (g \circ \alpha)(t)$$

και $H'(0, s) = H(\alpha(0), s) = H(\alpha(1), s) = H'(1, s) = h(s)$. Κατά συνέπειαν, αρκεί η εφαρμογή τής προτάσεως 2.2.1 για την H'. □

2.2.7 Θεώρημα. (Ιδιότητα τού «ομοτοπικώς αναλλοιώτου» για την π_1) *Εάν X, Y είναι δυο ομοτοπικώς ισοδύναμοι τοπολογικοί χώροι, $x_0 \in X$ και $f : X \longrightarrow Y$ μια ομοτοπική ισοδυναμία, τότε ο* (2.7) *είναι ισομορφισμός. Ιδιαιτέρως, εάν αμφότεροι οι X και Y είναι δρομοσυνεκτικοί* (πρβλ. εδ. 2.1.13), *τότε ισχύει η συνεπαγωγή* :

$$X \simeq Y \Longrightarrow \boldsymbol{\pi}_1(X) \cong \boldsymbol{\pi}_1(Y).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εξ ορισμού υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $g : Y \longrightarrow X$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X \ \text{ και } \ f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y.$$

Λόγω τού (i) τής προτάσεως 2.2.3 και τού λήμματος 2.2.6 η σύνθεση

$$\boldsymbol{\pi}_1(g) \circ \boldsymbol{\pi}_1(f) = \boldsymbol{\pi}_1(g \circ f) : \boldsymbol{\pi}_1(X, x_0) \longrightarrow \boldsymbol{\pi}_1(X, g(f(x_0))) \tag{2.10}$$

είναι ισομορφισμός. Κατ' αναλογίαν, *και* η σύνθεση

$$\boldsymbol{\pi}_1(f) \circ \boldsymbol{\pi}_1(g) = \boldsymbol{\pi}_1(f \circ g) : \boldsymbol{\pi}_1(Y, y_0) \longrightarrow \boldsymbol{\pi}_1(Y, f(g(y_0))) \tag{2.11}$$

είναι ισομορφισμός για κάθε $y_0 \in Y$. Από την (2.10) έπεται ότι ο $\boldsymbol{\pi}_1(g)$ είναι επιμορφισμός και από την (2.11) (με $y_0 := f(x_0)$) ότι ο $\boldsymbol{\pi}_1(g)$ είναι μονομορφισμός. Άρα ο $\boldsymbol{\pi}_1(g)$ είναι ισομορφισμός. Από την άλλη μεριά, επειδή η $\boldsymbol{\pi}_1(g) \circ \boldsymbol{\pi}_1(f)$ στην (2.10) είναι ισομορφισμός, ο $\boldsymbol{\pi}_1(f) : \boldsymbol{\pi}_1(X, x_0) \longrightarrow \boldsymbol{\pi}_1(Y, f(x_0))$ είναι ωσαύτως ισομορφισμός. □

2.3 Η ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΟΜΑΔΑ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

Ο μοναδιαίος κύκλος $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ αποτελεί (ως προς τον συνήθη πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών) μια ομάδα, η δε εκθετική απεικόνιση

$$\boxed{\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1,\ t \longmapsto \Phi(t) := \exp(2\pi i t) = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t),}$$

έχει (ως γνωστόν) τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Η Φ είναι επιμορφισμός ομάδων από την προσθετική ομάδα $(\mathbb{R}, +)$ επί τής πολλαπλασιαστικής ομάδας $(\mathbb{S}^1, \cdot)$.

(ii) $\mathrm{Ker}(\Phi) = \mathbb{Z}$ και

(iii) για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ ο περιορισμός $\Phi|_{(\xi, \xi+1)}$ τής Φ επί τού ανοικτού διαστήματος $(\xi, \xi+1)$ καθορίζει έναν *ομοιομορφισμό* $(\xi, \xi+1) \xrightarrow{\approx} \mathbb{S}^1 \smallsetminus \{\Phi(\xi)\}$.

Η αντίστροφος $\Psi : \mathbb{S}^1 \smallsetminus \{-1\} \xrightarrow{\approx} \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ τού περιορισμού $\Phi|_{\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$ τής Φ επί τού ανοικτού διαστήματος $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ θα χρησιμοποιηθεί (στα λήμματα 2.3.1 και 2.3.2) κατά τρόπο ουσιαστικό[6], ούτως ώστε να καταστεί εφικτός ο προσδιορισμός τής θεμελιώδους ομάδας τού $\mathbb{S}^1$ μέχρις ισομορφισμού.

