ΑΛΓΕΒΡΑ Ι: 13ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Εάν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ είναι τέτοιοι, ώστε να ισχύει $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ και $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, να αποδειχθεί ότι το $\varphi(\mathsf{X}) := (\alpha - \beta)\mathsf{X}^2 + (\beta - \gamma)\mathsf{X} + (\gamma - \alpha) \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

2. Εάν $\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^4 - 2\mathsf{X}^3 + \alpha\mathsf{X}^2 + \beta\mathsf{X} + 4 \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$ και $\psi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^2 - \mathsf{X} + \gamma \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$, για ποιους α, β, γ ισχύει $\varphi(\mathsf{X}) = (\psi(\mathsf{X}))^2$;

3. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα και μόνον πολυώνυμο $\varphi(\mathsf{X}) \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$ τετάρτου βαθμού, το οποίο δέχεται ως μια θέση μηδενισμού του το 0 και ικανοποιεί την $\varphi(\mathsf{X}) - \varphi(\mathsf{X} - 1) = \mathsf{X}^3$. Εν συνεχεία, να υπολογισθεί μέσω αυτού το άθροισμα

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 \quad (\text{όπου } n \in \mathbb{N}).$$

4. Εάν $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο

$$\varphi(\mathsf{X}) := (\mathsf{X} + 1)^{2n} - \mathsf{X}^{2n} - 2\mathsf{X} - 1 \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$$

διαιρείται (επακριβώς) διά τού $2\mathsf{X}^3 + 3\mathsf{X}^2 + \mathsf{X}$.

5. Εάν $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο

$$\varphi(\mathsf{X}) := (1 + \mathsf{X} + \mathsf{X}^2 + \cdots + \mathsf{X}^n)^2 - \mathsf{X}^n \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$$

διαιρείται (επακριβώς) διά τού $\psi(\mathsf{X}) := 1 + \mathsf{X} + \mathsf{X}^2 + \cdots + \mathsf{X}^{n-1}$.

6. Να προσδιορισθεί το υπόλοιπο τής διαιρέσεως ενός πολυωνύμου $\varphi(\mathsf{X}) \in \mathbb{C}[\mathsf{X}]$ διά τού $(\mathsf{X}-a)(\mathsf{X}-b)$, όπου $a, b \in \mathbb{C}$, συναρτήσει των τιμών $\varphi(a)$ και $\varphi(b)$.

7. Να προσδιορισθεί το υπόλοιπο τής διαιρέσεως ενός πολυωνύμου $\varphi(\mathsf{X}) \in \mathbb{C}[\mathsf{X}]$ διά τού

$$(\mathsf{X} - a)(\mathsf{X} - b)(\mathsf{X} - c),$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{C}$ με $a \neq b \neq c \neq a$, συναρτήσει των τιμών $\varphi(a), \varphi(b)$ και $\varphi(c)$.

8. Εάν το πολυώνυμο $\varphi(\mathsf{X}) := a_0 + a_1\mathsf{X} + \cdots + a_n\mathsf{X}^n$ (όπου $n \in \mathbb{N}$) έχει ακεραίους συντελεστές και δέχεται ως θέση μηδενισμού του τον ρητό αριθμό $\frac{\lambda}{\mu}$, όπου $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ και $\text{μκδ}(\lambda, \mu) = 1$, να αποδειχθεί ότι

$$\lambda \mid a_0 \quad \text{και} \quad \mu \mid a_n.$$

Κατόπιν τούτου να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο

$$f(\mathsf{X}) = \mathsf{X}^n + 2\kappa\mathsf{X} + 2 \in \mathbb{Z}[\mathsf{X}],$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, δεν δέχεται ρητό αριθμό ως θέση μηδενισμού του.

