ΑΛΓΕΒΡΑ Ι: 11ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Έστω $(R, +, \cdot)$ ένας δακτύλιος και έστω $(a, b) \in R \times R$. Εάν $ab = ba$, να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες:

(i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,

(ii) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = (a+b)(a-b)$,

(iii) Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)\left(a^{n-1} + \sum_{j=2}^{n-1} a^{n-j}b^{j-1} + b^{n-1}\right) \\ &= \left(a^{n-1} + \sum_{j=2}^{n-1} a^{n-j}b^{j-1} + b^{n-1}\right)(a-b)\,, \end{aligned}$$

(iv) Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a^{2n+1} + b^{2n+1} &= (a+b)\left(a^{2n} - a^{2n-1}b + \cdots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}\right) \\ &= \left(a^{2n} - a^{2n-1}b + \cdots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}\right)(a+b)\,, \end{aligned}$$

(v) Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} a^{2n} - b^{2n} &= (a+b)\left(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + \cdots - a^2b^{2n-3} + ab^{2n-2} - b^{2n-1}\right) \\ &= \left(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + \cdots - a^2b^{2n-3} + ab^{2n-2} - b^{2n-1}\right)(a+b)\,. \end{aligned}$$

2. Εάν $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ με μκδ$(m, n) = 1$ και a, b είναι αντιστρέψιμα στοιχεία ενός δακτυλίου R με μοναδιαίο στοιχείο, τέτοια ώστε να ισχύει $a^m = b^m$ και $a^n = b^n$, να αποδειχθεί ότι $a = b$.

3. Έστω $(R, +, \cdot)$ ένας δακτύλιος. Λέμε ότι ο δακτύλιος $(R, +, *)$ ο οριζόμενος επί τού συνόλου R, με την ίδια την "$+$" ως πράξη προσθέσεως και την

$$R \times R \ni (a, b) \longmapsto a * b := b \cdot a \in R$$

ως πράξη πολλάπλασιασμού, είναι **ο αντικείμενος δακτύλιος τού** R. Εν συντομία, ο δακτύλιος αυτός συμβολίζεται συνήθως ως R^{opp}. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) $(R^{\mathrm{opp}})^{\mathrm{opp}} = R$.

(ii) $R^{\mathrm{opp}} = R$ εάν και μόνον εάν ο R είναι μεταθετικός.

(iii) Εάν ο R έχει μοναδιαίο στοιχείο, τότε και ο R^{opp} έχει μοναδιαίο στοιχείο· επιπροσθέτως, $1_{R^{\mathrm{opp}}} = 1_R$.

4. Έστω R ένας δακτύλιος για τον οποίο ισχύει η ισότητα

$$x^2 = x,\ \ \forall x \in R.$$

Να αποδειχθεί ότι $2x = 0_R,\ \forall x \in R$, και ότι ο εν λόγω δακτύλιος οφείλει να είναι μεταθετικός. Επιπροσθέτως, στην περίπτωση κατά την οποία ο R έχει τουλάχιστον τρία στοιχεία, να αποδειχθεί ότι ο R διαθέτει μηδενοδιαιρέτες. (Αυτού τού είδους οι δακτύλιοι ονομάζονται **δακτύλιοι τού Boole**).

5. Έστω R ένας δακτύλιος για τον οποίο ισχύει η ισότητα

$$x^2 = 2x, \ \ \forall x \in R.$$

Να αποδειχθεί ότι $x^3 = 0_R, \ \forall x \in R$.

6. Έστω R ένας δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο για τον οποίο ισχύει η ισότητα

$$x^3 = x, \ \ \forall x \in R.$$

Να αποδειχθεί (i) ότι $6x = 0_R, \ \forall x \in R$, και (ii) ότι ο R είναι κατ' ανάγκην μεταθετικός.

7. Έστω p πρώτος αριθμός και $Q_p := \left\{ [a]_p^2 \ \middle| \ [a]_p \in \mathbb{Z}_p \right\}$ το σύνολο των τετραγώνων των στοιχείων τού $\mathbb{Z}_p$.