2.3.1 Λήμμα. *Εάν $\alpha : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ είναι ένας δρόμος εντός τού $\mathbb{S}^1$ με $\alpha(0) = 1$, τότε υπάρχει ένας και μόνον δρόμος $\widetilde{\alpha} : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ εντός τού $\mathbb{R}$ με $\widetilde{\alpha}(0) = 0$ και $\Phi \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ο α θα υποδιαιρεθεί σε μικρά κομμάτια, καθένα των οποίων μπορεί να «ανυψωθεί» μέσω τής Ψ κατά τρόπο *μοναδικό* στο $\mathbb{R}$. Οι «ανυψώσεις» αυτές (εντός τού $\mathbb{R}$) θα συντεθούν καταλλήλως παρέχοντάς μας τον ζητούμενο δρόμο $\widetilde{\alpha}$. Αλλά ας πάρουμε τα πράγματα από την αρχή: Η απεικόνιση $\alpha : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ (ούσα συνεχής) είναι και *ομοιομόρφως συνεχής* (λόγω τού θεωρήματος 1.8.19), πράγμα που σημαίνει ότι υπάρχει $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, ούτως ώστε για οιαδήποτε $t, t' \in \mathbf{I}$ να ισχύει η συνεπαγωγή[7]

$$|t - t'| < \delta \Longrightarrow |\alpha(t) - \alpha(t')| < 1.$$

Ιδιαιτέρως, $\alpha(t') \neq -\alpha(t)$ και ο $\Psi(\frac{\alpha(t')}{\alpha(t)})$ είναι καλώς ορισμένος. Επιλέγοντας έναν $n \in \mathbb{N}$ με $n\delta > 1$ (ή, ισοδυνάμως, με $\frac{1}{n} < \delta$) υποδιαιρούμε για κάθε $t \in \mathbf{I}$ το κλειστό διάστημα $[0, t]$ ως εξής:

$$[0, t] = [0, \tfrac{1}{n}t] \cup [\tfrac{1}{n}t, \tfrac{2}{n}t] \cup \cdots \cup [\tfrac{n-2}{n}t, \tfrac{n-1}{n}t] \cup [\tfrac{n-1}{n}t, t],$$

παρατηρούμε ότι $\left|\frac{j}{n}t - \frac{j-1}{n}t\right| = \frac{1}{n}|t| < \delta$ για κάθε $j \in \{1, ..., n\}$ και ορίζουμε τη συνεχή απεικόνιση

$$f_j : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \smallsetminus \{-1\},\ t \longmapsto f_j(t) := \frac{\alpha(\frac{j}{n}t)}{\alpha(\frac{j-1}{n}t)},$$

όπου $f_j(0) = 1, \forall j \in \{1, ..., n\}$. Προφανώς, για κάθε $t \in \mathbf{I}$,

$$\alpha(t) = \underbrace{\alpha(0)}_{=1} \left(\frac{\alpha(\frac{1}{n}t)}{\alpha(0)}\right)\left(\frac{\alpha(\frac{2}{n}t)}{\alpha(\frac{1}{n}t)}\right) \cdots \left(\frac{\alpha(\frac{n-1}{n}t)}{\alpha(\frac{n-2}{n}t)}\right)\left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\frac{n-1}{n}t)}\right) = f_1(t)f_2(t)\cdots f_n(t).$$

Επειδή $\mathrm{Im}(f_j) \subseteq \mathbb{S}^1 \smallsetminus \{-1\}$ για κάθε $j \in \{1, ..., n\}$, οι συνθέσεις $\Psi \circ f_j$ είναι καλώς ορισμένες και συνεχείς. Κατόπιν τούτου, ορίζουμε τον δρόμο $\widetilde{\alpha} : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ μέσω τού τύπου

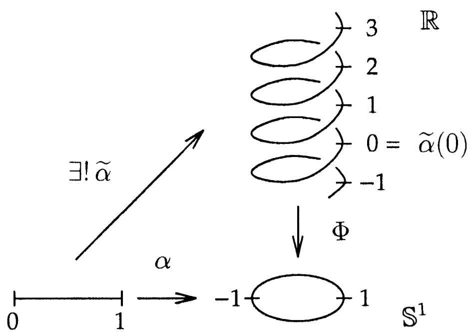
$$\widetilde{\alpha}(t) := \Psi\left(f_1(t)\right) + \Psi\left(f_2(t)\right) + \cdots + \Psi\left(f_n(t)\right),\ \forall t \in \mathbf{I}.$$

(Η $\widetilde{\alpha}$ είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών απεικονίσεων.) Σημειωτέον ότι $\widetilde{\alpha}(0) = 0$ (καθώς έχουμε $f_j(0) = 1, \forall j \in \{1, ..., n\}$, και $\Psi(1) = 0$) και $\Phi \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$ (καθώς η Φ

[6]Προφανώς, $\Psi(z) := \frac{1}{2\pi i}\text{λογκ}(z), \forall z \in \mathbb{S}^1 \smallsetminus \{-1\}$, όπου για $z = r\exp(i\theta)$ με $r \in \mathbb{R}_{>0}$ και $-\pi < \theta < \pi$, ο *κύριος κλάδος* $\text{λογκ}(z)$ *τής μιγαδικής λογαριθμικής συναρτήσεως* ισούται με $\ln(z) + i\theta$.

