ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Υπομνήσεις από την Τοπολογία

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια σύντομη επισκόπηση ορισμένων βασικών εννοιών και θεωρητικών αποτελεσμάτων εντασσομένων στη Γενική[1] και στη Συνδυαστική[2] Τοπολογία.

$\boxed{1.1}$ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

1.1.1 Ορισμός. Μια **τοπολογία** επί ενός συνόλου X είναι ένα σύνολο $\mathcal{T}$ υποσυνόλων τού X με τις εξής ιδιότητες:

(i) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$,

(ii) Εάν $(U_i)_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων τού X με $U_i \in \mathcal{T}$ για κάθε $i \in I$, τότε $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$,

(iii) Εάν $n \in \mathbb{N}$ και $U_1, ..., U_n \in \mathcal{T}$, τότε $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$.

Τα στοιχεία τού $\mathcal{T}$ ονομάζονται **ανοικτά σύνολα**. Ένα υποσύνολο A τού X καλείται **κλειστό** (ως προς την $\mathcal{T}$) όταν το συμπλήρωμα του, $X \smallsetminus A$, είναι ανοικτό. Ως

[1] Για λεπτομερέστερη εισαγωγή στη Γενική Τοπολογία βλ. τις σημειώσεις παραδόσεων [2], [76] και [90]. Ολοκληρωμένες παρουσιάσεις τής σχετικής θεωρίας βρίσκει κανείς στα κλασικά συγγράμματα των Dugundji [28], Kelley [55], McCleary [75], Munkres [84], Querenburg [95] και Willard [129].

[2] Από τη Συνδυαστική Τοπολογία αρκούμεθα στην παράθεση κάποιων βασικών ιδιοτήτων των τοπολογικών και των διαφορίσιμων πολυπτυγμάτων, των μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων και των CW-χώρων.

τοπολογικός χώρος νοείται ένα ζεύγος $(X,\mathcal{T})$ αποτελούμενο από ένα σύνολο[3] X (**το υποκείμενο σύνολο τού** $(X,\mathcal{T})$) και μια τοπολογία $\mathcal{T}$ ορισθείσα επ' αυτού[4]. (Ενίοτε, για λόγους συντομίας, αντί τού $(X,\mathcal{T})$ γράφουμε απλώς X υπονοώντας τήν $\mathcal{T}$).

1.1.2 Παραδείγματα. (i) Έστω ότι $X \neq \varnothing$. Η $(X,\{\varnothing,X\})$ ονομάζεται **τετριμμένη τοπολογία** επί τού X.

(ii) Εάν $X = \{0,1\}$, τότε η τοπολογία $\mathcal{T} := \{\varnothing, X, \{0\}\}$ καλείται **τοπολογία Sierpinski** επί τού X.

(iii) Κάθε *μετρικός χώρος*[5] (X,d) καθίσταται τοπολογικός χώρος ως προς την τοπολογία

$$\mathcal{T}_d := \{A \subseteq X \mid \forall x \in A,\ \exists \delta_x \in \mathbb{R}_{>0} : \overset{\circ}{\mathbb{B}}_d\ (x;\delta_x) \subseteq A\}$$

την επαγομένη από την μετρική[6], όπου $\overset{\circ}{\mathbb{B}}_d\ (x;\delta_x) := \{y \in X : d(x,y) < \delta_x\}$.

(iv) Εάν το X είναι ένα απειροσύνολο, τότε η

$$\mathcal{T}_{\text{συμπ.}} := \{A \subseteq X \mid X \smallsetminus A \text{ πεπερασμένο σύνολο}\} \cup \{\varnothing\}$$

καλείται **συμπεπερασμένη τοπολογία** επί τού X.

(v) Ο $(X, \mathfrak{P}(X))$, όπου $\mathfrak{P}(X)$ το δυναμοσύνολο τού X, ονομάζεται **διακριτός χώρος** και το $\mathfrak{P}(X) =: \mathcal{T}_{\text{διακ.}}$ **διακριτή τοπολογία** επί τού X.

1.1.3 Ορισμός. Έστω $(X,\mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Ένα υποσύνολο $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ καλείται **βάση τής τοπολογίας** $\mathcal{T}$ όταν κάθε ανοικτό σύνολο γράφεται ως ένωση στοιχείων τού $\mathcal{B}$. Τα στοιχεία μιας βάσεως[7] τής $\mathcal{T}$ καλούνται **βασικά υποσύνολα** τού X.

1.1.4 Παράδειγμα. Εάν (X,d) είναι ένας μετρικός χώρος, τότε αμφότερα τα

$$\mathcal{B} := \left\{ \overset{\circ}{\mathbb{B}}_d\ (x;\tfrac{1}{n}) \mid x \in X,\ n \in \mathbb{N} \right\},\ \mathcal{B}' := \left\{ \overset{\circ}{\mathbb{B}}_d\ (x;q) \mid x \in X,\ q \in \mathbb{Q}_{>0} \right\},$$

αποτελούν βάσεις τής $\mathcal{T}_d$, όπου[8] $\overset{\circ}{\mathbb{B}}_d\ (x;r) := \{y \in X : d(x,y) < r\}, \forall r \in \mathbb{R}_{>0}$.

[3]Όταν ένας συγκεκριμένος τοπολογικός χώρος $(X,\mathcal{T})$ διαθέτει μια εμφανή *γεωμετρική ερμηνεία*, είθισται να ονομάζουμε τα στοιχεία τού συνόλου X **σημεία** αυτού.

[4]Επί ενός συνόλου X ενδέχεται να ορίζονται *διαφορετικές* τοπολογίες. Εάν $(X,\mathcal{T}_1)$ και $(X,\mathcal{T}_2)$ είναι δυο τοπολογικοί χώροι με το *ίδιο* υποκείμενο σύνολο και $\mathcal{T}_1 \subsetneqq \mathcal{T}_2$, τότε λέμε ότι η τοπολογία $\mathcal{T}_1$ είναι **λεπτότερη** τής $\mathcal{T}_2$ (ή ότι η $\mathcal{T}_2$ είναι **αδρότερη** τής $\mathcal{T}_1$).

[5]Ένας **μετρικός χώρος** αποτελείται από ένα σύνολο X εφοδιασμένο με μια *μετρική* (ή *απεικόνιση αποστάσεως*) $d : X \times X \longrightarrow [0,\infty)$, ήτοι μια απεικόνιση με τις εξής ιδιότητες: (i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, (ii) $d(x,y) = d(y,x)$ για οιαδήποτε $x, y \in X$ και (iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ για οιαδήποτε $x,y,z \in X$.

[6]Λέμε ότι ένας τοπολογικός χώρος $(X,\mathcal{T})$ είναι **μετρικοποιήσιμος** όταν το X μπορεί να εφοδιασθεί με κάποια μετρική d, ούτως ώστε να ισχύει $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

[7]Προσοχή! Η $\mathcal{T}$ ενδέχεται να διαθέτει περισσότερες από μία βάσεις.

[8]Ενίοτε, το $\overset{\circ}{\mathbb{B}}_d\ (x;r)$ καλείται **ανοικτή μπάλα** (ως προς τη μετρική d) με κέντρο της το x και ακτίνα r.

1.1.5 Ορισμός. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και έστω $x \in X$. Ένα υποσύνολο $V \subseteq X$ καλείται **περιοχή τού** x όταν $\exists A \in \mathcal{T} : x \in A \subseteq V$. Χρησιμοποιούμενος συμβολισμός: $\mathcal{U}(x) := \{$σύνολο περιοχών τού $x\}$.

1.1.6 Παρατήρηση. Ένα υποσύνολο A τού X είναι ανοικτό εάν και μόνον εάν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $U \in \mathcal{U}(x)$, τέτοιο ώστε να ισχύει $U \subseteq A$. Πράγματι· εάν το A είναι ανοικτό, αρκεί να θέσουμε $U := A$. Και αντιστρόφως· εάν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $U_x \in \mathcal{U}(x)$, τέτοιο ώστε να ισχύει ο εγκλεισμός $U_x \subseteq A$, τότε για κάθε $x \in A$ υπάρχει $A_x \in \mathcal{T}$ με $x \in A_x \subseteq U_x$. Επειδή $A = \bigcup_{x \in A} A_x$, το A είναι ανοικτό (ως ένωση ανοικτών).

1.1.7 Πρόταση. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Τότε για οιοδήποτε στοιχείο $x \in X$ ισχύουν τα εξής:*

(i) $V \in \mathcal{U}(x) \Longrightarrow x \in V$. (*Ιδιαιτέρως,* $\varnothing \notin \mathcal{U}(x)$).

(ii) $V, W \in \mathcal{U}(x) \Longrightarrow V \cap W \in \mathcal{U}(x)$.

(iii) $[V \in \mathcal{U}(x)$ και $V \subseteq U \in \mathcal{T}] \Longrightarrow U \in \mathcal{U}(x)$.

(iv) *Εάν* $V \in \mathcal{U}(x)$, *τότε* $\exists W \in \mathcal{U}(x) : W \subseteq V$ *και* $V \in \mathcal{U}(y)$, $\forall y \in W$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Προφανές από τον ορισμό τού $\mathcal{U}(x)$.

(ii) Εάν $V, W \in \mathcal{U}(x)$, τότε υπάρχουν $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$, τέτοια ώστε $x \in A_1 \subseteq V$ και $x \in A_2 \subseteq W$. Επομένως, $x \in A_1 \cap A_2 \subseteq V \cap W$ και το $A_1 \cap A_2$ είναι ανοικτό (ως ένωση ανοικτών). Αυτό σημαίνει ότι $V \cap W \in \mathcal{U}(x)$.

(iii) Εάν $V \in \mathcal{U}(x)$, τότε υπάρχει $A \in \mathcal{T}$ με $x \in A \subseteq V \subseteq U$, οπότε $A \subseteq U$ και $U \in \mathcal{U}(x)$.

(iv) Εάν $V \in \mathcal{U}(x)$, τότε υπάρχει $A \in \mathcal{T}$ με $x \in A \subseteq V$. Επειδή το A είναι ανοικτό, έχουμε $A \in \mathcal{U}(y)$ για κάθε $y \in A$. (Βλ. 1.1.6.) Επειδή δε $A \subseteq V$, από το (iii) συμπεραίνουμε ότι $V \in \mathcal{U}(y)$ για κάθε $y \in A$. Αρκεί λοιπόν να τεθεί $W := A$. □

1.1.8 Πρόταση. *Εάν X είναι ένα μη κενό σύνολο και $\{\mathcal{U}(x) \mid x \in X\}$ μια οικογένεια υποσυνόλων τού X που πληροί τις συνθήκες* (i)-(iv) *τής προτάσεως* 1.1.7, *τότε υπάρχει μοναδική τοπολογία $\mathcal{T}$ επί τού X, τέτοια ώστε το $\mathcal{U}(x)$ να είναι το σύνολο των περιοχών τού x, για κάθε $x \in X$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ είναι τοπολογίες επί τού X με αυτήν την ιδιότητα, τότε για κάθε $A \in \mathcal{T}_1$ ισχύει $A \in \mathcal{U}(x)$ για κάθε $x \in A$, κάτι που (λόγω τής προτάσεως 1.1.7) ισοδυναμεί με το ότι $A \in \mathcal{T}_2$. Άρα $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Κατ' αναλογίαν, επαναλαμβάνοντας την ίδια επιχειρηματολογία (αλλά κατόπιν εναλλαγής των ρόλων των $\mathcal{T}_1$ και $\mathcal{T}_2$), λαμβάνουμε $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$. Επομένως, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. Εν συνεχεία θα δείξουμε την *ύπαρξη* μιας τοπολογίας με αυτήν την ιδιότητα. Θέτουμε

$$\mathcal{T} := \{\, A \in \mathfrak{P}(X) \mid A \in \mathcal{U}(x), \forall x \in A\}.$$

Προφανώς, $\varnothing, X \in \mathcal{T}$. Εάν $(A_i)_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων τού X με $A_i \in \mathcal{T}$ για κάθε $i \in I$, τότε για κάθε $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ υπάρχει $j \in I$, τέτοιο ώστε να ισχύει $x \in A_j$. Επειδή $A_j \in \mathcal{U}(x)$, από τη συνθήκη 1.1.7 (iii) προκύπτει ότι $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{U}(x)$. Άρα $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$. Τέλος, εάν $n \in \mathbb{N}$ και $A_1, ..., A_n \in \mathcal{T}$, τότε $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$. Πράγματι· τούτο είναι προφανές για $n = 1$. Όταν $n = 2$, για κάθε στοιχείο $x \in A_1 \cap A_2$ έχουμε $A_1 \in \mathcal{U}(x)$ και $A_2 \in \mathcal{U}(x)$. Σύμφωνα με το 1.1.7 (ii), $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{U}(x)$. Όταν $n \geq 3$, ο ισχυρισμός είναι ωσαύτως αληθής, όπως δείχνεται κάνοντας χρήση μαθηματικής επαγωγής (ως προς τον[9] n). Εκ των ανωτέρω έπεται ότι το $\mathcal{T}$ αποτελεί μια τοπολογία επί τού X. Συμβολίζοντας ως $\mathcal{U}'(x)$ το σύνολο περιοχών τυχόντος $x \in X$ ως προς την $\mathcal{T}$, εναπομένει να αποδείξουμε ότι

$$\mathcal{U}'(x) = \mathcal{U}(x).$$

Εάν $V' \in \mathcal{U}'(x)$, τότε υπάρχει ένα $A \in \mathcal{T}$ με $x \in A \subseteq V'$. Από τον ορισμό τής $\mathcal{T}$ έχουμε $A \in \mathcal{U}(x)$ και το 1.1.7 (iii) δίδει $V' \in \mathcal{U}(x)$. Άρα $\mathcal{U}'(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$. Και αντιστρόφως· εάν $V \in \mathcal{U}(x)$ και $\hat{V} := \{y \in V \,|\, V \in \mathcal{U}(y)\}$, τότε $x \in \hat{V}$ (λόγω τής συνθήκης 1.1.7 (i)). Επιπροσθέτως, για κάθε $y \in \hat{V}$ υπάρχει $W \in \mathcal{U}(y) : W \subseteq \hat{V}$ (λόγω τής συνθήκης 1.1.7 (iv), αφού $V \in \mathcal{U}(y)$) και $\hat{V} \in \mathcal{U}(y)$ (λόγω τής συνθήκης 1.1.7 (iii), αφού $W \in \mathcal{U}(y)$). Ως εκ τούτου, $\hat{V} \in \mathcal{U}(y)$ για κάθε $y \in \hat{V}$. Συνεπώς, $\hat{V} \in \mathcal{T}$ (από τον ορισμό τής $\mathcal{T}$). Επειδή $x \in \hat{V}$, έχουμε $\hat{V} \in \mathcal{U}'(x)$. (Βλ. 1.1.6.) Όμως $\hat{V} \subseteq V$, οπότε από την συνθήκη 1.1.7 (iii) συμπεραίνουμε ότι $V \in \mathcal{U}'(x)$. Άρα ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{U}'(x)$. $\square$

1.1.9 Ορισμός. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και έστω $x \in X$. Ένα υποσύνολο $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$ καλείται **βάση περιοχών τού** x (ως προς την $\mathcal{T}$) όταν για κάθε $V \in \mathcal{U}(x)$ υπάρχει κάποιο $B \in \mathcal{B}(x) : x \in B \subseteq V$. Τα στοιχεία μιας βάσεως περιοχών ενός x καλούνται **βασικές περιοχές τού** x.

1.1.10 Παραδείγματα. (i) Εάν (X, d) είναι ένας μετρικός χώρος, τότε το

$$\mathcal{B}(x) := \left\{ \overset{\circ}{\mathbb{B}}_d\,(x; \tfrac{1}{n}) \,\middle|\, x \in X,\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

είναι βάση περιοχών οιουδήποτε $x \in X$.

(ii) Εάν $(X, \mathcal{T})$ είναι τυχών τοπολογικός χώρος, το $\mathcal{B}(x) := \{A \in \mathcal{U}(x) \,|\, A \in \mathcal{T}\}$ είναι μια βάση περιοχών οιουδήποτε $x \in X$.

1.1.11 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ καλείται

- **1ος αριθμήσιμος** $\underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow}$ [$\exists$ αριθμήσιμη βάση περιοχών τού x, $\forall x \in X$].
- **2ος αριθμήσιμος** $\underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow}$ [υπάρχει κάποια αριθμήσιμη βάση τής $\mathcal{T}$].

[9] Αρκεί να χρησιμοποιηθεί το ίδιο επιχείρημα με τα $\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i$ και A_n στη θέση των A_1 και A_2, αντιστοίχως.

1.1.12 Παραδείγματα. (i) Κάθε μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος είναι 1ος αριθμήσιμος[10], αλλά όχι κατ' ανάγκην και 2ος αριθμήσιμος. Επί παραδείγματι, εάν το X είναι ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο, τότε, με τη διακριτή τοπολογία επί τού X, ο $(X, \mathcal{T}_{\text{διακ.}})$ δεν είναι 2ος αριθμήσιμος, παρότι ορίζεται από τη *διακριτή μετρική*

$$d(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{όταν } x \neq y, \\ 0, & \text{όταν } x = y, \end{cases}$$

καθόσον η μόνη βάση τής $\mathcal{T}_{\text{διακ.}} := \mathfrak{P}(X)$ είναι η $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$.
(ii) Εάν $k \in \mathbb{N}$, τότε ο $\mathbb{R}^k$ (ως μετρικός χώρος με τη *συνήθη μετρική* [11] $d_{\text{συν.}}$) είναι τόσον 1ος όσον και 2ος αριθμήσιμος, καθότι το σύνολο

$$\mathcal{B} = \left\{ \overset{\circ}{\mathbb{B}}_{d_{\text{συν.}}}(\mathbf{x}; \tfrac{1}{n}) \,\middle|\, \mathbf{x} \in \mathbb{Q}^k,\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

αποτελεί μια βάση τού $\mathbb{R}^k$ (που είναι προφανώς αριθμήσιμο).

1.1.13 Πρόταση. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και έστω $\mathcal{B}$ μια βάση τής $\mathcal{T}$. Τότε για κάθε $x \in X$ το $\mathcal{B}(x) := \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ αποτελεί μια βάση περιοχών τού x.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $U \in \mathcal{U}(x)$. Τότε υπάρχει $A \in \mathcal{T}$, τέτοιο ώστε $x \in A \subseteq U$. Επειδή το $\mathcal{B}$ είναι εξ υποθέσεως μια βάση τής $\mathcal{T}$, υπάρχει μια οικογένεια $(B_i)_{i \in I}$ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων τού $\mathcal{B}$ με $A = \bigcup_{i \in I} B_i$. Άρα $x \in B_{i_0} \subseteq U$ για κάποιον δείκτη $i_0 \in I$, απ' όπου έπεται ότι $B_{i_0} \in \mathcal{B}(x)$. Εξ αυτού συμπεραίνουμε ότι το $\mathcal{B}(x)$ αποτελεί όντως μια βάση περιοχών τού x. □

1.1.14 Πόρισμα. *Κάθε 2ος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος είναι και 1ος αριθμήσιμος.*

1.2 ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.2.1 Ορισμός. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Το

$$\boxed{\operatorname{int}_X(A) := \operatorname{int}_{\mathcal{T}}(A) := A^\circ := \bigcup \{B \subseteq X \mid B \subseteq A,\ B \text{ ανοικτό}\},}$$

ήτοι το μέγιστο ανοικτό σύνολο τού X που περιέχεται στο A, καλείται **τοπολογικό εσωτερικό** (ή **ανοικτός πυρήνας**) **τού** A.

[10] Εάν ο $(X, \mathcal{T})$ είναι μετρικοποιήσιμος με $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ και $x \in X$, τότε το $\left\{ \overset{\circ}{\mathbb{B}}_{d_{\text{συν.}}}(x; \varepsilon) \,\middle|\, \varepsilon \in \mathbb{Q} \right\}$ αποτελεί μια αριθμήσιμη βάση τού x.

[11] Αυτή είναι η $d_{\text{συν.}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$, $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$, όπου ως $||\mathbf{x}||$ συμβολίζεται η συνήθης στάθμη (νόρμα) οιουδήποτε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$. Η $\mathcal{T}_{d_{\text{συν.}}}$ καλείται **συνήθης (ευκλείδεια) τοπολογία** επί τού $\mathbb{R}^k$.

1.2.2 Πρόταση. *Εάν $(X, \mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$, τότε*

$$A^\circ = \{x \in X \mid A \in \mathcal{U}(x)\}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $x \in A^\circ$, τότε $A^\circ \in \mathcal{U}(x)$. Επειδή το $A^\circ \subseteq A$ είναι ανοικτό, έχουμε $A \in \mathcal{U}(x)$. Και αντιστρόφως· εάν $x \in X$ και $A \in \mathcal{U}(x)$, τότε υπάρχει *ανοικτό* σύνολο B με $B \subseteq A$, οπότε $x \in B \subseteq A^\circ$. □

1.2.3 Παραδείγματα. (i) Ως προς τη συνήθη (ευκλείδεια) τοπολογία επί τού $\mathbb{R}$ έχουμε $(0,1]^\circ = [0,1)^\circ = [0,1]^\circ = (0,1)$, $((0,1] \cup \{2\})^\circ = (0,1)$, $\mathbb{Q}^\circ = \varnothing$, $\mathbb{Z}^\circ = \varnothing$ και $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}^\circ = \varnothing$.

(ii) Στον χώρο Sierpinski 1.1.2 (ii), $\{0\}^\circ = \{0\}$ και $\{1\}^\circ = \varnothing$.

(iii) Σε οιονδήποτε τοπολογικό χώρο $(X, \mathcal{T})$, $\varnothing^\circ = \varnothing$ και $X^\circ = X$, και για οιοδήποτε υποσύνολο $A \subseteq X$ έχουμε $A^\circ \subseteq A$.

1.2.4 Πρόταση. *Εάν $(X, \mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος και $A, B \subseteq X$, τότε:*

(i) *Το A είναι ανοικτό $\Leftrightarrow A = A^\circ$,*

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$,

(iii) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$,

(iv) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$,

(v) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Εάν $A = A^\circ$, τότε το A είναι ανοικτό (αφού το A° είναι εξ ορισμού ανοικτό). Και αντιστρόφως· εάν το A είναι ανοικτό, τότε λόγω τού ορισμού τού A° έχουμε $A \subseteq A^\circ$, οπότε $A = A^\circ$.

(ii) Τούτο είναι προφανές, διότι κάθε ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο A περιέχεται και στο B.

(iii) Το $A^\circ \cap B^\circ$ είναι ανοικτό υποσύνολο τού $A \cap B$. Άρα $A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$. Από την άλλη μεριά, το (ii) δίδει $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ$ και $(A \cap B)^\circ \subseteq B^\circ$. Αυτό σημαίνει ότι ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$.

(iv) Από το (ii) έχουμε $A^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$ και $B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$. Άρα $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$.

(vi) Προφανώς, $(A^\circ)^\circ \subseteq A^\circ$. Επειδή το A° είναι ανοικτό σύνολο, ισχύει κατ' ανάγκην και ο αντίστροφος εγκλεισμός $A^\circ \subseteq (A^\circ)^\circ$. □

1.2.5 Πρόταση. *Εάν $(X, \mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος και εάν $(A_i)_{i \in I}$ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων τού X, τότε*

$$\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big)^\circ \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i^\circ, \tag{1.1}$$

που ισχύει ως ισότητα όταν το I είναι πεπερασμένο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για *κάθε* δείκτη $j \in I$ έχουμε

$$\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_j \underset{1.2.4\,(\text{iii})}{\Longrightarrow} (\bigcap_{i \in I} A_i)^\circ \subseteq A_j^\circ,$$

οπότε η εγκλειστική σχέση (1.1) είναι προδήλως αληθής. Όταν το I είναι *πεπερασμένο*, τότε η (1.1) ισχύει ως *ισότητα* (όπως προκύπτει επαγωγικώς κάνοντας χρήση τού (iv) τής προτάσεως 1.2.4). $\square$

1.2.6 Παράδειγμα. Ο εγκλεισμός (1.1) ενδέχεται να είναι αυστηρός όταν το σύνολο δεικτών I δεν είναι πεπερασμένο. Επί παραδείγματι, ως προς τη συνήθη (ευκλείδεια) τοπολογία επί τού $\mathbb{R}$ για την οικογένεια των ανοικτών διαστημάτων $A_n := (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^\circ = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\} \supsetneqq \varnothing = \{0\}^\circ = (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n)^\circ.$$

1.2.7 Ορισμός. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Το

$$\boxed{\mathrm{cl}_X(A) := \mathrm{cl}_{\mathcal{T}}(A) := \overline{A} := \bigcap\{C \subseteq X \mid A \subseteq C,\ C \text{ κλειστό}\},}$$

ήτοι το ελάχιστο κλειστό σύνολο τού X που περιέχει το A, καλείται **κλειστή θήκη** (ή **κλειστό έγκλεισμα**) τού A. Επίσης, το A καλείται **πυκνό εντός τού** X όταν $\overline{A} = X$.

1.2.8 Πρόταση. *Εάν $(X, \mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$, τότε*

$$\overline{A} = \{x \in X \mid U \cap A \neq \varnothing,\ \forall U \in \mathcal{U}(x)\}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $x \in \overline{A}$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει περιοχή U τού x, τέτοια ώστε να ισχύει $U \cap A = \varnothing$. Τότε υπάρχει $B \in \mathcal{T}$ με $x \in B \subseteq U$. Επομένως,

$$B \cap A = \varnothing \Rightarrow A \subseteq X \smallsetminus B \Rightarrow [\, X \smallsetminus B \text{ είναι κλειστό}],$$

οπότε $x \in \overline{A} \subseteq X \smallsetminus B$. Άτοπο! Και αντιστρόφως· εάν $y \notin \overline{A}$, δηλαδή εάν

$$\begin{aligned} y \in X \smallsetminus \overline{A} &= X \smallsetminus \bigcap\{C \subseteq X \mid C \text{ κλειστό και } A \subseteq C\} \\ &= \bigcup\{X \smallsetminus C \mid C \text{ κλειστό και } A \subseteq C\}, \end{aligned}$$

τότε το $X \smallsetminus \overline{A}$ είναι μια ανοικτή περιοχή τού x και

$$(X \smallsetminus \overline{A}) \cap A \subseteq (X \smallsetminus A) \cap A = \varnothing,$$

οπότε $y \notin \{x \in X \mid U \cap A \neq \varnothing,\ \forall U \in \mathcal{U}(x)\}$. $\square$

1.2.9 Παραδείγματα. (i) Ως προς τη συνήθη (ευκλείδεια) τοπολογία επί τού $\mathbb{R}$ έχουμε $\overline{(0,1)} = \overline{(0,1]} = \overline{[0,1)} = [0,1]$, $\overline{(0,1] \cup \{2\}} = [0,1] \cup \{2\}$, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ και $\overline{\left\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\right\}} = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\right\}$.

(ii) Ως προς τη συνήθη (ευκλείδεια) τοπολογία επί τού $\mathbb{R}^2$: Για το

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = \sin(\frac{1}{x}),\ x \in (0,1]\} \Rightarrow \overline{A} = A \cup (\{0\} \times [-1,1]\}).$$

(iii) Εάν $X = \{0,1\}$, τότε ως προς την τοπολογία $\mathcal{T} := \{\varnothing, X, \{0\}\}$ τού Sierpinski επί τού X έχουμε $\overline{\{0\}} = X$ και $\overline{\{1\}} = \{1\}$.

(iv) Στον $(X, \mathcal{T}_{\text{διακ.}})$ το μόνο πυκνό σύνολο εντός τού X είναι το ίδιο το X.

(v) Σε οιονδήποτε τοπολογικό χώρο $(X,\mathcal{T})$, $\overline{\varnothing} = \varnothing$ και $\overline{X} = X$, και για οιοδήποτε υποσύνολο $A \subseteq X$ έχουμε $A \subseteq \overline{A}$.

1.2.10 Πρόταση. *Εάν ο $(X,\mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος και $A, B \subseteq X$, τότε:*
(i) *Το A είναι κλειστό* $\Leftrightarrow A = \overline{A}$,
(ii) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$,
(iii) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$,
(iv) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
(v) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
(vi) $\overline{X \smallsetminus A} = X \smallsetminus A^\circ$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Εάν $A = \overline{A}$ τότε το A είναι κλειστό (διότι το $\overline{A}$ είναι εξ ορισμού κλειστό). Και αντιστρόφως· εάν το A είναι κλειστό, τότε από τον ορισμό τού $\overline{A}$ έχουμε $\overline{A} \subseteq A$, οπότε $A = \overline{A}$.