(i) Ποιος είναι ο πληθικός αριθμός $\mathrm{card}(Q_p)$ τού Q_p;

(ii) Να αποδειχθεί ότι το ζεύγος $(Q_p, +)$ είναι μια υποομάδα τής $(\mathbb{Z}_p, +)$ μόνον όταν $p = 2$.

(iii) Για οιαδήποτε $u, v \in \mathbb{Z}_p \smallsetminus Q_p$, να αποδειχθεί ότι $uv \in Q_p$.

8. Έστω p πρώτος αριθμός. Να αποδειχθεί ότι κάθε στοιχείο τού $\mathbb{Z}_p$ *μπορεί να παρασταθεί ως άθροισμα τετραγώνων* δύο στοιχείων τού $\mathbb{Z}_p$. (*Υπόδειξη*: Να γίνει κατάλληλη χρήση τής ασκήσεως 7.)

9. Εάν R είναι τυχών δακτύλιος, να αποδειχθεί ότι το $\{ (r, r) \mid r \in R\}$ αποτελεί έναν υποδακτύλιο τού $R \times R$.

10. Για οιονδήποτε πρώτο αριθμό p ορίζουμε το σύνολο

$$\boxed{\mathbb{Z}_{\langle p \rangle} := \left\{ r \in \mathbb{Q} \mid r = \tfrac{a}{b}, \ \ (a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}), \text{ με μκδ}\, (a,b) = 1 \text{ και } p \nmid b \right\}.}$$

Να αποδειχθεί ότι το $\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$ είναι υποδακτύλιος τού $\mathbb{Q}$. (Το $\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$ ονομάζεται **δακτύλιος των p-αδικών κλασμάτων** και παίζει έναν ιδιαίτερο ρόλο στην Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών.)

11. Να εξετασθεί ποια εκ των ακολούθων συνόλων είναι υποδακτύλιοι τού $\mathbb{Q}$:

(i) $S_1 := \left\{ r \in \mathbb{Q} \ \middle| \ \begin{array}{c} r = \frac{a}{b}, \ \ (a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}), \\ \text{με μκδ}\, (a,b) = 1 \text{ και } b \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2) \end{array} \right\}$.

(ii) $S_2 := \left\{ r \in \mathbb{Q} \ \middle| \ \begin{array}{c} r = \frac{a}{b}, \ \ (a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}), \\ \text{με μκδ}\, (a,b) = 1 \text{ και } b \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2) \end{array} \right\}$.

(iii) $S_3 := \left\{ r \in \mathbb{Q} \ \middle| \ \begin{array}{c} r = \frac{a}{b}, \ \ (a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}), \\ \text{με μκδ}\, (a,b) = 1 \text{ και } a \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2) \end{array} \right\}$.

(iv) $S_4 := \left\{ r \in \mathbb{Q} \ \middle| \ \begin{array}{c} r = \frac{a}{b}, \ \ (a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}), \\ \text{με μκδ}\, (a,b) = 1 \text{ και } a \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2) \end{array} \right\}$.

(v) $S_5 := \mathbb{Q}_{\geq 0} := \{ r \in \mathbb{Q} \mid r \geq 0\}$.

(vi) $S_6 := \left\{ r^2 \ \middle| \ r \in \mathbb{Q} \right\}$.

12. Να εξετασθεί ποια εκ των ακολούθων συνόλων είναι υποδακτύλιοι τού $\mathbb{R}^{[0,1]}$:

(i) $S_1 := \left\{ f \in \mathbb{R}^{[0,1]} \ \middle| \ f(q) = 0, \forall q \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \right\}$.

(ii) $S_2 := \left\{ f \in \mathbb{R}^{[0,1]} \ \middle| \ \begin{array}{c} f(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\nu} s_j x^j, \forall x \in [0,1], \\ \text{όπου } \nu \in \mathbb{N}_0 \text{ και } s_0, \ldots, s_\nu \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$.

(iii) $S_3 := \left\{ f \in \mathbb{R}^{[0,1]} \;\middle|\; \begin{array}{c} f(x)=0 \text{ μόνον για} \\ \text{πεπερασμένου πλήθους } x \in [0,1] \end{array} \right\} \cup \{0_{\mathbb{R}^{[0,1]}}\}$.