9. Να προσδιορισθεί ο

$$\text{μκδ}(2\mathsf{X}^4 + 2\mathsf{X}^3 - 3\mathsf{X}^2 - 2\mathsf{X} + 1, \mathsf{X}^3 + 2\mathsf{X}^2 + 2\mathsf{X} + 1).$$

10. Να προσδιορισθεί το

$$\text{εκπ}(\mathsf{X}^3 + \mathsf{X}^2 - \mathsf{X} - 1, \mathsf{X}^3 - \mathsf{X}^2 - \mathsf{X} + 1).$$

11. Δοθέντος ενός πολυωνύμου $\varphi(\mathsf{X}) := a_n\mathsf{X}^n + a_{n-1}\mathsf{X}^{n-1} + \cdots + a_1\mathsf{X} + a_0 \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$ βαθμού $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x| \neq 1$ ισχύει

$$|\varphi(x)| \leq m\,\frac{|x|^{n+1} - 1}{|x| - 1},$$

όπου $m := \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|, |a_n|\}$.

12. Δοθέντος ενός πολυωνύμου $\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^n + a_{n-1}\mathsf{X}^{n-1} + \cdots + a_1\mathsf{X} + a_0 \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$ βαθμού $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί ότι για κάθε $\rho \in \mathbb{R}$ με $\varphi(\rho) = 0$ ισχύει η ανισότητα

$$|\rho| < 1 + |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|.$$

13. Εάν ένα πολυώνυμο $\varphi(\mathsf{X}) \in \mathbb{Q}[\mathsf{X}]$ δέχεται ως θέση μηδενισμού του τον άρρητο αριθμό $a + \sqrt{b}$ (όπου $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}_{>0}$ και $\nexists \theta \in \mathbb{Q} : b = \theta^2$), να αποδειχθεί ότι δέχεται ως θέση μηδενισμού του *και* τον $a - \sqrt{b}$ και ότι

$$\mathrm{mult}(\varphi(\mathsf{X}); a + \sqrt{b}) = \mathrm{mult}(\varphi(\mathsf{X}); a - \sqrt{b}).$$

14. Θεωρούμε το πολυώνυμο $\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^4 + a\mathsf{X}^2 + \mathsf{X} + b \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$. Να προσδιορισθούν οι a, b, ούτως ώστε το $\varphi(\mathsf{X})$ να διαθέτει μια θέση μηδενισμού $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\mathrm{mult}(\varphi(\mathsf{X}); \lambda) = 3$.

15. Εάν $\mu, \nu \in \mathbb{N}$, πόσες κοινές μιγαδικές θέσεις μηδενισμού έχουν τα πολυώνυμα $\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^\mu - 1$ και $\psi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^\nu - 1$;

16. Ποια είναι η αποσύνθεση των $\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^6 - 1$ και $\psi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^6 + 1$ σε γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων

(i) υπεράνω τού σώματος $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών και

(ii) υπεράνω τού σώματος $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών;

17. Να προσδιορισθούν οι θέσεις μηδενισμού τού πολυωνύμου

$$\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^3 - 4\mathsf{X}^2 + 6\mathsf{X} - 4 \in \mathbb{Z}[\mathsf{X}]$$

εντός τού σώματος $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών. [*Υπόδειξη*: $\varphi(1 + i) = 0$.]

18. Έστω p ένας πρώτος αριθμός. Ποια είναι η αποσύνθεση τού πολυωνύμου

$$\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^{p-1} + [p-1]_p \in \mathbb{Z}_p[\mathsf{X}]$$

σε ανάγωγα πολυώνυμα υπεράνω τού σώματος $\mathbb{Z}_p$;

19. Ποια είναι η αποσύνθεση τού πολυωνύμου

$$\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^4 - \mathsf{X}^3 + \mathsf{X}^2 - \mathsf{X} \in \mathbb{Z}_3[\mathsf{X}]$$

σε ανάγωγα πολυώνυμα υπεράνω τού σώματος $\mathbb{Z}_3$;

20. Να αποδειχθεί ότι τα πολυώνυμα

$$\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^2 + 5\mathsf{X} + 1 \in \mathbb{Q}[\mathsf{X}], \quad \psi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^3 + 39\mathsf{X}^2 - 4\mathsf{X} + 8 \in \mathbb{Q}[\mathsf{X}]$$

είναι ανάγωγα υπεράνω τού σώματος $\mathbb{Q}$.