(ii) Κάθε κλειστό σύνολο που περιέχει το B περιέχει και το A. Άρα $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

(iii) Από το (ii) λαμβάνουμε $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A}$ και $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{B}$. Άρα $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

(iv) Επειδή $A \subseteq \overline{A}$ και $B \subseteq \overline{B}$, έχουμε $A \cup B = \overline{A} \cup \overline{B}$. Το σύνολο $\overline{A} \cup \overline{B}$ είναι κλειστό (ως ένωση δύο κλειστών συνόλων) και περιέχει το $A \cup B$, οπότε $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Και αντιστρόφως· από το (ii) προκύπτει ότι $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ και $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Επομένως ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

(v) Προφανώς, $\overline{A} \subseteq \overline{\overline{A}}$. Επειδή το $\overline{A}$ είναι κλειστό σύνολο, ισχύει κατ' ανάγκην και ο αντίστροφος εγκλεισμός $\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$.

(vi) Το $X \smallsetminus A^\circ$ είναι κλειστό, περιέχον το $X \smallsetminus A$, οπότε $\overline{X \smallsetminus A} \subseteq X \smallsetminus A^\circ$. Και αντιστρόφως· εάν $x \notin A^\circ$, τότε για κάθε περιοχή U τού x έχουμε $U \nsubseteq A$, το οποίο σημαίνει ότι $U \cap (X \smallsetminus A) \neq \varnothing$. Άρα $x \in \overline{X \smallsetminus A}$, ήτοι $X \smallsetminus A^\circ \subseteq \overline{X \smallsetminus A}$ □

1.2.11 Πρόταση. *Εάν $(X,\mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος και εάν $(A_i)_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων τού X, τότε*

$$\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}, \tag{1.2}$$

που ισχύει ως ισότητα όταν το I είναι πεπερασμένο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για *κάθε* δείκτη $j \in I$ έχουμε

$$A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \underset{1.2.10\,\text{(ii)}}{\Longrightarrow} \overline{A}_j \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i},$$

οπότε η εγκλειστική σχέση (1.2) είναι προδήλως αληθής. Όταν το I είναι *πεπερασμένο*, τότε η (1.2) ισχύει ως *ισότητα* (όπως προκύπτει επαγωγικώς κάνοντας χρήση τού (iv) τής προτάσεως 1.2.10). □

1.2.12 Παράδειγμα. Ο εγκλεισμός (1.2) ενδέχεται να είναι αυστηρός όταν το σύνολο δεικτών I δεν είναι πεπερασμένο. Επί παραδείγματι, ως προς τη συνήθη (ευκλείδεια) τοπολογία επί τού $\mathbb{R}$ για την οικογένεια των κλειστών διαστημάτων $A_n := \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \overline{[0,1)} = [0,1] \supsetneqq [0,1) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}.$$

1.2.13 Ορισμός. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Το κλειστό σύνολο[12]

$$\boxed{\mathrm{Fr}_X(A) := \mathrm{Fr}_{\mathcal{T}}(A) := \overline{A} \cup \overline{X \smallsetminus A}}$$

καλείται **μεθόριος τού** A.

1.2.14 Παραδείγματα. (i) Ως προς τη συνήθη (ευκλείδεια) τοπολογία επί τού $\mathbb{R}$ έχουμε

$$\mathrm{Fr}_{\mathbb{R}}((0,1)) = \mathrm{Fr}_{\mathbb{R}}([0,1)) = \mathrm{Fr}_{\mathbb{R}}((0,1]) = \mathrm{Fr}_{\mathbb{R}}([0,1]) = \{0,1\},$$

$\mathrm{Fr}_{\mathbb{R}}((0,1] \cup \{2\}) = \{0,1,2\}$, $\mathrm{Fr}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ και $\mathrm{Fr}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

(ii) Στον χώρο Sierpinski έχουμε $\mathrm{Fr}_X(\{0\}) = \{1\}$ και $\mathrm{Fr}_X(\{1\}) = \{1\}$.

1.2.15 Πρόταση. *Εάν $(X, \mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) $\mathrm{Fr}_X(A) = \mathrm{Fr}_X(X \smallsetminus A)$,

(ii) $\mathrm{Fr}_X(A) = \overline{A} \smallsetminus A^\circ$,

(iii) $\mathrm{Fr}_X(A) \cap A^\circ = \varnothing$,

(iv) $\overline{A} = A^\circ \cup \mathrm{Fr}_X(A)$,

(v) $X = A^\circ \amalg \mathrm{Fr}_X(A) \amalg (X \smallsetminus A)^\circ$.

[12]Το "Fr" παραπέμπει στον αγγλικό όρο *frontier*. (Προσοχή! Ορισμένοι συγγραφείς χρησιμοποιούν αντ' αυτού τον όρο (**τοπολογικό**) **σύνορο**. Ωστόσο, ο όρος *boundary*, ήτοι το **σύνορο**, τουλάχιστον όπως ορίζεται εντός τού πλαισίου τής Θεωρίας Πολυπτυγμάτων, *δεν συμπίπτει* με αυτόν.)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό τού Fr_X.

(ii) $\mathrm{Fr}_X(A) = \overline{A} \cap \overline{X \smallsetminus A} = \overline{A} \cap (X \smallsetminus A^\circ) = \overline{A} \smallsetminus A^\circ$.

(iii) $\mathrm{Fr}_X(A) \cap A^\circ = \overline{A} \cap \overline{X \smallsetminus A} \cap (X \smallsetminus X \smallsetminus A) = \varnothing$.

(iv) $A^\circ \cup \mathrm{Fr}_X(A) = A^\circ \cup (\overline{A} \cap \overline{X \smallsetminus A}) = A^\circ \cup (\overline{A} \cap (X \smallsetminus A^\circ)) = \overline{A}$.

(v) Προφανώς, $A^\circ \cup \mathrm{Fr}_X(A) \cup (X \smallsetminus A)^\circ \underset{\text{(iv)}}{=} \overline{A} \cup (X \smallsetminus \overline{A}) = X$. Εξάλλου (από το (iii)), $A^\circ \cap \mathrm{Fr}_X(A) = \varnothing$,

$$\mathrm{Fr}_X(A) \cap (X \smallsetminus A)^\circ \underset{\text{(i)}}{=} \mathrm{Fr}_X(X \smallsetminus A) \cap (X \smallsetminus A)^\circ \underset{\text{(iii)}}{=} \varnothing,$$

και $A^\circ \cap (X \smallsetminus A)^\circ \subseteq A \cap (X \smallsetminus A) = \varnothing \Rightarrow A^\circ \cap (X \smallsetminus A)^\circ = \varnothing$. □

1.3 ΣΥΝΕΧΕΙΣ, ΑΝΟΙΚΤΕΣ ΚΑΙ ΚΛΕΙΣΤΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

1.3.1 Ορισμός. Έστω ότι $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ είναι δυο τοπολογικοί χώροι. Μια απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ καλείται **συνεχής απεικόνιση** όταν $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_1$, $\forall A \in \mathcal{T}_2$.

1.3.2 Πρόταση. *Εάν $(X, \mathcal{T}_1), (Y, \mathcal{T}_2)$ είναι δυο τοπολογικοί χώροι, τότε οι ακόλουθες συνθήκες για μια απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ είναι ισοδύναμες:*

(i) *Η f είναι συνεχής.*

(ii) *Το $f^{-1}(C)$ είναι κλειστό, για κάθε κλειστό $C \subseteq Y$.*

(iii) *Για κάθε $x \in X$ και κάθε $W \in \mathcal{U}(f(x))$, $\exists V \in \mathcal{U}(x) : f(V) \subseteq W$.*

(iv) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, $\forall A \in \mathfrak{P}(X)$.

(v) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$, $\forall B \in \mathfrak{P}(Y)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Έστω $C \subseteq Y$ κλειστό. Τότε το $Y \smallsetminus C$ είναι ανοικτό, άρα το $f^{-1}(Y \smallsetminus C) = X \smallsetminus f^{-1}(C)$ είναι εξ υποθέσεως ανοικτό. Επομένως το $f^{-1}(C)$ είναι κλειστό. Η απόδειξη τού αντιστρόφου είναι πανομοιότυπη.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Έστω $x \in X$ και έστω W μια περιοχή τού $f(x)$. Το $V := f^{-1}(W)$ είναι ανοικτό και, ως εκ τούτου, περιοχή τού x. Αλλά $f(V) = f(f^{-1}(W)) \subseteq W$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Έστω τυχόν υποσύνολο $A \subseteq X$. Εάν $x \in A$ και $W \in \mathcal{U}(f(x))$, τότε υπάρχει εξ υποθέσεως $V \in \mathcal{U}(x) : f(V) \subseteq W$. Επειδή $x \in \overline{A}$, έχουμε $V \cap \overline{A} \neq \varnothing$. Επομένως,

$$\varnothing \neq f(V \cap A) \subseteq f(V) \cap f(A) \subseteq W \cap f(A),$$

ήτοι κάθε $W \in \mathcal{U}(f(x))$ διαθέτει μη κενή τομή με το $f(A)$. Αυτό, σύμφωνα με την πρόταση 1.2.8, σημαίνει ότι $f(x) \in \overline{f(A)}$. Άρα $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(iv) $\Rightarrow$(v) Θέτοντας $A := f^{-1}(B)$ λαμβάνουμε

$$f(\overline{A}) \underset{\text{(iv)}}{\subseteq} \overline{f(A)} \subseteq \overline{f(f^{-1}(B))} = \overline{B \cap f(X)} \subseteq \overline{B} \Rightarrow \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B}).$$

(v)$\Rightarrow$ (ii) Εάν το $C \subseteq Y$ είναι κλειστό, τότε $\overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(\overline{C}) = f^{-1}(C)$, οπότε το $f^{-1}(C) \subseteq X$ είναι κλειστό. □

1.3.3 Πρόταση. *Η σύνθεση συνεχών απεικονίσεων μεταξύ τοπολογικών χώρων είναι μια συνεχής απεικόνιση.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας υποθέσουμε ότι $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ είναι συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών χώρων και $g \circ f : X \longrightarrow Z$ η σύνθεση αυτών. Εάν $G \subseteq Z$ είναι ανοικτό, τότε το $g^{-1}(G)$ είναι ανοικτό στον Y και το $f^{-1}(g^{-1}(G))$ είναι ανοικτό στο X. Κατά συνέπειαν, το $(g \circ f)^{-1}(G)$ είναι ανοικτό στον X και η $g \circ f$ είναι συνεχής απεικόνιση. □

1.3.4 Ορισμός. Μια απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ μεταξύ (των υποκειμένων συνόλων) δυο τοπολογικών χώρων καλείται **ανοικτή** (και αντιστοίχως, **κλειστή**) όταν απεικονίζει ανοικτά (και αντιστοίχως, κλειστά) υποσύνολα τού X σε ανοικτά (και αντιστοίχως, σε κλειστά) υποσύνολα τού Y.

1.3.5 Πρόταση. *Για μια απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ μεταξύ (των υποκειμένων συνόλων) δυο τοπολογικών χώρων οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*
(i) *Η f είναι ανοικτή απεικόνιση.*
(ii) $f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ$, $\forall A \in \mathfrak{P}(X)$.
(iii) *Η f απεικονίζει τα στοιχεία οιασδήποτε βάσεως τού X σε ανοικτά υποσύνολα τού Y.*
(iv) *Για κάθε $x \in X$ και κάθε $V \in \mathcal{U}(x)$, $\exists W \in \mathcal{U}(f(x)) : f(x) \in W \subseteq f(V)$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) $\Rightarrow$ (ii) Επειδή το A° είναι ανοικτό, το $f(A^\circ)$ είναι ωσαύτως ανοικτό και περιέχεται στο $f(A)$. Άρα $f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Έστω $\mathcal{B}$ μια βάση τού X και έστω $B \in \mathcal{B}$. Το B είναι ανοικτό, οπότε $B = B^\circ$, $f(B) = f(B^\circ) \subseteq (f(B))^\circ \subseteq f(B) \Rightarrow f(B)^\circ = f(B)$ και το $f(B)$ είναι ανοικτό υποσύνολο τού Y.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Έστω $x \in X$ και έστω $V \in \mathcal{U}(x)$. Εάν $\mathcal{B}$ είναι μια βάση τού X, τότε υπάρχει $B \in \mathcal{B}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $x \in B \subseteq V$. Όμως $f(x) \in f(B)$ με το $f(B)$ ανοικτό, οπότε αρκεί να θέσουμε $W := f(B)$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Έστω $A \subseteq X$ ανοικτό και έστω $x \in A$. Τότε $A \in \mathcal{U}(x)$ και (εξ υποθέσεως) υπάρχει $W_x \in \mathcal{U}(f(x))$, τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x) \in W_x \subseteq f(A)$. Συνεπώς το σύνολο $f(A) = \bigcup_{x \in A} W_x$ είναι ανοικτό (ως ένωση ανοικτών) και η f ανοικτή απεικόνιση. □

1.3.6 Πρόταση. *Για μια απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ μεταξύ (των υποκειμένων συνόλων) δυο τοπολογικών χώρων οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Η f είναι κλειστή απεικόνιση.*

(ii) $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$, $\forall A \in \mathfrak{P}(X)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) $\Rightarrow$ (ii) Επειδή $A \subseteq \overline{A}$, έχουμε $f(A) \subseteq f(\overline{A})$. Όμως η f είναι κλειστή απεικόνιση, οπότε το $f(\overline{A})$ είναι κλειστό. Άρα $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Έστω $A \in \mathfrak{P}(X)$ κλειστό. Προφανώς, $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A}) = f(A)$, οπότε το $f(A) \subseteq Y$ είναι κλειστό. Άρα η f είναι κλειστή απεικόνιση. □

1.3.7 Παραδείγματα. (i) Η $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) := e^x\cos(x)$, είναι (προφανώς) συνεχής αλλά δεν είναι ούτε ανοικτή ούτε κλειστή, καθότι το $f((-\infty, 0)) = [0, 1)$ είναι μη ανοικτό και το $f(\{-n\pi \,|\, n \in \mathbb{N}\}) = \{\pm e^{-n\pi} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ μη κλειστό.

(ii) Εάν $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 = 1\}$, $Y := [0, 2\pi)$ και $f : X \longrightarrow Y$, $f(x, y) := \theta$, όπου $x = \cos(\theta)$ και $y = \sin(\theta)$ ($\theta \in [0, 2\pi)$), η f^{-1} είναι συνεχής, οπότε η f είναι και ανοικτή και κλειστή. Ωστόσο, η f δεν είναι συνεχής, διότι θέτοντας

$$x_n := \cos\left(2\pi - \frac{1}{n}\right), \ y_n := \sin\left(2\pi - \frac{1}{n}\right), \ n \in \mathbb{N},$$

έχουμε $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(x_n, y_n) = (1, 0)$ με $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f((x_n, y_n)) = 2\pi \neq 0 = f((1, 0))$.

(iii) Εάν $X := \bigcup\limits_{n=0}^{\infty}(2n, 2n + 1]$ (με τη συνήθη τοπολογία) και $f : X \longrightarrow X$, όπου

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{όταν } 0 < x \leq 1, \\ \frac{x-1}{2}, & \text{όταν } 2 < x \leq 3, \\ x - 2, & \text{αλλιώς}, \end{cases}$$

τότε η f είναι αμφιρριπτική, συνεχής, αλλά όχι ανοικτή, διότι $f(\underbrace{(0, 1]}_{\text{ανοικτό}}) = \underbrace{(0, \frac{1}{2}]}_{\text{μη ανοικτό}}$.

$\boxed{1.4}$ ΥΠΟΧΩΡΟΙ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

1.4.1 Ορισμός. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Το

$$\boxed{\mathcal{T}_A := \{U \cap A \,|\, U \in \mathcal{T}\}}$$

ορίζει μια τοπολογία επί τού A, τη λεγομένη **σχετική τοπολογία** επί τού A, ενώ κάθε τοπολογικός χώρος τής μορφής $(A, \mathcal{T}_A)$ καλείται **(τοπολογικός) υπόχωρος τού** $(X, \mathcal{T})$.

1.4.2 Πρόταση. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) $V \in \mathcal{T}_A \Longleftrightarrow [\exists U \in \mathcal{T} : V = U \cap A]$.

(ii) $W \in A \setminus \mathcal{T}_A \Longleftrightarrow [\exists C \in X \setminus \mathcal{T} : W = C \cap A]$.

(iii) *Εάν $\mathcal{B}$ είναι μια βάση τής $\mathcal{T}$, τότε η $\mathcal{B}_A := \{B \cap A \,|\, B \in \mathcal{B}\}$ αποτελεί μια βάση τής $\mathcal{T}_A$.*

(iv) *Εάν $\mathcal{B}(x)$ είναι μια βάση περιοχών ενός $x \in A$ (ως προς την $\mathcal{T}$), τότε το $\mathcal{B}_A(x) := \{B \cap A \,|\, B \in \mathcal{B}(x)\}$ είναι μια βάση περιοχών τού x (ως προς την $\mathcal{T}_A$).*

(v) $\mathrm{cl}_A(B) = \mathrm{cl}_X(B) \cap A, \ \forall B \in \mathfrak{P}(A)$.

(vi) $\mathrm{int}_A(B) \supseteq \mathrm{int}_X(B) \cap A, \ \forall B \in \mathfrak{P}(A)$.

(vii) $\mathrm{Fr}_A(B) \subseteq \mathrm{Fr}_X(B) \cap A, \ \forall B \in \mathfrak{P}(A)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Τούτο έπεται άμεσα από τον ορισμό 1.4.1.

(ii) "$\Rightarrow$" Έστω W ένα κλειστό υποσύνολο τού (υπόχωρου) A. Τότε το $A \setminus W$ είναι ανοικτό υποσύνολο τού A, οπότε (σύμφωνα με το (i)) υπάρχει ανοικτό υποσύνολο U τού X, τέτοιο ώστε να ισχύει $A \setminus W = U \cap A$. Αρκεί λοιπόν να τεθεί $C := X \setminus U$.

"$\Leftarrow$" Υποθέτοντας ότι C είναι ένα κλειστό υποσύνολο τού X και $W := C \cap A$, παρατηρούμε ότι $A \setminus W = (X \setminus C) \cap A$. Από τον ορισμό 1.4.1 γνωρίζουμε ότι το $A \setminus W$ είναι ανοικτό υποσύνολο τού A. Άρα το W είναι κλειστό υποσύνολο τού A.

(iii) Εάν $V \in \mathcal{T}_A$, τότε (σύμφωνα με το (i)) υπάρχει $U \in \mathcal{T} : V = U \cap A$. Άρα υπάρχει κάποια υποοικογένεια $\{B_i \,|\, i \in I\} \subseteq \mathcal{B}$ με $U = \bigcup_{i \in I} B_i$. Ο ισχυρισμός είναι αληθής, καθόσον ισχύει $V = U \cap A = (\bigcup_{i \in I} B_i) \cap A = \bigcup_{i \in I} (B_i \cap A)$.

(iv) Έστω V μια περιοχή τού x ως προς την $\mathcal{T}_A$. Τότε υπάρχει ανοικτό υποσύνολο U τού X με $x \in U \cap A \subseteq V$. Όμως το U είναι μια περιοχή τού x (ως προς την $\mathcal{T}$), οπότε υπάρχει $B \in \mathcal{B}(x)$, τέτοιο ώστε να ισχύει $x \in B \subseteq U$. Εξ αυτού έπεται ότι

$$x \in B \cap A \subseteq U \cap A \subseteq V.$$

(v) Έστω B τυχόν υποσύνολο τού A. Λόγω τού (ii) η τομή $\mathrm{cl}_X(B) \cap A$ είναι κλειστό υποσύνολο τού A. Επειδή δε αυτό περιέχει το B,έχουμε $\mathrm{cl}_A(B) \subseteq \mathrm{cl}_X(B) \cap A$. Για την απόδειξη τού αντιστρόφου εγκλεισμού, αρκεί να δειχθεί ότι για κάθε κλειστό υποσύνολο W τού A περιέχον το B ισχύει $\mathrm{cl}_X(B) \cap A \subseteq W$. Έστω λοιπόν W κλειστό στο A με $B \subseteq W$. Σύμφωνα με το (ii) υπάρχει κλειστό υποσύνολο C τού X, τέτοιο ώστε να ισχύει $W = C \cap A$. Επομένως,

$$B \subseteq W \subseteq C \Rightarrow \mathrm{cl}_X(B) \subseteq C \Rightarrow \mathrm{cl}_X(B) \cap A \subseteq C \cap A = W.$$

(vi) Έστω B τυχόν υποσύνολο τού A. Από τον ορισμό 1.4.1 τής σχετικής τοπολογίας, $\mathrm{int}_X(B) \cap A \in \mathcal{T}_A$. Προφανώς, $\mathrm{int}_X(B) \cap A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{int}_X(B) \cap A \subseteq \mathrm{int}_A(B)$.

(vii) Έστω B τυχόν υποσύνολο τού A. Από τα (v) και (vi) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{Fr}_A(B) &\underset{1.2.15\,\text{(ii)}}{=} \mathrm{cl}_A(B)\smallsetminus\mathrm{int}_A(B) \subseteq \mathrm{cl}_X(B)\cap A\smallsetminus(\mathrm{int}_X(B)\cap A)\\ &= (\mathrm{cl}_X(B)\smallsetminus\mathrm{int}_X(B))\cap A \underset{1.2.15\,\text{(ii)}}{=} \mathrm{Fr}_X(B)\cap A,\end{aligned}$$

οπότε και αυτός ο ισχυρισμός είναι αληθής. □

1.4.3 Σημείωση. Οι εγκλεισμοί (vi) και (vii) τής προτάσεως 1.4.2 ενδέχεται να είναι αυστηροί. Επί παραδείγματι, εάν $X = \mathbb{R}^2$ με τη συνήθη (ευκλείδεια) τοπολογία και $A := \mathbb{R}\times\{0\} =: B$, τότε

$$\mathrm{int}_A(B) = \mathrm{int}_A(A) = A = \mathbb{R}\times\{0\} \supsetneqq \varnothing = \varnothing\cap A = \mathrm{int}_X(B)\cap A$$

και $\mathrm{Fr}_A(B) = \mathrm{Fr}_A(A) = \varnothing \subsetneqq \mathbb{R}\times\{0\} = A = \mathrm{Fr}_X(B)\cap A$.

1.4.4 Πρόταση. *Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μια απεικόνιση μεταξύ (των υποκειμένων συνόλων) δυο τοπολογικών χώρων και έστω $A \subseteq X$ ένας υπόχωρος τού X. Εάν η f είναι συνεχής, τότε και η $f|_A : A \longrightarrow Y$ είναι συνεχής.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε ανοικτό υποσύνολο B τού Y το $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό υποσύνολο τού X, οπότε το $(f|_A)^{-1}(B) = f^{-1}(B)\cap A$ είναι ανοικτό υποσύνολο τού (υποχώρου του) A. □

1.4.5 Σημείωση. Το αντίστροφο τής προτάσεως 1.4.4 δεν αληθεύει. Εάν, π.χ., θεωρήσουμε τους $X = Y = \mathbb{R}$ με τη συνήθη (ευκλείδεια) τοπολογία, $A := \mathbb{Q}$ και

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto f(x) := \begin{cases} 0, & \text{όταν } x\in\mathbb{Q},\\ 1, & \text{όταν } x\in\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q},\end{cases}$$

τότε η $f|_{\mathbb{Q}}$ είναι συνεχής, ενώ η f δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο τού $\mathbb{R}$.

1.4.6 Πρόταση. *Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μια απεικόνιση μεταξύ (των υποκειμένων συνόλων) δυο τοπολογικών χώρων. Εάν $k\in\mathbb{N}$ και $C_1, ..., C_k$ είναι κλειστά υποσύνολα τού X, τέτοια ώστε να ισχύει $X = C_1\cup\cdots\cup C_k$, τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Η f είναι συνεχής.*

(ii) *Η $f|_{C_j}$ είναι συνεχής για κάθε $j\in\{1, ..., k\}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i)⇒(ii) Τούτο έπεται άμεσα από την πρόταση 1.4.4.

(ii)⇒(i) Ας υποθέσουμε ότι η $f|_{C_j}$ είναι συνεχής για κάθε $j\in\{1, ..., k\}$. Για κάθε κλειστό υποσύνολο V τού Y και για κάθε δείκτη $j\in\{1, ..., k\}$ το σύνολο $(f|_{C_j})^{-1}(V) = f^{-1}(V)\cap C_j$ είναι κλειστό υποσύνολο τού C_j. (Βλ. 1.3.2 (i)⇒(ii).)

Επειδή το C_j είναι εξ υποθέσεως κλειστό υποσύνολο τού X, *και* η τομή $f^{-1}(V)\cap C_j$ αποτελεί ένα κλειστό υποσύνολο τού X. (Βλ. 1.4.2 (ii).) Κατ' επέκταση, *και* το $f^{-1}(V) = \bigcup_{j=1}^{k}(f^{-1}(V)\cap C_j)$ είναι κλειστό υποσύνολο τού X. Άρα η f είναι συνεχής. (Βλ. 1.3.2 (ii)⇒(i).) □

1.5 ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΙΣΜΟΙ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

1.5.1 Ορισμός. Έστω ότι $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ είναι δυο τοπολογικοί χώροι. Μια αμφιρριπτική απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ καλείται **ομοιομορφισμός** όταν είναι *αμφισυνεχής*, ήτοι όταν αμφότερες οι f και $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ είναι συνεχείς. Χρησιμοποιούμενος συμβολισμός:

$$\boxed{X \approx Y \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} [\text{υπάρχει κάποιος ομοιομορφισμός } f : X \longrightarrow Y].}$$

(Εν τοιαύτη περιπτώσει λέμε ότι οι X και Y είναι **ομοιομορφικοί**[13].)

1.5.2 Πρόταση. *Εάν* $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ *είναι δυο τοπολογικοί χώροι και* $f : X \longrightarrow Y$ *μια αμφιρριπτική απεικόνιση, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*:

(i) *Η f είναι ένας ομοιομορφισμός.*

(ii) *Η f είναι συνεχής και ανοικτή.*

(iii) *Η f είναι συνεχής και κλειστή.*

(iv) $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$, $\forall A \subseteq X$.

Απόδειξη. (i) ⇔ (ii) Η $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ είναι συνεχής εάν και μόνον εάν για κάθε $A \subseteq X$ ανοικτό το $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ είναι ανοικτό.

(ii) ⇔ (iii) Έστω $C \subseteq X$ κλειστό υποσύνολο. Τότε το $X \smallsetminus C$ είναι ανοικτό υποσύνολο. Άρα το $f(X \smallsetminus C) = Y \smallsetminus f(C)$ είναι εξ υποθέσεως ανοικτό και, ως εκ τούτου, το $f(C)$ κλειστό. Η απόδειξη τού αντιστρόφου είναι πανομοιότυπη.

(iii) ⇒ (iv) Το $f(\overline{A}) \subseteq Y$ είναι εξ υποθέσεως κλειστό. Επίσης $f(A) \subseteq f(\overline{A})$. Άρα $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$. Από τη συνέχεια τής f έπεται (λόγω τής ισοδυναμίας των συνθηκών (i) και (iv) τής προτάσεως 1.3.2) ότι $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Συνεπώς $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

(iv) ⇒ (iii) Έστω $C \subseteq X$ κλειστό. Τότε $f(C) = f(\overline{C}) = \overline{f(C)}$. Άρα το $f(C)$ είναι κλειστό. Επίσης, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ για κάθε $A \subseteq X$, οπότε η f είναι *και* συνεχής (εκ νέου λόγω τής ισοδυναμίας των συνθηκών (i) και (iv) τής προτάσεως 1.3.2). □

1.5.3 Παραδείγματα. (i) Έστω $n \in \mathbb{N}_0$. Όταν $n \geq 2$ ορίζουμε το

$$\boxed{\mathbb{B}^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid ||\mathbf{x}|| \leq 1\}}$$

[13] Κατ' αναλογίαν, ο συμβολισμός $X \not\approx Y$ θα δηλοί ότι οι X και Y δεν είναι ομοιομορφικοί.