(iv) $S_4 := \left\{ f \in \mathbb{R}^{[0,1]} \mid f(x)=0 \text{ για άπειρα } x \in [0,1] \right\}$.

(v) $S_5 := \left\{ f \in \mathbb{R}^{[0,1]} \;\middle|\; \lim_{x \longrightarrow 1} f(x) = 0 \right\}$.

(vi) $S_6 := \left\{ f \in \mathbb{R}^{[0,1]} \;\middle|\; \begin{array}{c} f(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} r_i \sin(m_i x) + \sum\limits_{j=1}^{l} s_j \cos(n_j x), \\ \text{για κάποιους } r_i, s_j \in \mathbb{Q} \text{ και } m_i, n_j \in \mathbb{N}_0,\ k,l \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$.

13. Να προσδιορισθούν όλοι οι υποδακτύλιοι τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

14. Έστω S ένας υποδακτύλιος ενός δακτυλίου R. Εάν αμφότεροι οι S και R διαθέτουν μοναδιαίο στοιχείο και $1_S \neq 1_R$, να αποδειχθεί ότι το 1_S είναι ένας μηδενοδιαιρέτης εντός τού R.

15. Έστω R ένας μη τετριμμένος δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Υποθέτοντας την ύπαρξη δύο στοιχείων $a, b \in R$, για τα οποία ισχύουν οι ισότητες

$$ab + ba = 1_R,\ \ a^2 b + ba^2 = a,$$

να αποδειχθεί ότι $a \in R^{\times}$ με το $2b$ ως αντίστροφό του.

16. Έστω R ένας μη τετριμμένος δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Υποθέτοντας ότι τα $x, y \in R$ είναι δεξιά αντίστροφα ενός $u \in R$ (ήτοι ότι $ux = uy = 1_R$), να αποδειχθεί (i) ότι *και* το $xu + y - 1_R$ είναι δεξιό αντίστροφο τού u, και (ii) ότι το u διαθέτει *άπειρα* δεξιά αντίστροφα όταν $x \neq y$.

17. Έστω R ένας μη τετριμμένος δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Εάν το $a \in R$ είναι ένα μηδενοδύναμο στοιχείο τού R, να αποδειχθεί ότι το $1_R + a$ είναι αντιστρέψιμο.

18. Έστω R ένας μη τετριμμένος δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο και έστω τυχόν $x \in R$. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Το $1_R - x$ είναι αντιστρέψιμο με αντίστροφό του το $1_R + y \Leftrightarrow \exists y \in R : y - x = xy = yx$.

(ii) Για οιοδήποτε $y \in R$, το $1_R - xy$ είναι αντιστρέψιμο $\Longleftrightarrow$ το $1_R - yx$ είναι αντιστρέψιμο.

(iii) Το $1_R - xy$ είναι αντιστρέψιμο για κάθε $y \in R \Longleftrightarrow$ το $1_R - zxy$ είναι αντιστρέψιμο για οιαδήποτε $y, z \in R$.

19. Εάν $n \in \mathbb{N}$ και οι $R_1, \ldots, R_n$ είναι μη τετριμμένοι δακτύλιοι με μοναδιαίο στοιχείο, να αποδειχθεί ότι $(R_1 \times \cdots \times R_n)^{\times} = R_1^{\times} \times \cdots \times R_n^{\times}$.

20. Έστω το σύνολο $R := \left\{ \frac{a}{2^n} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}_0 \right\}$ εφοδιασμένο με τις συνήθεις πράξεις προσθέσεως και πολλαπλασιασμού ρητών αριθμών. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Το R είναι δακτύλιος και $\mathbb{Z} \subsetneqq R \subsetneqq \mathbb{Q}$,

(ii) Το R είναι ακεραία περιοχή.

(iii) $R^{\times} = \{\pm\, 2^{\nu} \mid \nu \in \mathbb{Z}\}$.