21. Να προσδιορισθούν όλα τα μονικά ανάγωγα πολυώνυμα

(i) βαθμού 4 εντός τού $\mathbb{Z}_2[\mathsf{X}]$ και

(ii) βαθμού 3 εντός τού $\mathbb{Z}_3[\mathsf{X}]$.

22. Έστω $\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^3 - 3a\mathsf{X}^2 - 3\mathsf{X} + a \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$. Να αποδειχθεί ότι το $\varphi(\mathsf{X})$ δεν μπορεί να διαθέτει δύο ίσες θέσεις μηδενισμού εντός τού $\mathbb{C}$.

23. Έστω $\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^3 - a\mathsf{X}^2 + b\mathsf{X} - c \in \mathbb{C}[\mathsf{X}]$ με $a \neq 0$. Να αποδειχθεί η ισοδυναμία των κάτωθι συνθηκών:

(i) Η μία (εκ των τριών μιγαδικών θέσεων μηδενισμού τού $\varphi(\mathsf{X})$) είναι μέση ανάλογος των άλλων δύο.

(ii) $b^3 = ca^3$.

24. Να προσδιορισθεί το άθροισμα των τετραγώνων και των κύβων των (μιγαδικών) θέσεων μηδενισμού τής εξισώσεως:

$$2\mathsf{X}^3 - 3\mathsf{X}^2 + 4\mathsf{X} - 8 = 0.$$

25. Να προσδιορισθεί πολυώνυμο τρίτου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές, το οποίο να έχει τις $\rho_1 = 5$ και $\rho_2 = i$ ως θέσεις μηδενισμού του.

26. Εάν υποτεθεί ότι όλες οι θέσεις μηδενισμού δοθέντος πολυωνύμου $\varphi(\mathsf{X}) \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$ (εντός τού $\mathbb{C}$) είναι πραγματικές και απλές, να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο $(\mathcal{D}(\varphi(\mathsf{X})))^2 - \varphi(\mathsf{X})\mathcal{D}^2(\varphi(\mathsf{X}))$ στερείται πραγματικών θέσεων μηδενισμού.

27. Δίδεται ένα πολυώνυμο $\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^\nu - a\mathsf{X}^{\nu-\mu} + b \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$, όπου $\nu, \mu \in \mathbb{N}$ με $\nu > \mu$ και $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$. Να αποδειχθεί η ισοδυναμία των κάτωθι συνθηκών:

(i) Το $\varphi(\mathsf{X})$ έχει τουλάχιστον μία διπλή πραγματική θέση μηδενισμού.

(ii) Ισχύει η ισότητα: $(a\frac{\nu-\mu}{\nu})^\nu = (b\frac{\nu-\mu}{\mu})^\mu$.

28. Ποια είναι η αποσύνθεση τού πολυωνύμου

$$\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^3 - 4\mathsf{X}^2 + (2+3i)\mathsf{X} + (3-9i) \in \mathbb{C}[\mathsf{X}]$$

σε ανάγωγα πολυώνυμα υπεράνω τού σώματος $\mathbb{C}$; [*Υπόδειξη*: $\varphi(3) = 0$.]

29. Εάν υποτεθεί ότι ένα πολυώνυμο $\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^3 - a^2\mathsf{X} + a^2 b \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$ με $b < 0$ έχει τρεις πραγματικές και ανά δύο άνισες θέσεις μηδενισμού, να αποδειχθεί ότι ισχύει η σχέση

$$|a| + \frac{3\sqrt{3}}{2}b > 0.$$

30. Να αποδειχθεί ότι το $\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^3 - \mathsf{X} - 1$ έχει μια άρρητη θέση μηδενισμού λ για την οποία ισχύει $1 < \lambda < \sqrt{2}$.