ως την n-**διάστατη μοναδιαία μπάλα**[14], το

$$\boxed{\mathbb{S}^{n-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid ||\mathbf{x}|| = 1\}}$$

ως την $(n-1)$-**διάστατη μοναδιαία σφαίρα**[15], το

$$\boxed{\overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^n := \overset{\circ}{\mathbb{B}}_{d_{\text{συν.}}}(\mathbf{0};1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid ||\mathbf{x}|| < 1\}}$$

ως το n-**διάστατο μοναδιαίο κύτταρο**[16], το

$$\boxed{\mathbf{I}^n := \{\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1, \, \forall i \in \{1, ..., n\}\}}$$

ως τον n-**διάστατο μοναδιαίο κύβο**[17] και για $n \in \{0, 1\}$:

$$\mathbb{R}^0 := \{0\}, \, \mathbb{S}^{-1} := \varnothing, \, \mathbb{S}^0 := \{\pm 1\}, \, \mathbb{B}^1 := [-1, 1], \, \overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^1 := (-1, 1), \, \mathbf{I}^1 := \mathbf{I} := [0, 1].$$

Ένας τοπολογικός χώρος καλείται n-**μπάλα**[18] και, αντιστοίχως, $(n-1)$-**σφαίρα**, n-**κύτταρο**, n-**κύβος** όταν είναι ομοιομορφικός τού $\mathbb{B}^n$ και, αντιστοίχως, τής $\mathbb{S}^{n-1}$, τού $\overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^n$ και τού $\mathbf{I}^n$.

(ii) Εάν $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ είναι μια συσχετική απεικόνιση (affine map):

$$f(x_1, ..., x_n) = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \mathbf{b}, \, \mathbf{A} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \, \mathbf{b} = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n,$$

τότε $X \approx f(X)$ για κάθε υπόχωρο X τού $\mathbb{R}^n$.

(iii) Ορίζοντας την $f : \overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \longmapsto f(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}}{1-||\mathbf{x}||}$, η οποία απεικονίζει κάθε διάμετρο τού $\overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^n$ στην ευθεία την οριζόμενη μέσω αυτής, διαπιστώνεται εύκολα ότι η f είναι αμφιρριπτική, συνεχής με την αντίστροφό της

$$f^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^n, \, \mathbf{y} \longmapsto f^{-1}(\mathbf{y}) := \frac{\mathbf{y}}{1 + ||\mathbf{y}||}, \text{ συνεχή.}$$

Άρα το $\mathbb{R}^n \approx \overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^n$ είναι ένα n-κύτταρο. Επιπροσθέτως, το $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ είναι ένα $(n+m)$-κύτταρο, οπότε εν γένει ισχύει:

$$(n\text{-κύτταρο}) \times (m\text{-κύτταρο}) \approx ((n+m)\text{-κύτταρο}).$$

[14]Ιδιαιτέρως, όταν $n = 2$, η $\mathbb{B}^2$ καλείται **μοναδιαίος δίσκος**.

[15]Ιδιαιτέρως, όταν $n = 2$, η $\mathbb{S}^1$ καλείται **μοναδιαίος κύκλος**.

[16]Ιδιαιτέρως, όταν $n = 2$, το $\overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^2$ καλείται **μοναδιαίος ανοικτός δίσκος**.

[17]Εν προκειμένω, ο $\mathbb{R}^n$ θεωρείται εφοδιασμένος με τη συνήθη (ευκλείδεια) τοπολογία και οι $\mathbb{B}^n$, $\mathbb{S}^{n-1}$, $\overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^n$ και $\mathbf{I}^n$ θεωρούνται υπόχωροί του.

[18]Ιδιαιτέρως, οι 2-μπάλες καλούνται και **δίσκοι**, και τα 2-κύτταρα **ανοικτοί δίσκοι**.

(iv) Εντός τής n-διάστατης μοναδιαίας σφαίρας $\mathbb{S}^n$ ορίζουμε το

$$\boxed{\mathbb{S}^n_+ := \{\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \,|\, x_{n+1} \geq 0\}}$$

ως το **βόρειο** και το

$$\boxed{\mathbb{S}^n_- := \{\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \,|\, x_{n+1} \leq 0\}}$$

ως το **νότιο ημισφαίριο τής** $\mathbb{S}^n$. Προφανώς,

$$\mathbb{S}^n_+ \cup \mathbb{S}^n_- = \mathbb{S}^n, \quad \mathbb{S}^n_+ \cap \mathbb{S}^n_- = \mathbb{S}^{n-1} \text{ (\textbf{ο ισημερινός τής} } \mathbb{S}^n).$$

Εν συνεχεία, ορίζουμε το σημείο $P_+ := (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n\text{-φορές}}, 1)$ ως τον **βόρειο πόλο** και το σημείο $P_- := (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n\text{-φορές}}, -1)$ ως τον **νότιο πόλο** τής $\mathbb{S}^n$, καθώς και την **ορθογώνια προβολή**

$$p_\pm : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n_\pm, \; p_\pm(x_1, ..., x_n) := \left(x_1, ..., x_n, \sqrt{1 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2)}\right).$$

Η $p_\pm$ είναι ομοιομορφισμός, οπότε καθένα εκ των ημισφαιρίων είναι μια n-μπάλα (ήτοι $\mathbb{S}^n_\pm \approx \mathbb{B}^n$). Από την άλλη μεριά, η λεγομένη **στερεογραφική προβολή** (βλ. το σχήμα 1.1 για $n = 2$)

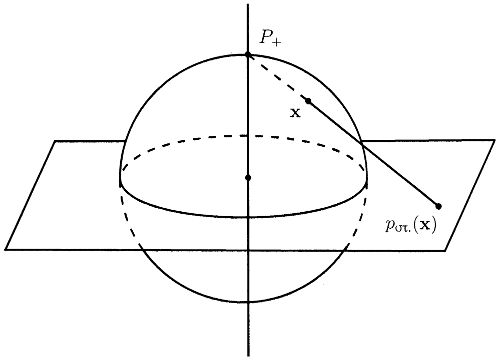
$$p_{\text{στ.}} : \mathbb{S}^n \smallsetminus \{P_+\} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \; p_{\text{στ.}}(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) := \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, ..., \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}\right),$$

η οποία απεικονίζει κάθε σημείο $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \smallsetminus \{P_+\}$ στο σημείο τομής τής ευθείας τής διερχομένης από τα P_+ και $\mathbf{x}$ με το υπερεπίπεδο

$$\mathbb{R}^n \approx \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_{n+1} = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

είναι ωσαύτως ομοιομορφισμός, με αντίστροφό της την $p^{-1}_{\text{στ.}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n \smallsetminus \{P_+\}$ την οριζόμενη μέσω τού τύπου:

$$\mathbb{R}^n \ni (y_1, ..., y_n) = \mathbf{y} \mapsto p^{-1}_{\text{στ.}}(\mathbf{y}) := \left(\frac{2y_1}{1 + ||\mathbf{y}||^2}, ..., \frac{2y_n}{1 + ||\mathbf{y}||^2}, \frac{||\mathbf{y}||^2 - 1}{1 + ||\mathbf{y}||^2}\right).$$



Σχήμα 1.1. Στερεογραφική προβολή

Επειδή για κάθε σημείο $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{S}^n$ υπάρχει ομοιομορφισμός $\mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ που απεικονίζει το $\mathbf{x}_0$ στο P_+ (π.χ. μια κατάλληλη στροφή) έχουμε

$$\mathbb{S}^n \smallsetminus \{\mathbf{x}_0\} \approx \mathbb{S}^n \smallsetminus \{P_+\} \approx \mathbb{R}^n \approx \overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^n \quad (\text{δηλαδή ένα } n\text{-κύτταρο}). \tag{1.3}$$

(v) Σημειωτέον ότι

$$\mathbb{S}^{n-1} \times (0,+\infty) \approx \bigcup_{\mathbf{x}\in\mathbb{S}^{n-1}} \underbrace{\{\gamma\mathbf{x} \,|\, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}\}}_{\text{ημιευθείες}} = \mathbb{R}^n \smallsetminus \{(0,0,...,0)\}$$

(π.χ., μέσω τού ομοιομορφισμού $(\mathbf{x},\gamma) \mapsto \gamma\mathbf{x}$). Κι επειδή $(0,+\infty) \approx \mathbb{R}$, λαμβάνουμε

$$\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^n \smallsetminus \{(0,0,...,0)\} \text{ (π.χ., απευθείας μέσω τού } (\mathbf{x},t) \mapsto e^t\mathbf{x}).$$

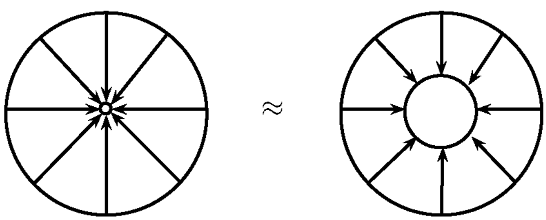
(vi) Από την άλλη μεριά,

$$\mathbb{S}^{n-1} \times (0,1] \approx \bigcup_{\mathbf{x}\in\mathbb{S}^{n-1}} \{\gamma\mathbf{x} \,|\, 0 < \gamma \leq 1\} = \mathbb{B}^n \smallsetminus \{(0,0,...,0)\}$$

Επίσης, για $r \in \mathbb{R}$ με $0 < r < 1$ έχουμε $(0,1] \approx (r,1]$, οπότε

$$\mathbb{B}^n \smallsetminus \{(0,0,...,0)\} \approx \{\mathbf{y} \in \mathbb{B}^n \,|\, r < ||\mathbf{y}|| \leq 1\}$$

(π.χ., μέσω τού ομοιομορφισμού $\gamma\mathbf{x} \longmapsto ((1-\gamma)r + \gamma\mathbf{x})$).



Σχήμα 1.2. Μεγέθυνση τής τρύπας.

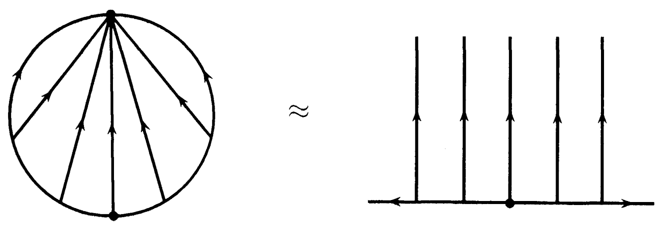
(vii) Ο αντίστοιχος τοπολογικός χαρακτηρισμός τού $\mathbb{B}^n \smallsetminus \{P_+\}$ (όπου P_+ ο βόρειος πόλος τής $\mathbb{S}^{n-1}$) είναι ο ακόλουθος:

$$(\mathbb{S}^{n-1} \smallsetminus \{P_+\}) \times [0,1) \approx \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n-1} \smallsetminus \{P_+\}} \{(1-t)\mathbf{x} + tP_+ \,|\, 0 \leq t < 1\} = \mathbb{B}^n \smallsetminus \{P_+\}.$$

Επειδή η $p_{\text{στ.}}^{-1} : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \smallsetminus \{P_+\}$ είναι ομοιομορφισμός, λαμβάνουμε έναν ομοιομορφισμό

$$\mathbb{R}^{n-1} \times [0,1) \longrightarrow \mathbb{B}^n \smallsetminus \{P_+\},\ (\mathbf{y}, t) \mapsto (1-t)p_{\text{στ.}}^{-1}(\mathbf{y}) + tP_+.$$

Κι επειδή $[0,1) \approx [0,+\infty)$, προκύπτει ένας ομοιομορφισμός (υποδηλούμενος μέσω τού σχήματος 1.3 όταν $n=2$) μεταξύ τού $\mathbb{B}^n \smallsetminus \{P_+\}$ και τού ευκλειδείου ημιχώρου $\mathbb{R}^{n-1} \times [0,+\infty)$:



Σχήμα 1.3

1.5.4 Σημείωση. Τα ανωτέρω παραδείγματα ομοιομορφισμών αναφύονται από άμεσες γεωμετρικές κατασκευές. (*Εν γένει*, δοθέντων δυο τοπολογικών χώρων X και Y, το πρόβλημα τού κατά πόσον αυτοί είναι ομοιομορφικοί είναι *αλγοριθμικώς μη επιλύσιμο*. Βλ. Markov [71]. Ως εκ τούτου, χρηστικές *ταξινομήσεις* τοπολογικών χώρων *μέχρις ομοιομορφισμού* συναντώνται μόνον όταν κανείς περιορίζεται σε *πολύ ειδικές υποκλάσεις* τοπολογικών χώρων.) Από την άλλη μεριά, για την απόδειξη τού ότι δυο συγκεκριμένοι τοπολογικοί χώροι *δεν είναι ομοιομορφικοί* αρκεί να αποδειχθεί ότι ο ένας εξ αυτών έχει μια *τοπολογική ιδιότητα*[19] που δεν την έχει ο άλλος. Επί παραδείγματι[20], $\mathbb{S}^n \not\approx \mathbb{R}^n$. Ωστόσο, για να συγκριθούν οι $\mathbb{R}^m$ και $\mathbb{R}^n$ (και αντιστοίχως, οι $\mathbb{S}^m$ και $\mathbb{S}^n$, και οι $\mathbb{B}^m$ και $\mathbb{B}^n$, για $m, n \in \mathbb{N}$, βλ. πόρισμα 1.5.6) απαιτείται η χρήση μιας τοπολογικής ιδιότητας προκύπτουσας από ένα ιδιάζουσας σημασίας θεώρημα (μια *αλγεβροτοπολογική* απόδειξη τού οποίου θα δοθεί αργότερα στην §**??**).

1.5.5 Θεώρημα. (**«Θεώρημα τού αναλλοιώτου των περιοχών»**) *Εάν X, Y είναι δυο υπόχωροι τού $\mathbb{R}^n$, ο X ανοικτός και $X \approx Y$, τότε και ο Y οφείλει να είναι ανοικτός.*

[19] *Τοπολογικές ιδιότητες* είναι εκείνες οι ιδιότητες που διατηρούνται μέσω ομοιομορφισμών.

[20] Ο $\mathbb{S}^n$ είναι συμπαγής, ενώ ο $\mathbb{R}^n$ δεν είναι. (Βλ. 1.8.6, 1.8.16 (ii) και 1.8.13.)

1.5.6 Πόρισμα. («Θεώρημα τού αναλλοιώτου τής διαστάσεως»)
Έστω ότι $m, n \in \mathbb{N}$. Εάν $m \neq n$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:
(i) $\mathbb{R}^m \not\approx \mathbb{R}^n$,
(ii) $\mathbb{S}^m \not\approx \mathbb{S}^n$,
(iii) $\mathbb{B}^m \not\approx \mathbb{B}^n$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Εάν $m < n$, τότε ο $\mathbb{R}^m$ (θεωρούμενος κατά τρόπο φυσικό ως *γνήσιος* υπόχωρος τού $\mathbb{R}^n$) είναι μη ανοικτός στον $\mathbb{R}^n$. Όμως ο $\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτός στον $\mathbb{R}^n$. Από το θεώρημα 1.5.5 έχουμε $\mathbb{R}^m \not\approx \mathbb{R}^n$.
(ii) Εάν υπάρχει ομοιομορφισμός $f : \mathbb{S}^m \longrightarrow \mathbb{S}^n$, τότε από την (1.3) λαμβάνουμε

$$\mathbb{R}^m \approx \mathring{\mathbb{B}}^m \approx \mathbb{S}^m \smallsetminus \{\mathbf{x}_0\} \approx \mathbb{S}^n \smallsetminus \{f(\mathbf{x}_0)\} \approx \mathring{\mathbb{B}}^n \approx \mathbb{R}^n$$

και από το (i) συμπεραίνουμε ότι $m = n$.
(iii) Εάν $m < n$ και εάν υποτεθεί ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $f : \mathbb{B}^m \longrightarrow \mathbb{B}^n$, τότε $\mathbb{R}^n \approx \mathring{\mathbb{B}}^n \approx f^{-1}(\mathring{\mathbb{B}}^n) \subseteq \mathbb{B}^m \subsetneqq \mathbb{R}^m \subsetneqq \mathbb{R}^n$, το οποίο είναι άτοπο βάσει τού θεωρήματος 1.5.5. $\square$

1.5.7 Πόρισμα. *Κάθε ομοιομορφισμός $f : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}^n$ απεικονίζει την $\mathbb{S}^{n-1}$ επί τής $\mathbb{S}^{n-1}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n-1}$. Ας υποθέσουμε ότι $\mathbf{z} := f(\mathbf{x}) \in \mathring{\mathbb{B}}^n$. Τότε για αρκούντως μικρό $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ προσδιορίζουμε ένα σύνολο $U := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid ||\mathbf{y} - \mathbf{z}|| < \varepsilon\}$ το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο τού $\mathbb{R}^n$ κείμενο καθ' ολοκληρίαν εντός τής $\mathbb{B}^n$. Η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ τού U μέσω τής f είναι ομοιομορφική τού ιδίου τού U, αλλά επειδή $f^{-1}(U) \subseteq \mathbb{B}^n$ και ταυτοχρόνως $f^{-1}(U) \cap \mathbb{S}^{n-1} \neq \varnothing$, δεν είναι ανοικτή εντός τού $\mathbb{R}^n$. Τούτο αντιφάσκει προς το θεώρημα 1.5.5. $\square$

1.5.8 Ορισμός. Έστω ότι $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ είναι δυο τοπολογικοί χώροι. Μια απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ καλείται **(τοπολογική) εμφύτευση (τού X εντός τού Y)** όταν η επαγομένη επίρριψη

$$\hat{f} : X \longrightarrow f(X),\ x \longmapsto \hat{f}(x) := f(x),$$

είναι ομοιομορφισμός[21].

1.5.9 Παραδείγματα. (i) Ένας τοπολογικός χώρος είναι δυνατόν να επιδέχεται *διαφορετικές* εμφυτεύσεις εντός ενός άλλου. Επί παραδείγματι, αμφότερες οι απεικονίσεις

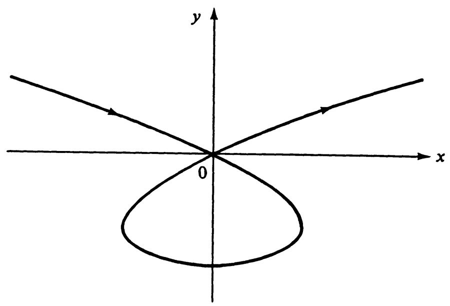
$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ x \longmapsto (x, 0) \text{ και } f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ x \longmapsto (e^x \cos x, e^x \sin x),$$

[21] Όταν υπάρχει (τουλάχιστον) μία τέτοια εμφύτευση, τότε λέμε ότι ο X **είναι εμφυτεύσιμος εντός τού** Y.

αποτελούν εμφυτεύσεις τού $\mathbb{R}$ εντός τού $\mathbb{R}^2$ (ως προς τις συνήθεις τοπολογίες). Αντιθέτως, η

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \;\; x \longmapsto g\,(x) = \left(x^3 - 4x,\; x^2 - 4\right),$$

(το γράφημα τής οποίας δείχνεται στο σχήμα 1.4) *δεν είναι* εμφύτευση, διότι έχει μια αυτοδιατομή στο σημείο $(0,0)$ (για $x = 2$ και $x = -2$).



Σχήμα 1.4

(ii) Υπάρχουν τοπολογικοί χώροι, όπως π.χ. η λεγομένη *φιάλη τού Klein* (βλ. εδάφιο 1.10.4 (v)) που δεν επιδέχονται *καμία εμφύτευση* εντός τού $\mathbb{R}^3$ (παρότι *είναι* εμφυτεύσιμοι στους ευκλείδειους χώρους $\mathbb{R}^k$, $k \geq 4$). Δειγματοληπτικώς αναφέρουμε ότι μέσω τής απεικονίσεως

$$f : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^5, \;\; (x, y) \longmapsto (\cos x, \cos 2y, \sin 2y, \sin x \cos y, \sin x \sin y)$$

επάγεται μια εμφύτευση τής φιάλης τού Klein εντός τού $\mathbb{R}^5$.

$\boxed{1.6}$ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ HAUSDORFF

1.6.1 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ καλείται **χώρος Hausdorff** όταν για οιαδήποτε $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχουν $V \in \mathcal{U}(x)$ και $W \in \mathcal{U}(y)$, τέτοια ώστε να ισχύει $V \cap W = \varnothing$.

1.6.2 Σημείωση. Η ιδιότητα τού να είναι ένας τοπολογικός χώρος, χώρος Hausdorff, είναι *τοπολογική*. (Εάν X είναι χώρος Hausdorff και $X \approx Y$, τότε ο Y είναι ωσαύτως χώρος Hausdorff.)

1.6.3 Πρόταση. *Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο τού υποκειμένου χώρου X ενός χώρου Hausdorff $(X, \mathcal{T})$ είναι κλειστό.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω τυχόν $x \in X$. Για κάθε $y \in X \smallsetminus \{x\}$ υπάρχουν εξ υποθέσεως $V \in \mathcal{U}(x)$ και $W \in \mathcal{U}(y)$, ούτως ώστε να ισχύει $V \cap W = \varnothing$. Αυτό σημαίνει ότι $W \subseteq X \smallsetminus V \subseteq X \smallsetminus \{x\}$ και ότι $X \smallsetminus \{x\} \in \mathcal{T}$. (Βλ. εδ. 1.1.6.) Άρα το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι κλειστό. Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο τού X ισούται με μια πεπερασμένη ένωση μονοσυνόλων, οπότε είναι κλειστό λόγω των προαναφερθέντων. □

1.6.4 Παραδείγματα. (i) Κάθε μετρικός τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T}_d)$ με τουλάχιστον δύο στοιχεία είναι χώρος Hausdorff.

(ii) Ο τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T}_{\text{συμπ.}})$ (βλ. 1.1.2 (iv)) δεν είναι χώρος Hausdorff. Πράγματι· εάν $x, y \in X$ με $x \neq y$ και υποθέσουμε ότι υπάρχουν $V \in \mathcal{U}(x)$ και $W \in \mathcal{U}(y)$, ούτως ώστε να ισχύει $V \cap W = \varnothing$, τότε

$$V \subseteq \underbrace{X \smallsetminus W}_{\text{πεπερασμένο}} \Rightarrow X \smallsetminus V \text{ άπειρο } \Rightarrow V \notin \mathcal{T}_{\text{συμπ.}},$$

κάτι το οποίο είναι άτοπο.

1.6.5 Σημείωση. Η *αφηρημένη* έννοια τής *τοπολογίας* (όπως χρησιμοποιείται σήμερα) εισήχθη από τον Felix Hausdorff[22] στις αρχές τού 20ου αιώνα (μέσω των συνθηκών (i)-(iv) τής προτάσεως 1.1.7 περί *συνόλων περιοχών*, οι οποίες οδηγούν στον ορισμό 1.1.1 εάν κανείς λάβει υπ' όψιν την πρόταση 1.1.8). Οι τοπολογικοί χώροι 1.6.1 που φέρουν το όνομά του συγκαταλέγονται στους *μη παθολογικούς* (καθότι διατηρούν τη δυνατότητα *διαχωρισμού* σημείων μέσω περιοχών τους, όπως συμβαίνει με *κάθε* μετρικό χώρο που διαθέτει τουλάχιστον δύο σημεία).

F. Hausdorff

[22]Hausdorff, *Felix* (8/11/1868-26/1/1942). Ανακηρύχθηκε διδάκτωρ τού Πανεπιστημίου τής Λειψίας το 1891. Κατόπιν διετέλεσε καθηγητής των Πανεπιστημίων Greifswald (1914-1920) και Βόννης (1921-1942). Συγγραφέας τού περίφημου βιβλίου *Grundzüge der Mengenlehre,* Teubner, Leipzig, 1914, το οποίο υπήρξε σταθμός για τη σύγχρονη Τοπολογία. Πολύπλευρο ταλέντο, όχι μόνο στα Μαθηματικά (όπου έγινε γνωστός με εργασίες του επί τής Συνολοθεωρίας, τής Πιθανοθεωρίας και τής Θεωρίας Μέτρου), αλλά και στην ποίηση και στο θέατρο που υπέγραφε με το ψευδώνυμο P. Mongé. Βρήκε τραγικό τέλος (μαζί με την οικογένειά του) όταν εξαναγκάσθηκε να αυτοκτονήσει για να αποφύγει την ταπείνωση και τη μεταφορά του σε στρατόπεδο συγκεντρώσεως από τους Nazi (λόγω τής εβραϊκής του καταγωγής). Σήμερα μια κεντρική οδός τής Βόννης φέρει το όνομά του. Βλ. και E. Brieskorn (ed.): *Felix Hausdorff zum Gedächtnis. Aspekte seines Werkes.* Vieweg, Braunschweig, 1996. Επιπροσθέτως (στη Βόννη) λειτουργεί (από το 2006) και το Hausdorff Research Institute for Mathematics.

1.7 ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

1.7.1 Ορισμός. (i) Εάν $n \in \mathbb{N}$ και $X_1, ..., X_n$ είναι τοπολογικοί χώροι, τότε ορίζεται μια τοπολογία επί τού $X_1 \times ... \times X_n$, η λεγομένη **τοπολογία γινομένου**, έχουσα ως βάση της το σύνολο $\mathcal{B} := \{U_1 \times ... \times U_n \,|\, U_i \text{ ανοικτό} \subseteq X_i, \, \forall i \in \{1, ..., n\}\}$.

(ii) Εάν η $(X_i)_{i\in I}$ είναι τυχούσα οικογένεια τοπολογικών χώρων και

$$\mathrm{pr}_i : \prod_{j\in I} X_j \to X_i, \, i \in I,$$

οι συνήθεις προβολές, τότε η **τοπολογία γινομένου** καθορίζεται μέσω τής βάσεως:

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod_{i\in I} U_i \,\middle|\, U_i \text{ ανοικτό } \subseteq X_i, \, \forall i \in I, \text{ και } U_i = X_i, \, \forall i \in I \smallsetminus S \right\},$$

όπου S ένα το πολύ πεπερασμένο σύνολο. Σημειωτέον ότι για $\prod_{i\in I} U_i \in \mathcal{B}$ με $\{ i \in I |\, U_i \neq X_i\} = \{i_1, ..., i_k\}$ έχουμε

$$\prod_{i\in I} U_i = \bigcap_{\nu=1}^{k} \mathrm{pr}_{i_\nu}^{-1}(U_{i_\nu}) \,, \tag{1.4}$$

οπότε η $\mathcal{B}$ δεν είναι τίποτα άλλο παρά η οικογένεια τομών πεπερασμένου πλήθους στοιχείων τού συνόλου

$$\left\{ \mathrm{pr}_i^{-1}(W) \,|\, W \text{ ανοικτό } \subseteq X_i, \text{ για κάποιον δείκτη } i \in I \right\}.$$

1.7.2 Πρόταση. *Εάν $(X_i)_{i\in I}$ είναι τυχούσα οικογένεια τοπολογικών χώρων, τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Η* pr_i *είναι συνεχής και ανοικτή,* $\forall i \in I$.

(ii) *Εάν X είναι ένας τοπολογικός χώρος και $f : X \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$ μια απεικόνιση, τότε η f είναι συνεχής εάν και μόνον εάν η* $\mathrm{pr}_i \circ f : X \longrightarrow X_i$ *είναι συνεχής,* $\forall i \in I$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Εάν $U \subseteq X_i$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο, τότε το $\mathrm{pr}_i^{-1}(U)$ ανοικτό από τον ορισμό τού τοπολογικού γινομένου. Επίσης, εάν το $\prod_{i\in I} U_i$ είναι ανοικτό στο $\prod_{i\in I} X_i$, τότε $\mathrm{pr}_j \left(\prod_{i\in I} U_i\right) = U_j$, το οποίο είναι ανοικτό για κάθε $j \in I$.