21. Έστω m ένας φυσικός αριθμός ≥ 2 και έστω

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} [a]_m & [b]_m \\ [c]_m & [d]_m \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_m) \;\middle|\; [c]_m = [0]_m \right\}.$$

Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Το σύνολο R είναι υποδακτύλιος τού $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_m)$ με μοναδιαίο στοιχείο του το $1_{\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_m)}$.

(ii) Ο R δεν είναι μεταθετικός.

(iii) Ισχύει η αμφίπλευρη συνεπαγωγή

$$\begin{pmatrix} [a]_m & [b]_m \\ [0]_m & [d]_m \end{pmatrix} \in R^{\times} \Longleftrightarrow \left([a]_m \in \mathbb{Z}_m^{\times} \text{ και } \; [d]_m \in \mathbb{Z}_m^{\times}\right).$$

(iv) $|R^{\times}| = m\,\phi\,(m)^2$, όπου ϕ η συνάρτηση φι τού Euler.

(v) Εάν $m = 2$, τότε η πολλαπλασιαστική ομάδα $(R^{\times}, \cdot)$ είναι ισόμορφη με την $(\mathbb{Z}_2, +)$.

22. Εάν $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, να προσδιορισθεί το σύνολο $\mathrm{Nil}(\mathbb{Z}_m)$ των μηδενοδύναμων στοιχείων τού $\mathbb{Z}_m$.

23. Να αποδειχθεί λεπτομερώς ότι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}\,[i]$ των ακεραίων τού Gauss (βλ. 6.1.11 (ii)) είναι ακεραία περιοχή αλλά όχι και σώμα.

24. Για οιονδήποτε ακέραιο m ο οποίος δεν είναι τέλειο τετράγωνο (δηλαδή $\sqrt{|m|} \notin \mathbb{Q}$), να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Για οιαδήποτε στοιχεία $a + b\sqrt{m}$ και $c + d\sqrt{m}$ τού δακτυλίου $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ (βλ. 6.1.11 (ii)) ισχύει η αμφίπλευρη συνεπαγωγή

$$a + b\sqrt{m} = c + d\sqrt{m} \Longleftrightarrow a = c \text{ και } \; b = d.$$

(ii) Ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ είναι *ακεραία περιοχή.*

(iii) Για κάθε $r + s\sqrt{m} \in \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ (βλ. (6.12)) ισχύει η αμφίπλευρη συνεπαγωγή

$$r^2 - ms^2 = 0 \Longleftrightarrow r = s = 0.$$

(iv) Ο δακτύλιος $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ είναι *υπόσωμα* τού $\mathbb{C}$, οπότε $\mathbb{Q}[\sqrt{m}] = \mathbb{Q}\,(\sqrt{m})$.

(v) Επειδή ο m γράφεται ως γινόμενο $m = m'k$ δύο μονοσημάντως ορισμένων ακεραίων m' και $k \geq 1$, όπου ο μεν m' στερείται τετραγώνων[1], ο δε k είναι τέλειο τετράγωνο, ισχύουν οι ισότητες

$$\mathbb{Z}[\sqrt{m}] = \mathbb{Z}[\sqrt{m'}] \text{ και } \; \mathbb{Q}(\sqrt{m}) = \mathbb{Q}(\sqrt{m'}).$$

(Γι' αυτόν τον λόγο είθισται στον ορισμό αυτών να υποθέτουμε εξαρχής ότι το υπόρριζο m *στερείται τετραγώνων*. Εν τοιαύτη περιπτώσει, λέμε ότι ο $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ είναι η **τετραγωνική αριθμητική περιοχή** η αντιστοιχιζόμενη στον m και, κατ' αναλογίαν, ότι το σώμα $\mathbb{Q}\,(\sqrt{m})$ είναι το **τετραγωνικό αριθμητικό σώμα** το αντιστοιχιζόμενο στον m.)

(vi) Εάν οι m_1, m_2 είναι ακέραιοι που στερούνται τετραγώνων, τότε

$$[\mathbb{Z}[\sqrt{m_1}] = \mathbb{Z}[\sqrt{m_2}] \Leftrightarrow m_1 = m_2]$$

και $[\mathbb{Q}(\sqrt{m_1}) = \mathbb{Q}(\sqrt{m_2}) \Leftrightarrow m_1 = m_2]$.

