# ΑΛΓΕΒΡΑ Ι: 8ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

**1.** Εάν $(G, \cdot)$ είναι μια κυκλική ομάδα άπειρης τάξεως, να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση $f : G \to G$, $f(g) := g^2, \forall g \in G$, είναι μονομορφισμός, αλλά όχι και αυτομορφισμός.

**2.** Εάν $(G, \cdot)$ είναι μια πεπερασμένη ομάδα και η $f : G \longrightarrow G$ ένας μονομορφισμός, να αποδειχθεί ότι η $f$ είναι κατ' ανάγκην αυτομορφισμός τής $G$.

**3.** Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα. Να αποδειχθεί ότι η $G$ είναι αβελιανή εάν και μόνον εάν η $f : G \to G$, $f(g) := g^{-1}$, $\forall g \in G$, είναι ένας αυτομορφισμός τής $G$.

**4.** Έστω $(G, \cdot)$ μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα. Εάν υπάρχει $\vartheta \in \mathrm{Aut}(G)$ με $\vartheta^2 = \mathrm{id}_G$ και εάν η τάξη $|G|$ αυτής τής ομάδας είναι περιττή, να αποδειχθεί ότι κάθε στοιχείο $x \in G$ γράφεται ως γινόμενο $x = yz$ δυο στοιχείων $y, z \in G$ για τα οποία ισχύει $\vartheta(y) = y$ και $\vartheta(z) = z^{-1}$.

**5.** Για οιοδήποτε μη κενό σύνολο $A$ και για οιοδήποτε στοιχείο $a \in A$ να αποδειχθεί ότι το $\{\sigma \in \mathfrak{S}_A | \, \sigma(a) = a\}$ αποτελεί μια υποομάδα τής $(\mathfrak{S}_A, \circ)$.

**6.** Εάν $m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$ και $\sigma : \mathbb{Z}_m \longrightarrow \mathbb{Z}_m$ η απεικόνιση $[l]_m \longmapsto \sigma([l]_m) := [kl]_m$, να αποδειχθεί ότι $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_m} \Longleftrightarrow$ μκδ$(k, m) = 1$.

**7.** (i) Εάν $(G, \cdot)$ είναι μια αβελιανή ομάδα, $a, b$ στοιχεία τής $G$,και $l, m, n \in \mathbb{N}$, για τους οποίους ισχύει μκδ$(l, m) =$ μκδ$(m, n) =$ μκδ$(n, l) = 1$, να αποδειχθεί η συνεπαγωγή

$$\left[a^l = b^m = (ab)^n = e_G\right] \Longrightarrow a = b = e_G.$$

(ii) Παραμένει αυτό το συμπέρασμα εν ισχύ ακόμη και όταν η $G$ είναι μη αβελιανή;

**8.** (i) Να υπολογισθούν οι συνθέσεις των ακολούθων μετατάξεων εντός τής $\mathfrak{S}_6$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 5 & 2 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}^3, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^5,$$

καθώς και τα αντίστροφα αυτών.

(ii) Να εκφρασθεί η μετάταξη

$$\sigma := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 9 & 8 & 4 & 5 & 7 & 11 & 1 & 2 & 6 & 10 \end{bmatrix} \in \mathfrak{S}_{11}$$

υπό τη μορφή επαλλήλων συνθέσεων ανά δύο ξένων μεταξύ τους κύκλων μήκους $\geq 2$ και να υπολογισθεί η τάξη της.

**9.** Να αποδειχθεί ότι εντός τής συμμετρικής ομάδας $\mathfrak{S}_6$ οι συνθέσεις κύκλων

$$[1\,4\,5\,6] \circ [2\,1\,5]\,, \ [2\,1\,5] \circ [1\,4\,5\,6]$$

είναι δύο (άνισες) μετατάξεις που δεν είναι κύκλοι.

**10.** Εάν $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, και $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ με $\sigma(i) \neq i$ για κάποιον $i \in \{1, ..., n\}$, να αποδειχθεί ότι $\sigma^2(i) \neq \sigma(i)$.

**11.** Εάν $\tau := [1\,2\,3\,4] \in \mathfrak{S}_4$, να προσδιορισθούν όλες οι μετατάξεις $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ για τις οποίες ισχύει η ισότητα $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} = \tau^3$.

**12.** Να προσδιορισθούν οι μετατάξεις $\sigma_1, \sigma_2$ εντός τής συμμετρικής ομάδας $\mathfrak{S}_7$ για τις οποίες οι ισότητες $\sigma_1 \circ \varrho = \tau = \varrho \circ \sigma_2$, όπου

$$\varrho := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 7 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \ \tau := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 7 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

**13.** Δίδονται οι μετατάξεις

$$\sigma := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \in \mathfrak{S}_9$$

και

$$\tau := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & \ldots & 3n-1 & 3n & 3n-2 \end{bmatrix} \in \mathfrak{S}_{3n}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Να εκφρασθούν οι $\sigma$ και $\tau$ υπό τη μορφή επαλλήλων συνθέσεων (πεπερασμένου πλήθους) ανά δύο ξένων μεταξύ τους κύκλων μήκους $\geq 2$. Εν συνεχεία, να εξετασθεί εάν οι $\sigma$ και $\tau$ είναι άρτιες ή περιττές.

**14.** Να προσδιορισθεί η $\sigma^{1000} = \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \cdots \circ \sigma}_{1000 \text{ φορές}}$ όταν

$$\sigma := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \in \mathfrak{S}_9.$$

**15.** Εάν $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, και $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_n$ είναι δυο αντιμεταθέσεις, να αποδειχθεί ότι η μετάταξη $\sigma_1 \circ \sigma_2$ μπορεί να γραφεί ως σύνθεση (όχι κατ' ανάγκην ανά δύο ξένων μεταξύ τους) κύκλων μήκους 3.

**16.** Έστω $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$, και έστω $p$ ένας πρώτος αριθμός. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Η τάξη μιας μετατάξεως $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ είναι ίση με $p$ εάν και μόνον η $\sigma$ γράφεται ως σύνθεση επαλλήλων ανά δύο ξένων μεταξύ τους $p$-κύκλων.

(ii) Το (i) δεν είναι εν γένει αληθές εάν σε αυτό ο πρώτος αριθμός $p$ αντικατασταθεί με έναν σύνθετο αριθμό.

**17.** Εάν $m, n \in \mathbb{N}$ με $m \mid n$ και $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ είναι ένας $n$-κύκλος, να αποδειχθεί ότι η μετάταξη $\sigma^m$ γράφεται ως σύνθεση $m$ επαλλήλων ανά δύο ξένων μεταξύ τους $\frac{n}{m}$-κύκλων.

**18.** Εάν $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, και $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, να αποδειχθεί ότι

$$\mathfrak{S}_n = \langle [\sigma(1)\ \sigma(2)], [\sigma(1)\ \sigma(2)\ \ldots\ \sigma(n)] \rangle .$$

**19.** Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\sigma \in \mathfrak{S}_5 \smallsetminus \{\mathrm{id}\}$ υπάρχει κάποια μετάταξη $\tau \in \mathfrak{S}_5$, τέτοια ώστε να ισχύει $\mathfrak{S}_5 = \langle \sigma, \tau \rangle$.

**20.** Εάν $n \in \mathbb{N}$ και $\tau := [1\ 2\ \ldots\ n] \in \mathfrak{S}_n$, να αποδειχθεί ότι για κάθε $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ισχύει

$$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma \Longleftrightarrow \sigma \in \langle \tau \rangle .$$