ΑΛΓΕΒΡΑ Ι: 7ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Να προσδιορισθεί η τάξη τού στοιχείου g τής ομάδας $(G, *)$ στις 10 περιπτώσεις τις παρατιθέμενες στον κάτωθι κατάλογο:

Α/Α	$(G,*)$	g	Α/Α	$(G,*)$	g
(i)	$(\mathbb{C}\smallsetminus\{0\},\cdot)$	$-i$	(vi)	$(\mathbb{Z}_{18},+)$	$[2]_{18}$
(ii)	$(\mathbb{C}\smallsetminus\{0\},\cdot)$	$-1+i\sqrt{3}$	(vii)	$(\mathbb{Z}_{150},+)$	$[55]_{150}$
(iii)	$(\mathbb{C}\smallsetminus\{0\},\cdot)$	$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$	(viii)	$(\mathbb{Z}_{150},+)$	$[60]_{150}$
(iv)	$(\mathbb{C}\smallsetminus\{0\},\cdot)$	$\exp(\frac{2\pi i}{11})$	(ix)	$(\mathbb{Z}_{23}^{\times},\cdot)$	$[2]_{23}$
(v)	$(\mathbb{C}\smallsetminus\{0\},\cdot)$	$\exp(\frac{\pi i}{12})$	(x)	$(\mathbb{Z}_{21}^{\times},\cdot)$	$[4]_{21}$

2. Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα τάξεως $2n$, για κάποιον $n \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί ότι
(i) $\exists m \in \mathbb{N} : \mathrm{card}\big(\{\, x \in G \mid x^{-1} = x\}\big) = 2m$,
(ii) $\exists a \in G : \mathrm{ord}(a) = 2$.

3. Εάν $(G,\cdot)$ είναι μια αβελιανή ομάδα και $(x,y) \in G\times G$ με $x^n = y^n$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί ότι $y = xw$ για κάποιο $w \in G$ με $\mathrm{ord}(w) \mid n$.

4. Εάν $(G,\cdot)$ είναι μια ομάδα, $(x,y) \in G \times G$ με $xy = yx$ και

$$\mathrm{ord}\,(x) = m \in \mathbb{N}, \ \ \mathrm{ord}\,(y) = n \in \mathbb{N},$$

να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Η τάξη $\mathrm{ord}(xy)$ τού xy είναι πεπερασμένη,

$$\frac{\text{εκπ}\,(m,n)}{\text{μκδ}\,(m,n)} \mid \mathrm{ord}\,(xy) \quad \text{και} \quad \mathrm{ord}\,(xy) \mid \text{εκπ}\,(m,n)\,.$$

(ii) Ειδικότερα, $\text{μκδ}(m,n) = 1 \Longleftrightarrow \mathrm{ord}(xy) = mn$.

(iii) Εάν για κάθε πρώτο αριθμό p που διαιρεί το γινόμενο mn, η μέγιστη δύναμη τού p που διαιρεί τον m δεν ισούται με τη μέγιστη δύναμη τού p που διαιρεί τον n, τότε

$$\mathrm{ord}\,(xy) = \text{εκπ}\,(m,n)\,.$$

Εν συνεχεία, να δοθεί παράδειγμα ζεύγους στοιχείων x, y πεπερασμένης τάξεως μιας ομάδας $(G,*)$ με $x*y = y*x \neq e_G$ και

$$\mathrm{ord}(x*y) < \text{εκπ}(\mathrm{ord}(x), \mathrm{ord}(y)).$$

5. Εντός τής $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ να υπολογισθούν οι τάξεις των στοιχείων

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \ \text{και} \ \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Εν συνεχεία, να αποδειχθεί ότι $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \langle \mathbf{A}, \mathbf{AB} \rangle$.

6. Έστω τυχών $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Εντός τής $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_n)$ να υπολογισθούν οι τάξεις των

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} [-1]_n & [1]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} := \begin{pmatrix} [-1]_n & [0]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix} \ \text{και} \ \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} [1]_n & [1]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix}.$$

7. Εάν $(G, \cdot)$ είναι μια αβελιανή ομάδα και $(g, h) \in G \times G$ με

$$\mathrm{ord}\,(g) = m \in \mathbb{N}, \ \ \mathrm{ord}\,(h) = n \in \mathbb{N},$$

να αποδειχθούν τα εξής:

(i) $\exists a \in G : \mathrm{ord}(a) = \text{εκπ}(m, n)$.

(ii) Εάν $\mathrm{ord}(x) \leq m, \forall x \in G \smallsetminus \{g\}$, τότε $\mathrm{ord}\,(y) |\, m$ και $y^m = e_G, \forall y \in G$.