[7]Το $1 < 2 = \mathrm{diam}(\mathbb{S}^1)$ επελέχθη προκειμένου τα σημεία $\alpha(t')$ και $\alpha(t)$ να μην είναι αντιποδικά, δηλαδή να ισχύει $\alpha(t') \neq -\alpha(t)$.

είναι ομομορφισμός ομάδων).



Σχήμα 2.2.

Υπολείπεται να δειχθεί ότι ο εν λόγω δρόμος $\widetilde{\alpha}$ είναι και ο *μοναδικός* με αυτήν την ιδιότητα. Ας υποθέσουμε, προς τούτο, ότι υπάρχει δρόμος $\widetilde{\widetilde{\alpha}} : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ εντός τού $\mathbb{R}$ με $\widetilde{\widetilde{\alpha}}(0) = 0$ και $\Phi \circ \widetilde{\widetilde{\alpha}} = \alpha$. Θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση

$$h : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto h(t) := \widetilde{\alpha}(t) - \widetilde{\widetilde{\alpha}}(t).$$

Επειδή $\Phi\left(h(t)\right) = \frac{\exp(\widetilde{\alpha}(t))}{\exp(\widetilde{\widetilde{\alpha}}(t))} = 1 \Rightarrow h(t) \in \mathrm{Ker}(\Phi) = \mathbb{Z},\ \forall t \in \mathbf{I}$, η h λαμβάνει μόνον ακέραιες τιμές. Από την άλλη μεριά, επειδή το $\mathbf{I}$ είναι συνεκτικό και ο υπόχωρος $\mathrm{Im}(h)$ τού $\mathbb{R}$ διακριτός, η h οφείλει να είναι *σταθερή απεικόνιση*. (Βλ. 1.9.3 (i)⇔(iii).) Επομένως, $h(0) = 0 \Rightarrow 0 = h(t) = \widetilde{\alpha}(t) - \widetilde{\widetilde{\alpha}}(t),\ \forall t \in \mathbf{I}$. □

2.3.2 Λήμμα. *Εάν $\alpha, \beta : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ είναι δυο δρόμοι εντός τού $\mathbb{S}^1$ με $\alpha(0) = \beta(0) = 1$ που είναι ομότοποι σχετικώς προς το $\{0,1\}$ μέσω μιας ομοτοπίας $H : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{S}^1$, τότε υπάρχει μία και μόνον απεικόνιση $\widetilde{H} : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $\Phi \circ \widetilde{H} = H$, η οποία αποτελεί μια ομοτοπία σχετικώς προς το $\{0,1\}$ από τον δρόμο $\widetilde{\alpha}$ στον δρόμο $\widetilde{\beta}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρκεί κανείς να μιμηθεί την αποδεικτική μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε για το λήμμα 2.3.1. Επειδή η H είναι συνεχής, θα είναι και *ομοιομόρφως συνεχής* (λόγω τού θεωρήματος 1.8.19), πράγμα που σημαίνει ότι υπάρχει $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, ούτως ώστε για οιαδήποτε ζεύγη $(t,s), (t',s') \in \mathbf{I} \times \mathbf{I}$ να ισχύει η συνεπαγωγή

$$\sqrt{(t-t')^2 + (s-s')^2} < \delta \Longrightarrow |H(t,s) - H(t',s')| < 1.$$

Ιδιαιτέρως, $H(t',s') \neq -H(t,s)$ και ο $\Psi(\frac{H(t',s')}{H(t,s)})$ είναι καλώς ορισμένος. Επιλέγοντας έναν $n \in \mathbb{N}$ με $n\delta > \sqrt{2}$ (ή, ισοδυνάμως, με $\frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$) υποδιαιρούμε για κάθε $(t,s) \in \mathbf{I} \times \mathbf{I}$ τα κλειστά διαστήματα $[0,t]$ και $[0,s]$ ως εξής:

$$[0,t] = [0, \tfrac{1}{n}t] \cup [\tfrac{1}{n}t, \tfrac{2}{n}t] \cup \cdots \cup [\tfrac{n-2}{n}t, \tfrac{n-1}{n}t] \cup [\tfrac{n-1}{n}t, t],$$

$$[0,s] = [0, \tfrac{1}{n}s] \cup [\tfrac{1}{n}s, \tfrac{2}{n}s] \cup \cdots \cup [\tfrac{n-2}{n}s, \tfrac{n-1}{n}s] \cup [\tfrac{n-1}{n}s, s],$$

