ΑΛΓΕΒΡΑ Ι: 12ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Έστω

$$R := \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}) \text{ με μκδ}\,(a,b) = 1 \text{ και } b \equiv 1 (\operatorname{mod} 2) \right\}$$

και έστω

$$I := \left\{ \frac{a}{b} \in R \;\middle|\; a \equiv 0 (\operatorname{mod} 2) \right\}.$$

Να αποδειχθεί ότι το R είναι μια υποπεριοχή τού σώματος $\mathbb{Q}$ η οποία δεν είναι υπόσωμα αυτού. Κατόπιν τούτου, να αποδειχθεί ότι το I είναι ένα ιδεώδες τής ακεραίας περιοχής R το οποίο δεν είναι ιδεώδες τού $\mathbb{Q}$.

2. Εάν η $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία (αριστερών/δεξιών/αμφιπλεύρων) ιδεωδών ενός δακτυλίου R με

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \cdots,$$

να αποδειχθεί ότι η ένωση $I := \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ των μελών αυτής αποτελεί ένα (αριστερό/δεξιό/αμφίπλευρο) ιδεώδες τού R.

3. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $\mathrm{Nil}(R)$ των μηδενοδύναμων στοιχείων ενός μεταθετικού δακτυλίου R είναι ένα ιδεώδες τού R. Εν συνεχεία, να δοθεί παράδειγμα μη μεταθετικού δακτυλίου R, εντός τού οποίου το $\mathrm{Nil}(R)$ δεν είναι ιδεώδες.

4. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο

$$I := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i \mathsf{X}^i \in \mathbb{Z}[\mathsf{X}] \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_0,\ a_0 \equiv 0 (\operatorname{mod} 2) \right\}$$

είναι ένα ιδεώδες τού $\mathbb{Z}[\mathsf{X}]$ που δεν είναι κύριο.

5. Εάν τα I και J είναι δυο δεξιά (ή δυο αριστερά) ιδεώδη ενός δακτυλίου R, τότε δεν ισχύει κατ' ανάγκην η ισότητα $I\,J = J\,I$. Να επαληθευθεί αυτός ο ισχυρισμός μέσω τής παροχής καταλλήλου παραδείγματος.

6. Εάν R_1, R_2 είναι δυο δακτύλιοι με μοναδιαίο στοιχείο, να αποδειχθεί ότι κάθε ιδεώδες τού $R_1 \times R_2$ είναι τής μορφής $I_1 \times I_2$, όπου I_1 είναι ένα ιδεώδες τού R_1 και I_2 ένα ιδεώδες τού R_2.

7. Εάν I, J είναι δυο ιδεώδη ενός μεταθετικού δακτυλίου R, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Εάν $I \subseteq \mathrm{Nil}(R)$ και $J \subseteq \mathrm{Nil}(R)$, τότε $I + J \subseteq \mathrm{Nil}(R)$.

(ii) Εάν αμφότερα τα I, J είναι μηδενοδύναμα ιδεώδη (βλ. εδ. 7.4.8), τότε και το $I + J$ είναι μηδενοδύναμο ιδεώδες τού R.

8. Έστω $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Εάν $m = p_1^{\nu_1} \cdots p_k^{\nu_k}$, $k \in \mathbb{N}$, $\nu_1, \ldots, \nu_k \in \mathbb{N}$, είναι η κανονική παράσταση τού m ως γινομένου κατάλληλων δυνάμεων σαφώς διακεκριμένων πρώτων αριθμών $p_1, \ldots, p_k$, να αποδειχθεί ότι

$$\mathrm{Nil}\,(\mathbb{Z}_m) = \{[0]_m\} \Leftrightarrow \nu_1 = \cdots = \nu_k = 1.$$

9. Να αποδειχθεί ότι το κύριο ιδεώδες $\langle (\mathsf{X}-1)\,(\mathsf{X}-2)\rangle$ τού $\mathbb{Q}[\mathsf{X}]$ δεν είναι πρώτο ιδεώδες.

10. Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος. Να αποδειχθούν τα εξής:

(i) Εάν τα $\mathfrak{p}_1$ και $\mathfrak{p}_2$ είναι δυο πρώτα ιδεώδη τού R, τότε η τομή $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ είναι πρώτο ιδεώδες τού R $\Longleftrightarrow$ είτε $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$ είτε $\mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{p}_1$.