(ii) Έστω ότι η f είναι συνεχής. Τότε η $\mathrm{pr}_i \circ f$ είναι ωσαύτως συνεχής για κάθε $i \in I$ (ως σύνθεση συνεχών). Και αντιστρόφως· εάν η $\mathrm{pr}_i \circ f$ είναι συνεχής για κάθε $i \in I$ και U_i είναι ανοικτό υποσύνολο τού X_i, τότε το $\mathrm{pr}_i(U_i)$ είναι ανοικτό στο $\prod_{i\in I} X_i$ (αφού η pr_i είναι συνεχής) και

$$f^{-1}(\mathrm{pr}_i^{-1}(U_i)) = (\mathrm{pr}_i \circ f)^{-1}(U_i),$$

το οποίο είναι ανοικτό στο X (αφού η $\mathrm{pr}_i \circ f$ είναι συνεχής). Επειδή λοιπόν η αντίστροφη εικόνα οιουδήποτε ανοικτού συνόλου μέσω τής f είναι ανοικτό, η f είναι εξ ορισμού συνεχής. □

1.7.3 Πρόταση. *Ένας τοπολογικός χώρος X είναι χώρος Hausdorff εάν και μόνον εάν η «διαγώνιος» $D_X := \{(x,x) \mid x \in X\}$ τού X είναι κλειστό υποσύνολο τού $X \times X$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω X ένας χώρος Hausdorff και έστω $(x,y) \notin D_X$. Τότε $x \neq y$ και υπάρχουν $V \in \mathcal{U}(x)$ και $W \in \mathcal{U}(y)$, ούτως ώστε να ισχύει $V \cap W = \varnothing$, οπότε

$$(V \times W) \cap D_X = \varnothing \Longrightarrow V \times W \subseteq X \times X \smallsetminus D_X.$$

Επειδή $V \times W \in \mathcal{U}((x,y))$, η διαγώνιος D_X τού X είναι κλειστό υποσύνολο τού $X \times X$. (Βλ. εδ. 1.1.6.)

Και αντιστρόφως· εάν η διαγώνιος D_X τού X είναι κλειστό υποσύνολο τού καρτεσιανού γινομένου $X \times X$, τότε το συμπλήρωμά της $X \times X \smallsetminus D_X$ είναι ανοικτό και για κάθε $(x,y) \in X \times X \smallsetminus D_X$ υπάρχει βασική περιοχή τού (x,y) τής μορφής $U = V \times W$, όπου τα V, W είναι βασικές περιοχές των x, y, αντιστοίχως. Αυτό σημαίνει ότι $V \cap W = \varnothing$, διότι $U \cap D_X \neq \varnothing$. □

1.7.4 Πρόταση. *Κάθε υπόχωρος ενός τοπολογικού χώρου Hausdorff είναι χώρος Hausdorff.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω A ένας υπόχωρος ενός χώρου Hausdorff X. Εάν $x, y \in A$ με $x \neq y$, τότε υπάρχουν $V \in \mathcal{U}(x)$ και $W \in \mathcal{U}(y)$ (εντός τού X), ούτως ώστε να ισχύει $V \cap W = \varnothing$. Επειδή οι τομές $V \cap A$ και $W \cap A$ είναι περιοχές των x και y, αντιστοίχως, *εντός τού* A, έχουσες κενή τομή, ο A οφείλει να είναι αφ' εαυτού χώρος Hausdorff. □

1.7.5 Θεώρημα. *Έστω $(X_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια τοπολογικών χώρων. Τότε ο χώρος γινομένου $\prod_{i \in I} X_i$ είναι χώρος Hausdorff εάν και μόνον εάν ο X_i είναι χώρος Hausdorff για κάθε $i \in I$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν ο $\prod_{i \in I} X_i$ είναι χώρος Hausdorff και εάν παγιώσουμε ένα στοιχείο του, ας πούμε το $(a_i)_{i \in I}$, τότε για κάθε $j \in I$ ο X_j είναι ομοιομορφικός τού υπόχωρου τού $\prod_{i \in I} X_i$

$$A_j := \prod_{k \in I} Y_k, \text{ όπου } Y_k := \begin{cases} \{a_k\}, & \text{όταν } k \neq j, \\ X_j, & \text{όταν } k = j, \end{cases}$$

και, ως εκ τούτου, χώρος Hausdorff. (Βλ. σημείωση 1.6.2 και πρόταση 1.7.4.) Και αντιστρόφως· εάν υποτεθεί ότι ο X_i είναι Hausdorff για κάθε $i \in I$ και

$$x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i, \; y = (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i : x \neq y,$$

τότε υπάρχει $i_0 \in I$, τέτοιο ώστε να ισχύει $\mathrm{pr}_{i_0}(x) = x_{i_0} \neq y_{i_0} = \mathrm{pr}_{i_0}(y)$. Επειδή ο X_{i_0} είναι εξ υποθέσεως Hausdorff, υπάρχουν $V \in \mathcal{U}(x_{i_0})$ και $W \in \mathcal{U}(y_{i_0})$ (εντός τού X_{i_0}) με $V \cap W = \varnothing$. Και επειδή οι $\mathrm{pr}_{i_0}^{-1}(V)$,$\mathrm{pr}_{i_0}^{-1}(W)$ είναι περιοχές των x και y, αντιστοίχως, *εντός τού* $\prod_{i \in I} X_i$, έχουσες κενή τομή, ο $\prod_{i \in I} X_i$ οφείλει να είναι χώρος Hausdorff. □

1.8 ΣΥΜΠΑΓΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

1.8.1 Ορισμός. Κάθε οικογένεια υποσυνόλων $\{A_i : i \in I\}$ τού υποκείμενου συνόλου X ενός τοπολογικού χώρου, για την οποία ισχύει $\bigcup_{i \in I} A_i = X$, καλείται **κάλυμμα** τού X. Εάν *κάθε* μέλος A_i ενός καλύμματος $\{A_i : i \in I\}$ τού X είναι ανοικτό (και αντιστοίχως, κλειστό), τότε η $\{A_i : i \in I\}$ καλείται **ανοικτό κάλυμμα** (και αντιστοίχως, **κλειστό κάλυμμα**) τού X. Επίσης, κάθε υποοικογένεια ενός καλύμματος $\{A_i : i \in I\}$ τού X που αποτελεί αφ' εαυτής κάλυμμα τού X καλείται **υποκάλυμμα** τού X.

1.8.2 Ορισμός. Λέμε ότι ένας τοπολογικός χώρος X είναι **συμπαγής**[23] όταν για κάθε ανοικτό κάλυμμα $\{U_i : i \in I\}$ τού X υπάρχει κάποιο πεπερασμένο υποκάλυμμά του, δηλαδή υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ και

$$\exists \{i_1, ..., i_k\} \subseteq I : \bigcup_{\rho=1}^{k} U_{i_\rho} = X.$$

1.8.3 Παραδείγματα. (i) Κάθε πεπερασμένος χώρος Hausdorff είναι συμπαγής. Επίσης, ένας διακριτός τοπολογικός χώρος είναι συμπαγής εάν και μόνον εάν το υποκείμενο σύνολο αυτού είναι πεπερασμένο.

(ii) Ο $\mathbb{R}$, εφοδιασμένος με τη συνήθη τοπολογία, δεν είναι συμπαγής, διότι το ανοικτό κάλυμμά του $\{\,(-n, n) |\, n \in \mathbb{N}\}$ δεν διαθέτει πεπερασμένα υποκαλύμματα. Αντιθέτως, κάθε κλειστό διάστημα εντός τού $\mathbb{R}$ είναι συμπαγές.

1.8.4 Πρόταση. *Έστω A ένας υπόχωρος ενός τοπολογικού χώρου X. Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Ο A είναι συμπαγής.*

(ii) *Κάθε οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων τού X, η ένωση των μελών τής οποίας περιέχει τον A, περιέχει μια πεπερασμένη υποοικογένεια, η ένωση των μελών τής οποίας περιέχει τον A.*

(iii) *Κάθε οικογένεια κλειστών υποσυνόλων τού X, η τομή των μελών τής οποίας έχει κενή τομή με τον A, περιέχει μια πεπερασμένη υποοικογένεια, η τομή των μελών τής οποίας έχει κενή τομή με τον A.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i)⇒(ii) Εάν $\{U_i : i \in I\}$ είναι μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων τού X με $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, τότε το $\{U_i \cap A : i \in I\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα τού A. Επειδή το A είναι εξ υποθέσεως συμπαγές, $A = \bigcup_{i \in I'} (U_i \cap A)$ για κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο $I' \subseteq I$. Εξ αυτού έπεται ότι $A \subseteq \bigcup_{i \in I'} U_i$.

[23] Προσοχή! Ορισμένοι συγγραφείς (που υιοθετούν την ορολογία των Bourbaki) χρησιμοποιούν αντί τού *συμπαγής* τον όρο *σχεδόν* (ή *οιονεί*) *συμπαγής* και ορίζουν ως *συμπαγή* κάθε σχεδόν συμπαγή χώρο που είναι (ταυτοχρόνως) και χώρος Hausdorff.

(ii)⇒(i) Έστω $\{V_i : i \in I\}$ τυχόν ανοικτό κάλυμμα τού A. Τότε για κάθε $i \in I$ έχουμε $V_i = U_i \cap A$ για κάποιο ανοικτό $U_i \subseteq X$ και $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Εξ υποθέσεως, $A \subseteq \bigcup_{i\in I'} U_i$ για κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο $I' \subseteq I$. Επομένως,

$$A = (\bigcup_{i\in I'} U_i) \cap A = \bigcup_{i\in I'} (U_i \cap A) = \bigcup_{i\in I'} V_i,$$

απ' όπου έπεται ότι το A είναι συμπαγές.

(ii)⇔(iii) Τούτο έπεται άμεσα από τους νόμους τού De Morgan. □

1.8.5 Πρόταση. *Εάν $f : X \longrightarrow Y$ είναι μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ (των υποκειμένων συνόλων) δυο τοπολογικών χώρων με τον X συμπαγή, τότε και ο $f(X) \subseteq Y$ είναι συμπαγής.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $\{U_i : i \in I\}$ μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων τού Y με $f(X) = \bigcup_{i\in I} U_i$. Τότε $X = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$, οπότε η οικογένεια $\{f^{-1}(U_i) : i \in I\}$ αποτελεί ένα ανοικτό κάλυμμα τού X. Επειδή ο X είναι εξ υποθέσεως συμπαγής, $X = \bigcup_{i\in I'} f^{-1}(U_i)$ για κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο $I' \subseteq I$. Προφανώς,

$$f(X) = f(\bigcup_{i\in I'} f^{-1}(U_i)) = \bigcup_{i\in I'} f(f^{-1}(U_i)) \subseteq \bigcup_{i\in I'} U_i.$$

Μέσω τής συνεπαγωγής (ii)⇒(i) τής προτάσεως 1.8.4 συνάγεται η συμπάγεια τής εικόνας $f(X)$. □

1.8.6 Παρατήρηση. Είναι πρόδηλο μέσω τής προτάσεως 1.8.5 ότι η ιδιότητα τού να είναι ένας τοπολογικός χώρος *συμπαγής* είναι *τοπολογική*. (Εάν X είναι συμπαγής χώρος και $X \approx Y$, τότε ο Y είναι ωσαύτως συμπαγής χώρος.)

1.8.7 Πόρισμα. *Εάν το X είναι ένα συμπαγές υποσύνολο τού $\mathbb{R}^n$ (ως προς τη συνήθη τοπολογία) και η $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής απεικόνιση, τότε η f λαμβάνει μέγιστο και ελάχιστο εντός τού X, δηλαδή*

$$\exists\, (x_1, x_2) \in X \times X : \, f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \, \forall x \in X.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή η f είναι συνεχής, το $A := f(X)$ είναι (σύμφωνα με την πρόταση 1.8.5) συμπαγές. Εάν το A δεν διέθετε μέγιστο στοιχείο (ας πούμε $M := f(x_2)$ για κάποιο $x_2 \in X$), τότε η οικογένεια $\{(-\infty, a) : a \in A\}$ θα ήταν ένα ανοικτό κάλυμμα τού A. Λόγω τής συμπάγειας τού A θα υπήρχαν $a_1, ..., a_n \in A$, τέτοια ώστε να ισχύει η ισότητα $\bigcup_{j=1}^{n}(-\infty, a_j) = A$. Εάν $a_k := \max\{a_j \,|\, 1 \leq j \leq n\}$, τότε $a_k \notin (-\infty, a_j)$, $\forall j \in \{1, ..., n\}$, δηλαδή $a_k \notin A$. Άτοπο! Αναλόγως επιχειρηματολογεί κανείς και για την ύπαρξη ελαχίστου. □

1.8.8 Πρόταση. *Εάν ένας τοπολογικός χώρος X είναι συμπαγής, τότε και κάθε κλειστό υποσύνολό του είναι συμπαγές.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω A ένα κλειστό υποσύνολο ενός συμπαγούς τοπολογικού χώρου X και έστω $\{U_i : i \in I\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα τού A. Τότε η οικογένεια συνόλων $\{X \smallsetminus A\} \cup \{U_i : i \in I\}$ αποτελεί ανοικτό κάλυμμα τού X. Επομένως υπάρχει κάποιο πεπερασμένο υποκάλυμμά του $\{X \smallsetminus A\} \cup \{U_{i_\rho} : \rho \in \{1, ..., k\}\}$ και η ένωση των ανοικτών συνόλων των ανηκόντων στο $\{U_{i_1}, ..., U_{i_k}\}$ ισούται με A. □

1.8.9 Πρόταση. (i) *Συμπαγείς υπόχωροι χώρων Hausdorff είναι κλειστοί.*

(ii) *Εάν A, B είναι συμπαγείς υπόχωροι ενός χώρου Hausdorff με $A \cap B = \varnothing$, τότε υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα V, W τού υποκειμένου συνόλου αυτού τού χώρου, τέτοια ώστε να ισχύει $A \subseteq V$, $B \subseteq W$ και $V \cap W = \varnothing$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας υποθέσουμε ότι X είναι ένας χώρος Hausdorff και τα $A, B \subseteq X$ συμπαγή.

(i) Στην ειδική περίπτωση όπου $B = \{x_0\}$ (ένα μονοσύνολο), για *κάθε* $x \in A$ υπάρχουν εξ υποθέσεως $V_x \in \mathcal{U}(x)$ και $W_x \in \mathcal{U}(x_0)$, τέτοια ώστε $V_x \cap W_x = \varnothing$. Επειδή το A είναι συμπαγές, η συνεπαγωγή (i)⇒(ii) τής προτάσεως 1.8.4 δίδει

$$A \subseteq \bigcup_{x \in A} V_x \Rightarrow [\exists \{x_1, ..., x_k\} \subseteq A : A \subseteq V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_k}].$$

Εξάλλου,

$$x_0 \in \bigcap_{i=1}^{k} W_{x_i} \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} (X \smallsetminus V_{x_i}) = X \smallsetminus (V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_k}) \subseteq X \smallsetminus A,$$

απ' όπου έπεται ότι το $X \smallsetminus A$ είναι ανοικτό (βλ. εδ. 1.1.6) και, κατ' επέκταση, το A κλειστό.

(ii) Στην περίπτωση όπου το B είναι τυχών συμπαγής υπόχωρος τού χώρου X με $A \cap B = \varnothing$, $x \in A$ και $y \in B$, τότε από το (i) γνωρίζουμε ότι υπάρχουν $V_y \in \mathcal{U}(x)$ και $W_y \in \mathcal{U}(y)$, τέτοια ώστε να ισχύει $V_y \cap W_y = \varnothing$. Η οικογένεια $\{W_y : y \in B\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα τού συμπαγούς B, οπότε

$$\exists \{y_1, ..., y_m\} \subseteq B : B \subseteq W_{y_1} \cup \cdots \cup W_{y_m}.$$

Θέτοντας $V_x := V_{y_1} \cap \cdots \cap V_{y_m}$ και $W_x := W_{y_1} \cup \cdots \cup W_{y_m}$ παρατηρούμε ότι τα V_x, W_x είναι ανοικτά υποσύνολα τού X, τέτοια ώστε να ισχύει $x \in V_x$, $B \subseteq W_x$ και $V_x \cap W_x = \varnothing$. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία *για κάθε* $x \in A$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η οικογένεια $\{V_x | x \in A\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα τού συμπαγούς A, συμπεραίνουμε ότι

$$\exists \{x_1, ..., x_n\} \subseteq A : A \subseteq V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}.$$

Αρκεί λοιπόν να θέσουμε $V := V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}$ και $W := W_{x_1} \cap \cdots \cap W_{x_n}$. □

1.8.10 Πόρισμα. *Εάν X είναι ένας συμπαγής χώρος Hausdorff, τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Εάν $C \in \mathfrak{P}(X)$, τότε το C είναι συμπαγές $\Leftrightarrow$ το C είναι κλειστό.*

(ii) *Εάν A, B είναι δυο κλειστοί υπόχωροι τού X με $A \cap B = \varnothing$, τότε υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα V, W αυτού, τέτοια ώστε $A \subseteq V$, $B \subseteq W$ και $V \cap W = \varnothing$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Για την "$\Rightarrow$" βλ. 1.8.9 (i). Για την "$\Leftarrow$" βλ. πρόταση 1.8.8.

(ii) Επειδή οι A, B ως κλειστοί είναι συμπαγείς, αρκεί να εφαρμοσθεί το (ii) τής προτάσεως 1.8.9. □

1.8.11 Πόρισμα. *Εάν $f : X \longrightarrow Y$ είναι μια αμφιρριπτική συνεχής απεικόνιση μεταξύ (των υποκειμένων συνόλων) δυο τοπολογικών χώρων με τον X συμπαγή και τον Y Hausdorff, τότε η f ειναι ομοιομορφισμός.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι κλειστή απεικόνιση. (Τούτο ισοδυναμεί με τη συνέχεια τής f^{-1}. Πρβλ. 1.3.2 (i)$\Leftrightarrow$(ii).) Έστω $C \subseteq X$ τυχόν κλειστό υποσύνολο. Κατά την πρόταση 1.8.8 το σύνολο C είναι συμπαγές. Κατά την πρόταση 1.8.5 η εικόνα του $f(C) \subseteq Y$ μέσω τής f είναι ωσαύτως συμπαγής. Τέλος, σύμφωνα με το (i) τής προτάσεως 1.8.9, η $f(C)$ είναι κλειστό υποσύνολο τού Y. □

1.8.12 Θεώρημα. (Tikhonov, 1930) *Έστω $(X_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια τοπολογικών χώρων. Ο χώρος γινομένου $\prod_{i\in I} X_i$ είναι συμπαγής εάν και μόνον εάν ο X_i είναι συμπαγής για κάθε $i \in I$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν υποτεθεί ότι ο $\prod_{i\in I} X_i$ είναι συμπαγής, τότε και η εικόνα του X_i μέσω τής προβολής pr_i (που είναι συνεχής) είναι ωσαύτως συμπαγής για κάθε $i \in I$ (λόγω τής προτάσεως 1.8.5).

Και αντιστρόφως· εάν υποτεθεί ότι ο X_i είναι συμπαγής για κάθε $i \in I$ και ότι ο $\prod_{i\in I} X_i$ *δεν είναι* συμπαγής, τότε το σύνολο

$$\Gamma := \left\{ \mathcal{C} \;\middle|\; \begin{array}{c} \mathcal{C} \text{ ανοικτό κάλυμμα τού } \prod_{i\in I} X_i \\ \text{χωρίς πεπερασμένα υποκαλύμματα} \end{array} \right\}.$$

είναι κατ' ανάγκην μη κενό. Είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι το Γ (ως προς τον συνήθη συνολοθεωρητικό εγκλεισμό) αποτελεί ένα μερικώς διατεταγμένο, επαγωγικό σύνολο. Πράγματι· εάν $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ είναι μια αλυσίδα στοιχείων τού Γ, το ανοικτό κάλυμμα $\mathcal{C} := \bigcup_{i\in I} \mathcal{C}_i$ είναι ένα άνω φράγμα τού συνόλου $\{\mathcal{C}_i : i \in I\}$ και ανήκει στο Γ, διότι για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{U_1, ..., U_k\} \subseteq \mathcal{C}$ υπάρχει δείκτης $i_0 \in I$, τέτοιος ώστε να ισχύει $\{U_1, ..., U_k\} \subseteq \mathcal{C}_{i_0}$, οπότε το $\{U_1, ..., U_k\}$ δεν καλύπτει τον $\prod_{i\in I} X_i$. Σύμφωνα με το λήμμα τού Zorn, υφίσταται κάποιο μεγιστικό στοιχείο $\mathcal{C}_\star$ τού Γ. (Σημειωτέον ότι εάν το $V \subseteq \prod_{i\in I} X_i$ είναι ανοικτό με $V \notin \mathcal{C}_\star$, τότε υπάρχουν $U_1, ..., U_k$ εντός τού $\mathcal{C}_\star$, ούτως ώστε να ισχύει $X = U_1 \cup \cdots \cup U_k \cup V$.) Παρατηρούμε ότι για κάθε $i \in I$

$$\bigcup \left\{ W \subseteq X_i : W \text{ ανοικτό με } \mathrm{pr}_i^{-1}(W) \in \mathcal{C}_\star \right\} \subsetneqq X_i, \tag{1.5}$$

διότι εν εναντία περιπτώσει (επειδή ο X_i είναι εξ υποθέσεως συμπαγής) θα υπήρχαν (πεπερασμένου πλήθους) ανοικτά υποσύνολα $W_1, ..., W_l$ τού X_i με

$$W_1 \cup \cdots \cup W_l = X_i \Rightarrow \mathrm{pr}_i^{-1}(W_1) \cup \cdots \cup \mathrm{pr}_i^{-1}(W_l) = \prod_{i \in I} X_i,$$

κάτι το οποίο θα αντέκειτο στον ορισμό τού $\mathcal{C}_\star$. Λόγω τής (1.5) έχουμε για κάθε $i \in I$ τη δυνατότητα επιλογής ενός

$$y_i \in X_i \diagdown \bigcup \left\{ W \subseteq X_i : W \text{ ανοικτό με } \mathrm{pr}_i^{-1}(W) \in \mathcal{C}_\star \right\}.$$

Θέτοντας $y := (y_i)_{i \in I}$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το $\mathcal{C}_\star$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα τού $\prod_{i \in I} X_i$, υπάρχει $U \in \mathcal{C}_\star$ με $y \in U$. Επιπροσθέτως, επειδή η οικογένεια τομών πεπερασμένου πλήθους στοιχείων τού συνόλου

$$\left\{ \mathrm{pr}_i^{-1}(W) \,|\, W \text{ ανοικτό } \subseteq X_i, \text{ για κάποιον δείκτη } i \in I \right\}$$

ταυτίζεται με τη βάση τού $\prod_{i \in I} X_i$ (βλ. 1.7.1 (ii)), υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα $W_{i_j} \subseteq X_{i_j}$, $j \in \{1, ..., \nu\}$, ούτως ώστε να ισχύει

$$y \in \mathrm{pr}_{i_1}^{-1}(W_1) \cup \cdots \cup \mathrm{pr}_{i_\nu}^{-1}(W_\nu) \subseteq U.$$

Επειδή για κάθε $j \in \{1, ..., \nu\}$ έχουμε $\mathrm{pr}_{i_j}^{-1}(W_j) \notin \mathcal{C}_\star$, υπάρχουν (κατά τα προαναφερθέντα) $U_1, ..., U_k$ εντός τού $\mathcal{C}_\star$, ούτως ώστε να ισχύει

$$\textstyle\prod_{i \in I} X_i = U_{j,1} \cup \cdots \cup U_{j,k_j} \cup \mathrm{pr}_{i_j}^{-1}(W_j).$$

Ως εκ τούτου, το πεπερασμένο υποσύνολο

$$\left\{ U_{j,1}, ..., U_{j,k_j} \,\middle|\, j \in \{1, ..., \nu\} \right\} \cup \{U\}$$

το ανήκον στο $\mathcal{C}_\star$ καλύπτει[24] το $\prod_{i \in I} X_i$. Άτοπο! □

1.8.13 Παράδειγμα. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο $\mathbb{R}^n$ (ως προς την τοπολογία γινομένου n αντιτύπων τού $\mathbb{R}$ εφοδιασμένου με τη συνήθη τοπολογία) δεν είναι συμπαγής.

1.8.14 Σημείωση. Δεν είναι δύσκολο να δειχθεί ότι, στην πραγματικότητα, το θεώρημα 1.8.12 τού Tikhonov[25] είναι αφ' εαυτού *ισοδύναμο* τού *αξιώματος τής επιλο-*

[24] Πράγματι· εάν $x \in \prod_{i \in I} X_i \diagdown \bigcup_{j=1}^{\nu} \bigcup_{\rho=1}^{k_j} U_{j,\rho}$, τότε $x \in \mathrm{pr}_{i_j}^{-1}(W_j)$ για κάθε $j \in \{1, ..., \nu\}$, οπότε

$$x \in \mathrm{pr}_{i_1}^{-1}(W_1) \cup \cdots \cup \mathrm{pr}_{i_\nu}^{-1}(W_\nu) \subseteq U.$$

[25] Tikhonov (γράφεται ενίοτε και Tychonoff), *Andrey Nikolayevich* (30/10/1906-7/10/1993). Ρώσος μαθηματικός. Σπούδασε στο Πανεπιστήμιο Lomonosov τής Μόσχας μέχρι το 1927 και από το 1936 δίδαξε εκεί ως καθηγητής μέχρι τη συνταξιοδότησή του. Διετέλεσε κοσμήτωρ τής Σχολής Αριθμητικής Αναλύσεως και Κυβερνητικής, και διευθυντής τού Ινστιτούτου Εφαρμοσμένων Μαθηματικών τής (τότε) Σοβιετικής Ακαδημίας των Επιστημών. Το ερευνητικό του έργο εκτεινόταν σε αρκετούς τομείς των Μαθηματικών, όπως στην Τοπολογία, στη Συναρτησιακή Ανάλυση, στις Διαφορικές Εξισώσεις, στην Αριθμητική Ανάλυση, στη Μαθηματική Φυσική, σε εφαρμογές στη Γεωφυσική και στην Ηλεκτροδυναμική κ.ά. Είχε λάβει το βραβείο Λένιν, καθώς και το κρατικό βραβείο τής Ε.Σ.Σ.Δ.

γής.

A.N. Tikhonov

Κάνοντας χρήση τού θεωρήματος 1.8.12 είναι δυνατόν να δομηθεί μια αρκούντως εύκολη απόδειξη τού *θεωρήματος των Heine*[26] *και Borel*[27], μέσω τού οποίου δίδεται ένας απλός χαρακτηρισμός όλων των *συμπαγών* υποχώρων τού $\mathbb{R}^n$.

1.8.15 Θεώρημα. (Heine-Borel) *Έστω $n \in \mathbb{N}$. Ένας υπόχωρος X τού $\mathbb{R}^n$ (ως προς την τοπολογία γινομένου n αντιτύπων τού $\mathbb{R}$ εφοδιασμένου με τη συνήθη τοπολογία) είναι συμπαγής εάν και μόνον εάν το X είναι κλειστό και φραγμένο*[28].

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν το $X \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές, τότε το X είναι *κλειστό* (διότι ο $\mathbb{R}^n$ είναι χώρος Hausdorff, βλ. 1.7.5 και 1.8.9 (i)). Επίσης,

$$X \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (-k,k)^n = \mathbb{R}^n \Rightarrow X \subseteq (-k_1,k_1)^n \cup \cdots \cup (-k_l,k_l)^n,$$

για κάποιους $k_1,...,k_l \in \mathbb{N}$ (λόγω τής συμπάγειας τού X, βλ. 1.8.4 (i)$\Leftrightarrow$(ii)). Άρα $X \subseteq (-k_*,k_*)^n$, όπου $k_* := \max\{k_1,...,k_l\}$. Εξ αυτού έπεται ότι το X είναι και *φραγμένο*. Και αντιστρόφως· εάν το X είναι κλειστό και φραγμένο, τότε υπάρχει καποιος $k_0 \in \mathbb{N}$ με

$$X \subseteq \underbrace{[-k_0,k_0] \times \cdots \times [-k_0,k_0]}_{n \text{ φορές}} = [-k_0,k_0]^n.$$

Επειδή το $[-k_0,k_0]^n$ είναι συμπαγές (βλ. 1.8.3 (ii) και 1.8.12), το X είναι συμπαγές (λόγω τής προτάσεως 1.8.8). $\square$

[26]Heine, *Heinrich Eduard* (16/3/1821-21/10/1881). Γερμανός μαθηματικός. Υπήρξε μαθητής των Carl Friedrich Gauss (1777-1855) και Gustav Peter Lejeune Dirichlet (1875-1941). Διετέλεσε καθηγητής των Πανεπιστημίων Βόννης και Halle. Η κύρια έρευνά του επικεντρώθηκε στις σφαιρικές συναρτήσεις.