παρατηρούμε ότι

$$\sqrt{(\tfrac{j}{n}t-\tfrac{j-1}{n}t)^2+(\tfrac{j}{n}s-\tfrac{j-1}{n}s)^2}=\tfrac{1}{n}\sqrt{t^2+s^2}\leq\tfrac{\sqrt{2}}{n}<\delta$$

για κάθε $j\in\{1,...,n\}$ και ορίζουμε τη συνεχή απεικόνιση

$$F_j:\mathbf{I}\times\mathbf{I}\longrightarrow\mathbb{S}^1\smallsetminus\{-1\},\ t\longmapsto F_j(t,s):=\frac{H(\frac{j}{n}t,\frac{j}{n}s)}{H(\frac{j-1}{n}t,\frac{j-1}{n}s)},$$

όπου $F_j(0,0)=1,\forall j\in\{1,...,n\}$. Προφανώς, για κάθε $(t,s)\in\mathbf{I}\times\mathbf{I}$,

$$\begin{aligned}H(t,s) &= \underbrace{H(0,0)}_{=1}\left(\frac{H(\frac{1}{n}t,\frac{1}{n}s)}{H(0,0)}\right)\left(\frac{H(\frac{2}{n}t,\frac{2}{n}s)}{H(\frac{1}{n}t,\frac{1}{n}s)}\right)\cdots\left(\frac{H(t,s)}{H(\frac{n-1}{n}t,\frac{n-1}{n}s)}\right)\\ &= F_1(t,s)F_2(t,s)\cdots F_n(t,s).\end{aligned}$$

Κατόπιν τούτου, ορίζουμε την απεικόνιση $\widetilde{H}:\mathbf{I}\times\mathbf{I}\longrightarrow\mathbb{R}$ μέσω τού τύπου

$$\widetilde{H}(t,s):=\Psi\left(F_1(t,s)\right)+\Psi\left(F_2(t,s)\right)+\cdots+\Psi\left(F_n(t,s)\right),\ \forall(t,s)\in\mathbf{I}\times\mathbf{I}.$$

(Η $\widetilde{H}$ είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών απεικονίσεων.) Σημειωτέον ότι $\widetilde{H}(t,s)=0$ (καθώς έχουμε $F_j(0,0)=1,\forall j\in\{1,...,n\}$, και $\Psi(1)=0$) και $\Phi\circ\widetilde{H}=H$ (καθώς η Φ είναι ομομορφισμός ομάδων). Επιπροσθέτως,

$$\widetilde{H}(t,0)=\sum_{j=1}^{n}\Psi\left(F_j(t,0)\right)=\sum_{j=1}^{n}\Psi\left(\frac{\alpha(\frac{j}{n}t)}{\alpha(\frac{j-1}{n}t)}\right)=\widetilde{\alpha}(t),$$

$$\widetilde{H}(t,1)=\sum_{j=1}^{n}\Psi\left(F_j(t,1)\right)=\sum_{j=1}^{n}\Psi\left(\frac{\beta(\frac{j}{n}t)}{\beta(\frac{j-1}{n}t)}\right)=\widetilde{\beta}(t),$$

$\widetilde{H}(0,s)=0$ και $\widetilde{H}(1,s)=\widetilde{\alpha}(1)$ για οιαδήποτε $t,s\in\mathbf{I}$. Η τελευταία ισότητα αποδεικνύεται ως ακολούθως: Θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση

$$h:\mathbf{I}\longrightarrow\mathbb{R},\ s\longmapsto h(s):=\widetilde{H}(1,s)-\widetilde{H}(1,0).$$

Επειδή $\Phi\left(h(s)\right)=\frac{H(1,s)}{H(1,0)}=\frac{\widetilde{\alpha}(1)}{\widetilde{\alpha}(1)}=1\Rightarrow h(s)\in\mathrm{Ker}(\Phi)=\mathbb{Z},\ \forall s\in\mathbf{I}$, η h λαμβάνει μόνον ακέραιες τιμές. Από την άλλη μεριά, επειδή το $\mathbf{I}$ είναι συνεκτικό και ο υπόχωρος $\mathrm{Im}(h)$ τού $\mathbb{R}$ διακριτός, η h οφείλει να είναι *σταθερή απεικόνιση*. (Βλ. 1.9.3 (i)⇔(iii).) Επομένως, $h(0)=0\Rightarrow 0=h(s)=\widetilde{H}(1,s)-\widetilde{\alpha}(1),\ \forall s\in\mathbf{I}$. Άρα η $\widetilde{H}$ αποτελεί πράγματι μια ομοτοπία σχετικώς προς το $\{0,1\}$ από τον δρόμο $\widetilde{\alpha}$ στον δρόμο $\widetilde{\beta}$. Υπολείπεται να δειχθεί ότι η $\widetilde{H}$ είναι και η *μοναδική* ομοτοπία αυτού τού είδους με την εν λόγω ιδιότητα. Ας υποθέσουμε, προς τούτο, ότι υπάρχει ομοτοπία $\widetilde{\widetilde{H}}:\mathbf{I}\times\mathbf{I}\longrightarrow\mathbb{R}$ σχετικώς προς το $\{0,1\}$ από τον δρόμο $\widetilde{\alpha}$ στον δρόμο $\widetilde{\beta}$ με $\Phi\circ\widetilde{\widetilde{H}}=H$. Προφανώς, $\Phi(\widetilde{H}(t,s)-\widetilde{\widetilde{H}}(t,s))=\frac{H(t,s)}{H(t,s)}=1$, οπότε