(ii) Εάν η $(\mathfrak{p}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι μια **αλυσίδα** πρώτων ιδεωδών τού R, ήτοι μια μη κενή οικογένεια πρώτων ιδεωδών τού R έχουσα την ιδιότητα:

$$[\text{είτε } \mathfrak{p}_{\lambda_1} \subseteq \mathfrak{p}_{\lambda_2} \text{ είτε } \mathfrak{p}_{\lambda_2} \subseteq \mathfrak{p}_{\lambda_1}],\ \ \forall (\lambda_1,\lambda_2) \in \Lambda\times\Lambda,$$

τότε τόσον η ένωση $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{p}_\lambda$ όσον και η τομή $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{p}_\lambda$ αποτελεί ένα πρώτο ιδεώδες τού R.

11. Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος και έστω $\mathfrak{p}$ ένα πρώτο ιδεώδες αυτού. Εάν $n\in\mathbb{N}$ και εάν τα $I_1,\ldots,I_n$ είναι ιδεώδη τού R, να αποδειχθεί ότι οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) $\exists\, j\in\{1,\ldots,n\} : I_j \subseteq \mathfrak{p}$.

(ii) $I_1\cap\cdots\cap I_n \subseteq \mathfrak{p}$.

(iii) $I_1\ \cdots\ I_n \subseteq \mathfrak{p}$.

12. Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος και έστω I ένα ιδεώδες αυτού. Εάν τα $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_n$, $n\in\mathbb{N}$, είναι πρώτα ιδεώδη τού R, τέτοια ώστε $I\subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$, να αποδειχθεί ότι $\exists\, j\in\{1,\ldots,n\} : I\subseteq \mathfrak{p}_j$.

13. Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Ως **πρώτο φάσμα τού** R ορίζεται το σύνολο όλων των πρώτων ιδεωδών τού R, συμβολιζόμενο ως $\mathrm{Spec}(R)$. Για κάθε ιδεώδες I τού R εισάγουμε τον συμβολισμό:

$$\boxed{\mathbf{V}(I) := \{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(R)\ |\ \mathfrak{p}\supseteq I\}\,.}$$

Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) $\mathrm{Spec}(R)=\varnothing \Longleftrightarrow$ ο R είναι τετριμμένος δακτύλιος.

(ii) Εάν τα I,J είναι δυο ιδεώδη τού R, τότε $I\subseteq J \Longrightarrow \mathbf{V}(I)\supseteq \mathbf{V}(J)$.

(iii) $\mathbf{V}(I)=\varnothing \Longleftrightarrow I=R$.

(iv) $\mathbf{V}(\{0_R\})=\mathrm{Spec}(R)$.

(v) Εάν $n\in\mathbb{N}$ και εάν τα $I_1,\ldots,I_n$ είναι ιδεώδη τού R, τότε

$$\mathbf{V}(I_1)\cup\cdots\cup \mathbf{V}(I_n) = \mathbf{V}(I_1\ \cdots\ I_n) = \mathbf{V}(I_1\cap\cdots\cap I_n).$$

(vi) Εάν η $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ είναι μια οικογένεια ιδεωδών τού R, τότε

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{V}(I_\lambda) = \mathbf{V}\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right).$$

[*Σημείωση*: Είναι πρόδηλο εκ των ανωτέρω ότι το $\mathrm{Spec}(R)$ εφοδιάζεται με μία *τοπολογία* έχουσα τα μέλη τής οικογενείας $\{\mathbf{V}(I)\ |\ I \text{ ιδεώδες τού } R\}$ ως *κλειστά σύνολα*. Η εν λόγω τοπολογία καλείται **τοπολογία Zariski** επί τού $\mathrm{Spec}(R)$ και διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη Μεταθετική Άλγεβρα και στην Αλγεβρική Γεωμετρία.]

14. Έστω m ένας ακέραιος αριθμός στερούμενος τετραγώνων. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Το σύνολο

$$S := \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ mb & a \end{array} \right) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

αποτελεί έναν υποδακτύλιο τού $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$.