[27]Borel, *Emile* (7/1/1871-3/2/1956). Γάλλος μαθηματικός, καθηγητής στη Sorbonne (από το 1909) και πρόεδρος τής Γαλλικής Ακαδημίας Επιστημών (1934). Ειδικός στον τομέα τής Πραγματικής και Μιγαδικής Αναλύσεως και τής Θεωρίας Πιθανοτήτων. Γνωστός από την εισαγωγή τού λεγομένου «μέτρου Borel», το «λήμμα Borel-Cantelli» και τον «ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών».

[28]Λέμε ότι το X είναι **φραγμένο** όταν υπάρχουν $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, τέτοια ώστε $X \subseteq \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| < \varepsilon\}$.

1.8.16 Παραδείγματα. (i) Κάθε κλειστό διάστημα εντός τού $\mathbb{R}$ είναι συμπαγές.

(ii) Εάν $n \in \mathbb{N}$, τότε η μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^{n-1}$ και η μοναδιαία μπάλα $\mathbb{B}^n$ είναι συμπαγείς χώροι (ως κλειστοί και φραγμένοι).

(iii) Το σύνολο $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$ είναι κλειστό εντός τού $\mathbb{R}^2$ αλλά δεν είναι συμπαγές (αφού δεν είναι φραγμένο).

(iv) Το σύνολο $B := \{\,(x, \sin(\frac{1}{x}))\big|\ 0 < x \leq 1\}$ είναι φραγμένο εντός τού $\mathbb{R}^2$ αλλά δεν είναι συμπαγές (αφού δεν είναι κλειστό).

H.E. Heine

E. Borel

Εν συνεχεία θα υπομνησθεί ένα λίαν χρήσιμο λήμμα, το λεγόμενο *λήμμα τού Lebesgue*[29], το οποίο περιγράφει μια σημαντική ιδιότητα *των συμπαγών μετρικών χώρων*.

1.8.17 Ορισμός. Έστω $(X, \mathcal{T}_d)$ ένας μετρικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε ως **απόσταση τού** x **από το** A το

$$\boxed{d(x,A) := \inf\{\, d(x,a)|\ a \in A\}.}$$

(Για παγιωμένο A, η $x \longmapsto d(x,A)$ είναι συνεχής.) Εάν το A είναι ένα φραγμένο υποσύνολο[30], ορίζουμε τη **διάμετρό του** $\mathrm{diam}(A)$ ως εξής:

$$\boxed{\mathrm{diam}(A) := \sup\{\, d(a_1,a_2)|\ a_1, a_2 \in A\}.}$$

[29]Lesbesgue, *Henri* (28/6/1875-26/7/1941). Γάλλος μαθηματικός. Διετέλεσε καθηγητής τής Sorbonne (1919-1920) και τού Collège de France (1921-1941). Αναμόρφωσε την τότε υπάρχουσα θεωρία τής Διαφορικής Γεωμετρίας και τής Ολοκληρώσεως κατά Riemann εισάγοντας το λεγόμενο «μέτρο Lebesgue». Οι εργασίες του, αν και έγιναν πολύ αργά αποδεκτές από τη μαθηματική κοινότητα, κατέδειξαν την ιδιαίτερη διορατικότητά του και τελικώς βρήκαν μια περίοπτη θέση στις Θεωρίες Ολοκληρώσεως και Μέτρου, Αναλύσεως Fourier, Συναρτησιακής Αναλύσεως, καθώς και στη Θεωρία Πιθανοτήτων.

[30]Λέμε ότι το A είναι **φραγμένο** όταν υπάρχουν $x \in X$ και $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, τέτοια ώστε $A \subseteq \overset{\circ}{\mathbb{B}}(x;\varepsilon)$.

1.8.18 Λήμμα. («Λήμμα τού Lebesgue») *Έστω $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ ένα ανοικτό κάλυμμα ένος μετρικού χώρου $(X, \mathcal{T}_d)$. Εάν ο $(X, \mathcal{T}_d)$ είναι συμπαγής, τότε υπάρχει $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ (που καλείται, ιδιαιτέρως,* ***αριθμός Lebesgue τού*** *$\mathfrak{U}$), τέτοιος ώστε για κάθε μη κενό $B \subseteq X$ με $\operatorname{diam}(B) < \delta$ να υπάρχει κάποιο $j \in I$ για το οποίο να ισχύει $B \subseteq U_j$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $x \in X$. Επειδή το $\mathfrak{U}$ είναι κάλυμμα, υπάρχει $j \in I$ τέτοιο ώστε $x \in U_j$. Επειδή το U_j είναι εξ υποθέσεως ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon(x) \in \mathbb{R}_{>0}$ με $\overset{\circ}{\mathbb{B}}_d\ (x; \varepsilon(x)) := \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon(x)\} \subseteq U_j$. (Πρβλ. 1.1.2 (iii).) Το $\left\{\overset{\circ}{\mathbb{B}}_d\ (x, \frac{\varepsilon(x)}{2}) : x \in X\right\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα τού X. Επειδή ο X είναι συμπαγής, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ με $X = \bigcup_{\nu=1}^{n} \overset{\circ}{\mathbb{B}}_d\ (x_\nu, \frac{\varepsilon(x_\nu)}{2})$. Θα δείξουμε ότι ο $\delta := \min\left\{\frac{\varepsilon(x_1)}{2}, ..., \frac{\varepsilon(x_n)}{2}\right\} > 0$ είναι ο (ζητούμενος) *αριθμός Lebesgue* τού $\mathfrak{U}$. Έστω B ένα υποσύνολο τού X με $\operatorname{diam}(B) < \delta$. Έστω τυχόν $w \in B$. Προφανώς υπάρχει κάποιο $\xi \in \{1, ..., n\}$ με $w \in \overset{\circ}{\mathbb{B}}_d\ (x_\xi; \frac{\varepsilon(x_\xi)}{2})$. Αρκεί να αποδειχθεί ότι κάθε $z \in B$ ανήκει στο $\overset{\circ}{\mathbb{B}}_d\ (x_\xi; \varepsilon(x_\xi))$ (διότι τότε -εκ κατασκευής- θα έχουμε $B \subseteq U_j$, για κάποιο $j \in I$). Για $z \in B$ η τριγωνική ανισοϊσότητα μας πληροφορεί ότι

$$d(z, x_\xi) \leq d(z, w) + d(w, x_\xi) \leq \delta + \frac{\varepsilon(x_\xi)}{2} \leq \frac{\varepsilon(x_\xi)}{2} + \frac{\varepsilon(x_\xi)}{2} = \varepsilon(x_\xi),$$

οπότε $z \in \overset{\circ}{\mathbb{B}}_d\ (x_\xi; \varepsilon(x_\xi))$. □

H. Lebesgue

1.8.19 Θεώρημα. *Έστω $(X, \mathcal{T}_d)$ ένας συμπαγής μετρικός χώρος και έστω $(Y, \mathcal{T}_{d'})$ ένας μετρικός χώρος. Εάν $f : X \longrightarrow Y$ είναι μια συνεχής απεικόνιση, τότε η f είναι και* ***ομοιομόρφως συνεχής****, ήτοι για κάθε $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ υπάρχει $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, τέτοιο ώστε για οιαδήποτε $x_1, x_2 \in X$ να ισχύει η συνεπαγωγή*

$$d(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ και έστω δ' ο αριθμός Lebesgue τού ανοικτού καλύμματος $\left\{ f^{-1}(\overset{\circ}{\mathbb{B}}_{d'}\ (y; \frac{\varepsilon}{2})) \middle| y \in Y \right\}$ τού X. Εάν $x_1, x_2 \in X$ με $d(x_1, x_2) < \delta := \frac{\delta'}{2}$, τότε

$x_2 \in \overset{\circ}{\mathbb{B}}_d\ (x_1;\delta)$, οπότε $\overset{\circ}{\mathbb{B}}_d\ (x_1;\delta) \neq \varnothing$ με $\mathrm{diam}(\overset{\circ}{\mathbb{B}}_d\ (x_1;\delta)) < 2\delta = \delta'$ και υπάρχει $y_0 \in Y$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\overset{\circ}{\mathbb{B}}_d\ (x_1;\delta) \subseteq f^{-1}(\overset{\circ}{\mathbb{B}}_{d'}\ (y_0;\tfrac{\varepsilon}{2})) \Rightarrow f(\overset{\circ}{\mathbb{B}}_d\ (x_1;\delta)) \subseteq \overset{\circ}{\mathbb{B}}_{d'}\ (y_0;\tfrac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow f(x_1), f(x_2) \in \overset{\circ}{\mathbb{B}}_{d'}\ (y_0;\tfrac{\varepsilon}{2}).$$

Ως εκ τούτου, $d'(f(x_1), f(x_2)) \leq d'(f(x_1), y_0) + d'(y_0, f(x_2)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, και η f είναι ομοιομόρφως συνεχής. $\square$

Υπάρχει πληθώρα ενδιαφερόντων τοπολογικών χώρων που *δεν είναι* συμπαγείς. Σε ορισμένους, όμως, εξ αυτών ισχύει η συμπάγεια *τοπικώς*, όχι ολομερώς. Γι' αυτόν τον λόγο απαιτείται η ακόλουθη γενίκευση τής εννοίας τής συμπάγειας:

1.8.20 Ορισμός. Λέμε ότι ένας τοπολογικός χώρος X είναι **τοπικά συμπαγής** όταν για κάθε $x \in X$ υπάρχει κάποια περιοχή $U \in \mathcal{U}(x)$ που είναι συμπαγής.

1.8.21 Παραδείγματα. (i) Οι *απειροπληθείς* διακριτοί τοπολογικοί χώροι *δεν είναι* συμπαγείς· ωστόσο, *είναι* τοπικά συμπαγείς, καθόσον κάθε σημείο τους διαθέτει ως μια συμπαγή περιοχή του τον εαυτό του.

(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο $\mathbb{R}^n$ (ως προς την τοπολογία γινομένου n αντιτύπων τού $\mathbb{R}$ εφοδιασμένου με τη συνήθη τοπολογία) είναι τοπικά συμπαγής, διότι για οιοδήποτε $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ το $[x_1 - 1, x_1 + 1] \times \cdots \times [x_n - 1, x_n + 1]$ αποτελεί (κατά το θεώρημα 1.8.15) μια συμπαγή περιοχή αυτού.

(iii) Οι συμπαγείς τοπολογικοί χώροι είναι *και* τοπικά συμπαγείς, διότι οι ίδιοι αποτελούν συμπαγή περιοχή καθενός εκ των σημείων τους.

(iv) Κάθε *κλειστός* υπόχωρος ενός τοπικά συμπαγούς τοπολογικού χώρου είναι τοπικά συμπαγής.

1.8.22 Πρόταση. *Εάν $(X, \mathcal{T})$ είναι ένας χώρος Hausdorff, τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Ο X είναι τοπικά συμπαγής.*

(ii) *Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $U \in \mathcal{U}(x) \cap \mathcal{T}$ με το $\overline{U}$ συμπαγές.*

(iii) *Για κάθε $x \in X$ και για κάθε $U \in \mathcal{T}$ με $x \in U$ υπάρχει $V \in \mathcal{T}$ με το $\overline{V}$ συμπαγές και τέτοιο, ώστε να ισχύει $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

(iv) *Για κάθε συμπαγές $C \subseteq X$ με $C \subseteq U$, για κάποιο $U \in \mathcal{T}$, υπάρχει $V \in \mathcal{T}$ με το $\overline{V}$ συμπαγές και τέτοιο, ώστε να ισχύει $C \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i)⇒(ii) Άμεσο επακολούθημα τού ορισμού 1.8.20.

(ii)⇒(iii) Έστω τυχόν σημείο $x \in X$ και έστω $U \in \mathcal{T}$ με $x \in U$. Εξ υποθέσεως υπάρχει κάποιο $W \in \mathcal{U}(x) \cap \mathcal{T}$ με το $\overline{W}$ συμπαγές. Το $C \cap U$ είναι μια ανοικτή περιοχή τού σημείου x *εντός τού* C. Επομένως υπάρχει Z ανοικτό στο C, τέτοιο ώστε να ισχύει $x \in Z \subseteq \mathrm{cl}_C(Z) \subseteq C \cap U$. Για το Z υπάρχει ανοικτό υποσύνολο U'

τού X με $Z = C \cap U'$. Θέτοντας $V := C^\circ \cap U'$ παρατηρούμε ότι $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ με το $\overline{V}$ συμπαγές.

(iii)⇒(iv) Έστω $C \subseteq X$ συμπαγές με $C \subseteq U$, για κάποιο $U \in \mathcal{T}$. Για κάθε σημείο $x \in C$ έχουμε $x \in U$, οπότε υπάρχει εξ υποθέσεως κάποιο $V(x) \in \mathcal{T}$ με το $\overline{V(x)}$ συμπαγές και τέτοιο, ώστε να ισχύει $x \in V(x) \subseteq \overline{V(x)} \subseteq U$. Η οικογένεια $\{V(x) : x \in C\}$ αποτελεί ένα ανοικτό κάλυμμα τού C. Επειδή το C είναι συμπαγές, υπάρχουν $x_1, ..., x_k \in C$, τέτοια ώστε να ισχύει $C \subseteq V(x_1) \cup \cdots \cup V(x_k)$. Εάν θέσουμε $V := V(x_1) \cup \cdots \cup V(x_k)$, τότε $C \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ και το $\overline{V}$ είναι συμπαγές.

(iv)⇒(i) Τούτο είναι άμεσο από τον ορισμό 1.8.20. □

1.8.23 Πρόταση. *Εάν $(X, \mathcal{T})$ είναι ένας χώρος Hausdorff και A ένας τοπικά συμπαγής υπόχωρός του, τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Υπάρχουν υποσύνολα V και C τού X με $V \in \mathcal{T}$, $X \smallsetminus C \in \mathcal{T}$ και $A = V \cap C$.*

(ii) *Εάν $\overline{A} = X$, τότε $A \in \mathcal{T}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Έστω τυχόν $x \in A$. Επειδή ο A είναι εξ υποθέσεως τοπικά συμπαγής, υπάρχει $V_x \in \mathcal{T}$ με $x \in V_x$ και με το $\overline{V_x} \cap A$ συμπαγές υποσύνολο τού X. Επειδή ο X είναι εξ υποθέσεως χώρος Hausdorff, το $\overline{V_x} \cap A$ είναι κλειστό υποσύνολο τού X. (Βλ. 1.8.9 (i).) Θέτοντας $V := \bigcup \{ V_x | \, x \in A\}$ παρατηρούμε ότι το V είναι ανοικτό με $A \subseteq V$. Για κάθε $x \in A$ έχουμε $V_x \cap A = \overline{V_x} \cap (V_x \cap A)$, οπότε το $V_x \cap A$ είναι κλειστό υποσύνολο τού $\overline{V_x}$ (ως προς τη σχετική τοπολογία $\mathcal{T}_{\overline{V_x}}$). Εξ αυτού έπεται ότι το A είναι κλειστό[31] *εντός τού* V. Επομένως υπάρχει κλειστό υποσύνολο C τού X με $A = V \cap C$.

(ii) Από το (i) συνάγεται η ύπαρξη ενός ανοικτού V και ενός κλειστού υποσυνόλου C (ως προς την $\mathcal{T}$) με $A = V \cap C$. Επειδή το A είναι εξ υποθέσεως πυκνό και $A \subseteq C$, έχουμε $C = X$ και $A = V \in \mathcal{T}$. □

1.8.24 Πόρισμα. *Ο υπόχωρος $\mathbb{Q}$ τού τοπολογικού χώρου $\mathbb{R}$ (με τη συνήθη, ευκλείδεια τοπολογία) δεν είναι τοπικά συμπαγής.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν ο υπόχωρος $\mathbb{Q}$ ήταν τοπικά συμπαγής, τότε, επειδή $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, θα έπρεπε το $\mathbb{Q}$ να είναι ανοικτό υποσύνολο τού $\mathbb{R}$, ήτοι κάτι που δεν ισχύει[32]. □

1.8.25 Σημείωση. (i) Εάν $f : X \longrightarrow Y$ είναι μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ (των υποκειμένων συνόλων) δυο τοπολογικών χώρων με τον X τοπικά συμπαγή, τότε ο $f(X) \subseteq Y$ δεν είναι κατ' ανάγκην τοπικά συμπαγής (και, ως εκ τούτου, η πρόταση

[31] Πράγματι· εάν $y \in V \smallsetminus A$, τότε υπάρχει κάποιο $x \in A$ με $y \in V_x \smallsetminus A = V_x \smallsetminus (V_x \cap A)$. Επειδή το $V_x \cap A$ είναι κλειστό εντός τού V_x, υπάρχει $U \subseteq V_x$ ανοικτό εντός τού V_x, άρα και εντός τού X, ούτως ώστε να ισχύει $U \cap A = \varnothing$ και $y \in U \subseteq V \smallsetminus A$. Αυτό σημαίνει ότι το A είναι κλειστό *εντός τού* V.

[32] Εάν υποθέταμε ότι το $\mathbb{Q}$ είναι ανοικτό και $q \in \mathbb{Q}$, τότε κάθε ανοικτό διάστημα τού $\mathbb{R}$ που περιέχει τον q θα έπρεπε να περιέχει *μόνον ρητούς* αριθμούς. Όμως εντός αυτού οφείλουν να περιέχονται και απειροπληθείς *άρρητοι* που ανήκουν στο σύνολο $\{q + \frac{\sqrt{2}}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. (Επιλέγουμε τα στοιχεία του με *αρκούντως μεγάλους* n.)

1.8.5 δεν είναι άμεσα γενικεύσιμη[33] για την *τοπική* συμπάγεια). Επί παραδείγματι, ο μη τοπικά συμπαγής χώρος $\mathbb{Q}$ (ως προς τη *συνήθη* τοπολογία, βλ. 1.8.24) είναι η συνεχής εικόνα τού ιδίου συνόλου (μέσω τής ταυτοτικής απεικονίσεως), εφοδιασμένου με τη *διακριτή* τοπολογία (που *είναι* τοπικά συμπαγής).

(ii) Αντιθέτως, το θεώρημα 1.8.12 είναι άμεσα γενικεύσιμο για την *τοπική* συμπάγεια: Δοθείσας μιας οικογενείας τοπολογικών χώρων $(X_i)_{i\in I}$, ο χώρος γινομένου $\prod_{i\in I} X_i$ είναι τοπικά συμπαγής εάν και μόνον εάν ο X_i είναι τοπικά συμπαγής για κάθε $i \in I$ (με τον X_i μη συμπαγή για το πολύ πεπερασμένου πλήθους δείκτες $i \in I$). Βλ. [28], Ch. XI, section 6, Thm. $6.3(4)$, σελ. 239.

$\boxed{1.9}$ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΔΡΟΜΟΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

1.9.1 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ ονομάζεται **συνεκτικός**[34] όταν δεν υπάρχουν $A, B \in \mathcal{T} \smallsetminus \{\varnothing\}$, τέτοια ώστε να ισχύει $A \cap B = \varnothing$ και $X = A \cup B$. (Ένα υποσύνολο τού υποκειμένου συνόλου ενός τοπολογικού χώρου καλείται **συνεκτικό** όταν είναι συνεκτικό ως προς τη σχετική τοπολογία 1.4.1.)

1.9.2 Παραδείγματα. (i) Το $X := \{0, 1\}$, εφοδιασμένο με την τοπολογία τού Sierpinski (βλ. 1.1.2 (ii)), είναι χώρος συνεκτικός.

(ii) Στον $(X, \mathcal{T}_{\text{διακρ.}})$ (βλ. 1.1.2 (v)) τα μονοσύνολα είναι τα μόνα συνεκτικά υποσύνολα τού X.

(iii) Εντός τού $\mathbb{R}$ (με τη συνήθη τοπολογία) οι μόνοι συνεκτικοί υπόχωροί του (πέραν τού ιδίου τού $\mathbb{R}$) είναι τα (ανοικτά, κλειστά, ημιανοικτά ή ημίκλειστα) διαστήματα τού $\mathbb{R}$.

1.9.3 Πρόταση. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο $(X, \mathcal{T})$ είναι συνεκτικός.*

(ii) *Τα μόνα υποσύνολα τού X, τα οποία είναι ταυτοχρόνως και ανοικτά και κλειστά, είναι τα $\varnothing, X$.*

(iii) *Δεν υφίσταται επιρριπτική συνεχής απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$, όπου ο Y είναι εφοδιασμένος με τη διακριτή τοπολογία και περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) $\Rightarrow$ (ii) Έστω A ένα υποσύνολο τού X που είναι ταυτοχρόνως ανοικτό και κλειστό. Τότε $X = A \cup (X \smallsetminus A)$ και τα σύνολα A και $X \smallsetminus A$ είναι ανοικτά

[33] Από την άλλη μεριά, για να είναι ο $f(X) \subseteq Y$ τοπικά συμπαγής αρκεί, π.χ., να προϋποτεθεί, επιπροσθέτως, ότι η f είναι *ανοικτή*. Βλ. [28], Ch. XI, section 6, Thm. $6.3(1)$, σελ. 239.

[34] Για την απόδοση τού αγγλικού μαθηματικού όρου *connected*, αντί τού *συνεκτικός* (που σημαίνει «αυτός που συντελεί στο να υπάρχει συνοχή, στο να συγκρατούνται πράγματα μεταξύ τους»), έχουν επίσης χρησιμοποιηθεί και τα επίθετα *συναπτός* (= «αυτός που είναι ενωμένος με άλλον») και *συναφής* (= «αυτός που συνδέεται με τρόπο άμεσο με κάτι»), τα οποία εκφράζουν παραπλήσιους εννοιολογικούς χρωματισμούς του.

και ξένα μεταξύ τους. Επειδή ο X είναι συνεκτικός, πρέπει κάποιο εξ αυτών να είναι κενό. Άρα είτε $A = \varnothing$ είτε $A = X$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Ας υποθέσουμε ότι υφίσταται μια τέτοιου είδους συνεχής και επιρριπτική απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ και ότι $y \in Y$. Τότε το σύνολο $A := f^{-1}(\{y\})$ είναι ταυτοχρόνως ανοικτό και κλειστό (διότι η f είναι συνεχής). Ωστόσο, $A \neq \varnothing$ και $A \neq X$ (διότι η f είναι επιρριπτική). Άτοπο (λόγω το (ii))!

(iii) $\Rightarrow$ (i) Έστω ότι ο X δεν είναι συνεκτικός. Τότε υπάρχουν $A, B \subseteq X$ μη κενά, ανοικτά και ξένα μεταξύ τους, τέτοια ώστε να ισχύει $X = A \cup B$. Θέτοντας $Y := \{0, 1\}$ και εφοδιάζοντας το Y με τη διακριτή τοπολογία έχουμε τη δυνατότητα κατασκευής μιας απεικονίσεως $f : X \longrightarrow Y$ μέσω τού τύπου

$$X \ni x \longmapsto f(x) := \begin{cases} 1, & \text{όταν } x \in A, \\ 0, & \text{όταν } x \in B, \end{cases}$$

η οποία είναι συνεχής και επιρριπτική. Άτοπο (λόγω το (iii))! $\square$

1.9.4 Πόρισμα. *Εάν X είναι ένας συνεκτικός τοπολογικός χώρος και Y ένας διακριτός χώρος (δηλαδή εφοδιασμένος με τη διακριτή τοπολογία), τότε κάθε συνεχής απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ είναι σταθερή.*

1.9.5 Πρόταση. *Εάν τα A και B είναι δυο υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου X και $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, τότε ισχύει η συνεπαγωγή:* $[A$ συνεκτικό$] \Longrightarrow [B$ συνεκτικό$]$. *Ιδιαιτέρως, η κλειστή θήκη ενός συνεκτικού συνόλου είναι συνεκτικό σύνολο*[35].

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας υποθέσουμε ότι το A είναι συνεκτικό και ότι το B δεν είναι. Τότε (σύμφωνα με την πρόταση 1.9.3) υπάρχει μια συνεχής και επιρριπτική απεικόνιση $f : B \longrightarrow \{0, 1\}$ (όπου το $\{0, 1\}$ είναι εφοδιασμένο με τη διακριτή τοπολογία). Επειδή το A είναι συνεκτικό, η $f|_A : A \longrightarrow \{0, 1\}$ είναι (κατά το πόρισμα 1.9.4) σταθερή απεικόνιση, δηλαδή το $f(A)$ είναι μονοσύνολο. Όμως,

$$f(A) \subseteq f(B) = f(B \cap \overline{A}) = f(\mathrm{cl}_B(A)) \underset{1.4.2\,(\mathrm{v})}{\subseteq} f(\mathrm{cl}_X(A)) = f(\overline{A}) \underset{1.3.2\,(\mathrm{iv})}{\subseteq} \overline{f(A)} = f(A),$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω τού ότι ο $\{0, 1\}$ είναι διακριτός. Άρα το $f(B)\,(= f(A))$ είναι μονοσύνολο. Επομένως και η ίδια η f είναι σταθερή και, ως εκ τούτου, μη επιρριπτική. Άτοπο! $\square$

1.9.6 Πρόταση. *Εάν $f : X \longrightarrow Y$ είναι μια συνεχής, επιρριπτική απεικόνιση μεταξύ (των υποκειμένων συνόλων) τοπολογικών χώρων και ο X συνεκτικός, τότε και ο Y είναι συνεκτικός.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας υποθέσουμε ότι ο Y δεν είναι συνεκτικός. Τότε (σύμφωνα με την πρόταση 1.9.3) υπάρχει μια συνεχής και επιρριπτική απεικόνιση $g : Y \longrightarrow \{0, 1\}$ (όπου το σύνολο $\{0, 1\}$ είναι εφοδιασμένο με τη διακριτή τοπολογία). Η σύνθεση

[35] Αρκεί να ερφαμοσθεί το ανωτέρω όταν $B := \overline{A}$.

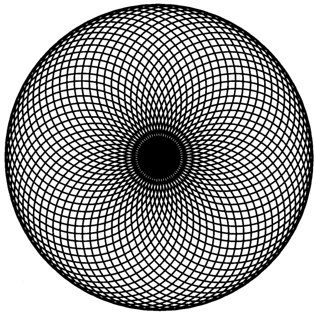
$g \circ f : X \longrightarrow \{0, 1\}$ είναι ωσαύτως συνεχής και επιρριπτική. Αυτό (εκ νέου μέσω τής προτάσεως 1.9.3) σημαίνει ότι ο τοπολογικός χώρος X δεν είναι συνεκτικός. Άτοπο! □

1.9.7 Παρατήρηση. Είναι πρόδηλο μέσω τής προτάσεως 1.9.6 ότι η ιδιότητα τού να είναι ένας τοπολογικός χώρος *συνεκτικός* είναι *τοπολογική*. (Εάν X είναι συνεκτικός και $X \approx Y$, τότε ο Y είναι ωσαύτως συνεκτικός.)