$$\widetilde{H}(t,s)-\widetilde{\widetilde{H}}(t,s)\in\mathrm{Ker}(\Phi)=\mathbb{Z},\ \forall(t,s)\in\mathbf{I}\times\mathbf{I}.$$

Επειδή η $\widetilde{H} - \widetilde{\widetilde{H}} : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{Z}$ είναι συνεχής, θα είναι *σταθερή*. (Βλ. 1.9.3 (i)⇔(iii).) Επομένως,

$$\widetilde{H}(0,0) - \widetilde{\widetilde{H}}(0,0) = 0 \Longrightarrow [0 = \widetilde{H}(t,s) - \widetilde{\widetilde{H}}(t,s),\ \forall (t,s) \in \mathbf{I} \times \mathbf{I}].$$

Αυτό σημαίνει ότι $\widetilde{H} = \widetilde{\widetilde{H}}$. □

2.3.3 Θεώρημα. *Η* $(\boldsymbol{\pi}_1(\mathbb{S}^1), \bullet)$ *είναι ισόμορφη με την άπειρη κυκλική ομάδα* $(\mathbb{Z}, +)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε $\alpha \in \Omega(\mathbb{S}^1, 1)$ θέτουμε

$$\boxed{\psi : \boldsymbol{\pi}_1(\mathbb{S}^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z},\ [\alpha]^{\text{ομ.}} \longmapsto \psi([\alpha]^{\text{ομ.}}) := \widetilde{\alpha}(1).} \tag{2.12}$$

Λόγω των προηγηθέντων λημμάτων 2.3.1 και 2.3.2 η ανωτέρω ψ είναι *καλώς ορισμένη* απεικόνιση. Θα δείξουμε διαδοχικώς τα εξής[8]:

(i) Η ψ αποτελεί έναν ομομορφισμό ομάδων.

(ii) Η ψ είναι επιρριπτική.

(iii) Η ψ είναι ενριπτική.

Απόδειξη τού (i). Για οιουσδήποτε βρόχους $\alpha, \beta \in \Omega(\mathbb{S}^1, 1)$ έχουμε

$$\widetilde{\alpha \circledast \beta} = \widetilde{\alpha} \circledast (\widetilde{\alpha}(1) + \widetilde{\beta}), \tag{2.13}$$

διότι[9] $\Phi \circ \widetilde{\alpha \circledast \beta} = \alpha \circledast \beta = \Phi \circ (\widetilde{\alpha} \circledast (\widetilde{\alpha}(1) + \widetilde{\beta}))$. Η δεύτερη ισότητα προκύπτει άμεσα από το ότι

$$(\Phi \circ (\widetilde{\alpha} \circledast (\widetilde{\alpha}(1) + \widetilde{\beta})))(t) = \begin{cases} \Phi(\widetilde{\alpha}(2t)) = \alpha(2t), & \text{όταν } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \Phi(\widetilde{\alpha}(1) + \widetilde{\beta}(2t-1)) = \Phi(\widetilde{\beta}(2t-1)), & \text{όταν } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

όπου $\Phi(\widetilde{\beta}(2t-1)) = \beta(2t-1), \forall t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Κατά συνέπειαν,

$$\begin{aligned} \psi([\alpha]^{\text{ομ.}} \bullet [\beta]^{\text{ομ.}}) &= \psi([\alpha \circledast \beta]^{\text{ομ.}}) = \widetilde{\alpha \circledast \beta}(1) \underset{(2.13)}{=} (\widetilde{\alpha} \circledast (\widetilde{\alpha}(1) + \widetilde{\beta}))(1) \\ &= (\widetilde{\alpha}(1) + \widetilde{\beta})(1) = \widetilde{\alpha}(1) + \widetilde{\beta}(1) = \psi([\alpha]^{\text{ομ.}}) + \psi([\beta]^{\text{ομ.}}). \end{aligned}$$

Απόδειξη τού (ii). Για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ ορίζεται ο βρόχος

$$\alpha_m : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{S}^1,\ t \longmapsto \alpha_m(t) := \Phi(mt).$$

Προφανώς, $\psi([\alpha_m]^{\text{ομ.}}) = \widetilde{\alpha_m}(1) = m$, και η ψ είναι επιρριπτική.

