Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών και Εφ. Μαθ. **Άλγεβρα Ι (ΜΕΜ 221)**

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21, Εξέταση Αυγούστου 2021 **Εξεταστής: Δημήτριος Νταής**

ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Κάθε υποομάδα τής $(\mathbb{Z},+)$ είναι κυκλική, και μάλιστα τής μορφής $(d\,\mathbb{Z},+)$, για κάποιον μη αρνητικό ακέραιο αριθμό d. **[1,5 μονάδα]**

(ii) Κάθε υποομάδα μιας κυκλικής ομάδας είναι κυκλική. **[0,5 μονάδα]**

ΘΕΜΑ 2ο Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί *το θεώρημα τού Cayley*. **[2 μονάδες]**

ΘΕΜΑ 3ο (i) Να αποδειχθεί ότι κάθε ακεραία περιοχή R, η οποία διαθέτει μόνον έναν πεπερασμένο αριθμό ιδεωδών, είναι σώμα. **[1 μονάδα]**

(ii) Να διατυπωθούν το πρώτο και το δεύτερο *θεώρημα ισομορφισμών δακτυλίων*, και να αποδειχθεί το δεύτερο. **[1 μονάδα]**

ΘΕΜΑ 4ο Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί *το θεώρημα βάσεως τού Hilbert*. **[2 μονάδες]**

ΘΕΜΑ 5ο (i) Να γραφούν *οι τύποι τού Vieta* και να αποδειχθεί η ισχύς τους. **[1 μονάδα]**

(ii) Να διατυπωθεί το *θεμελιώδες θεώρημα τής Άλγεβρας* και να αποδειχθεί μέσω τής χρήσεως αυτού ότι κάθε πολυώνυμο $\varphi(\mathsf{X}) \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$ περιττού βαθμού διαθέτει (τουλάχιστον) μία πραγματική θέση μηδενισμού. **[1 μονάδα]**

ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΘΕΜΑ 6ο (i) Εάν p είναι ένας πρώτος αριθμός με $p > 5$, να αποδειχθεί ότι ισχύει $1920 \mid p^4 - 10p^2 + 9$. **[1 μονάδα]**

(ii) Οι τελευταίες τρεις εμφανίσεις τού *κομήτη τού Halley* έλαβαν χώρα κατά τα έτη 1835, 1910 και 1986. Η επόμενη εμφάνισή του αναμένεται τον Ιούλιο τού 2061. Να αποδειχθεί η ισχύς τής ακόλουθης σχετικής ισοτιμίας:

$$1835^{1910} + 1986^{2061} \equiv 0 \pmod 7.$$

[1 μονάδα]

ΘΕΜΑ 7ο Για την πολλαπλασιαστική ομάδα $(\mathbb{Z}_{25}^{\times},\cdot)$ να προσδιορισθούν:

(i) όλες οι υποομάδες της **[1 μονάδα]** και

(ii) το πλήθος των στοιχείων της που έχουν τάξη m, για όλους τους διαιρέτες $m \in \mathbb{N}$ τής $\left|\mathbb{Z}_{25}^{\times}\right|$. **[1 μονάδα]**

ΘΕΜΑ 8ο (i) Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, και έστω $\mathbf{D}_n$ η n-οστή *διεδρική ομάδα* (τάξεως $|\mathbf{D}_n| = 2n$). Να αποδειχθεί ότι $G_1 \cong \mathbf{D}_n \cong G_2$, όπου

$$G_1 := \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta_n & 0 \\ 0 & \zeta_n^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle \sqsubseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

(με $\zeta_n := \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$) και

$$G_2 := \left\{ \left. \begin{pmatrix} [\varepsilon]_n & [\lambda]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix} \right| \varepsilon \in \{\pm 1\}\,,\ \lambda \in \mathbb{Z} \right\} \sqsubseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_n).$$

[2 μονάδες]

<u>ΘΕΜΑ 9ο</u> (i) Έστω R ένας μη τετριμμένος δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Υποτιθεμένου ότι $r^6 = r$, $\forall r \in R$, να αποδειχθεί ότι $r^2 = r$, $\forall r \in R$. **[1 μονάδα]**

(ii) Εάν

$$R_k := \left\{ \left(\begin{array}{cc} x & y \\ -ky & x+2y \end{array} \right) \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\},\ k \in \mathbb{R},$$

να αποδειχθεί ότι το R_k είναι μεταθετικός υποδακτύλιος τού $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ για κάθε $k \in \mathbb{R}$ και να προσδιορισθούν οι τιμές τού k για τις οποίες ο R_k είναι σώμα. **[1 μονάδα]**

<u>ΘΕΜΑ 10ο</u> (i) Υπάρχει $a \in \mathbb{Z}$, τέτοιο ώστε το πολυώνυμο $\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^4 + [a]_5\,\mathsf{X} + [1]_5$ να είναι ανάγωγο εντός τού $\mathbb{Z}_5[\mathsf{X}]$; **[1 μονάδα]**

(ii) Να προσδιορισθεί η διάσπαση τού

$$\frac{1}{\mathsf{X}^8 + \mathsf{X}^7 - \mathsf{X}^4 - \mathsf{X}^3} \in \mathbb{R}(\mathsf{X})$$

σε απλά πολυωνυμικά κλάσματα. **[1 μονάδα]**

- **Να απαντηθούν το πολύ 3 θέματα ανήκοντα σε μία εκ των δύο παρατιθέμενων κατηγοριών θεμάτων και το πολύ 2 θέματα ανήκοντα στην άλλη. (Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει 2 μονάδες.)**

- **Η εξέταση χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος της οι εξεταζόμενοι δίδουν τις απαντήσεις μόνον στα θεωρητικά θέματα τής επιλογής τους (από τα 1-5), χωρίς να χρησιμοποιούν σημειώσεις ή βιβλία. Ύστερα από την αποπεράτωση αυτής τής διαδικασίας παραδίδουν τις κόλλες τους στον επιτηρητή και (προκειμένου να μεταβούν στο δεύτερο μέρος τής εξετάσεως) λαμβάνουν άλλες κόλλες.**

- **Στο δεύτερο μέρος οι εξεταζόμενοι δίδουν τις απαντήσεις μόνον στα θέματα τής επιλογής τους (από τα 6-10) που σχετίζονται με τις εφαρμογές, έχοντας εκ παραλλήλου τη δυνατότητα χρησιμοποιήσεως των σημειώσεων τού διδάξαντος ή/και των βιβλίων που διενεμήθησαν για την παρακολούθηση τού μαθήματος.**

- **Εντός των γραπτών οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν. Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού). Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, χρήση κινητών τηλεφώνων ή άλλων ηλεκτρονικών συσκευών, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!