ΑΛΓΕΒΡΑ Ι: 6ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα. Εάν $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ με μκδ$(m, n) = 1$ είναι τέτοιοι, ώστε να ισχύει

$$a^m b^m = b^m a^m \text{ και } a^n b^n = b^n a^n, \; \forall (a, b) \in G \times G,$$

να αποδειχθεί οτι η $(G, \cdot)$ είναι κατ' ανάγκην αβελιανή.

2. Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα και έστω S ένα μη κενό σύνολο. Εάν η $f : S \longrightarrow G$ είναι μια αμφίρριψη, να αποδειχθεί ότι το ζεύγος $(S, \odot)$ είναι μια ομάδα όταν -εξ ορισμού- $x \odot y := f^{-1}(f(x) \cdot f(y)), \; \forall (x, y) \in S \times S$.

3. Να εξακριβωθεί ότι τα $H := \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ και $K := \left\{ \frac{1+2n}{1+2m} \,\middle|\, n, m \in \mathbb{Z} \right\}$ αποτελούν υποομάδες τής ομάδας $(\mathbb{Q} \smallsetminus \{0\}, \cdot)$.

4. Έστω H μια υποομάδα τής $(\mathbb{R}, +)$. Να αποδειχθεί ότι το $K := \{2^x \mid x \in H\}$ είναι υποομάδα τής $(\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}, \cdot)$.

5. Να αποδειχθεί ότι το

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z}) \,\middle|\, a + b + c + d = 0 \right\}$$

αποτελεί μια υποομάδα τής $(\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z}), +)$.

6. Έστω $(G, \cdot)$ μια αβελιανή ομάδα. Να αποδειχθεί ότι τα σύνολα $H_m, m \in \mathbb{Z}$, όπου $H_m := \{g \in G \mid g^m = e_G\}$, είναι υποομάδες τής G.

7. Έστω $(G, \cdot)$ μια πεπερασμένη ομάδα. Εάν $A \subseteq G$ με card$(A) > \frac{|G|}{2}$ και $g \in G$, να αποδειχθεί η ύπαρξη στοιχείων $a, b \in A$, τέτοιων ώστε να ισχύει $g = ab$.

8. Για καθεμιά εκ των κατωτέρω ομάδων να προσδιορισθούν δυο μη τετριμμένες γνήσιες υποομάδες:

(i) $(\mathbb{Z}, +)$, (ii) $(\mathbb{Q}, +)$, (iii) $(\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}, \cdot)$,

(iv) $(10\mathbb{Z}, +)$, (v) $(\mathbb{Z}_{11}^{\times}, \cdot)$, (vi) $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}), \cdot)$.

9. Να αποδειχθεί ότι μια ομάδα είναι πεπερασμένη εάν και μόνον εάν διαθέτει πεπερασμένου πλήθους υποομάδες. (Ισοδυνάμως, μια ομάδα είναι άπειρη εάν και μόνον εάν το σύνολο των υποομάδων της είναι άπειρο.)

10. Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα. Να αποδειχθεί ότι card$(\mathbf{Subg}(G)) = 3 \Leftrightarrow$ η G είναι κυκλική τάξεως p^2, όπου p κάποιος πρώτος αριθμός.

11. Να αποδειχθεί ότι η $(\mathbb{Z}_{11}^{\times}, \cdot)$ είναι κυκλική.

12. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ το

$$H_m := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, a \equiv d \equiv 1 (\mathrm{mod}\, m) \text{ και } b \equiv c \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m) \right\}$$

αποτελεί μια υποομάδα τής $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

13. Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα. Να αποδειχθούν τα εξής:

(i) Εάν $H \sqsubset G$ και $K \sqsubset G$, τότε $\exists g \in G$ με $g \notin H$ και $g \notin K$.

(ii) Εάν $H \sqsubset G$, τότε $\langle G \smallsetminus H \rangle = G$ και $\langle H \smallsetminus \{e_G\} \rangle = H$.

14. Οι γεννήτορες τής κυκλικής ομάδας $(\mathcal{E}_n, \cdot)$, $n \in \mathbb{N}$, των n-οστών ριζών τής μονάδας καλούνται **πρωταρχικές** n**-οστές ρίζες τής μονάδας**. Να δειχθεί ότι το σύνολο των πρωταρχικών n-οστών ριζών τής μονάδας είναι το $\left\{ \zeta_n^k \middle| 1 \leq k \leq n \text{ και μκδ}(k,n) = 1 \right\}$.