[8] Άπαξ και τα (i), (ii) και (iii) θα έχουν αποδειχθεί, ο ισχυρισμός θα είναι αληθής βάσει των προαναφερθέντων στο εδ. 2.1.13 (αφού ο $\mathbb{S}^1$ είναι δρομοσυνεκτικός).

[9] Εν προκειμένω, αρκεί να χρησιμοποιηθεί η μοναδικότητα τής «ανυψώσεως» τού $\alpha \circledast \beta$ η εξασφαλισθείσα μέσω τού λήμματος 2.3.1.

Απόδειξη τού (iii). Εάν $\alpha \in \Omega(\mathbb{S}^1, 1)$ με $[\alpha]^{\text{ομ.}} \in \operatorname{Ker}(\psi)$, ήτοι με

$$\psi([\alpha]^{\text{ομ.}}) = \widetilde{\alpha}(1) = 0,$$

τότε ο $\widetilde{\alpha}$ είναι ένας *βρόχος* εντός τού $\mathbb{R}$ (καθώς $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{\alpha}(1) = 0$). Εντός τού $\mathbb{R}$ έχουμε $\widetilde{\alpha} \simeq \text{const}_0$ ΣΧ.$\{0,1\}$, διότι, π.χ., η

$$H : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R},\ (t,s) \longmapsto H(t,s) := (1-s)\widetilde{\alpha}(t),$$

είναι μια ομοτοπία σχετικώς προς το $\{0,1\}$ από τον $\widetilde{\alpha}$ στον const_0. Αυτό σημαίνει ότι η σύνθεση $\Phi \circ H$ αποτελεί μια ομοτοπία σχετικώς προς το $\{0,1\}$ από τον α στον const_1. Επομένως, $[\alpha]^{\text{ομ.}} = [\text{const}_1]^{\text{ομ.}}$, ήτοι το ουδέτερο στοιχείο τής $\boldsymbol{\pi}_1(\mathbb{S}^1, 1)$, και η ψ είναι ενριπτική. □

►**Αριθμός περιελίξεως και Θ.Θ.Α.** Με τη βοήθεια τού ισομορφισμού ομάδων (2.12) τού θεσπισθέντος στο θεώρημα 2.3.3 είναι δυνατόν να δοθεί ένας αυστηρός ορισμός τού λεγομένου *αριθμού περιελίξεως* ενός βρόχου περί ενός σημείου τού μιγαδικού επιπέδου, καθώς και μια *σχετικώς σύντομη* απόδειξη τού περιώνυμου *θεμελιώδους θεωρήματος τής Άλγεβρας* («Θ.Θ.Α.») 2.3.8 (κάνοντας κατάλληλη χρήση τού θεωρήματος 2.3.6 τού Rouché).

2.3.4 Ορισμός. Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$ και έστω α ένας βρόχος εντός τού $\mathbb{C} \smallsetminus \{z_0\}$. Ως **αριθμός περιελίξεως** (winding number) $\mathbf{wn}(\alpha, z_0)$ **τού** α **περί το σημείο** z_0 ορίζεται ο ακέραιος αριθμός

$$\boxed{\mathbf{wn}(\alpha, z_0) := (\psi \circ \vartheta_h \circ \boldsymbol{\pi}_1(\mathfrak{r}_{z_0}))([\alpha]^{\text{ομ.}}),}$$

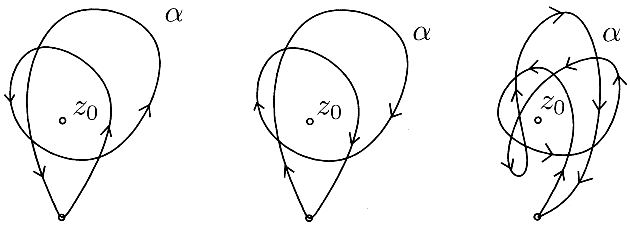
όπου $\psi : \boldsymbol{\pi}_1(\mathbb{S}^1, 1) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$ ο ισομορφισμός ομάδων (2.12), $\mathfrak{r}_{z_0}$ η απεικόνιση

$$\mathfrak{r}_{z_0} : \mathbb{C} \smallsetminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{S}^1,\ z \longmapsto \mathfrak{r}_{z_0}(z) := \tfrac{z - z_0}{|z - z_0|},$$

