Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών και Εφ. Μαθ. **Άλγεβρα Ι (ΜΕΜ 221)**

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21, Εξέταση Αυγούστου 2021 **Εξεταστής: Δημήτριος Νταής**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΟΘΕΝΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο Βλ. πρόταση 3.3.19 (από τις σημειώσεις παραδόσεων τού διδάξαντος).

ΘΕΜΑ 2ο Βλ. το *θεώρημα* 4.5.1 *τού Cayley*.

ΘΕΜΑ 3ο (i) Βλ. πρόταση 7.3.5.

(ii) Βλ. εδάφια 8.3.3 και 8.3.16.

ΘΕΜΑ 4ο Βλ. το *θεώρημα βάσεως τού Hilbert* 9.1.15.

ΘΕΜΑ 5ο (i) Βλ. θεώρημα 10.4.7 περί των τύπων *τού Viete*.

(ii) Βλ. θεώρημα 10.4.19 και πρόταση 10.5.2.

ΘΕΜΑ 6ο (i) Έστω p ένας πρώτος αριθμός με $p > 5$. Προφανώς, $1920 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5$ και

$$p^4 - 10p^2 + 9 = (p^2 - 1)(p^2 - 9).$$

Επειδή $3 \nmid p$ έχουμε $3 \mid p - 1$ ή $3 \mid p + 1$ (διότι οι $p-1, p, p+1$ είναι διαδοχικοί), οπότε

$$3 \mid (p-1)\,(p+1) = p^2 - 1 \Longrightarrow 3 \mid p^4 - 10p^2 + 9. \tag{1}$$

Επιπροσθέτως, επειδή $5 \nmid p$, το μικρό θεώρημα τού Fermat (βλ. εδ. 2.4.13 και 5.1.31) μας πληροφορεί ότι

$$p^{5-1} = p^4 \equiv 1 \pmod 5 \Longrightarrow p^4 - 10p^2 + 9 \equiv 1 - 0 \cdot p^2 - 1 \equiv 0 \pmod 5 \Longrightarrow 5 \mid p^4 - 10p^2 + 9. \tag{2}$$

Τέλος, επειδή ο p είναι περιττός, $p = 2k + 1$ για κάποιον φυσικό αριθμό $k \geq 2$. Αυτό σημαίνει ότι

$$p^4 - 10p^2 + 9 = 16(k-1)k(k+1)(k+2).$$

Ο δεύτερος παράγοντας είναι το γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών αριθμών, οπότε αυτοί θα ανήκουν στο σύνολο $\{4n, 4n+1, 4n+2, 4n+3\}$, για κάποιον φυσικό αριθμό n (όχι κατ' ανάγκην με αυτή τη διάταξη). Το γινόμενο των δύο αρτίων εξ αυτών

$$4n(4n+2) = 16n^2 + 8n$$

είναι πολλαπλάσιο τού 8. Επομένως,

$$16 \cdot 8 = 2^7 \mid p^4 - 10p^2 + 9. \tag{3}$$

Από τις (1), (2), (3) και το πόρισμα 2.3.19 έπεται ότι

$$1920 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5 \mid p^4 - 10p^2 + 9.$$

(ii) Επειδή $7 \nmid 1835$ και $7 \nmid 1986$ το μικρό θεώρημα τού Fermat (βλ. εδ. 2.4.13 και 5.1.31) μας πληροφορεί ότι

$$1835^{7-1} = 1835^6 \equiv 1 \pmod 7, \quad 1986^{7-1} = 1986^6 \equiv 1 \pmod 7.$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι

$$1910 = 318 \cdot 6 + 2, \qquad 2061 = 343 \cdot 6 + 3,$$
$$1835 = 262 \cdot 7 + 1, \qquad 1986 = 283 \cdot 7 + 5,$$