1.9.8 Λήμμα. *Έστω $(A_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια συνεκτικών υποσυνόλων (τού υποκειμένου συνόλου) X ενός τοπολογικού χώρου. Εάν $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$, τότε η ένωσή τους $\bigcup_{i\in I} A_i$ είναι συνεκτικό υποσύνολο τού X.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας θεωρήσουμε ένα σημείο $x_0 \in \bigcap_{i\in I} A_i$ κι ας υποθέσουμε ότι το $\bigcup_{i\in I} A_i$ δεν είναι συνεκτικό υποσύνολο τού X. Τότε (κατά την πρόταση 1.9.3) υπάρχει μια συνεχής και επιρριπτική απεικόνιση $f : \bigcup_{i\in I} A_i \longrightarrow \{0, 1\}$ (όπου το σύνολο $\{0, 1\}$ είναι εφοδιασμένο με τη διακριτή τοπολογία). Ο περιορισμός $f|_{A_i} : A_i \longrightarrow \{0, 1\}$ τής f επί τού A_i είναι συνεχής απεικόνιση για κάθε $i \in I$. (Βλ. πρόταση 1.4.4.) Επειδή δε το A_i είναι εξ υποθέσεως συνεκτικό, η $f|_{A_i}$ είναι κατ' ανάγκην σταθερή (λόγω τού πορίσματος 1.9.4), οριζόμενη από τον τύπο $f|_{A_i}(x) := f(x_0)$ για κάθε $x \in A_i$ και για κάθε $i \in I$. Κατά συνέπειαν, $f(x) = f(x_0)$ για κάθε $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Αυτό (εκ νέου μέσω τής προτάσεως 1.9.3) σημαίνει ότι το $\bigcup_{i\in I} A_i$ δεν είναι συνεκτικό. Άτοπο! □

1.9.9 Παραδείγματα. (i) Η συνεκτικότητα τού $\mathbb{R}$ (ως προς τη συνήθη τοπολογία) μπορεί να δειχθεί κάνοντας χρήση τής συνεκτικότητας των κλειστών διαστημάτων και τού λήμματος 1.9.8, καθώς έχουμε $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]$, όπου $0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [-n, n]$.
(ii) Επειδή κάθε κύκλος (στο ευκλείδειο επίπεδο) είναι συνεκτικός (βλ. 1.9.11 (ii) για $n = 1$ και 1.9.7), ο υπόχωρος τού $\mathbb{R}^2$ ο απαρτιζόμενος από την ένωση των 64 κύκλων των εχόντων μη κενή κοινή τομή, των εικονογραφημένων στο σχήμα 1.5, είναι συνεκτικός.



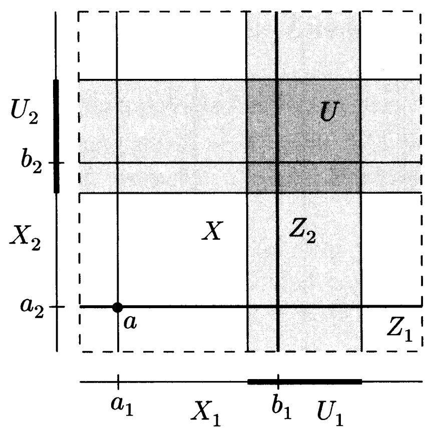
Σχήμα 1.5.

1.9.10 Θεώρημα. *Έστω $(X_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια (μη κενών) τοπολογικών χώρων. Ο χώρος γινομένου $\prod_{i\in I} X_i$ είναι συνεκτικός εάν και μόνον εάν ο X_i είναι συνεκτικός για κάθε $i \in I$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν ο χώρος γινομένου $X := \prod_{i\in I} X_i$ είναι συνεκτικός, τότε κάθε X_j είναι συνεκτικό όντας η συνεχής εικόνα τού X μέσω τής προβολής pr_j για κάθε $j \in I$. (Βλ. 1.7.2 (i) και 1.9.6.) Και αντιστρόφως· εάν υποθέσουμε ότι ο $X_i \neq \varnothing$ είναι συνεκτικός για κάθε $i \in I$, παγιώσουμε ένα σημείο $a = (a_i)_{i\in I}$ τού X και θεωρήσουμε το υποσύνολο $Y \subseteq X$ το αποτελούμενο από εκείνα τα σημεία τού X, τα οποία ανήκουν σε *κάποιο* συνεκτικό υποσύνολο τού X *που περιέχει το* a. Το Y είναι εκ κατασκευής συνεκτικό (λόγω τού λήμματος 1.9.8, ως ένωση αυτών των συνεκτικών υποσυνόλων). Άρα και η κλειστή του θήκη $\overline{Y}$ είναι συνεκτική. (Βλ. πρόταση 1.9.5.) Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι $X = \overline{Y}$ ή, ισοδυνάμως, ότι $Y \cap U \neq \varnothing$ για κάθε ανοικτό υποσύνολο $U \subseteq X$ τής μορφής $U = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{pr}_\lambda^{-1}(U_\lambda)$, όπου Λ κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο τού I και U_λ κάποιο ανοικτό υποσύνολο τού X_λ για κάθε $\lambda \in \Lambda$. (Βλ. πρόταση 1.2.8 και ισότητα (1.4).) Έστω $U \subseteq X$ ένα ανοικτό υποσύνολο αυτής τής μορφής. Για κάθε $\lambda \in \Lambda$ επιλέγουμε ένα σημείο $b_\lambda \in U_\lambda$. Δίχως βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\Lambda = \{1, ..., m\}$ για κάποιον κατάλληλο $m \in \mathbb{N}$. Για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$ θέτουμε

$$Z_j := \left\{ x = (x_i)_{i\in I} \in X \,\middle|\, x_i = \left\{ \begin{array}{ll} b_i, & \text{όταν } i < j, \\ x_j, & \text{όταν } i = j, \\ a_i, & \text{όταν } i > j \end{array} \right. \right\}.$$

(Πρβλ. σχήμα 1.6 στην ειδική περίπτωση όπου $m = 2$.)



Σχήμα 1.6.

Προφανώς, ο $Z_j \approx X_j$ είναι συνεκτικός. Εξάλλου, $Z_j \cap Z_{j+1} \neq \varnothing$ για κάθε δείκτη $j \in \{1, ..., m-1\}$, οπότε (κατόπιν διαδοχικής εφαρμογής τού λήμματος 1.9.8 για οικογένειες αποτελούμενες από *δύο* συνεκτικά υποσύνολα) συμπεραίνουμε (επαγωγικώς) ότι η ένωση $Z := \bigcup_{j=1}^{m} Z_j$ είναι συνεκτικό υποσύνολο τού X. Επειδή $a_1 \in Z_1 \subseteq Z$ και $a \in Y$, έχουμε $Z \subseteq Y$. Άρα $Z_m \cap U \neq \varnothing \Rightarrow Y \cap U \neq \varnothing$. □

1.9.11 Παραδείγματα. (i) Έστω τυχών $n \in \mathbb{N}$. Επειδή ο χώρος $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικός (βλ. 1.9.9 (i)), ο $\mathbb{R}^n$ είναι ωσαύτως συνεκτικός (λόγω τού θεωρήματος 1.9.10).

(ii) Επειδή η στερεογραφική προβολή

$$p_{\text{στ.}} : \mathbb{S}^n \smallsetminus \{P_+\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

είναι ομοιομορφισμός, όπου P_+ ο βόρειος πόλος τής $\mathbb{S}^n$ (βλ. 1.5.3 (iv)), ο χώρος $\mathbb{S}^n \smallsetminus \{P_+\} \approx \mathbb{R}^n$ είναι συνεκτικός (μέσω τής προτάσεως 1.9.6 και τού (i)). Και επειδή έχουμε προφανώς

$$\overline{\mathbb{S}^n \smallsetminus \{P_+\}} \underset{1.2.10\,(\text{vi})}{=} \mathbb{S}^n \smallsetminus \underbrace{\{P_+\}^\circ}_{=\varnothing} = \mathbb{S}^n,$$

η μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^n$ είναι ωσαύτως συνεκτική δυνάμει τής προτάσεως 1.9.5.

1.9.12 Ορισμός. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Επί τού X ορίζουμε τη διμελή σχέση $\underset{\text{συνεκ.}}{\sim} \subseteq X \times X$ ως ακολούθως:

$$x_1 \underset{\text{συνεκ.}}{\sim} x_2 \underset{\text{ορσ.}}{\iff} [\exists \text{ συνεκτικό υποσύνολο } A \subseteq X \text{ με } x_1, x_2 \in A].$$

Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι η “ $\underset{\text{συνεκ.}}{\sim}$ ” αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας. Οι αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας ως προς την “ $\underset{\text{συνεκ.}}{\sim}$ ” καλούνται **συνεκτικές συνιστώσες τού τοπολογικού χώρου** X.

1.9.13 Λήμμα. *Οι συνεκτικές συνιστώσες ενός τοπολογικού χώρου X είναι ακριβώς τα μεγιστικά συνεκτικά υποσύνολα τού X, ήτοι τα συνεκτικά υποσύνολά του τα οποία δεν περιέχονται σε οιοδήποτε μεγαλύτερο συνεκτικό υποσύνολο.*

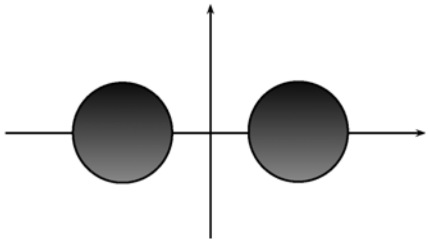
ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $x \in X$, C είναι η συνεκτική συνιστώσα τού X που περιέχει το x και

$$B := \bigcup \{ E \subseteq X \,|\, E \text{ συνεκτικό και } x \in E \},$$

τότε το B είναι αφ' εαυτού συνεκτικό (λόγω τού λήμματος 1.9.8) και, ως εκ τούτου, ένα μεγιστικό συνεκτικό υποσύνολο τού X. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι $B = C$. Εάν $y \in B$, τότε αμφότερα τα x, y ανήκουν στο συνεκτικό υποσύνολο B, οπότε $y \underset{\text{συνεκ.}}{\sim} x \Rightarrow y \in C$. Επομένως, $B \subseteq C$. Και αντιστρόφως· εάν $y \in C$, τότε $y \underset{\text{συνεκ.}}{\sim} x$ και το y ανήκει σε κάποιο συνεκτικό υποσύνολο τού X που περιέχει το x. Άρα $y \in B$ και ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός $C \subseteq B$. □

1.9.14 Παραδείγματα. (i) Το $X = \mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$ διαθέτει τα σύνολα $\{x \in \mathbb{R}\,|\, x > 0\}$ και $\{x \in \mathbb{R}\,|\, x < 0\}$ ως συνεκτικές συνιστώσες.

(ii) Το $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,|\,(x-2)^2 + y^2 \leq 1$ ή $(x+2)^2 + y^2 \leq 1\}$ διαθέτει δύο δίσκους ως συνεκτικές συνιστώσες. (Βλ. σχήμα 1.7.)



Σχήμα 1.7.

(iii) Εάν $n \in \mathbb{N}_0$, τότε το $X = \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \mathbb{S}^n$ διασπάται σε συνεκτικές συνιστώσες ως ακολούθως:

$$X = \begin{cases} \{(-\infty, -1)\} \coprod \{(-1, 1)\} \coprod \{(1, +\infty)\}, & \text{όταν } n = 0, \\ \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : ||\mathbf{x}|| < 1\} \coprod \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : ||\mathbf{x}|| > 1\}, & \text{όταν } n \geq 1. \end{cases}$$

(iv) Οι συνεκτικές συνιστώσες τού $X = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (ως προς τη συνήθη τοπολογία) είναι τα μονοσύνολα $\{x\}$, $x \in \mathbb{Q}$.

1.9.15 Πρόταση. *Έστω X τυχών τοπολογικός χώρος. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Κάθε συνεκτική συνιστώσα τού X είναι κλειστό υποσύνολο τού X.*

(ii) *Κάθε συνεκτικό υποσύνολο τού X ανήκει σε μία και μόνον συνεκτική συνιστώσα τού X.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Έστω C μια συνεκτική συνιστώσα τού X. Τότε το $\overline{C}$ είναι συνεκτικό σύνολο τού X και $C \subseteq \overline{C}$. Όμως το C είναι μεγιστικό υποσύνολο τού X, οπότε $C = \overline{C}$ και το C είναι κλειστό.

(ii) Έστω A ένα συνεκτικό υποσύνολο τού X. Επειδή η οικογένεια των συνεκτικών συνιστωσών τού X αποτελεί ένα κάλυμμα αυτού, υπάρχει κάποια συνεκτική συνιστώσα C με $C \cap A \neq \varnothing$. Σύμφωνα με το λήμμα 1.9.8, η ένωση $C \cup A$ είναι συνεκτική. Σύμφωνα με το λήμμα 1.9.13, το C είναι ένα μεγιστικό συνεκτικό υποσύνολο τού X, οπότε

$$C \subseteq C \cup A \Rightarrow C = C \cup A \Rightarrow A \subseteq C$$

και ο ισχυρισμός είναι αληθής. □

1.9.16 Πρόταση. *Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ (των υποκειμένων συνόλων) τοπολογικών χώρων. Η εικόνα κάθε συνεκτικής συνιστώσας τού X*

μέσω τής f εμπεριέχεται σε μία (και μόνον) συνεκτική συνιστώσα τού Y. Μάλιστα, εάν η f είναι ομοιομορφισμός, τότε υπάρχει μια αμφίρριψη:

$$\{\text{συνεκτικές συνιστώσες τού } X\} \leftrightarrow \{\text{συνεκτικές συνιστώσες τού } Y\}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν C είναι μια συνεκτική συνιστώσα τού X, τότε το σύνολο $f(C)$ είναι συνεκτικό και (σύμφωνα με το (ii) τής προτάσεως 1.9.15) περιέχεται σε μια και μόνον συνεκτική συνιστώσα τού Y. Μάλιστα, στην περίπτωση κατά την οποία η f είναι ομοιομορφισμός, τότε η ζητούμενη αμφίρριψη θα είναι η $C \longmapsto C_Y$, όπου C_Y είναι η μοναδική συνεκτική συνιστώσα τού Y που περιέχει την εικόνα $f(C)$ τής C μέσω τής f. □

1.9.17 Παρατήρηση. Λόγω τής προτάσεως 1.9.16 ο πληθικός αριθμός τού συνόλου των συνεκτικών συνιστωσών ενός τοπολογικού χώρου είναι μια *τοπολογική αναλλοίωτος*, ήτοι δεν μεταβάλλεται εάν κανείς μεταβεί σε οιονδήποτε τοπολογικό χώρο που είναι ομοιομορφικός αυτού.

1.9.18 Ορισμός. Ένας **δρόμος**[36] εντός ενός τοπολογικού χώρου X είναι μια συνεχής απεικόνιση $\alpha : \mathbf{I} \longrightarrow X$ (όπου $\mathbf{I} := [0,1]$). Τα $\alpha(0)$ και $\alpha(1)$ καλούνται **σημείο αρχής** και **σημείο απολήξεως** ενός δρόμου α, αντιστοίχως. (Επίσης, λέμε ότι ο α **συνδέει το** $\alpha(0)$ **με το** $\alpha(1)$.)

1.9.19 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος καλείται **δρομοσυνεκτικός** όταν δύο οιαδήποτε σημεία του είναι συνδέσιμα μέσω ενός δρόμου.

1.9.20 Θεώρημα. *Κάθε δρομοσυνεκτικός τοπολογικός χώρος είναι συνεκτικός.*

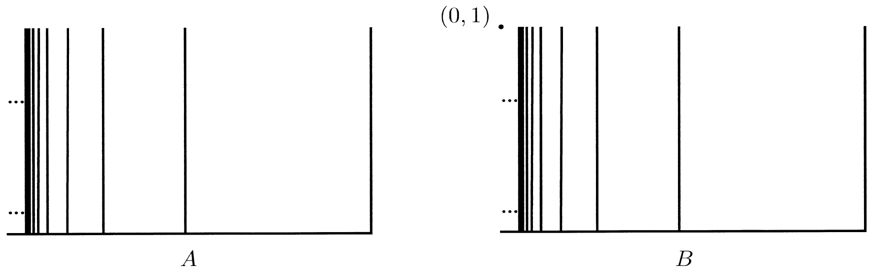
ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω X τυχών δρομοσυνεκτικός τοπολογικός χώρος. Παγιώνουμε ένα σημείο $x_0 \in X$. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει δρόμος $\alpha_x : \mathbf{I} \longrightarrow X$ με σημείο αρχής του το x_0 και σημείο λήξεώς του το x. Τα σύνολα $\alpha_x(\mathbf{I})$, $x \in X$, είναι συνεκτικά (ως συνεχείς εικόνες τού συνεκτικού $\mathbf{I}$, σύμφωνα με την πρόταση 1.9.6), το x_0 είναι κοινό σημείο τους και η ένωσή τους είναι όλος ο χώρος X. Άρα ο X είναι συνεκτικός δυνάμει τού λήμματος 1.9.8. □

1.9.21 Παραδείγματα. (i) Θεωρούμε εντός τού $\mathbb{R}^2$ (ως προς τη συνήθη τοπολογία) τα ακόλουθα υποσύνολα[37] τού σχήματος 1.8:

$$A := (0,1] \times \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times \mathbf{I} \right), \;\; B := A \cup \{(0,1)\}.$$

[36] Εν προκειμένω, προτιμάται η χρήση τής λέξεως *δρόμος* που αποδίδει τον αντίστοιχο γερμανικό όρο *Weg*. Κατ' αυτόν τον τρόπο έχουμε τη δυνατότητα δομήσεως τού όρου *δρομοσυνεκτικός* στο εδ. 1.9.19 (*wegzusammenhängend* ή *wegweise zusammenhängend*). Αποφεύγεται η αντ' αυτού χρησιμοποίηση τού *κατά μονοπάτια συνεκτικός* (για την απόδοση τού αγγλικού όρου *path connected* ή *pathwise connected*) που θα ήταν μάλλον προβληματική (κυρίως λόγω τού *μακρόσυρτου* τής εν λόγω αποδόσεως).

[37] Το A ονομάζεται **εξ αριστερών ανοικτός χώρος τής χτένας** και το B **διαγραφείς χώρος τής χτένας**.



Σχήμα 1.8.

Το A είναι δρομοσυνεκτικό και, κατ' επέκταση, συνεκτικό. (Βλ. 1.9.20.) Το B (σύμφωνα με την πρόταση 1.9.5) *είναι* συνεκτικό, διότι $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. Ωστόσο, *δεν είναι* δρομοσυνεκτικό, καθότι δεν υφίσταται δρόμος, ο οποίος να συνδέει το $P := (0,1)$ με τα άλλα σημεία τού B. Πράγματι· εάν υποθέσουμε ότι υπάρχει δρόμος $\alpha : \mathbf{I} \longrightarrow B$ με $\alpha(0) = P$ και $\alpha(1) \neq P$, τότε (για να καταλήξουμε σε άτοπο) αρκεί να δείξουμε ότι το $\alpha^{-1}(\{P\})$ είναι ταυτοχρόνως *και κλειστό και ανοικτό* [38]. Επειδή η απεικόνιση α είναι συνεχής και το $\{P\}$ κλειστό, το $\alpha^{-1}(\{P\})$ είναι κλειστό. (Βλ. πρόταση 1.3.2.) Επιπλέον, λόγω τής συνεχείας τής απεικονίσεως α, εάν V είναι μια ανοικτή περιοχή τού P στο $\mathbb{R}^2$ με $V \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = 0\} = \varnothing$ και $t \in \alpha^{-1}(\{P\})$, τότε $\alpha(t) = P$ και υπάρχει μια βασική περιοχή U τού t με $\alpha(U) \subseteq V$. Για να δείξουμε ότι το $\alpha^{-1}(\{P\})$ είναι *και* ανοικτό, αρκεί να δείξουμε ότι $U \subseteq \alpha^{-1}(\{P\})$ (ή, ισοδυνάμως, ότι $\alpha(U) = \{P\}$). Επειδή η συνήθης (σχετική) τοπολογία με την οποία είναι εφοδιασμένο το $\mathbf{I}$ συμπίπτει με τη λεγομένη *τοπολογία διατάξεως* [39], το U (όντας βασικό σύνολο ως προς αυτήν) οφείλει να είναι κάποιο (ανοικτό ή ημιανοικτό) διάστημα (εντός τού $\mathbf{I}$). Επομένως το U είναι ένα συνεκτικό υποσύνολο τού $\mathbf{I}$ και, ως εκ τούτου, η εικόνα του $\alpha(U)$ μέσω τής α ωσαύτως συνεκτική (λόγω τής προτάσεως 1.9.6). Ας υποθέσουμε, από εδώ και στο εξής, ότι υπάρχει κάποιο σημείο $Q \in \alpha(U) \setminus \{P\}$. Τότε $Q = (\frac{1}{n}, y_0) \in B$, για κάποιον $n \in \mathbb{N}$. Επιλέγοντας έναν $r \in \mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύει $\frac{1}{n+1} < r < \frac{1}{n}$, παρατηρούμε ότι

$$\left.\begin{array}{r} \alpha(U) \subseteq B,\ \alpha(U) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = 0\} = \varnothing \\ \alpha(U) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = r\} = \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} \text{είτε } \alpha(U) \subseteq (-\infty, r) \times \mathbb{R} \\ \text{είτε } \alpha(U) \subseteq (r, \infty) \times \mathbb{R} \end{array}\right\}.$$

Επειδή όμως το $\alpha(U)$ είναι συνεκτικό και $P \in (-\infty, r) \times \mathbb{R}$, είναι αδύνατον να περιέχει *και* το σημείο $Q \in (r, \infty) \times \mathbb{R}$. Άτοπο! Άρα όντως $\alpha(U) = \{P\}$.

(ii) Η μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^n$ είναι δρομοσυνεκτική όταν $n \geq 1$. Πράγματι· θεω-

[38] Εάν το σύνολο $\alpha^{-1}(\{P\})$ είναι ταυτοχρόνως και κλειστό και ανοικτό, τότε (επειδή $\alpha^{-1}(\{P\}) \neq \varnothing$) ισχύει $\alpha^{-1}(\{P\}) = \mathbf{I}$ (λόγω τής συνεκτικότητας τού $\mathbf{I}$, βλ. 1.9.3 (i)$\Leftrightarrow$(ii)) ή, ισοδυνάμως, $\alpha(\mathbf{I}) = \{P\}$. Κατά συνέπειαν, η απεικόνιση είναι σταθερή. Άτοπο!

[39] Βλ. Willard [129], Problem 6D.2, σελ. 43.

ρούμε σημεία $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{S}^n$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Εάν $\mathbf{x} \neq -\mathbf{y}$, τότε η απεικόνιση

$$\mathbf{I} \ni t \longmapsto f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(t) := \frac{(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}}{||(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}||} \in \mathbb{S}^n$$

είναι ένας δρόμος συνδέων το $\mathbf{x}$ με το $\mathbf{y}$. (Ο παρονομαστής μηδενίζεται μόνον όταν $\mathbf{x} = -\mathbf{y}$ και $t = \frac{1}{2}$). Εάν $\mathbf{x} = -\mathbf{y}$, επιλέγουμε ένα $\mathbf{z} \in \mathbb{S}^n$ με $\mathbf{z} \neq \mathbf{x}$ και $\mathbf{z} \neq \mathbf{y}$. Τότε η απεικόνιση

$$\mathbf{I} \ni t \longmapsto g(t) := \begin{cases} f_{\mathbf{x},\mathbf{z}}(2t), & \text{όταν } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f_{\mathbf{z},\mathbf{y}}(2t-1), & \text{όταν } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

είναι (και πάλι) ένας δρόμος συνδέων το $\mathbf{x}$ με το $\mathbf{y}$.

1.9.22 Ορισμός. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Επί τού X ορίζουμε τη διμελή σχέση $\underset{\text{δρ/συν.}}{\sim} \subseteq X \times X$ ως ακολούθως:

$$x_1 \underset{\text{δρ/συν.}}{\sim} x_2 \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} [\exists \text{ δρόμος εντός τού } X \text{ συνδέων το } x_1 \text{ με το } x_2].$$

Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι η "$\underset{\text{δρ/συν.}}{\sim}$" αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας. Οι αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας ως προς την "$\underset{\text{δρ/συν.}}{\sim}$" καλούνται **δρομοσυνεκτικές συνιστώσες τού τοπολογικού χώρου** X.

1.9.23 Λήμμα. *Έστω $(A_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια δρομοσυνεκτικών υποσυνόλων (τού υποκειμένου συνόλου) X ενός τοπολογικού χώρου. Εάν $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$, τότε η ένωσή τους $\bigcup_{i \in I} A_i$ είναι δρομοσυνεκτικό υποσύνολο τού X.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω τυχόν $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Εάν $y, z \in \bigcup_{i \in I} A_i$, τότε $y \in A_j$ και $z \in A_k$ για κάποιους δείκτες $j, k \in I$. Επειδή αμφότεροι οι A_j και A_k είναι (εξ υποθέσεως) δρομοσυνεκτικοί, υπάρχουν δρόμοι $\alpha_j : \mathbf{I} \longrightarrow A_j$ και $\alpha_k : \mathbf{I} \longrightarrow A_k$ με $\alpha_j(0) = y$, $\alpha_j(1) = x = \alpha_k(0)$, $\alpha_k(1) = z$. Ο δρόμος[40]

$$\mathbf{I} \ni t \longmapsto \beta_{j,k}(t) := \begin{cases} \alpha_j(2t), & \text{όταν } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \alpha_k(2t-1), & \text{όταν } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

εντός τής ενώσεως $\bigcup_{i \in I} A_i$ συνδέει το y με το z. □

1.9.24 Λήμμα. *Οι δρομοσυνεκτικές συνιστώσες ενός τοπολογικού χώρου X είναι ακριβώς τα μεγιστικά δρομοσυνεκτικά υποσύνολα τού X, ήτοι τα δρομοσυνεκτικά υποσύνολά του τα οποία δεν περιέχονται σε οιοδήποτε μεγαλύτερο δρομοσυνεκτικό υποσύνολο.*

[40]Επειδή οι περιορισμοί $\beta_{j,k}|_{[0,\frac{1}{2}]}$ και $\beta_{j,k}|_{[\frac{1}{2},1]}$ είναι συνεχείς απεικονίσεις, η απεικόνιση $\beta_{j,k}$ είναι καθ' ολοκληρίαν (ήτοι επί ολοκλήρου τού $\mathbf{I}$) συνεχής επί τη βάσει τής προτάσεως 1.4.6.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $x \in X$, C είναι η δρομοσυνεκτική συνιστώσα τού X που περιέχει το x και

$$B := \bigcup \{ E \subseteq X |\, E \text{ δρομοσυνεκτικό και } x \in E \},$$

τότε το B είναι αφ' εαυτού δρομοσυνεκτικό (λόγω τού λήμματος 1.9.23) και, ως εκ τούτου, ένα μεγιστικό δρομοσυνεκτικό υποσύνολο τού X. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι $B = C$. Εάν $y \in B$, τότε αμφότερα τα x, y ανήκουν στο δρομοσυνεκτικό υποσύνολο B, οπότε $y \underset{\text{δρ/συν.}}{\sim} x \Rightarrow y \in C$. Επομένως, $B \subseteq C$. Και αντιστρόφως· εάν $y \in C$, τότε $y \underset{\text{δρ/συν.}}{\sim} x$ και το y ανήκει σε κάποιο δρομοσυνεκτικό υποσύνολο τού X που περιέχει το x. Άρα $y \in B$ και ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός $C \subseteq B$. $\square$

1.9.25 Πρόταση. *Εάν X είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Κάθε δρομοσυνεκτική συνιστώσα τού X περιέχεται σε μία (και μόνον) συνεκτική συνιστώσα τού X και κάθε συνεκτική συνιστώσα τού X είναι μια αποσυνδετή ένωση (κάποιων) δρομοσυνεκτικών συνιστωσών του.*

(ii) *Εάν $A \subseteq X$ είναι δρομοσυνεκτικό υποσύνολο, τότε το A περιέχεται σε μία (και μόνον) δρομοσυνεκτική συνιστώσα τού X.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Έστω A μια δρομοσυνεκτική συνιστώσα τού X. Τότε η A είναι συνεκτικό σύνολο τού X, οπότε περιέχεται σε μία και μόνον συνεκτική συνιστώσα τού X. (Βλ. 1.9.20 και 1.9.15 (ii).) Εξάλλου, επειδή η "$\underset{\text{δρ/συν.}}{\sim}$" είναι σχέση ισοδυναμίας, οι δρομοσυνεκτικές συνιστώσες τού X τον διαμελίζουν, ήτοι $X = \coprod_{j \in J} A_j$, όπου $\{ A_j |\, j \in J\}$ είναι η οικογένεια των δρομοσυνεκτικών συνιστωσών τού X. Έστω C τυχούσα συνεκτική συνιστώσα τού X. Τότε $C = \coprod_{j \in J} A_j \cap C$ (διότι τα $A_j \cap C$ είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους).