(ii) Η απεικόνιση $f : \mathbb{Z}[\sqrt{m}] \longrightarrow S$ η οριζόμενη από τον τύπο

$$\mathbb{Z}[\sqrt{m}] \ni a + b\sqrt{m} \overset{f}{\longmapsto} \left(\begin{array}{cc} a & b \\ mb & a \end{array} \right) \in S$$

είναι ένας ισομορφισμός δακτυλίων. Ως εκ τούτου, ο S είναι μια ακεραία περιοχή. (Βλ. άσκηση 24 τού φυλλαδίου 11 και το (i) τού πορίσματος 7.6.5.)

15. Να αποδειχθεί ότι $\mathbb{R}[\mathsf{X}]/\left\langle \mathsf{X}^2 \right\rangle \cong S$, όπου

$$S := \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & a \end{array} \right) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

[*Υπόδειξη*: Να δειχθεί ότι η απεικόνιση

$$\mathbb{R}[\mathsf{X}] \ni \sum_{i=0}^{n} a_i \mathsf{X}^i \longmapsto \left(\begin{array}{cc} a_0 & a_1 \\ 0 & a_0 \end{array} \right) \in S$$

είναι επιμορφισμός δακτυλίων έχων το κύριο ιδεώδες $\left\langle \mathsf{X}^2 \right\rangle$ ως πυρήνα του και να εφαρμοσθεί το 1ο θεώρημα ισομορφισμών 8.3.3.]

16. Εάν $I := \left\langle \mathsf{X}^2 + 1 \right\rangle$ και $J := \left\langle \mathsf{X}^2 + 2 \right\rangle \subsetneqq \mathbb{R}[\mathsf{X}]$, να αποδειχθεί ότι

$$\mathbb{R}[\mathsf{X}]/I \cong \mathbb{R}[\mathsf{X}]/J \;\text{ και }\; I \neq J.$$

17. Να προσδιορισθούν τα σύνολα λύσεων των συστημάτων γραμμικών ισοτιμιών:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{array} \right\}$$

και

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x \equiv 6 \pmod{8} \\ 8x \equiv 10 \pmod{14} \\ 10x \equiv 5 \pmod{15} \end{array} \right\}$$

βάσει των τεχνικών που παρετέθησαν στην ενότητα 8.4.

18. Έστω m ένας ένας ακέραιος αριθμός στερούμενος τετραγώνων. Να αποδειχθεί ότι

$$\mathbf{Fr}\left(\mathbb{Z}[\sqrt{m}]\right) = \mathbb{Q}(\sqrt{m}).$$

[*Υπόδειξη*: Να γενικευθούν καταλλήλως τα προαναφερθέντα στο παράδειγμα 8.5.10.]

19. Να αποδειχθεί ότι για κάθε ακέραιο m στερούμενον τετραγώνων η απεικόνιση

$$\mathbb{Q}(\sqrt{m}) \ni a + b\sqrt{m} \longmapsto a - b\sqrt{m} \in \mathbb{Q}(\sqrt{m}), \;\; a, b \in \mathbb{Z},$$

είναι αυτομορφισμός τού σώματος $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ (βλ. το (iv) τής ασκήσεως 24 τού φυλλαδίου 11).

20. Έστω K ένα σώμα με $\chi\alpha\rho(K) = p > 0$ και έστω

$$f : K \longrightarrow K, \quad x \longmapsto f(x) := x^p,$$

η απεικόνιση τού Frobenius. (Βλ. εδ. 8.1.3 (iv).) Να αποδειχθούν τα εξής:

(i) Η f είναι μονομορφισμός. [*Υπόδειξη*: Βλ. πρόταση 8.1.12.]

(ii) Όταν το K είναι πεπερασμένο σώμα, τότε η f είναι ισομορφισμός (ήτοι αυτομορφισμός τού K).

(iii) Όταν το K είναι απειροπληθές, τότε η f είναι δεν είναι κατ' ανάγκην ισομορφισμός. [*Υπόδειξη*: Να εξετασθεί τι συμβαίνει στην περίπτωση κατά την οποία το K είναι το σώμα $\mathbb{Z}_p(\mathsf{X})$ των ρητών συναρτήσεων υπεράνω τού σώματος $\mathbb{Z}_p$.]