και $5^3 = 125 = 17 \cdot 7 + 6$, συμπεραίνουμε ότι

$$1835^{1910} + 1986^{2061} = 1835^{318\cdot 6+2} + 1986^{343\cdot 6+3} \equiv 1^{318} \cdot 1835^2 + 1^{343} \cdot 1986^3$$
$$= 1835^2 + 1986^3 \equiv 1^2 + 5^3 \equiv 1 + 6 \equiv 0 \,(\operatorname{mod} 7).$$

<u>ΘΕΜΑ 7ο</u> Προφανώς,

$$\mathbb{Z}_{25}^{\times} = \left\{ \begin{array}{c} [1]_{25}\,, [2]_{25}\,, [3]_{25}\,, [4]_{25}\,, [6]_{25}\,, [7]_{25}\,, [8]_{25}\,, [9]_{25}\,, [11]_{25}\,, [12]_{25}\,, \\ [13]_{25}\,, [14]_{25}\,, [16]_{25}\,, [17]_{25}\,, [18]_{25}\,, [19]_{25}\,, [21]_{25}\,, [22]_{25}\,, [23]_{25}\,, [24]_{25} \end{array} \right\}$$

με $\left|\mathbb{Z}_{25}^{\times}\right| = \phi(5^2) = 5^2 - 5 = 20$ (όπου ϕ η συνάρτηση φι τού Euler) και $2^0 \equiv 1(\operatorname{mod} 25)$,

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$2^j \equiv ?(\operatorname{mod} 25)$	2	4	8	16	7	14	3	6	12	24	23	21

j	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$2^j \equiv ?(\operatorname{mod} 25)$	17	9	18	11	22	19	13	1	2	4	8	16

απ' όπου έπεται ότι

$$\mathbb{Z}_{25}^{\times} = \left\langle [2]_{25} \right\rangle = \left\{ [1]_{25} \right\} \cup \left\{ ([2]_{25})^k \;\middle|\; 1 \leq k < 20 \right\},$$

ήτοι ότι η πολλαπλασιαστική ομάδα $(\mathbb{Z}_{25}^{\times}, \cdot)$ είναι *κυκλική*, έχουσα το $[2]_{25}$ ως έναν γεννήτορά της.

(i) Έχοντας προσδιορίσει έναν γεννήτορα τής $\mathbb{Z}_{25}^{\times}$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το πόρισμα 3.4.23 και να αποφανθούμε περί των υποομάδων τής $\mathbb{Z}_{25}^{\times}$. Αυτές είναι οι εξής έξι κυκλικές υποομάδες:

$$\left\{ \begin{array}{c} H_1 = \left\langle [2]_{25} \right\rangle = \mathbb{Z}_{25}^{\times}, \;\; H_2 = \left\langle ([2]_{25})^2 \right\rangle = \left\langle [4]_{25} \right\rangle, \;\; H_3 = \left\langle ([2]_{25})^4 \right\rangle = \left\langle [16]_{25} \right\rangle, \\ H_4 = \left\langle ([2]_{25})^5 \right\rangle = \left\langle [7]_{25} \right\rangle, \;\; H_5 = \left\langle ([2]_{25})^{10} \right\rangle = \left\langle [-1]_{25} \right\rangle, \;\; H_6 = \left\{ [1]_{25} \right\}. \end{array} \right\}$$

που αντιστοιχούν στους θετικούς ακεραίους διαιρέτες $(1, 2, 4, 5, 10$ και $20)$ τού αριθμού 20.

(ii) Προφανώς, το μόνο στοιχείο τής $\mathbb{Z}_{25}^{\times}$ που έχει τάξη 1 είναι το ουδέτερο στοιχείο της $[1]_{25}$. Κατά το πόρισμα 3.4.23 το πλήθος των γεννητόρων (ήτοι των στοιχείων τάξεως 20) τής $\mathbb{Z}_{25}^{\times}$ ισούται με

$$\phi(\left|\mathbb{Z}_{25}^{\times}\right|) = \phi\,(20) = \phi(4)\phi(5) = 2 \cdot 4 = 8.$$