15. Να αποδειχθεί ότι κάθε άπειρη κυκλική ομάδα διαθέτει *ακριβώς δύο* γεννήτορες.

16. Εάν $\{H_j\}_{j \in J}$ είναι μια οικογένεια υποομάδων μιας ομάδας $(G, \cdot)$, όπου το

$$J = \{j_1, ..., j_n, j_{n+1}, ...\} \subseteq \mathbb{N}_0$$

είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο δεικτών και ισχύει $H_{j_k} \subseteq H_{j_{k+1}}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί

(i) ότι η ένωση $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} H_{j_k}$ αποτελεί μια υποομάδα τής G και

(ii) ότι εάν η H_{j_k} είναι αβελιανή για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε και η $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} H_{j_k}$ είναι ωσαύτως αβελιανή.

17. Για την ομάδα $(\mathbb{Q}, +)$ να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Κάθε πεπερασμένως παραγόμενη υποομάδα τής $(\mathbb{Q}, +)$ είναι γνήσια και κυκλική.

(ii) $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\langle \frac{1}{n!} \right\rangle$.

(iii) $\textbf{Max-Subg}(\mathbb{Q}) = \varnothing = \textbf{Min-Subg}(\mathbb{Q})$.

18. Εάν $\{H_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία γνησίων υποομάδων μιας ομάδας $(G, \cdot)$, για την οποία ισχύει $H_j \subseteq H_{j+1}$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$ και $G = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} H_j$, να αποδειχθεί ότι η $(G, \cdot)$ δεν είναι πεπερασμένως παραγόμενη.

19. Έστω $G := \langle f_1, f_2 \rangle$ η υποομάδα τής ομάδας $(\textbf{Bij}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \circ)$ (των αμφιρρίψεων από το $\mathbb{R}$ επί τού $\mathbb{R}$ ως προς την πράξη τής συνθέσεως) η παραγόμενη από τις αμφιρρίψεις

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto f_1(x) := x + 1 \in \mathbb{R} \;\text{ και }\; \mathbb{R} \ni x \longmapsto f_2(x) := 2x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδειχθεί η ύπαρξη μιας γνήσιας μη πεπερασμένως παραγόμενης υποομάδας H τής G. [*Υπόδειξη*: Αρκεί για κάθε $j \in \mathbb{N}$ να θεωρηθεί η κυκλική υποομάδα $H_j := \langle \sigma_j \rangle$ η παραγόμενη από την αμφίρριψη

$$\sigma_j := f_2^{-j} \circ f_1 \circ f_2^j \;\text{ με τύπο }\; \mathbb{R} \ni x \longmapsto \sigma_j(x) := x + 2^{-j} \in \mathbb{R},$$

να τεθεί $H := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} H_j$, να αποδειχθεί ότι $H_j \sqsubset H_{j+1}$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$ και να εφαρμοσθεί καταλλήλως η άσκηση **18**.]

20. Επί τού συνόλου $G := (\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ ορίζεται η εσωτερική πράξη:

$$G \times G \ni ((a,b),(c,d)) \longmapsto (a,b) \boxdot (c,d) := (ac, bc + d) \in G.$$

(i) Να αποδειχθεί ότι το ζεύγος $(G, \boxdot)$ είναι μια μη αβελιανή ομάδα.

(ii) Ποια εκ των κάτωθι υποσυνόλων αποτελούν υποομάδες αυτής;

$$H_1 := \{\, (a, k(a-1)) |\, a \neq 0 \}, \qquad H_2 := \{\, (a, 0) |\, a > 0 \},$$
$$H_3 := \{\, (a, na^n) |\, a \neq 0 \}, \qquad H_4 := \{\, (1, b)) |\, b \in \mathbb{R} \}.$$

(Εν προκειμένω, οι $k \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}_0$ είναι παγιωμένοι.)

(iii) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο των στοιχείων τής $(G, \boxdot)$ που έχουν τάξη 2 είναι άπειρο.

(iv) Διαθέτει η $(G, \boxdot)$ στοιχεία τάξεως 3;