ΑΛΓΕΒΡΑ Ι: 4ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) $2^{20} - 1 \equiv 0 (\bmod 41)$.

(ii) $2^{50} \equiv 4 (\bmod 7)$.

(iii) $41^{65} \equiv 6 (\bmod 7)$.

2. Να αποδειχθεί ότι

$$1! + 2! + 3! + \cdots + 99! + 100! \equiv 9 (\bmod 12).$$

3. Να αποδειχθεί ότι

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + 99^5 + 100^5 \equiv 0 (\bmod 4).$$

4. Εάν $m \in \mathbb{N}$ είναι ένας σύνθετος αριθμός, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Εάν $m > 4$, τότε $(m-1)! \equiv 0 (\bmod m)$.

(ii) Ο $(m-1)! + 1$ δεν είναι δύναμη τού m.

5. Εάν $m \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, με $a \equiv b (\bmod m)$, και $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ένα πολυώνυμο με ακεραίους συντελεστές, να αποδειχθεί η ισχύς τής ισοτιμίας

$$f(a) \equiv f(b) (\bmod m).$$

6. *Ειδικά κριτήρια διαιρετότητας* (*διά τού* 3, *διά τού* 9 *ή διά τού* 11). Έστω

$$n = c_m 10^m + c_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + c_1 10^1 + c_0,$$

$c_j \in \{0, 1, ..., 9\}, \forall j \in \{1, ..., m-1\}$, $c_m \in \{1, ..., 9\}$ η παράσταση ενός $n \in \mathbb{N}$ στο δεκαδικό σύστημα (όπου $m \in \mathbb{N}_0$). Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) $3 \mid n \Longleftrightarrow 3 \mid \sum_{j=0}^{m} c_j$.

(ii) $9 \mid n \Longleftrightarrow 9 \mid \sum_{j=0}^{m} c_j$.

(iii) $11 \mid n \Longleftrightarrow 11 \mid \sum_{j=0}^{m} (-1)^j c_j$.

7. Εάν $n \in \mathbb{N}$ και $a, b \in \mathbb{Z}$, να αποδειχθεί ότι οι συντελεστές τού διωνυμικού αναπτύγματος τού $(a+b)^n$ είναι περιττοί εάν και μόνον εάν $n = 2^k - 1$, για κάποιον $k \in \mathbb{N}$.

8. Εάν $a \in \mathbb{Z}$, $b, c, m \in \mathbb{N}$, με $a^b \equiv 1 (\bmod m)$ και $a^c \equiv 1 (\bmod m)$, να αποδειχθεί ότι

$$a^{\text{μκδ}(b,c)} \equiv 1 (\bmod m).$$

9. Να αποδειχθεί ότι για οιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$ και για οιονδήποτε περιττό ακέραιο αριθμό a ισχύει η ισοτιμία

$$a^{2^n} \equiv 1 \left(\bmod 2^{n+2}\right).$$

10. Να προσδιορισθεί το υπόλοιπο τής διαιρέσεως τού 3^{100} διά τού 101.

11. Να αποδειχθεί ότι το 51 διαιρεί το $10^{32n+9} - 7$ για κάθε φυσικό αριθμό n.

12. Να αποδειχθεί ότι για οιονδήποτε ακέραιο αριθμό a ισχύει η ισοτιμία

$$a^{33} \equiv a \,(\operatorname{mod} 15)\,.$$

13. Να αποδειχθεί ότι για οιονδήποτε περιττό ακέραιο αριθμό a ισχύει η ισοτιμία

$$a^{17} \equiv a \,(\operatorname{mod} 8160)\,.$$

14. Να αποδειχθούν οι ακόλουθες ιδιότητες τής συναρτήσεως φι τού Euler:

(i) Η ϕ δεν είναι ούτε ενριπτική ούτε επιρριπτική.

(ii) Εάν $m \in \mathbb{N},\ m \geq 2$, τότε $\phi\,(m) = m - 1 \Longleftrightarrow$ ο m είναι πρώτος αριθμός.

(iii) Εάν $m \in \mathbb{N},\ m \geq 3$, τότε το $\phi\,(m)$ είναι άρτιος αριθμός.

(iv) $n = \sum_{d|n} \phi\,(d)$ για οιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$.

(v) Εάν $m, n, k \in \mathbb{N}$, και $m \mid n$, τότε $\phi\left(mn^k\right) = n^k \phi\,(m)\,.$

(vi) $\phi\left(m^2\right) = m\phi\,(m)$ για οιονδήποτε $m \in \mathbb{N}$.

(vii) Εάν $m, n \in \mathbb{N}$ και $m \mid n$, τότε $\phi\,(m) \mid \phi\,(n)\,.$

(viii) Εάν $m \in \mathbb{N}$, τότε $3 \mid m \Longleftrightarrow \phi\,(3m) = 3\phi\,(m)$
και $3 \nmid m \Longleftrightarrow \phi\,(3m) = 2\phi\,(m)\,.$

(ix) $\phi\,(mn)\,\phi\,(\text{μκδ}(m,n)) = \phi\,(m)\,\phi\,(n)\text{μκδ}(m,n)$ για οιουσδήποτε $m, n \in \mathbb{N}$.

(x) $\phi\,(m)\,\phi\,(n) = \phi\,(\text{μκδ}(m,n))\,\phi\,(\text{εκπ}(m,n))$ για οιουσδήποτε $m, n \in \mathbb{N}$.

15. Εάν οι p, q είναι περιττοί πρώτοι με $p \neq q$, και a ένας ακέραιος για τον οποίο ισχύει μκδ$(a, pq) = 1$, να αποδειχθεί η ισχύς τής ισοτιμίας

$$a^{\frac{\phi(pq)}{2}} \equiv 1 \,(\operatorname{mod} pq)\,.$$

16. Εάν $m, n \in \mathbb{N}$ και μκδ$(m, n) = 1$, να αποδειχθεί ότι

$$m^{\phi(n)} + n^{\phi(m)} \equiv 1 \,(\operatorname{mod} mn)\,.$$

17. Εάν $n \in \mathbb{N}$ και $a \in \mathbb{Z}$, όπου μκδ$(a, n) = 1 =$ μκδ$(a - 1, n)$, να αποδειχθεί η ισχύς τής ισοτιμίας

$$\sum_{j=0}^{\phi(n)-1} a^j \equiv 0 \,(\operatorname{mod} n)\,.$$

18. Να επιλυθούν οι γραμμικές ισοτιμίες (με τον x προσδιοριστέο):

(i) $5x \equiv 3 \,(\operatorname{mod} 24)\,,$

(ii) $540x \equiv 18 \,(\operatorname{mod} 462)\,.$

19. Εάν ο p είναι περιττός πρώτος αριθμός, να αποδειχθεί ότι

$$(p-1)! \equiv p - 1 (\operatorname{mod} \sum_{j=1}^{p-1} j).$$

20. Εάν ο p είναι περιττός πρώτος αριθμός, να αποδειχθεί η ισχύς των ισοτιμιών

$$\prod_{j=0}^{\frac{p-3}{2}} (2j+1)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \,(\operatorname{mod} p)\,, \qquad \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} (2j)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \,(\operatorname{mod} p)\,.$$