Αυτοί οι γεννήτορες είναι τής μορφής $([2]_{25})^k$, όπου $1 \leq k < 20$ και μκδ$(k, 20) = 1$, ήτοι οι

$$\left\{ \begin{array}{c} ([2]_{25})^1 = [2]_{25}\,, \; ([2]_{25})^3 = [8]_{25}\,, \; ([2]_{25})^7 = [3]_{25}\,, \; ([2]_{25})^9 = [12]_{25}\,, \\ ([2]_{25})^{11} = [23]_{25}\,, \; ([2]_{25})^{13} = [17]_{25}\,, \; ([2]_{25})^{17} = [22]_{25}\,, \; ([2]_{25})^{19} = [13]_{25}\,. \end{array} \right\}$$

Τα λοιπά στοιχεία τής $\mathbb{Z}_{25}^{\times}$ είναι τα 11 στοιχεία τής μορφής $([2]_{25})^k$, όπου $1 \leq k < 20$ και μκδ$(k, 20) > 1$. Επειδή καθένα εξ αυτών έχει τάξη $m \in \{2, 4, 5, 10\}$ και παράγει μια κυκλική υποομάδα τής $\mathbb{Z}_{25}^{\times}$ τής ιδίας τάξεως, και (κατά το πόρισμα 3.4.14)

$$\operatorname{ord}(([2]_{25})^k) = m \Longleftrightarrow \text{μκδ}(k, m) = 1,$$

η $\mathbb{Z}_{25}^{\times}$ περιέχει ακριβώς $\phi(2) = 1$ στοιχείο τάξεως 2, $\phi(4) = 2$ στοιχεία τάξεως 4, $\phi(5) = 4$ στοιχεία τάξεως 5 και $\phi(10) = 4$ στοιχεία τάξεως 10.

ΘΕΜΑ 8ο Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, και έστω

$$G_1 := \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta_n & 0 \\ 0 & \zeta_n^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle \sqsubseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

(με $\zeta_n := \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$). Προφανώς,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{ord}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Επιπροσθέτως,

$$\begin{pmatrix} \zeta_n & 0 \\ 0 & \zeta_n^{-1} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \zeta_n^n & 0 \\ 0 & \zeta_n^{-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{ord}\begin{pmatrix} \zeta_n & 0 \\ 0 & \zeta_n^{-1} \end{pmatrix} \leq n.$$

Εάν $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, τότε $\zeta_n^k \neq 1$, διότι $\nexists \nu \in \mathbb{Z}$ με $k = \nu n$. Άρα η τάξη τού εν λόγω στοιχείου είναι *ακριβώ*ς ίση με n. Επειδή

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \zeta_n & 0 \\ 0 & \zeta_n^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \zeta_n \\ \zeta_n^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_n^{-1} & 0 \\ 0 & \zeta_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_n & 0 \\ 0 & \zeta_n^{-1} \end{pmatrix}^{-1}, \end{aligned}$$

και η G_1 είναι μη αβελιανή, η πρόταση 4.4.7 μας πληροφορεί ότι $|G_1| = 2n$ και ότι η απεικόνιση

$$G_1 \ni \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^j \begin{pmatrix} \zeta_n & 0 \\ 0 & \zeta_n^{-1} \end{pmatrix}^k \longmapsto \alpha^j \circ \beta^k \in \mathbf{D}_n,$$

$j \in \{0, 1\}$, $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, είναι ισομορφισμός ομάδων. Από την άλλη μεριά, η (μη αβελιανή) ομάδα

$$G_2 := \left\{ \begin{pmatrix} [\varepsilon]_n & [\lambda]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix} \middle| \, \varepsilon \in \{\pm 1\}, \ \lambda \in \mathbb{Z} \right\} \sqsubseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_n)$$

παράγεται από τους πίνακες

$$\begin{pmatrix} [-1]_n & [0]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} [1]_n & [1]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix},$$

καθότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{Z}$ ισχύουν οι ισότητες

$$\begin{pmatrix} [1]_n & [\lambda]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1]_n & [1]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix}^\lambda$$