(ii) Έστω A ένα δρομοσυνεκτικό υποσύνολο τού X. Επειδή η οικογένεια των δρομοσυνεκτικών συνιστωσών τού X αποτελεί ένα κάλυμμα αυτού, υπάρχει κάποια δρομοσυνεκτική συνιστώσα B με $B \cap A \neq \varnothing$. Σύμφωνα με το λήμμα 1.9.23, η ένωση $B \cup A$ είναι δρομοσυνεκτική. Σύμφωνα με το λήμμα 1.9.24, το B είναι ένα μεγιστικό δρομοσυνεκτικό υποσύνολο τού X, οπότε $B \subseteq B \cup A \Rightarrow B = B \cup A \Rightarrow A \subseteq B$. $\square$

1.9.26 Πρόταση. *Εάν $f : X \longrightarrow Y$ είναι μια συνεχής, επιρριπτική απεικόνιση μεταξύ (των υποκειμένων συνόλων) δυο τοπολογικών χώρων και ο X δρομοσυνεκτικός, τότε και ο Y είναι δρομοσυνεκτικός.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι $y_1, y_2 \in Y$. Προφανώς, $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$, για κάποια $x_1, x_2 \in X$ (αφού η f είναι επιρριπτική). Επειδή ο X είναι δρομοσυνεκτικός, υπάρχει δρόμος $\alpha : \mathbf{I} \longrightarrow X$, τέτοιος ώστε να ισχύει $\alpha(0) = x_1$ και $\alpha(1) = x_2$. Η σύνθεση $f \circ \alpha : \mathbf{I} \longrightarrow Y$ είναι τέτοιος δρόμος, ώστε να ισχύει $f \circ \alpha(0) = y_1$ και $f \circ \alpha(1) = y_2$. Κατά συνέπειαν, ο Y είναι δρομοσυνεκτικός. $\square$

1.9.27 Παρατήρηση. Είναι πρόδηλο μέσω τής προτάσεως 1.9.26 ότι η ιδιότητα τού να είναι ένας τοπολογικός χώρος *δρομοσυνεκτικός* είναι *τοπολογική*. (Εάν X είναι δρομοσυνεκτικός και $X \approx Y$, τότε ο Y είναι ωσαύτως δρομοσυνεκτικός.)

1.9.28 Πρόταση. *Έστω $(X_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια (μη κενών) τοπολογικών χώρων. Ο χώρος γινομένου $\prod_{i \in I} X_i$ είναι δρομοσυνεκτικός εάν και μόνον εάν ο X_i είναι δρομοσυνεκτικός για κάθε $i \in I$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν ο χώρος γινομένου $X := \prod_{i \in I} X_i$ είναι δρομοσυνεκτικός, τότε κάθε X_j είναι δρομοσυνεκτικό όντας η συνεχής εικόνα τού X μέσω τής προβολής pr_j για κάθε $j \in I$. (Βλ. 1.7.2 (i) και 1.9.26.) Και αντιστρόφως· εάν υποθέσουμε ότι ο $X_i \neq \varnothing$ είναι δρομοσυνεκτικός για κάθε $i \in I$, θεωρήσουμε τυχόντα στοιχεία $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ και λάβουμε υπ' οψιν την ύπαρξη δρόμου $\alpha_i : \mathbf{I} \longrightarrow X_i$, τέτοιου ώστε να ισχύει $\alpha_i(0) = x_i$ και $\alpha_i(1) = y_i$ για κάθε $i \in I$, παρατηρούμε ότι ο δρόμος $\mathbf{I} \ni t \longmapsto \alpha(t) := (\alpha_i(t))_{i \in I} \in X$ συνδέει το $(x_i)_{i \in I}$ με το $(y_i)_{i \in I}$. Κατά συνέπειαν, *και* ο X είναι δρομοσυνεκτικός. □

1.9.29 Ορισμός. Λέμε ότι ένας τοπολογικός χώρος X είναι **τοπικά συνεκτικός** (και αντιστοίχως, **τοπικά δρομοσυνεκτικός**) όταν διαθέτει μια βάση αποτελούμενη από συνεκτικά (και αντιστοίχως, από δρομοσυνεκτικά) υποσύνολα.

1.9.30 Πρόταση. *Εάν X είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Εάν ο X είναι τοπικά συνεκτικός, τότε κάθε συνεκτική συνιστώσα τού X είναι ανοικτή.*

(ii) *Εάν ο X είναι τοπικά δρομοσυνεκτικός, τότε κάθε δρομοσυνεκτική συνιστώσα τού X είναι ανοικτή, οι δρομοσυνεκτικές συνιστώσες του ταυτίζονται με τις συνεκτικές συνιστώσες, ενώ ο X είναι συνεκτικός εάν και μόνον εάν είναι δρομοσυνεκτικός.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Εάν ο X είναι τοπικά συνεκτικός, C μια συνεκτική συνιστώσα του και $x \in C$, τότε το x διαθέτει μια συνεκτική περιοχή U η οποία (σύμφωνα με το (ii) τής προτάσεως 1.9.15) οφείλει να ανήκει καθ' ολοκληρίαν στο C. Άρα για κάθε $x \in C$ υπάρχει $U \in \mathcal{U}(x)$, τέτοιο ώστε να ισχύει $U \subseteq C$, κάτι που ισοδυναμεί με το ότι το C είναι ανοικτό. (Βλ. εδ. 1.1.6.)

(ii) Υποθέτουμε ότι ο X είναι τοπικά δρομοσυνεκτικός. Ο πρώτος ισχυρισμός επαληθεύεται όπως και εκείνος τού (i). Έστω τώρα $x \in X$. Εάν C είναι μια συνεκτική συνιστώσα τού X που περιέχει το x και B τυχούσα δρομοσυνεκτική συνιστώσα τού X, τότε (σύμφωνα με το (i) τής προτάσεως 1.9.25) $B \subsetneq C$ και η C γράφεται ως αποσυνδετή ένωση κάποιων δρομοσυνεκτικών συνιστωσών, καθεμιά των οποίων είναι ανοικτή εντός τού X και, κατ' επέκταση, ανοικτή *και* εντός τής C. Εάν η B δεν είναι η μόνη δρομοσυνεκτική συνιστώσα που περιέχεται στην C, τότε $C = B \coprod (C \smallsetminus B)$, κάτι που είναι αδύνατο (διότι το υποσύνολο C είναι συνεκτικό).

Άρα $B = C$ και οι δρομοσυνεκτικές συνιστώσες τού X ταυτίζονται με τις συνεκτικές συνιστώσες. Τέλος, το να είναι ο X συνεκτικός σημαίνει ότι διαθέτει μία και μόνον συνεκτική συνιστώσα: τον εαυτό του. Εάν λοιπόν ο X είναι συνεκτικός, τότε (βάσει των προαναφερθέντων) διαθέτει μία και μόνον *δρομο* συνεκτική συνιστώσα: τον εαυτό του. Επομένως ο X είναι δρομοσυνεκτικός. (Το αντίστροφο έπεται από το θεώρημα 1.9.20.) $\square$

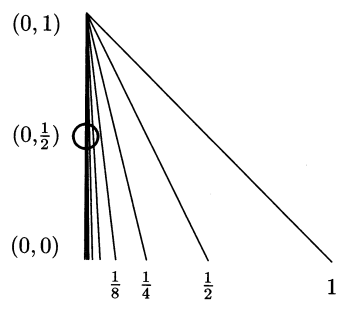
1.9.31 Παραδείγματα. (i) Προφανώς, κάθε τοπικά δρομοσυνεκτικός τοπολογικός χώρος είναι τοπικά συνεκτικός.

(ii) Ένας τοπικά συνεκτικός χώρος μπορεί *να μην είναι* συνεκτικός, όπως, π.χ., κάθε ένωση δύο ή περισσοτέρων ανοικτών (ξένων μεταξύ τους) διαστημάτων εντός τού $\mathbb{R}$ (αφού κάθε σημείο της περιέχεται σε κάποιο εξ αυτών των διαστημάτων, καθένα των οποίων είναι συνεκτικό) ή η ένωση των δύο δίσκων (με κενή τομή) τού σχήματος 1.7 εντός τού $\mathbb{R}^2$.

(iii) Ένας συνεκτικός χώρος μπορεί *να μην είναι* τοπικά συνεκτικός. Π.χ., ο υπόχωρος τού $\mathbb{R}^2$

$$X := \{(0,y) \,|\, 0 \leq y \leq 1\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$$

(τού σχήματος 1.9), όπου $Y_n := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \text{ και } nx + y = 1\}$, είναι συνεκτικός (και μάλιστα και δρομοσυνεκτικός) αλλά δεν είναι τοπικά συνεκτικός.



Σχήμα 1.9.

Πράγματι· *κάθε* περιοχή U τού $(0, \frac{1}{2})$ έχει μη κενή τομή με *απειροπληθή* ευθύγραμμα τμήματα ανήκοντα στο σύνολο $\{Y_n | \, n \in \mathbb{N}\}$. Εάν $(0,1) \notin U$, τότε το U δεν είναι συνεκτικό υποσύνολο τού $\mathbb{R}^2$.

(iv) Υπάρχουν, φυσικά, και τοπολογικοί χώροι που δεν είναι *ούτε* συνεκτικοί *ούτε* τοπικά συνεκτικοί, όπως, π.χ., ο υπόχωρος $\mathbb{Q}$ τού $\mathbb{R}$. (Ως γνωστόν, ο $\mathbb{Q}$ δεν είναι συνεκτικός υπόχωρος τού $\mathbb{R}$. Βλ. 1.9.14 (iv). Επειδή δε οι συνεκτικές του συνιστώσεις, ούσες μονοσύνολα, δεν είναι ανοικτές, ο $\mathbb{Q}$ δεν είναι ούτε τοπικά συνεκτικός υπόχωρος τού $\mathbb{R}$.)

1.10 ΠΗΛΙΚΟΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΤΑΥΤΙΣΜΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

1.10.1 Ορισμός. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και έστω $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ μια σχέση ισοδυναμίας. Θεωρούμε τη φυσική επίρριψη

$$p : X \longrightarrow X/\mathcal{R},\ x \longmapsto p(x) := [x]_{\mathcal{R}},$$

όπου $[x]_{\mathcal{R}} := \{y \in X \,|(x, y) \in \mathcal{R}\}$ είναι η κλάση ισοδυναμίας τού x ως προς την $\mathcal{R}$ και $X/\mathcal{R} := \{[x]_{\mathcal{R}} \,|x \in X\}$. Μέσω αυτής δημιουργείται ο **πηλικόχωρος** $(X/\mathcal{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{R}})$, όπου η **πηλικοτοπολογία** $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{U \in \mathcal{T}_{\mathcal{R}} \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} p^{-1}(U) \in \mathcal{T}.}$$

1.10.2 Παρατήρηση. (i) Η p είναι συνεχής.

(ii) Η p είναι ανοικτή (και αντιστοίχως, κλειστή) εάν και μόνον εάν το σύνολο

$$p^{-1}(p(A)) = \{x \in X \,|[x]_{\mathcal{R}} = [a]_{\mathcal{R}},\ \text{για κάποιο}\ \ a \in A\}$$

είναι ανοικτό (και αντιστοίχως, κλειστό) για κάθε ανοικτό (και αντιστοίχως, κλειστό) υποσύνολο $A \subseteq X$.

(iii) Συνήθως λέμε ότι ο X προκύπτει *κατόπιν συγκολλήσεως* των $\mathcal{R}$-ισοδυνάμων στοιχείων τού X. Είθισται μια τέτοια $\mathcal{R}$ να περιγράφεται μέσω *συστημάτων σχέσεων* (ενώ για τα υπόλοιπα $(x, y) \in \mathcal{R}$ να υπονοείται ότι $[x]_{\mathcal{R}} \neq [y]_{\mathcal{R}}$).

(iv) Εάν $A \subseteq X$ και εάν το $p^{-1}(p(A))$ είναι είτε ανοικτό είτε κλειστό, τότε η σχετική τοπολογία επί τού $p(A)$ ταυτίζεται με την πηλικοτοπολογία επί τού $p^{-1}(p(A))/\mathcal{R}$.

1.10.3 Σημείωση. Κατά την παράθεση συγκεκριμένων παραδειγμάτων πηλικόχωρων άλλοτε ορίζεται διεξοδικώς η $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ και άλλοτε δίδεται κάποιος *διαμελισμός*[41] $\mathfrak{Z}$ τού X και γίνεται μετάβαση στην αντίστοιχη σχέση ισοδυναμίας[42] $\mathcal{R}_{\mathfrak{Z}} \subseteq X \times X$.

1.10.4 Παραδείγματα. (i) Εάν επί τού $X = \mathbf{I}\,(:= [0, 1])$ ορισθεί η σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ ως εξής:

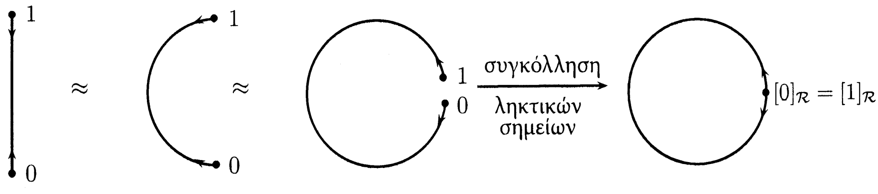
$$(x_1, x_2) \in \mathcal{R} \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} [\text{είτε}\ x_1 = x_2\ \text{είτε}\ \{x_1, x_2\} = \{0, 1\}],$$

[41] Ένα υποσύνολο $\mathfrak{Z}$ τού δυναμοσυνόλου $\mathfrak{P}\,(X)$ τού X ονομάζεται **διαμελισμός τού** X όταν πληρούνται οι ακόλουθες συνθήκες: (i) $B \neq \varnothing,\ \forall B \in \mathfrak{Z}$, (ii) Για $B, B' \in \mathfrak{Z}$ ισχύει η αμφίπλευρη συνεπαγωγή $B \cap B' \neq \varnothing \Leftrightarrow B = B'$, και (iii) $X = \bigcup\{\,B \mid B \in \mathfrak{Z}\}$.

[42] Κάθε διαμελισμός $\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{P}\,(X)$ τού X καθορίζει μια σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}_{\mathfrak{Z}} \subseteq X \times X$ επί τού X ως ακολούθως:

$$(x_1, x_2) \in \mathcal{R}_{\mathfrak{Z}} \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} [\exists B \in \mathfrak{Z} : \text{αμφότερα τα}\ x_1\ \text{και}\ x_2\ \text{ανήκουν στο}\ B].$$

τότε $X/\mathcal{R} = \{[0]_{\mathcal{R}}\} \coprod \{[t]_{\mathcal{R}} : 0 < t < 1\}$. (Βλ. σχήμα 1.10.)

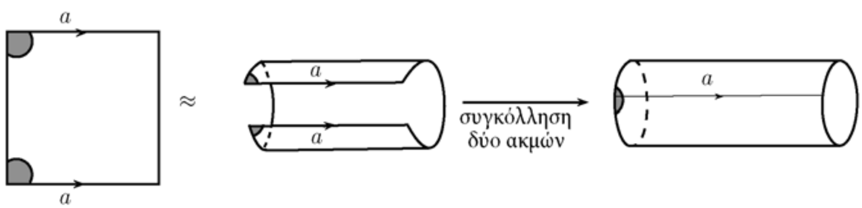


Σχήμα 1.10

Η $f : X/\mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1(\subsetneqq \mathbb{C})$, $[t]_{\mathcal{R}} \longmapsto \exp(2\pi\sqrt{-1}t)$, είναι ομοιομορφισμός[43].
(ii) Επί τού $X = \mathbf{I}^2 = \mathbf{I} \times \mathbf{I}$ ορίζεται μια σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ ως εξής:

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathcal{R} \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} \text{είτε } [x_1 = x_2 \text{ και } y_1 = y_2] \\ \text{είτε } [x_1 = x_2 \text{ και } \{y_1, y_2\} = \{0, 1\}] \end{bmatrix}.$$

Η απεικόνιση $f : \mathbf{I}^2/\mathcal{R} \longrightarrow \mathbf{I} \times \mathbb{S}^1$, $[(s,t)]_{\mathcal{R}} \mapsto (s, \exp(2\pi\sqrt{-1}t))$ είναι ομοιομορφισμός μεταξύ τού $\mathbf{I}^2/\mathcal{R}$ και τού **κυλίνδρου** $\mathbf{I} \times \mathbb{S}^1$ (τού σχήματος 1.11) τού δημιουργούμενου ύστερα από τη συγκόλληση τής άνω και τής κάτω ακμής τού (μοναδιαίου) τετραγώνου $\mathbf{I}^2$.



Σχήμα 1.11

(iii) Επί τού $X = \mathbf{I}^2$ ορίζεται και άλλη μία σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}'$ ως εξής:

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathcal{R}' \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} \text{είτε } [x_1 = x_2 \text{ και } y_1 = y_2] \\ \text{είτε } [x_1 = x_2 \text{ και } \{y_1, y_2\} = \{0, 1\}] \\ \text{είτε } [\{x_1, x_2\} = \{0, 1\} \text{ και } y_1 = y_2] \end{bmatrix}.$$

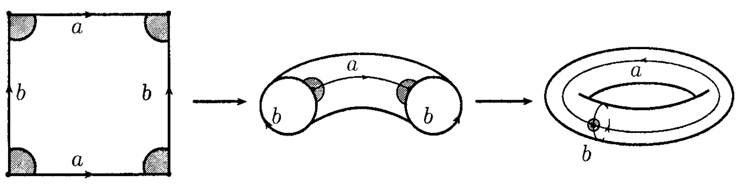
Εν προκειμένω, συγκολλούμε την άνω με την κάτω ακμή και κατόπιν τη δεξιά με την αριστερή ακμή τού $\mathbf{I}^2$. Μέσω τού ομοιομορφισμού

$$f : \mathbf{I}^2/\mathcal{R}' \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \ [(s,t)]_{\mathcal{R}'} \mapsto (\exp(2\pi\sqrt{-1}s), \exp(2\pi\sqrt{-1}t)),$$

[43]Περιοχές των $0, 1 \in I$ συντίθενται για να δομήσουν μια περιοχή τού $f([0]_{\mathcal{R}}) = f([1]_{\mathcal{R}})$.

διαπιστώνουμε ότι ο πηλικόχωρος $\mathbf{I}^2/\mathcal{R}'$ (βλ. σχήμα 1.12) είναι ομοιομορφικός τού (διδιάστατου, μοναδιαίου[44]) **τόρου**[45]

$$\boxed{\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1.}$$

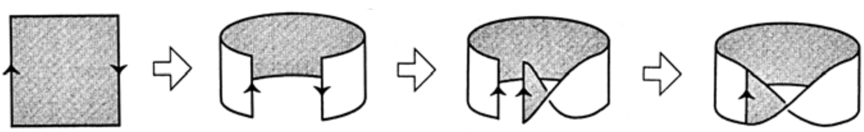


Σχήμα 1.12

(iv) Έστω $X/\mathcal{R}_3$ ο πηλικόχωρος που δημιουργείται μέσω τού διαμελισμού

$$\mathfrak{Z} := \{\{\{(x,y)\} | \, 0 < x < 1, y \in \mathbf{I}\}, \{\{(0,y),(1,1-y)\} | \, y \in \mathbf{I}\}\}$$

τού $X = \mathbf{I}^2$ (ο περιγραφόμενος στο σχήμα 1.13).



Σχήμα 1.13

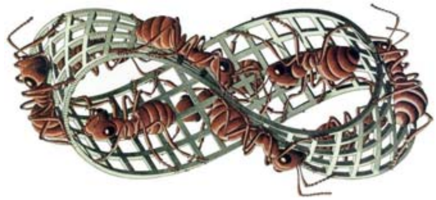
Κάθε τοπολογικός χώρος που είναι ομοιομορφικός αυτού καλείται **ταινία τού Möbius**[46]. Οι παράξενες ιδιότητες των (τόσο εύκολα κατασκευαζόμενων) ταινιών τού Möbius (μόνον μία ακμή, μόνον μία πλευρά, αδυναμία προσανατολισμού) καταπλήσσουν όσους τις συναντούν για πρώτη φορά. Μάλιστα, αντίγραφα τής εικόνας των «εγκάθειρκτων μυρμηγκιών» σε μια τέτοια ταινία (από την πασίγνωστη

[44] Από τούδε και στο εξής, *κάθε* τοπολογικός χώρος που είναι $\approx \mathbb{T}^2$ θα καλείται (διδιάστατος) **τόρος**.

[45] Η λέξη *τόρος* (*torus*), έχει τις ΙΕ ρίζες **tere*/**τέρ-jω*, εξ ου και τα αρχαιοελληνικά ρήματα *τετραίνω* και *τείρω*, απ' όπου παράγονται πάμπολλες λέξεις *και* των νέων Ελληνικών (όπως, π.χ., οι: *διάτορος*, *διάτρητος*, *τρυπώ*, *τρύπα*, *τρυπάνι* (αρχ. *τέρετρον*), *τόρνος*, *τερηδόνα* κ.ά.). Υπό την τεχνική της έννοια (*τορεύς*, *τορευτική*) μαρτυρείται ήδη σε ελευσίνιες και άλλες αττικές επιγραφές τού 5ου αιώνα π.Χ.

[46] Möbius, *August Ferdinand* (17/11/1790-26/9/1868) Γερμανός αστρονόμος και μαθηματικός. Ύστερα από συστάσεις τού C. F. Gauss εξελέγη έκτακτος καθηγητής στο Αστρονομικό Τμήμα τού Πανεπιστημίου τής Λειψίας το 1816. Υπήρξε για δεκαετίες ένας άψογος παιδαγωγός και το σύγγραμμά του περί τού «Βαρυκεντρικού Λογισμού» παρέμεινε ένα απαραίτητο βοήθημα για πολλές γενεές φοιτητών και μετά τον θάνατό του. Η διεξοδική μελέτη τών ιδιοτήτων τής «ταινίας» του έλαβε χώρα γύρω στο 1858 (ενώ την ίδια περίπου εποχή αυτές είχαν ανεξαρτήτως διερευνηθεί και από τον J. B. Listing), παρότι δημοσίευσε τα αποτελέσματά του μόλις το 1865. Το 1844 έγινε τακτικός καθηγητής τού Πανεπιστημίου και το 1848 διευθυντής τού Αστεροσκοπείου τής Λειψίας. Για πιο λεπτομερή βιογραφικά στοιχεία βλ. J. Fauvel, R. Flood & R. Wilson (Eds.), *Möbius and his band*, Oxford University Press, 1993.

ξυλογραφία τού M.C. Escher[47] τού έτους 1963) κοσμούν ακόμη και σήμερα πολλά φοιτητικά δωμάτια. (Βλ. σχήμα 1.14.)

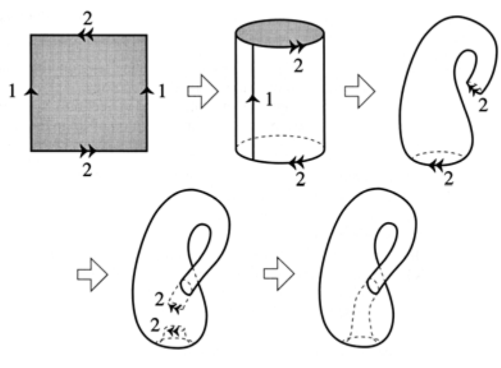


Σχήμα 1.14

(v) Έστω $X/\mathcal{R}_{\mathfrak{Z}'}$ ο πηλικόχωρος που δημιουργείται μέσω τού διαμελισμού

$$\mathfrak{Z}' := \{\{\{(x,y)\}|\, x,y \in (0,1)\}, \{\{(x,0),(1-x,1)\}|\, x \in \mathbf{I}\}, \{\{(0,y),(1,y)\}|\, y \in \mathbf{I}\}\}$$

τού $X = \mathbf{I}^2$. Κάθε τοπολογικός χώρος που είναι ομοιομορφικός αυτού καλείται **φιάλη τού Klein**[48], δεν είναι (τοπολογικώς) εμφυτεύσιμος εντός τού τριδιάστατου ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$ (πρβλ. 1.5.9 (ii)) και για να καταστεί εφικτή μια κάποια οπτικοποιησή του εντός τού $\mathbb{R}^3$ είναι αναγκαίο να επιτραπεί η συμπερίληψη *αυτοδιατομών*.



Σχήμα 1.15

[47]Escher, *Maurits Cornelis* (17/6/1898-27/3/1972). Ολλανδός εικαστικός καλλιτέχνης. Διέπρεψε στο σχέδιο και στη γραφιστική, καθώς και στις τεχνικές τής ξυλογραφίας, τής λιθογραφίας και τής χαλκογραφίας. Χαρακτηριστικό στοιχείο τής τέχνης του υπήρξε η απεικόνιση «αδύνατων» γραφικών παραστάσεων (ανθρώπων, ζώων, αντικειμένων κ.ά.) που δημιουργούν την *ψευδαίσθηση τού απείρου*, δηλαδή τής ατελείωτης δημιουργίας σχεδίων, καθώς και «αδύνατων» παραδοξολογικών κατασκευών (κτήρια κ.ά.). Αυτή η ιδιαιτερότητα των σχεδίων του οφείλετο στη σημαντική επιρροή που δέχθηκε από τα Μαθηματικά, κυρίως δε από προτάσεις και πορίσματα τής Μη Ευκλείδειας και τής Προβολικής Γεωμετρίας. Βλ. D. Schattschneider & M. Emmer (Eds.): *M.C. Escher's Legacy. A Centennial Celebration*, Springer-Verlag, 2003.

[48]Klein, *Christian Felix* (24/4/1849-22/6/1925). Γερμανός μαθηματικός. Ένας από τους μεγαλύτερους γεωμέτρες τού 19ου αιώνα, με πληθώρα σπουδαίων εργασιών και συγγραμμάτων σε διαφόρους μαθηματικούς κλάδους. Διετέλεσε καθηγητής των Πανεπιστημίων Erlangen (1872-1875), TH-Μονάχου (1875-1880), Λειψίας (1880-1886) και Göttingen (1886-1913). Βλ. R. Tobies: *Felix Klein*, Teubner, Leibniz, 1981. Οι ιδιότητες τής «φιάλης» του περιγράφονται ανάγλυφα στη σελίδα 571 τού τρίτου τόμου των «έργων» του [Gesammelte Mathematische Abhandlungen III, Springer, 1922].

Όπως δείχνεται στο σχήμα 1.15, για να κτισθεί η κατά τι «παράδοξη φιάλη» (ως «πρότυπο» τού $X/\mathcal{R}_{3'}$ εντός τού $\mathbb{R}^3$), το πρώτο ήμισυ τής κατασκευής (όσον αφορά στην κατασκευή του κυλίνδρου) παραμένει όπως στο παράδειγμα (ii), αλλά εν συνεχεία τα άκρα τού κυλίνδρου πρέπει να ταυτισθούν στην *αντίθετη* κατεύθυνση. Για να συμβεί αυτό ο κύλινδρος οφείλει να καμφθεί και το ένα άκρο του να ωθηθεί *διαπερνώντας* την πλευρά.