25. Δοθέντος ενός μη τετριμμένου δακτυλίου R με μοναδιαίο στοιχείο θεωρούμε το σύνολο $R^{\mathbb{Z}}$ όλων των ακολουθιών

$$(\ldots\ldots, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots), \;\; a_i \in R, \;\; \forall i \in \mathbb{Z},$$

καθώς και το υποσύνολο $\mathfrak{L}$ τού $R^{\mathbb{Z}}$ το απαρτιζόμενο από εκείνες τις ακολουθίες για τις οποίες υπάρχουν *το πολύ πεπερασμένου πλήθους* a_i, $i < 0$, που είναι $\neq 0_R$. Επί τού $R^{\mathbb{Z}}$ ορίζονται πράξεις *προσθέσεως* και *πολλαπλασιασμού* ως ακολούθως:

[1] Λέμε ότι ένας ακέραιος αριθμός d **στερείται τετραγώνων** όταν $d \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0, 1\}$ και $\nexists c \in \mathbb{N}, c \geq 2$, τέτοιο ώστε να ισχύει $c^2 \mid d$. Αυτό σημαίνει ότι είτε $d = -1$ είτε $|d| = p_1 \cdots p_k$, όπου $k \in \mathbb{N}$ και οι $p_1, \ldots, p_k$ είναι πρώτοι αριθμοί (*σαφώς διακεκριμένοι* όταν $k \geq 2$), δηλαδή ότι $d \in \{-1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 10, \pm 11, \pm 13, \ldots\}$.

$$(..,a_{-1},a_0,a_1,..)+(..,b_{-1},b_0,b_1,..):=(\dots,a_{-1}+b_{-1},a_0+b_0,a_1+b_1,\dots),$$

$$(\dots,a_{-1},a_0,a_1,\dots)\cdot(\dots,b_{-1},b_0,b_1,\dots):=(\dots,c_{-1},c_0,c_1,\dots),$$

όπου $c_m := \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}: i+j=m} a_i b_j$, $\forall m\in\mathbb{Z}$ (με το πλήθος των μη μηδενικών προσθετέων τού c_m *το πολύ πεπερασμένο*[2]). Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Η τριάδα $(R^{\mathbb{Z}},+,\cdot)$ αποτελεί έναν δακτύλιο με το $(...,0_R,0_R,0_R,0_R,0_R,\dots)$ ως μηδενικό του στοιχείο και το $(...,0_R,\underbrace{1_R}_{\text{θέση με δείκτη 0}},0_R,\dots)$ ως μοναδιαίο του στοιχείο, και η τριάδα $(\mathfrak{L},+,\cdot)$ έναν υποδακτύλιο τού $(R^{\mathbb{Z}},+,\cdot)$ (με το ίδιο μοναδιαίο στοιχείο). Εάν

$$\mathsf{X}:=(...,0_R,\underbrace{0_R}_{\text{θέση με δείκτη 0}},\underbrace{1_R}_{\text{θέση με δείκτη 1}},0_R,0_R,\dots),$$

τότε, βάσει των ως άνω πράξεων, κάθε στοιχείο

$$(\dots\dots,0_R,0_R,a_{-n},\dots,a_{-3},a_{-2},a_{-1},a_0,a_1,a_2,\dots\dots),$$

τού $\mathfrak{L}$ (όπου $a_i=0_R$ για κάθε ακέραιον $i<-n$) γράφεται υπό τη μορφή

$$a_{-n}\mathsf{X}^{-n}+a_{n-1}\mathsf{X}^{-n+1}+\cdots+a_{-1}\mathsf{X}^{-1}+a_0+a_1\mathsf{X}+a_2\mathsf{X}^2+\cdots=:\sum_{i=-n}^{\infty}a_i\mathsf{X}^i.$$

Σημείωση: Ο δακτύλιος $(\mathfrak{L},+,\cdot)$ συμβολίζεται ως $\mathrm{Laur}_R[\![\mathsf{X}^{\pm1}]\!]$ και καλείται **δακτύλιος των επίτυπων σειρών Laurent** μιας **απροσδιορίστου**) X με συντελεστές ειλημμένους από τον R.