και

$$\begin{pmatrix} [-1]_n & [\lambda]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1]_n & [1]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix}^\lambda \begin{pmatrix} [-1]_n & [0]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix}.$$

Επειδή

$$\begin{pmatrix} [-1]_n & [0]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} [1]_n & [0]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{ord}\begin{pmatrix} [-1]_n & [0]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix} = 2$$

και για κάθε $k \in \{1, \ldots, n-1, n\}$ ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} [1]_n & [1]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} [1]_n & [k]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix}$$

ισούται με τον μοναδιαίο εάν και μόνον εάν $k = n$, έχουμε

$$\operatorname{ord}\begin{pmatrix} [-1]_n & [0]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix} = 2, \ \operatorname{ord}\begin{pmatrix} [1]_n & [1]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix} = n,$$

με

$$\begin{pmatrix} [1]_n & [1]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [-1]_n & [0]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-1]_n & [1]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} [-1]_n & [0]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [1]_n & [-1]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-1]_n & [0]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [1]_n & [1]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix}^{-1},$$

οπότε εκ νέου εφαρμογή τής προτάσεως 4.4.7 μας δίδει $|G_2| = 2n$ και τον ισομορφισμό

$$G_2 \ni \begin{pmatrix} [-1]_n & [0]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix}^j \begin{pmatrix} [1]_n & [1]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix}^k \longmapsto \alpha^j \circ \beta^k \in \mathbf{D}_n,$$

$j \in \{0,1\}, \ k \in \{0,1,...,n-1\}$. Τελικώς λοιπόν,

$$\boxed{G_1 \cong \mathbf{D}_n \cong G_2.}$$

ΘΕΜΑ 9ο **(i)** Προφανώς,

$$\left.\begin{array}{r} r^6 = r, \ \forall r \in R, \\ \Longrightarrow (-r)^6 = -r, \ \forall r \in R \Longrightarrow r^6 = -r, \ \forall r \in R \end{array}\right\} \Longrightarrow r = -r, \ \forall r \in R \Longrightarrow 2r = 0_R, \ \forall r \in R,$$

πράγμα που σημαίνει ότι $\chi\alpha\varrho(R) = 2$ (διότι $\chi\alpha\varrho(R) \neq 0$, $\chi\alpha\varrho(R) \leq 2$, και $\chi\alpha\varrho(R) = 1 \Longleftrightarrow$ ο R είναι τετριμμένος, πρβλ. 6.4.2 (iii)). Εξάλλου,

$$(r + 1_R)^6 = r + 1_R, \ \forall r \in R,$$

και επειδή $r \cdot 1_R = 1_R \cdot r, \ \forall r \in R$, έχουμε τη δυνατότητα εφαρμογής τού διωνυμικού τύπου 6.1.7 (i) για την ανάπτυξη τού αριστερού μέλους τής ανωτέρω ισότητας:

$$r^6 + 6r^5 + 15r^4 + 20r^3 + 15r^2 + 6r + 1_R = r + 1_R, \ \forall r \in R,$$

οπότε για κάθε $r \in R$,

$$\left.\begin{array}{r} (r^6 - r) + 2(3r^5 + 7r^4 + 10r^3 + 7r^2 + 3r) + (r^4 + r^2) = 0_R, \\ r^6 - r = 0_R, \\ \chi\alpha\varrho(R) = 2 \Longrightarrow 2(3r^5 + 7r^4 + 10r^3 + 7r^2 + 3r) = 0_R, \end{array}\right\} \Longrightarrow r^4 + r^2 = 0_R.$$

Κατά συνέπειαν, για κάθε $r \in R$ έχουμε

$$\left.\begin{array}{r} r^4 = -r^2 \overset{(\chi\alpha\varrho(R)=2)}{=} r^2, \\ r^4 \cdot r^2 = r^2 \cdot r^2 \Longrightarrow r^6 = r^4, \\ r^6 = r, \end{array}\right\} \Longrightarrow r^2 = r.$$