21. Έστω R μια ακεραία περιοχή και έστω $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. Το

$$\boxed{R_{\mathfrak{p}} := \left\{ \tfrac{a}{b} \in \mathbf{Fr}(R) \,\middle|\, a \in R, b \in R \smallsetminus \mathfrak{p} \right\}}$$

καλείται **τοπικοποίηση τού** R **στο** $\mathfrak{p}$. Να αποδειχθούν τα εξής:

(i) Το $R_{\mathfrak{p}}$ είναι ένας υποδακτύλιος τού σώματος $\mathbf{Fr}(R)$ περιέχων τον R.

(ii) $\mathbf{Fr}(R) \cong \mathbf{Fr}(R_{\mathfrak{p}})$.

(iii) Ο $R_{\mathfrak{p}}$ είναι τοπικός δακτύλιος έχων το $\mathfrak{m}_{R_{\mathfrak{p}}} := \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ ως το (μοναδικό) μεγιστικό του ιδεώδες.

(iv) $R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \cong \mathbf{Fr}(R/\mathfrak{p})$.

(v) Όταν $R = \mathbb{Z}$ και $\mathfrak{p} = \langle p \rangle = p\mathbb{Z}$, όπου p κάποιος πρώτος αριθμός, ο $R_{\mathfrak{p}}$ είναι ο δακτύλιος των p-αδικών κλασμάτων $\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$ ο ορισθείς στην άσκηση 10 τού φυλλαδίου 11 με

$$\mathfrak{m}_{\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}} = p\mathbb{Z}_{\langle p \rangle} = \mathbb{Z}_{\langle p \rangle} \smallsetminus \mathbb{Z}_{\langle p \rangle}^{\times} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \,\middle|\, \mu\kappa\delta\,(a,b) = 1 \text{ και } p \nmid b,\ p \mid a \right\}$$

(πρβλ. 7.7.3 (ii)) και $\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}/p\mathbb{Z}_{\langle p \rangle} \cong \mathbb{Z}_p$.

22. Να αποδειχθεί ότι ο (μη μεταθετικός) δακτύλιος

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle|\, a, b \in \mathbb{Z} \text{ και } c \in \mathbb{Q} \right\} \subsetneqq \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q}).$$

είναι εξ αριστερών ναιτεριανός αλλά δεν είναι εκ δεξιών ναιτεριανός.

23. Να αποδειχθεί ότι ο (μη μεταθετικός) δακτύλιος

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle|\, a \in \mathbb{Q} \text{ και } b, c \in \mathbb{R} \right\} \subsetneqq \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

είναι εκ δεξιών αρτινιανός αλλά δεν είναι εξ αριστερών αρτινιανός.

24. Να αποδειχθεί ότι ο (μη μεταθετικός) δακτύλιος

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle|\, a, b \in \mathbb{R} \text{ και } c \in \mathbb{Q} \right\} \subsetneqq \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

είναι εξ αριστερών αρτινιανός αλλά δεν είναι εκ δεξιών αρτινιανός.

25. Έστω p ένας πρώτος αριθμός και έστω

$$\mathbb{Z}(p^{\infty}) := \left\{ \frac{m}{p^n} \middle|\, n, m \in \mathbb{N}_0 \text{ και } m < p^n \right\} \subsetneqq \mathbb{Q}.$$

Το σύνολο $\mathbb{Z}(p^\infty)$ καθίσταται μεταθετικός δακτύλιος (χωρίς μοναδιαίο στοιχείο) μέσω των πράξεων τής «προσθέσεως mod 1»

$$\frac{m}{p^n} + \frac{m'}{p^{n'}} := \begin{cases} \frac{mp^{n'}+m'p^n}{p^{n+n'}}, & \text{όταν } 0 \leq \frac{mp^{n'}+m'p^n}{p^{n+n'}} < 1, \\ \frac{mp^{n'}+m'p^n}{p^{n+n'}} - 1, & \text{όταν } 1 \leq \frac{mp^{n'}+m'p^n}{p^{n+n'}} < 2, \end{cases}$$

για $n, n', m, m' \in \mathbb{N}_0$, με $m < p^n$, $m' < p^{n'}$, και τού «τετριμμένου» πολλαπλασιασμού

$$a \star b := 0, \ \forall (a,b) \in \mathbb{Z}(p^\infty) \times \mathbb{Z}(p^\infty).$$

Να αποδειχθεί ότι αυτός ο δακτύλιος είναι αρτινιανός αλλά δεν είναι ναιτεριανός.