και $\vartheta_h : \boldsymbol{\pi}_1(\mathbb{S}^1, (\mathfrak{r}_{z_0} \circ \alpha)(0)) \xrightarrow{\cong} \boldsymbol{\pi}_1(\mathbb{S}^1, 1)$ ο μονοσημάντως ορισμένος ισομορφισμός ομάδων (2.5) (τής προτάσεως 2.1.12) ο επαγόμενος μέσω τυχόντος δρόμου h εντός τού $\mathbb{S}^1$ συνδέοντος τα σημεία 1 και $(\mathfrak{r}_{z_0} \circ \alpha)(0)$. Πρακτικώς, ο $\mathbf{wn}(\alpha, z_0)$ ισούται με το *πόσες φορές* ο α περιελίσσεται γύρω από το σημείο z_0 κατά την αριστερόστροφη φορά (αντιωρολογιακή φορά) *μείον* το *πόσες φορές* ο α περιελίσσεται γύρω από το σημείο z_0 κατά την δεξιόστροφη φορά (ωρολογιακή φορά), ερμηνευόμενος (ως γνωστόν, από όσα μαθαίνει κανείς στη Μιγαδική Ανάλυση) και ως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$\boxed{\mathbf{wn}(\alpha, z_0) = \tfrac{1}{2\pi i} \int_\alpha \frac{d\zeta}{\zeta - z_0}.}$$

Τρία παραδείγματα δίδονται στο σχήμα 2.3, όπου ο $\mathbf{wn}(\alpha, z_0)$ ισούται με 2 στο πρώτο, με -2 στο δεύτερο και με 1 στο τρίτο.



Σχήμα 2.3.

2.3.5 Πρόταση. *Εάν* $z_0 \in \mathbb{C}$, α, β *είναι δυο βρόχοι εντός τού* $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ *και*

$$H : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$$

μια ομοτοπία από τον α *στον* β, *τέτοια ώστε να ισχύει* $H(0, s) = H(1, s)$, $\forall s \in \mathbf{I}$, *ήτοι τέτοια, ώστε ο δρόμος* $t \longmapsto H_s(t) := H(t, s)$ *να αποτελεί έναν βρόχο, τότε*

$$\mathbf{wn}(\alpha, z_0) = \mathbf{wn}(\beta, z_0).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εφαρμογή τής προτάσεως 2.2.1 για την $\mathfrak{r}_{z_0} \circ H$ δίδει

$$[\mathfrak{r}_{z_0} \circ \alpha]^{\text{ομ.}} = \vartheta_h([\mathfrak{r}_{z_0} \circ \beta]^{\text{ομ.}}), \text{ όπου } \mathbf{I} \ni s \longmapsto h(s) := \mathfrak{r}_{z_0}(H(0, s))$$

ο δρόμος ο συνδέων τα $\mathfrak{r}_{z_0}(\alpha(0))$ και $\mathfrak{r}_{z_0}(\beta(0))$. Εάν γ είναι ενας δρόμος εντός τού $\mathbb{S}^1$ από το 1 στο $\mathfrak{r}_{z_0}(\alpha(0))$, τότε ο $\gamma \circledast h$ είναι ένας δρόμος από το 1 στο $\mathfrak{r}_{z_0}(\beta(0))$ και

$$\begin{aligned}
\mathbf{wn}(\beta, z_0) &= (\psi \circ \vartheta_{\gamma \circledast h} \circ \boldsymbol{\pi}_1(\mathfrak{r}_{z_0}))([\beta]^{\text{ομ.}}) \\
&= (\psi \circ \vartheta_\gamma \circ \vartheta_h)([\mathfrak{r}_{z_0} \circ \beta]^{\text{ομ.}}) = (\psi \circ \vartheta_\gamma)([\mathfrak{r}_{z_0} \circ \alpha]^{\text{ομ.}}) \\
&= (\psi \circ \vartheta_\gamma \circ \boldsymbol{\pi}_1(\mathfrak{r}_{z_0}))([\alpha]^{\text{ομ.}}) = \mathbf{wn}(\alpha, z_0),
\end{aligned}$$

οπότε ο ισχυρισμός είναι αληθής. □

2.3.6 Θεώρημα. (E. Rouché, 1862) *Εάν* $z_0 \in \mathbb{C}$ *και* α, β *είναι δυο βρόχοι εντός τού* $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ *για τους οποίους ικανοποιούνται οι ανισότητες*

$$|\alpha(t) - \beta(t)| < |\alpha(t) - z_0|, \ \forall t \in \mathbf{I},$$

τότε $\mathbf{wn}(\alpha, z_0) = \mathbf{wn}(\beta, z_0)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε την εξής ομοτοπία από τον α στον β :

$$H : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{C}, \ (t, s) \longmapsto H(t, s) := (1 - s)\alpha(t) + s\beta(t),$$