(ii) Κάθε στοιχείο τού $\mathrm{Laur}_R[\![\mathsf{X}^{\pm1}]\!]$ τής μορφής $\varphi(\mathsf{X})=\sum_{i=-n}^{\infty}a_i\mathsf{X}^i$ για το οποίο

$$\exists m\in\mathbb{N}_0 : a_i=0_R \text{ για κάθε ακέραιον } i>m$$

καλείται **επίτυπο πολυώνυμο Laurent** μιας **απροσδιορίστου** X με συντελεστές ειλημμένους από τον R. Το σύνολο αυτών των πολυωνύμων συμβολίζεται ως $R\left[\mathsf{X},\mathsf{X}^{-1}\right]$ ή $R[\mathsf{X}^{\pm1}]$, αποτελεί υποδακτύλιο τού $\mathrm{Laur}_R[\![\mathsf{X}^{\pm1}]\!]$ (με το ίδιο μοναδιαίο στοιχείο) και καλείται **δακτύλιος των επίτυπων πολυωνύμων Laurent** μιας **απροσδιορίστου** X με συντελεστές ειλημμένους από τον R.

(iii) Εάν ο R είναι μεταθετικός, τότε και οι $R[\mathsf{X}^{\pm1}]$ και $\mathrm{Laur}_R[\![\mathsf{X}^{\pm1}]\!]$ είναι μεταθετικοί.

(iv) Εάν ο R είναι ακεραία περιοχή, τότε και οι $R[\mathsf{X}^{\pm1}]$ και $\mathrm{Laur}_R[\![\mathsf{X}^{\pm1}]\!]$ είναι ακέραιες περιοχές.

(v) $\chi\alpha\varrho(R)=\chi\alpha\varrho(\mathrm{Laur}_R[\![\mathsf{X}^{\pm1}]\!])=\chi\alpha\varrho(R[\mathsf{X}^{\pm1}])$.

(vi) Εάν ο R είναι ακεραία περιοχή, τότε ένα στοιχείο $\varphi(\mathsf{X})\in R[\mathsf{X}^{\pm1}]$ είναι αντιστρέψιμο εάν και μόνον εάν $\exists a\in R^{\times}$ και $k\in\mathbb{Z}:\varphi(\mathsf{X})=a\,\mathsf{X}^k$.

(vii) Εάν ο R είναι ακεραία περιοχή, ένα $\varphi(\mathsf{X})=\sum_{i=-n}^{\infty}a_i\mathsf{X}^i\in\mathrm{Laur}_R[\![\mathsf{X}^{\pm1}]\!]$ με $a_{-n}\neq0_R$ $(n\in\mathbb{N})$ είναι αντιστρέψιμο εάν και μόνον εάν $a_{-n}\in R^{\times}$.

(viii) Οι $R[\mathsf{X}]$, $R[\mathsf{X}^{\pm1}]$ και $R[\![\mathsf{X}]\!]$ δεν είναι ποτέ στρεβλά σώματα ή σώματα.

(ix) Ο δακτύλιος $\mathrm{Laur}_R[\![\mathsf{X}^{\pm1}]\!]$ είναι στρεβλό σώμα (και αντιστοίχως, σώμα) εάν και μόνον εάν ο R είναι στρεβλό σώμα (και αντιστοίχως, σώμα).

[2]Επειδή (εξ υποθέσεως) καθένα εκ των συνόλων $\{\,i\in\mathbb{Z}|\,i<0 \text{ και } a_i\neq0_R\}$ και $\{\,j\in\mathbb{Z}|\,j<0 \text{ και } b_j\neq0_R\}$ είναι είτε κενό είτε πεπερασμένο, το σύνολο $\{\,(i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}|\,i+j=m \text{ και } a_ib_j\neq0_R\}$ οφείλει να είναι το πολύ πεπερασμένο *για κάθε* $m\in\mathbb{Z}$.