A.F. Möbius

F. Klein

1.10.5 Πρόταση. *Εάν $f : X \longrightarrow Y$ είναι μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ (των υποκειμένων συνόλων) δυο τοπολογικών χώρων, η $\mathcal{R}$ (και αντιστοίχως, η $\mathcal{S}$) μια σχέση ισοδυναμίας επί τού X (και αντιστοίχως, μια σχέση ισοδυναμίας επί τού Y) και η f είναι συμβατή με τις $\mathcal{R}$ και $\mathcal{S}$, δηλαδή για $x, x' \in X$ ισχύει η συνεπαγωγή*

$$[x]_{\mathcal{R}} = [x']_{\mathcal{R}} \Longrightarrow [f(x)]_{\mathcal{S}} = [f(x')]_{\mathcal{S}}, \tag{1.6}$$

τότε ορίζεται καλώς η απεικόνιση

$$\bar{f} : X/\mathcal{R} \longrightarrow Y/\mathcal{S}, \;\; [x]_{\mathcal{R}} \longmapsto \bar{f}([x]_{\mathcal{R}}) := [f(x)]_{\mathcal{S}},$$

η οποία είναι συνεχής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $p_X : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ και $p_Y : Y \longrightarrow Y/\mathcal{S}$ είναι οι φυσικές επιρρίψεις, τότε η $\bar{f}$ είναι καλώς ορισμένη λόγω τής (1.6) και για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$(p_Y \circ f)\,(x) = p_Y(f(x)) = [f(x)]_{\mathcal{S}} = \bar{f}([x]_{\mathcal{R}}) = \bar{f}(p_X(x)) = (\bar{f} \circ p_X)(x),$$

απ' όπου προκύπτει η μεταθετικότητα τού διαγράμματος

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[d, "p_Y"] \\ X/\mathcal{R} \arrow[r, "\bar{f}"'] & Y/\mathcal{S} \end{tikzcd}$$

Επειδή η $p_Y \circ f$ είναι συνεχής (ως σύνθεση συνεχών) και $p_Y \circ f = \bar{f} \circ p_X$, εάν U είναι ένα ανοικτό υποσύνολο τού $Y/\mathcal{S}$, τότε το $(\bar{f} \circ p_X)^{-1}(U) = {p_X}^{-1}(\bar{f}^{-1}(U))$ είναι ανοικτό υποσύνολο τού X, οπότε το $\bar{f}^{-1}(U)$ ανοικτό υποσύνολο τού $X/\mathcal{R}$. Άρα η $\bar{f}$ είναι συνεχής. □

1.10.6 Πόρισμα. *Εάν $f : X \longrightarrow Y$ είναι μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ (των υποκειμένων συνόλων) δυο τοπολογικών χώρων, η $\mathcal{R}$ μια σχέση ισοδυναμίας επί τού X και ισχύει η συνεπαγωγή $[x]_{\mathcal{R}} = [x']_{\mathcal{R}} \Rightarrow f(x) = f(x')$, τότε η*

$$\bar{f} : X/\mathcal{R} \longrightarrow Y, \;\; [x]_{\mathcal{R}} \longmapsto \bar{f}([x]_{\mathcal{R}}) := f(x), \tag{1.7}$$

είναι συνεχής.

1.10.7 Ορισμός. Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μια συνεχής και επιρριπτική απεικόνιση μεταξύ (των υποκειμένων συνόλων) δυο τοπολογικών χώρων. Επί τού X ορίζεται η σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}_f$ ως εξής:

$$(x, x') \in \mathcal{R}_f \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} f(x) = f(x').$$

Η f ονομάζεται **ταυτισμική απεικόνιση** όταν ισχύει μία (και, κατ' επέκταση, και οι τρεις) εκ των κάτωθι ισοδυνάμων συνθηκών:

(i) Η $\bar{f} : X/\mathcal{R}_f \longrightarrow Y$ (όπως στην (1.7)) είναι ομοιομορφισμός.

(ii) Ένα $A \subseteq Y$ είναι ανοικτό (και αντιστοίχως, κλειστό) $\Leftrightarrow$ το $f^{-1}(A) \subseteq X$ είναι ανοικτό (και αντιστοίχως, κλειστό).

(iii) Μια απεικόνιση $g : Y \longrightarrow Z$, όπου Z τυχών τοπολογικός χώρος, είναι συνεχής $\Leftrightarrow$ η σύνθεση $g \circ f : X \longrightarrow Z$ είναι συνεχής.

Εν τοιαύτη περιπτώσει, η τοπολογία επί τού Y είναι *μονοσημάντως ορισμένη* μέσω τής f και τής τοπολογίας επί τού X και καλείται **ταυτισμική τοπολογία ως προς την** f.

1.10.8 Παράδειγμα. Εάν $X = \mathbb{R}$ (με τη συνήθη τοπολογία), $Y = [0, +\infty)$ και $f(x) = x^2$, τότε η ταυτισμική τοπολογία επί τού Y ως προς την f είναι ακριβώς η σχετική τοπολογία.

1.10.9 Πρόταση. (i) *Κάθε συνεχής, επιρριπτική και ανοικτή (και αντιστοίχως, κλειστή) απεικόνιση μεταξύ δυο τοπολογικών χώρων είναι ταυτισμική.*

(ii) *Κάθε συνεχής, επιρριπτική απεικόνιση από έναν συμπαγή τοπολογικό χώρο επί ενός χώρου Hausdorff είναι κλειστή και, κατ' επέκταση, ταυτισμική απεικόνιση.*

(iii) *Εάν η $f : X \longrightarrow Y$ είναι ταυτισμική και η $g : Y \longrightarrow Z$ συνεχής, τότε η $g \circ f$ είναι ταυτισμική $\Leftrightarrow$ η g είναι ταυτισμική.*

(iv) *Εάν η $f : X \longrightarrow Y$ είναι ταυτισμική, το $B \subseteq Y$ ανοικτό (και αντιστοίχως, κλειστό) και $A := f^{-1}(B)$, τότε και η $f|_A : A \longrightarrow B$ είναι ταυτισμική.*

Εν συνεχεία παρατίθενται διάφοροι μέθοδοι κατασκευής *πηλικόχωρων*.

1.10.10 Ορισμός. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος, A ένα υποσύνολο τού X και $D_X := \{(x,x) \,|\, x \in X\}$ η διαγώνιος τού X. Επί τού X ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας $(x_1, x_2) \in \mathcal{R}_A \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow}$ [είτε $x_1 = x_2$ είτε $x_1, x_2 \in A$], ήτοι $\mathcal{R}_A := D_X \cup (A \times A)$. Λέμε ότι ο

$$\boxed{X/A := X/\mathcal{R}_A}$$

είναι **ο πηλικόχωρος ο δημιουργούμενος ύστερα από την ταύτιση όλων των σημείων τού** A (ή **ύστερα από συρρίκνωση τού** A **σε ένα και μόνον σημείο**).

1.10.11 Παραδείγματα. (i) Εάν ορίσουμε την απεικόνιση

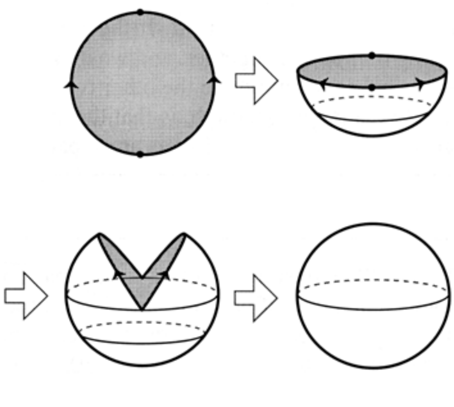
$$\ell_n : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$$

$$\ell_n(tx) := (\cos(\pi(1-t)), x_1 \sin(\pi(1-t)), ..., x_n \sin(\pi(1-t)))$$

για κάθε $t \in \mathbf{I}$ και κάθε $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{S}^{n-1}$ (ταυτίζοντας τη μπάλα $\mathbb{B}^n$ με την ένωση $\bigcup\limits_{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n-1}} \{t\mathbf{x} \,|\, 0 \leq t \leq 1\}$), τότε η ℓ_n είναι συνεχής με $\ell_n(\mathbb{S}^{n-1}) = \{P_+\}$, ενώ η επαγομένη απεικόνιση (1.7)

$$\overline{\ell_n} : \mathbb{B}^n/\mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^n$$

είναι ένας ομοιομορφισμός. Ο τρόπος τής σταδιακής ταυτίσεως των σημείων τού μοναδιαίου κύκλου $\mathbb{S}^1$ τού περιβάλλοντος τον δίσκο $\mathbb{B}^2$ (όταν $n = 2$) για την απόκτηση τής μοναδιαίας σφαίρας $\mathbb{S}^2$ εικονογραφείται στο σχήμα[49] 1.16.

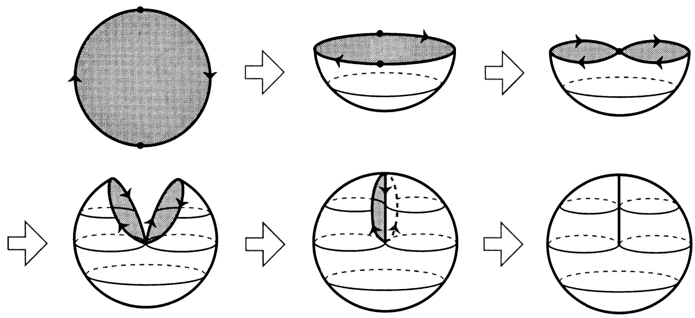


Σχήμα 1.16

Σημειωτέον ότι εάν κάποιος, αντί να συρρικνώσει όλα τα σημεία τού $\mathbb{S}^1$ στον βόρειο πόλο τής $\mathbb{S}^2$ (όπως στο σχήμα 1.16), επιθυμεί να ταυτίσει (ανά δύο) τα *αντιδιαμετρικά* σημεία τού $\mathbb{S}^1$ (τηρώντας, π.χ., την ωρολογιακή φορά για την περιδιάβασή

[49]Η *ομοιότητα* με το κλείσιμο τού φερμουάρ ενός μικρού πορτοφολιού κερμάτων («ψιλών») είναι χαρακτηριστική.

του), ήτοι να μεταβεί στον πηλικόχωρο $\mathbb{B}^2/\mathcal{R}_3$ τον δημιουργούμενο μέσω τού διαμελισμού $\mathfrak{Z} := \big\{\big\{\{\mathbf{x}\}|\,\mathbf{x} \in \mathbb{B}^2 \smallsetminus \mathbb{S}^1\big\}, \big\{\{\mathbf{x}, -\mathbf{x}\}|\,\mathbf{x} \in \mathbb{S}^1\big\}\big\}$ τού μοναδιαίου δίσκου $\mathbb{B}^2$, τότε, όπως συμβαίνει και στην περίπτωση τής φιάλης τού Klein, προκειμένου να καταλήξει σε κάποια οπτικοποίηση τού $\mathbb{B}^2/\mathcal{R}_3$ *εντός τού* $\mathbb{R}^3$, είναι αναγκασμένος να επιτρέψει *την ύπαρξη αυτοδιατομών* και, συκεκριμένα, ένα ολόκληρο ευθύγραμμο τμήμα αυτοδιατομών, όπως δείχνεται στο σχήμα 1.17.



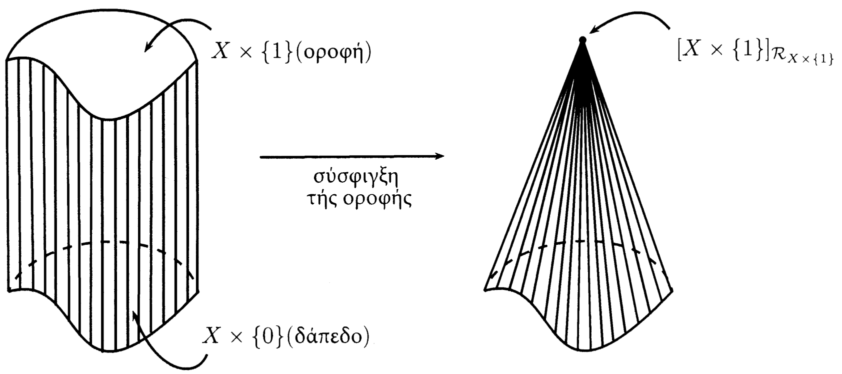
Σχήμα 1.17

Κάθε τοπολογικός χώρος που είναι ομοιομορφικός τού καταληκτικού (εξ όσων παρατίθενται στο σχ. 1.17) καλείται **σταυρωτό διαπέτασμα**[50].

(ii) Εάν X είναι τυχών τοπολογικός χώρος και $\mathrm{cyl}(X) := X \times \mathbf{I}$ ο (μοναδιαίος) **κύλινδρος υπεράνω τού** X (εφοδιασμένος με την τοπολογία γινομένου), τότε ο **κώνος** $\mathrm{cone}(X)$ **υπεράνω τού** X ορίζεται ως ο πηλικόχωρος

$$\boxed{\mathrm{cone}(X) := \mathrm{cyl}(X)/X \times \{1\}.}$$

(Βλ. σχήμα 1.18.)



Σχήμα 1.18

[50]Γερμανιστί *Kreuzhaube* ή *Kreuzkappe*, αγγλιστί *crosscap* και γαλλιστί *anse de deuxième espèce*.

Σημειωτέον ότι η απεικόνιση

$$\mathrm{cone}(\mathbb{S}^n) \longrightarrow \mathbb{B}^{n+1}, \ \ [(\mathbf{x},t)]_{\mathcal{R}_{\mathbb{S}^n\times\{1\}}} \longmapsto (1-t)\mathbf{x},$$

αποτελεί έναν ομοιομορφισμό.

(iii) Εάν $(X_j, \mathcal{T}_j)_{j\in J}$ είναι μια οικογένεια τοπολογικών χώρων και

$$X := \coprod_{j\in J} X_j := \bigcup_{j\in J} X'_j \ \ (\text{με } X'_j := X_j \times \{j\})$$

η **αποσυνδετή ένωση** των μελών τής εν λόγω οικογενείας, τότε επί τού X ορίζεται η τοπολογία $\mathcal{T}$ έχουσα ως βάση της το σύνολο

$$\mathcal{B} = \{U \times \{j\} \mid j \in J, \ U \in \mathcal{T}_j\}.$$

Ο τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ καλείται **τοπολογικό άθροισμα** των X_j, $j \in J$. Αντί τού X γράφουμε συνήθως $\sum_{j\in J} X_j$. (Όταν $J = \{1,2\}$, γράφουμε απλώς $X_1 + X_2$.) Εάν $(X_j, \mathcal{T}_j)_{j\in J}$ είναι μια οικογένεια τοπολογικών χώρων και εάν παγιώσουμε στοιχεία $x_j^\circ \in X_j$ (θεωρώντας τα ως *σημεία αναφοράς* και τους X_j ως *εστιγμένους χώρους,* βλ. εδ. 1.18.13) και υποθέσουμε ότι το μονοσύνολο $\{x_j^\circ\} \subseteq X_j$ είναι κλειστό για κάθε $j \in J$, όπως, π.χ., στην περίπτωση κατά την οποία ο X_j είναι Hausdorff, τότε ορίζουμε **τη μονοσημειακή ένωση των** X_j, $j \in J$, ως τον πηλικόχωρο

$$\boxed{\bigvee_{j\in J} X_j := \sum_{j\in J} X_j / A,}$$

όπου $A := \{x_j^\circ \mid j \in J\}$. (Όταν $J = \{1,...,k\}$, γράφουμε απλώς $X_1 \vee ... \vee X_k$.) Για τη φυσική επίρριψη $p_A : \sum_{j\in J} X_j \longrightarrow \bigvee_{j\in J} X_j$ με

$$p_A(x_j^\circ) = x^\circ := \{[y]_{R_A} : y \in A\}, \, \forall j \in J,$$

ισχύουν τα εξής:

(a) Ο περιορισμός $p_A|_{X_j} : X_j \hookrightarrow \bigvee_{j\in J} X_j$ είναι μια (τοπολογική) εμφύτευση και ο χώρος $\bigvee_{j\in J} X_j$ είναι η ένωση των $p_A(X_j) \approx X_j$ (με $p_A(X_j) \cap p_A(X_{j'}) = \{x^\circ\}$ για $j \neq j'$).

(b) Όταν $J = \{1, 2, ..., n\}$, τότε μέσω συνεχών απεικονίσεων

$$f_j : X_j \longrightarrow X'_j \ \ \text{με } f_j(x_j^\circ) := {x'_j}^\circ, \, \forall j \in J,$$

επάγεται μια συνεχής απεικόνιση:

$$f_1 \vee f_2 \vee ... \vee f_n : X_1 \vee X_2 \vee ... \vee X_n \longrightarrow X'_1 \vee X'_2 \vee ... \vee X'_n$$

$$[x_j]_{\mathcal{R}_A} \longmapsto [f_j(x_j)]_{\mathcal{R}_{A'}}$$

ενώ μέσω συνεχών απεικονίσεων $g_j : X_j \longrightarrow Y$ με $g_j(x_j^\circ) = g_{j'}(x_{j'}^\circ)$ (για οιαδήποτε $j, j' \in J$) επάγεται μια συνεχής απεικόνιση:

$$(g_1, g_2, ..., g_n) : X_1 \vee X_2 \vee ... \vee X_n \longrightarrow Y$$

$$[x_j]_{\mathcal{R}_A} \longmapsto g_j(x_j).$$

(c) Εάν ως $\iota_j : X_j \longrightarrow X_1 \times ... \times X_n$ συμβολίσουμε την ένθεση:

$$x_j \longmapsto (x_1^\circ, ..., x_{j-1}^\circ, x_j, x_{j+1}^\circ, ..., x_n^\circ), \; \forall j \in J,$$

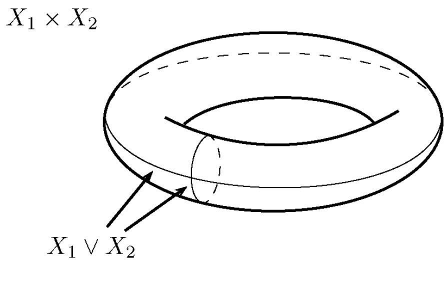
τότε η εικόνα αυτής

$$\Lambda_j := \mathrm{Im}(\iota_j) = \{x_j^\circ\} \times ... \times \{x_{j-1}^\circ\} \times X_j \times \{x_{j+1}^\circ\} \times ... \times \{x_n^\circ\},$$

είναι ο j-οστός «άξονας των συντεταγμένων» (εντός τού $\prod_{j=1}^n X_j$). Εν προκειμένω, η απεικόνιση

$$\boxed{(\iota_1, ..., \iota_n) : \bigvee_{j=1}^{n} X_j \longrightarrow \prod_{j=1}^{n} X_j}$$

στέλνει τον τοπολογικό χώρο $\bigvee_{j=1}^n X_j$ να απεικονισθεί ομοιομορφικώς επί τής ενώσεως $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup ... \cup \Lambda_n$ των «αξόνων συντεταγμένων». (Βλ. σχήμα 1.19 στην περίπτωση όπου $n = 2$ και $X_1 = X_2 = \mathbb{S}^1$.)



Σχήμα 1.19

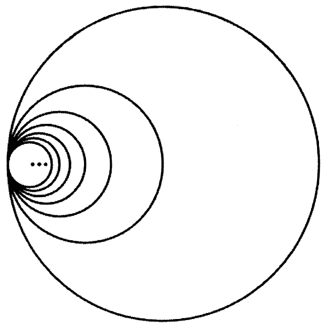
Προσοχή! Τούτο δεν είναι αληθές για *απειροπληθή* σύνολα δεικτών J! Ας θεωρήσουμε, επί παραδείγματι, τη μονοσημειακή ένωση

$$X := \mathbb{S}_1^1 \vee \mathbb{S}_2^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}_j^1 \vee \mathbb{S}_{j+1}^1 \vee \cdots \subsetneqq \mathbb{R}^2$$

απείρων (αριθμήσιμων) σφαιρών $\mathbb{S}_j^1 \approx \mathbb{S}^1$, όπου $x_j^\circ = 1$, $\forall j \in \mathbb{N}\,(=: J)$. Οι περιοχές τού $x^\circ \in X$ είναι τής μορφής $U_1 \cup U_2 \cup ...$, όπου (δίχως βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι) οι U_j είναι κύκλοι περί το 1 εντός τής $\mathbb{S}_j^1$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Ιδιαιτέρως, το $\{x^\circ\}$ δεν διαθέτει καμία συμπαγή περιοχή ούτε κάποια αριθμήσιμη βάση περιοχών. Άρα ο X δεν είναι ούτε τοπικά συμπαγής ούτε μετρικοποιήσιμος. Αντιθέτως ο $\prod_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{S}^1_j$ είναι ένας συμπαγής[51] μετρικός χώρος, κάτι που σημαίνει ότι ο X *δεν μπορεί να εμφυτευθεί εντός τού* $\prod_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{S}^1_j$. Προφανώς, ο X (που θα μπορούσε να εκληφθεί ως το περίγραμμα μιας ροζέτας με *απείρου πλήθους* φύλλα), παρότι ομοιάζει, *δεν είναι ομοιομορφικός* τού υπόχωρου

$$\mathrm{HE} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n,\ C_n := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-\frac{1}{n})^2+y^2=\frac{1}{n^2}\right\} \approx \mathbb{S}^1,$$

τού $\mathbb{R}^2$ (τού σχήματος 1.20) που καλείται **χαβανέζικο σκουλαρίκι**[52],



Σχήμα 1.20

διότι ο HE είναι *συμπαγής* υπόχωρος τού $\mathbb{R}^2$ (καθώς είναι φραγμένος και μπορεί να εκφρασθεί ως τομή κλειστών υποσυνόλων[53] τού $\mathbb{R}^2$, βλ. 1.8.15).

Μια πιο γενικευμένη μέθοδος κατασκευής πηλικόχωρου περιλαμβάνει τη λεγομένη *διαδικασία προσαρτήσεως* ή *συγκολλήσεως χώρων*.

1.10.12 Ορισμός. Ας υποθέσουμε ότι δίδονται δυο τοπολογικοί χώροι X και Y, ένας κλειστός υπόχωρος $A \subseteq X$, καθώς και μια συνεχής απεικόνιση $f : A \longrightarrow Y$. Επί τού τοπολογικού αθροίσματος $X + Y$ ορίζεται μια *σχέση ισοδυναμίας* $\mathcal{R}_{A,f}$ ως ακολούθως:

$$(w,z)\in\mathcal{R}_{A,f} \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ll} \text{είτε } w\notin A\cup f(A) & \text{και } w=z, \\ \text{είτε } w,z\in A & \text{και } f(w)=f(z), \\ \text{είτε } w\in A, z\in f(A) & \text{και } f(w)=z, \\ \text{είτε } z\in A, w\in f(A) & \text{και } w=f(z). \end{array}\right\}$$

[51]Συμπαγής λόγω τού θεωρήματος 1.8.12 τού Tikhonov.

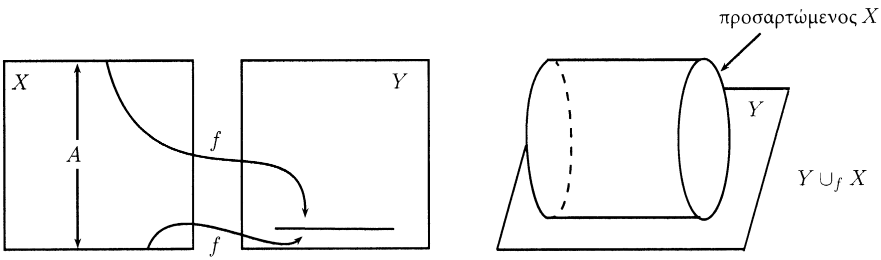
[52]Αγγλιστί *Hawaiian earring*.

[53]Θέτοντας $H_n := B_n \cup (\bigcup_{i=1}^n C_i)$, όπου $B_n := \overline{\overset{\circ}{\mathbb{B}}_{d_{\text{συν.}}}((\frac{1}{n},0);\frac{1}{n})}$, παρατηρούμε ότι το H_n (ως ένωση *πεπερασμένου πλήθους* κλειστών υποσυνόλων τού $\mathbb{R}^2$) είναι κλειστό υποσύνολο τού $\mathbb{R}^2$ και ότι HE$=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n$.

(Ειδικότερα, μέσω τής $\mathcal{R}_{A,f}$ επέρχεται *ταύτιση των* $a, a' \in A$ *όταν* $f(a) = f(a')$. Ωστόσο, οιαδήποτε σαφώς διακεκριμένα σημεία τού Y παραμένουν αμετάβλητα, ήτοι *δεν ταυτίζονται μεταξύ τους* μέσω αυτής.) Λέμε ότι ο

$$\boxed{Y \cup_f X := (X+Y)\,/\mathcal{R}_{f,A}}$$

είναι **ο πηλικόχωρος ο δημιουργούμενος μέσω τής απεικονίσεως** f, **η οποία «προσαρτά» ή «επικολλά» τον** X **στον** Y.



Σχήμα 1.21

1.10.13 Σημείωση. Από όσα προαναφέρθησαν στο εδ. 1.10.2 (iv) προκύπτουν για τη φυσική επίρριψη $p : X+Y \longrightarrow Y \cup_f X$ τα ακόλουθα:

(i) Ο περιορισμός $p|_Y : Y \longrightarrow Y \cup_f X$ αποτελεί μια (τοπολογική) εμφύτευση (οπότε κανείς μπορεί να εκλαμβάνει το $Y \approx p(Y)$ ως κλειστό υπόχωρο τού $Y \cup_f X$.)

(ii) Ο περιορισμός $p|_X : X \longrightarrow Y \cup_f X$ απεικονίζει το $X \smallsetminus A$ ομοιομορφικώς επί τού $(Y \cup_f X) \smallsetminus Y$.

(iii) Λόγω των (i) και (ii) ο $Y \cup_f X$ απαρτίζεται από δύο τμήματα: Το πρώτο είναι ομοιομορφικό τού $X \smallsetminus A$ και το δεύτερο ομοιομορφικό τού Y. Το τι υφής είναι ο τοπολογικός χώρος $Y \cup_f X$ εκεί που τα δύο αυτά τμήματα συναντώνται *εξαρτάται από την απεικόνιση συγκολλήσεως* f.

1.10.14 Παρατήρηση. Αξίζει να επισημανθεί το ποιος είναι ο $Y \cup_f X$ σε τρεις *ειδικές περιπτώσεις*:

(i) Εάν $X \supseteq A \xrightarrow{f} Y = \{\text{ένα σημείο}\}$, τότε $Y \cup_f X = X/A$. (Βλ. εδ. 1.10.10.)

(ii) Εάν $X \supseteq A = \{\text{ένα σημείο}\} \xrightarrow{f} Y$, τότε $Y \cup_f X = X \vee Y$.

(iii) Εάν $X \supseteq A \xrightarrow{f} Y$ είναι τέτοια, ώστε να ισχύει $f(A) = \{\text{ένα σημείο}\}$, τότε έχουμε $Y \cup_f X = (X/A) \vee Y$.

Ένας τρόπος κατασκευής συνεχών απεικονίσεων επί τού $Y \cup_f X$ υποδεικνύεται από την εξής:

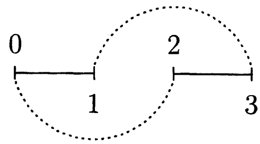
1.10.15 Πρόταση. *Ας υποθέσουμε ότι δίδονται τοπολογικοί χώροι X, Y και Z, ένας κλειστός υπόχωρος $A \subseteq X$ και συνεχείς απεικονίσεις*

$$X \supseteq A \xrightarrow{f} Y,\ \varphi : X \longrightarrow Z \text{ και } \psi : Y \longrightarrow Z \text{ με } \quad \varphi|_A = \psi \circ f.$$

Εάν η $\varphi + \psi : X + Y \longrightarrow Z$ είναι η απεικόνιση που ταυτίζεται με την φ επί τού X και με την ψ επί τού Y, τότε η σύνθεση[54] $(\varphi + \psi) \circ p^{-1} : Y \cup_f X \longrightarrow Z$ *είναι καλώς ορισμένη και συνεχής.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται άμεσα από το πόρισμα 1.10.6. □

1.10.16 Παραδείγματα. (i) Εάν $X = A = \mathbf{I}$, $Y = [2,3]$ και $f(0) = 2$, $f(1) = 3$, τότε $Y \cup_f X \approx \mathbb{S}^1$. (Βλ. σχήμα 1.22.)



Σχήμα 1.22

(ii) Εάν $X = \mathbb{B}^2 \supsetneqq \mathbb{S}^1 = A$ και $Y = \{(2,2)\}$ με $f(x,y) = (2,2)$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{B}^2$, τότε έχουμε $Y \cup_f X = X/A = \mathbb{B}^2/\mathbb{S}^1 \approx \mathbb{S}^2$. (Πρβλ. 1.10.11.)

(iii) Εάν $X = \mathbf{I}^2$, $A = \{\,(x,y) \in \mathbf{I}^2 \,|\, x \in \{0,1\}\}$, $Y = \mathbf{I}$ και $f : A \longrightarrow Y$ η απεικόνιση η οριζόμενη από τον τύπο

$$(x,y) \longmapsto f(x,y) := \begin{cases} y, & \text{όταν } x = 0, \\ 1 - y, & \text{όταν } x = 1, \end{cases}$$

τότε ο $Y \cup_f X$ είναι μια ταινία τού Möbius.

[54] Για κάθε $w \in Y \cup_f X \,(= (X+Y)\,/\mathcal{R}_{f,A})$ η ίνα $(\varphi+\psi)\,(p^{-1}(\{w\}))$ αποτελείται από ένα και μόνον σημείο. Αυτό ισούται με το $\overline{\varphi + \psi}(w)$ (όπως στην (1.7)).