με $H(0,s) = H(1,s), \forall s \in \mathbf{I}$, και $H(t,0) = \alpha(t)\,, H(t,1) = \beta(t), \forall t \in \mathbf{I}$. Επειδή[10]

$$\begin{aligned}&|H(t,s) - z_0| = |(1-s)\alpha(t) + s\beta(t) - z_0|\\ &= |\alpha(t) - z_0 - s(\alpha(t) - \beta(t))| \geq |\alpha(t) - z_0| - s\,|\alpha(t) - \beta(t)| > 0,\end{aligned}$$

για κάθε ζεύγος $(t,s) \in \mathbf{I} \times \mathbf{I}$, έχουμε $\mathrm{Im}(H) = H(\mathbf{I} \times \mathbf{I}) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ και αρκεί να εφαρμόσουμε την πρόταση 2.3.5. □

2.3.7 Πρόταση. *Έστω $f : \mathbb{B}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ μια συνεχής απεικόνιση και έστω $\alpha : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{C}$ εκείνος ο δρόμος ο οποίος ορίζεται μέσω τού τύπου*

$$\alpha(t) := f(\exp(2\pi i t)), \ \forall t \in \mathbf{I}.$$

Εάν $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\alpha)$ και $\mathbf{wn}(\alpha, z_0) \neq 0$, τότε $z_0 \in \mathrm{Im}(f)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $z_0 \notin \mathrm{Im}(f)$, τότε $\alpha \simeq \mathrm{const}_{f(0)}$, καθώς ορίζεται η ομοτοπία

$$H : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}, \ (t,s) \longmapsto H(t,s) := f(s \exp(2\pi i t)),$$

με $H(0,s) = H(1,s), \forall s \in \mathbf{I}$, και $H(t,0) = f(0)$, $H(t,1) = \alpha(t)\,, \forall t \in \mathbf{I}$. Από την πρόταση 2.3.5 συνάγεται ότι $\mathbf{wn}(\alpha, z_0) = \mathbf{wn}(\mathrm{const}_{f(0)}, z_0) = 0$. □

2.3.8 Θεώρημα. («Θεμελιώδες Θεώρημα τής Άλγεβρας») *Κάθε πολυώνυμο*

$$\phi(z) = z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

με μιγαδικούς συντελεστές και $k \geq 1$ διαθέτει κάποια θέση μηδενισμού, ήτοι

$$\exists w \in \mathbb{C} : \phi(w) = 0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ έχουμε

$$\left|z^k - \phi(z)\right| = \left|a_{k-1} z^{k-1} + \cdots + a_1 z + a_0\right| = \left|z^k\right| \left|\tfrac{a_{k-1}}{z} + \cdots + \tfrac{a_1}{z^{k-1}} + \tfrac{a_0}{z^k}\right|.$$

Θεωρώντας έναν θετικό πραγματικό αριθμό $\rho > |a_{k-1}| + \cdots + |a_0| + 1$ και θέτοντας $\alpha(t) := \rho \exp(2\pi i t)$ λαμβάνουμε

$$\left|\alpha(t)^k - \phi(\alpha(t))\right| < \left|\alpha(t)^k\right|, \ \forall t \in \mathbf{I}.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα 2.3.6 τού Rouché (με το $\alpha(t)^k$ στη θέση τού εκεί παρατεθέντος $\alpha(t)$, με το $\phi(\alpha(t))$ στη θέση τού $\beta(t)$ και με $z_0 = 0$) συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{wn}(\phi \circ \alpha, 0) = \mathbf{wn}(\alpha^k, 0) = k$. Εν συνεχεία, εφαρμόζοντας την πρόταση 2.3.7 για τη συνεχή απεικόνιση

$$f : \mathbb{B}^2 \longrightarrow \mathbb{C}, \ z \longmapsto f(z) := \phi(\rho z),$$

διαπιστώνουμε ότι $0 \in \mathrm{Im}(f)$, ήτοι ότι $\exists \eta \in \mathbb{B}^2 : f(\eta) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\phi(w) = w^k + a_{k-1} w^{k-1} + \cdots + a_1 w + a_0 = 0,$$

όπου $w := \rho\eta \in \rho\mathbb{B}^2 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$. □

[10] Σημειωτέον ότι $|\alpha(t) - z_0| > |\alpha(t) - \beta(t)| \geq s\,|\alpha(t) - \beta(t)|$.

2.3.9 Σημείωση. Παρά το γεγονός ότι το (ύψιστης σημασίας) θεώρημα 2.3.8 είχε διατυπωθεί ως εικασία ήδη από τα μέσα τού 17ου αιώνα, η πρώτη (αποδεκτή) απόδειξή του οφείλεται στον C.F. Gauss (το 1799). Έκτοτε έχουν δοθεί εκατοντάδες άλλες αποδείξεις προερχόμενες από διάφορους μαθηματικούς κλάδους. Για αρκετά «ζεύγη» αποδείξεών του και περαιτέρω ιστορικά στοιχεία βλ. Fine & Rosenberger [33].