Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών και Εφ. Μαθ. **Άλγεβρα Ι (ΜΕΜ 221)**

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021, Εξέταση Ιανουαρίου **Εξεταστής: Δημήτριος Νταής**

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο (i) Έστω $p > 5$ ένας πρώτος αριθμός. Να αποδειχθεί ότι ισχύει η ισοτιμία $p^8 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 240)$. **[1 μονάδα.]**

(ii) Για την ακολουθία

$$u_n := 2^n + 3^n + 6^n - 1, \ \ n \in \mathbb{N},$$

να προσδιορισθεί το σύνολο $\mathcal{A} := \{k \in \mathbb{N} \mid \text{μκδ}(u_n, k) = 1, \forall n \in \mathbb{N}\}$. **[1,5 μονάδα.]**

ΘΕΜΑ 2ο (i) Έστω ότι n, m είναι δυο φυσικοί αριθμοί ≥ 2 με $m \mid n$. Εάν

$$H(n,m) := \left\{ [k]_n \in \mathbb{Z}_n^{\times} \mid [k]_m = [1]_m \right\},$$

να αποδειχθεί ότι $H(n,m) \sqsubseteq \mathbb{Z}_n^{\times}$ και ότι $\mathbb{Z}_n^{\times}/H(n,m) \cong \mathbb{Z}_m^{\times}$. **[1,5 μονάδα.]**

(ii) Να αποδειχθεί ότι $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5^{\times} \cong \mathbb{Z}_{20}$. **[1 μονάδα.]**

ΘΕΜΑ 3ο Έστω $\mathbf{D}_6 = \langle \alpha, \beta \rangle \sqsubset \mathfrak{S}_{\mathcal{E}_6}$ η διεδρική ομάδα τάξεως 12 (όπου $\mathcal{E}_6 := \left\langle \exp(\frac{\pi i}{3}) \right\rangle \sqsubset \mathbb{S}^1$, $\mathcal{E}_6 \ni z \overset{\alpha}{\longmapsto} \overline{z} \in \mathcal{E}_6$ ο κατοπτρισμός ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών και $\mathcal{E}_6 \ni z \overset{\beta}{\longmapsto} \exp(\frac{\pi i}{3}) z \in \mathcal{E}_6$ η στροφή κατά $\frac{\pi}{3}$ περί το $0 \in \mathbb{C}$). Να προσδιορισθούν οι υποομάδες τής $\mathbf{D}_6$ και να σχεδιασθεί το διάγραμμα τού Hasse για τον σύνδεσμο $(\mathbf{Subg}(\mathbf{D}_6), \sqsubseteq)$. **[2,5 μονάδες.]**

ΘΕΜΑ 4ο Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο και έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Εάν υποτεθεί ότι $\mathfrak{m}_1, ..., \mathfrak{m}_n$ είναι n μεγιστικά ιδεώδη τού R με $\mathfrak{m}_i \neq \mathfrak{m}_j$ για οιουσδήποτε $i, j \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j$, να αποδειχθούν τα εξής:

(i) $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 = R$. **[0,2 μονάδες]**

(ii) $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2$. **[0,2 μονάδες]**

(iii) $(\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_{n-1}) + \mathfrak{m}_n = R$. **[0,2 μονάδες]**

(iv) $\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n$. **[0,2 μονάδες]**

Εν συνεχεία, υποτιθεμένου ότι ο R είναι μια απειροπληθής ακεραία περιοχή έχουσα πεπερασμένου πλήθους αντιστρέψιμα στοιχεία, να αποδειχθούν και τα ακόλουθα:

(v) Το $J = \{a \in R \mid a^m = 0 \ \text{για κάποιον θετικό ακέραιο} \ m\}$ ισούται με το τετριμμένο ιδεώδες $\{0_R\}$ τού R. **[0,2 μονάδες]**

(vi) Ο R διαθέτει άπειρα σαφώς διακεκριμένα μεγιστικά ιδεώδη. [1 **μονάδα**]

(vii) Στην ειδική περίπτωση όπου $R = \mathbb{Z}$, από το (vi) εξάγεται μια (επιπρόσθετη) απόδειξη για το ότι το σύνολο των πρώτων αριθμών είναι άπειρο. **[0,5 μονάδες]**

ΘΕΜΑ 5ο (i) Ποια είναι τα τριτοβάθμια μονικά πολυώνυμα

$$\varphi(\mathsf{X}) = \mathsf{X}^3 + a\mathsf{X}^2 + b\mathsf{X} + c \in \mathbb{Q}[\mathsf{X}],$$

τα οποία έχουν τα a, b, c ως θέσεις μηδενισμού τους; **[1 μονάδα.]**

(ii) Έστω ρ ένας φυσικός αριθμός ≥ 2 και έστω

$$\xi := \left(\rho + \sqrt{\rho^2 - 1}\right)^{2021} + \left(\rho - \sqrt{\rho^2 - 1}\right)^{2021}.$$

Να αποδειχθεί ότι $\xi \in \mathbb{Z}$ και ότι $2\rho \mid \xi$. **[1,5 μονάδα.]**

<u>ΘΕΜΑ 6ο</u> (i) Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο $\varphi(\mathsf{X}) \in \mathbb{Z}[\mathsf{X}]$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\varphi(\mathsf{X})^3 - \varphi(\mathsf{X}) + 2 = \psi(\mathsf{X})\left(\mathsf{X}^4 - 7\right)$$

για κάποιο $\psi(\mathsf{X}) \in \mathbb{Z}[\mathsf{X}]$. **[1 μονάδα.]**

(ii) Να αποδειχθεί ότι ο πηλικοδακτύλιος $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]/\left\langle 7, 4-\sqrt{-5}\right\rangle$ είναι ισόμορφος με το σώμα $\mathbb{Z}_7$. **[1,5 μονάδα.]**

- **Να απαντηθούν το πολύ 4 θέματα. (Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει 2,5 μονάδες.)**
- **Η χρησιμοποίηση των σημειώσεων τού διδάξαντος ή/και των βιβλίων που διενεμήθησαν για την παρακολούθηση τού μαθήματος είναι επιτρεπτή.**
- **Εντός των γραπτών οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν. Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).**
- **Για την εξέταση θα τηρηθούν οι (λοιποί) όροι διεξαγωγής της που έχουν περιγραφεί στην ανακοίνωση τής 30ης/12/2020.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!