(ii) Εάν

$$R_k := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -ky & x + 2y \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ \middle| \ x, y \in \mathbb{R} \right\}, \ k \in \mathbb{R},$$

το R_k είναι *υποδακτύλιος* τού $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ για κάθε $k \in \mathbb{R}$. Πράγματι· επειδή $R_k \neq \varnothing$ και για οιαδήποτε $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$ αμφότερα τα

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -ky & x + 2y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' & y' \\ -ky' & x' + 2y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x' & y - y' \\ -k(y - y') & x - x' + 2(yy') \end{pmatrix}$$

και

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -ky & x+2y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' & y' \\ -ky' & x'+2y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx'-kyy' & xy'+yx'+2yy' \\ -k(xy'+yx'+2yy') & xx'-kyy'+2(xy'+yx'+2yy') \end{pmatrix}$$

ανήκουν στο R_k, αυτό είναι αληθές επί τη βάσει τής προτάσεως 6.1.10. Επιπροσθέτως, το R_k ως δακτύλιος είναι *μεταθετικός*, καθόσον για οιαδήποτε $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -ky & x+2y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' & y' \\ -ky' & x'+2y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx'-kyy' & xy'+y\left(x'+2y'\right) \\ -kyx'-\left(x+2y\right)ky' & -kyy'+\left(x+2y\right)\left(x'+2y'\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xx'-kyy' & x'y+y'\left(x+2y\right) \\ -ky'x-\left(x'+2y'\right)ky & -kyy'+\left(x+2y\right)\left(x'+2y'\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \\ -ky' & x'+2y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ -ky & x+2y \end{pmatrix}.$$

Ο δακτύλιος R_k είναι σώμα εάν και μόνον εάν κάθε στοιχείο τού $R_k \diagdown \{0_{R_k}\}$ είναι αντιστρέψιμο. Ένα στοιχείο

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & y \\ -ky & x+2y \end{pmatrix} \in R_k \diagdown \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι αντιστρέψιμο (πρβλ. θεώρημα 6.2.14) εάν και μόνον εάν

$$\det(\mathbf{A}) \neq 0 \Longleftrightarrow x^2+2xy+ky^2 \neq 0.$$

Θεωρώντας τήν εξίσωση $x^2+2xy+ky^2=0$ ως δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x, παρατηρούμε ότι αυτή έχει πραγματικές θέσεις μηδενισμού[1] εάν και μόνον εάν η διακρίνουσά της (που ισούται με $4y^2(1-k)$) είναι ≥ 0. Κατά συνέπειαν, ο δακτύλιος R_k *είναι σώμα εάν και μόνον εάν* $1-k<0 \Longleftrightarrow k>1$.

<u>ΘΕΜΑ 10ο</u> (i) Μια ικανή συνθήκη για να μην είναι το $\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^4 + [a]_5\,\mathsf{X} + [1]_5$ ανάγωγο, είναι να διαθέτει μια θέση μηδενισμού ξ εντός τού σώματος $\mathbb{Z}_5$. (Βλ. σημείωση 10.3.3 (ii).) Προφανώς, $\varphi([0]_5) = [1]_5 \neq [0]_5$. Για οιοδήποτε μη μηδενικό στοιχείο

$$\xi \in \mathbb{Z}_5 \diagdown \{[0]_5\} = \{[1]_5, [2]_5, [3]_5, [4]_5\} = \mathbb{Z}_5^{\times}$$

έχουμε

$$\varphi(\xi) = \xi^4 + [a]_5\,\xi + [1]_5 = [a]_5\,\xi + [2]_5,$$

διότι η ομάδα $(\mathbb{Z}_5^{\times}, \cdot)$ έχει τάξη 4, οπότε $\xi^4 = [1]_5$ για κάθε $\xi \in \mathbb{Z}_5^{\times}$. (Βλ. πόρισμα 5.1.28.) Εάν $a \notin 5\mathbb{Z}$ ή -ισοδυνάμως- $[a]_5 \neq [0]_5$, τότε $\varphi(\xi) = [0]_5$ για τα ξ που παρατίθενται στον κατάλογο που ακολουθεί:

$[a]_5$	ξ
$[1]_5$	$[3]_5$
$[2]_5$	$[4]_5$
$[3]_5$	$[1]_5$
$[4]_5$	$[2]_5$

οπότε το $\varphi(\mathsf{X})$ δεν είναι ανάγωγο εντός τού $\mathbb{Z}_5[\mathsf{X}]$. Όμως *και* για $a \in 5\mathbb{Z}$ το $\varphi(\mathsf{X})$ δεν είναι ανάγωγο εντός τού $\mathbb{Z}_5[\mathsf{X}]$, διότι

$$\varphi(\mathsf{X}) = \mathsf{X}^4 + [1]_5 = \left(\mathsf{X}^2 + [2]_5\right)\left(\mathsf{X}^2 + [3]_5\right).$$

[1] Συγκεκριμένα, τις $x = \left(-1 \pm \sqrt{(1-k)}\right) y$.

Ως εκ τούτου, το $\varphi(\mathsf{X})$ *δεν είναι ανάγωγο* εντός τού $\mathbb{Z}_5[\mathsf{X}]$ *για κανένα* $a \in \mathbb{Z}$.

(ii) Ο παρονομαστής τού δοθέντος κλάσματος γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\mathsf{X}^8+\mathsf{X}^7-\mathsf{X}^4-\mathsf{X}^3 &= \mathsf{X}^7(\mathsf{X}+1)-\mathsf{X}^3(\mathsf{X}+1)=\mathsf{X}^3(\mathsf{X}+1)(\mathsf{X}^4-1)\\ &= \mathsf{X}^3(\mathsf{X}+1)^2(\mathsf{X}-1)(\mathsf{X}^2+1).\end{aligned}$$

Λόγω τού θεωρήματος 10.6.4 υπάρχουν $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8 \in \mathbb{R}$ μονοσημάντως ορισμένα και τέτοια, ώστε να ισχύει

$$\frac{1}{\mathsf{X}^8+\mathsf{X}^7-\mathsf{X}^4-\mathsf{X}^3}=\frac{a_1}{\mathsf{X}}+\frac{a_2}{\mathsf{X}^2}+\frac{a_3}{\mathsf{X}^3}+\frac{a_4}{\mathsf{X}+1}+\frac{a_5}{(\mathsf{X}+1)^2}+\frac{a_6}{\mathsf{X}-1}+\frac{a_7\mathsf{X}+a_8}{\mathsf{X}^2+1}.$$

Κατ' ακολουθίαν, πολλαπλασιάζοντας αμφότερα τα μέλη με το

$$\mathsf{X}^8+\mathsf{X}^7-\mathsf{X}^4-\mathsf{X}^3=\mathsf{X}^3(\mathsf{X}+1)^2(\mathsf{X}-1)(\mathsf{X}^2+1)$$

λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}&1=a_1\mathsf{X}^2(\mathsf{X}+1)^2(\mathsf{X}-1)(\mathsf{X}^2+1)+a_2\mathsf{X}(\mathsf{X}+1)^2(\mathsf{X}-1)(\mathsf{X}^2+1)\\ &+a_3(\mathsf{X}+1)^2(\mathsf{X}-1)(\mathsf{X}^2+1)+a_4\mathsf{X}^3(\mathsf{X}+1)(\mathsf{X}-1)(\mathsf{X}^2+1)\\ &+a_5\mathsf{X}^3(\mathsf{X}-1)(\mathsf{X}^2+1)+a_6\mathsf{X}^3(\mathsf{X}+1)^2(\mathsf{X}^2+1)+(a_7\mathsf{X}+a_8)\mathsf{X}^3(\mathsf{X}+1)^2(\mathsf{X}-1).\end{aligned}$$

Εάν στην απροσδιόριστο X δοθεί η τιμή 0, τότε $1=-a_3 \Longrightarrow a_3=-1$. Για $\mathsf{X}=-1$, η ανωτέρω δίδει $1=a_5\cdot(-1)^3\cdot(-2)\cdot 2 \Longrightarrow a_5=\frac{1}{4}$. Για $\mathsf{X}=1$, $1=a_6\cdot 1^3\cdot 4\cdot 2 \Longrightarrow a_6=\frac{1}{8}$, ενώ για $\mathsf{X}=i$,

$$\begin{aligned}&1=(a_7i+a_8)(-i)(i+1)^2(i-1)=-2ia_7-2a_8-2a_7+2ia_8=2(a_8-a_7)i+(-2)(a_8+a_7)\\ &\Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} a_8-a_7=0\\ (-2)(a_8+a_7)=1\end{array}\right\} \Longrightarrow a_7=a_8=-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Για την εύρεση των υπολειπομένων a_1,a_2,a_4 πολλαπλασιάζουμε αμφότερα τα μέλη τής ανωτέρω πολυωνυμικής ισότητας με το 8 και τη γράφουμε ως εξής:

$$\begin{aligned}&8=8a_1\mathsf{X}^2(\mathsf{X}+1)^2(\mathsf{X}-1)(\mathsf{X}^2+1)+8a_2\mathsf{X}(\mathsf{X}+1)^2(\mathsf{X}-1)(\mathsf{X}^2+1)\\ &-8(\mathsf{X}+1)^2(\mathsf{X}-1)(\mathsf{X}^2+1)+8a_4\mathsf{X}^3(\mathsf{X}+1)(\mathsf{X}-1)(\mathsf{X}^2+1)\\ &+2\mathsf{X}^3(\mathsf{X}-1)(\mathsf{X}^2+1)+\mathsf{X}^3(\mathsf{X}+1)^2(\mathsf{X}^2+1)-2(\mathsf{X}+1)\mathsf{X}^3(\mathsf{X}+1)^2(\mathsf{X}-1),\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}&8=8a_1(\mathsf{X}^7+\mathsf{X}^6-\mathsf{X}^3-\mathsf{X}^2)+8a_2(\mathsf{X}^6+\mathsf{X}^5-\mathsf{X}^2-\mathsf{X})-8(\mathsf{X}^5+\mathsf{X}^4-\mathsf{X}-1)+8a_4(\mathsf{X}^7-\mathsf{X}^3)\\ &+2(\mathsf{X}^6-\mathsf{X}^5+\mathsf{X}^4-\mathsf{X}^3)+(\mathsf{X}^7+2\mathsf{X}^5+2\mathsf{X}^6+2\mathsf{X}^4+\mathsf{X}^3)-2(\mathsf{X}^7+2\mathsf{X}^6-2\mathsf{X}^4-\mathsf{X}^3).\end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ισοβάθμιων όρων στην τελευταία συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}&8a_1+8a_4-1=0,\quad 8a_1+8a_2=0,\quad 8a_2-8=0,\\ &8a_1+8a_4-1=0,\quad 8a_1+8a_2=0,\quad -8a_2+8=0.\end{aligned}$$

Εξ αυτών έπεται ότι $a_1=-1, a_2=1, a_4=\frac{9}{8}$. Κατά συνέπειαν, η ζητούμενη διάσπαση τού

$$\frac{1}{\mathsf{X}^8+\mathsf{X}^7-\mathsf{X}^4-\mathsf{X}^3}\in\mathbb{R}(\mathsf{X})$$

σε απλά πολυωνυμικά κλάσματα είναι η ακόλουθη:

$$\frac{1}{\mathsf{X}^8+\mathsf{X}^7-\mathsf{X}^4-\mathsf{X}^3}=-\frac{1}{\mathsf{X}}+\frac{1}{\mathsf{X}^2}-\frac{1}{\mathsf{X}^3}+\frac{9}{8}\frac{1}{\mathsf{X}+1}+\frac{1}{4(\mathsf{X}+1)^2}+\frac{1}{8(\mathsf{X}-1)}-\frac{1}{4}\frac{(\mathsf{X}+1)}{\mathsf{X}^2+1}.$$