8. Να αποδειχθεί ότι το $H := \{\exp(\pi i r) | \, r \in \mathbb{Q}\}$ αποτελεί μια άπειρη, περιοδική υποομάδα τής $(\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}, \cdot)$, καθώς και ότι για οιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$ η H διαθέτει κάποιο στοιχείο, η τάξη τού οποίου ισούται με n.

9. Έστω $(G, \cdot)$ μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα και έστω $u := \prod_{g \in G} g$ το γινόμενο όλων των στοιχείων της. Να αποδειχθεί ότι:

(i) Εάν η G διαθέτει ακριβώς ένα στοιχείο a τάξεως 2, τότε $u = a$.

(ii) Ένας φυσικός αριθμός $p \geq 2$ είναι πρώτος εάν και μόνον εάν ισχύει η ισοτιμία

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Τούτο είναι γνωστό στη Στοιχειώδη Θεωρία Αριθμών ως *θεώρημα τού Wilson*. [*Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιηθεί το (i) για την ομάδα $G = \mathbb{Z}_p^{\times}$.]

10. Έστω τυχών $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$. Να δειχθεί ότι η ομάδα $(\mathbb{Z}_{2^k}^{\times}, \cdot)$ δεν είναι κυκλική. [*Υπόδειξη*: Αρκεί να δειχθεί ότι $\mathrm{ord}([2^k - 1]_{2^k}) = \mathrm{ord}([2^{k-1} + 1]_{2^k}) = 2$.]

11. Να εξετασθεί ποιες εκ των ακολούθων απεικονίσεων είναι ομομορφισμοί ομάδων:

(i) $f : (\mathbb{Z}_{12}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_{12}, +)$, $f([n]_{12}) := [n+1]_{12}$,

(ii) $f : (G, \cdot) \longrightarrow (G, \cdot)$, $f(x) := x^3$, όπου G μια κυκλική ομάδα τάξεως 12,

(iii) $f : (\mathbb{Z}_8, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_2, +)$, $f([n]_8) := [n]_2$,

(iv) $f : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}, \cdot)$, $f(x) := \cos(x) + i \sin x$,

(v) $f : \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, n \in \mathbb{Z} \right\}, \cdot \right) \longrightarrow (\mathcal{E}_4, \cdot)\,, \ f \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} := i^n.$

Εν συνεχεία, να προσδιορισθούν οι πυρήνες και οι εικόνες όσων εξ αυτών είναι ομομορφισμοί.

12. Εάν $(G, \cdot), (H, *)$ είναι δυο πεπερασμένες κυκλικές ομάδες, g ένας γεννήτορας τής G και h ένας γεννήτορας τής H, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) $\exists f \in \mathrm{Hom}(G, H) : f(g) = h \Longleftrightarrow \mathrm{ord}(h) \ |\mathrm{ord}(g)$.

(ii) Εάν $\mathrm{ord}(h) \ |\mathrm{ord}(g)$, τότε υπάρχει μοναδικός $f \in \mathrm{Hom}(G, H) : f(g) = h$. Επιπροσθέτως, γι' αυτόν τον f ισχύουν οι ισότητες $f(g^k) = h^k, \forall k \in \mathbb{Z}$.

13. Να αποδειχθεί ότι οι προσθετικές ομάδες $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$ και $(\mathbb{R},+)$ είναι ανά δύο μη ισόμορφες.

14. Να αποδειχθεί ότι η ομάδα $\mathbb{Z}[i] := \{a+bi \mid (a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$ των ακεραίων τού Gauss είναι ισόμορφη με την πολλαπλασιαστική ομάδα

$$G := \{2^a 3^b \mid (a,b)\in\mathbb{Z}^2\}.$$

15. Να αποδειχθεί ότι τα σύνολα 2×2-πινάκων

$$G_1 := \left\{ \left(\begin{array}{cc} 1-n & -n \\ n & 1+n \end{array} \right) \middle| \, n\in\mathbb{Z} \right\} \text{ και } G_2 := \left\{ \left(\begin{array}{cc} 1-2n & n \\ -4n & 1+2n \end{array} \right) \middle| \, n\in\mathbb{Z} \right\}$$

αποτελούν υποκείμενα σύνολα υποομάδων τής ειδικής γραμμικής ομάδας $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, καθώς και ότι $G_1 \cong \mathbb{Z} \cong G_2$.

16. Εάν $G := \{x\in\mathbb{R} \mid x^2<1\}$, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) $\frac{x+y}{1+xy}\in G,\ \forall (x,y)\in G\times G$.

(ii) Το ζεύγος $(G,*)$, όπου $G\times G \ni (x,y)\mapsto x*y := \frac{x+y}{1+xy}$, αποτελεί μια αβελιανή ομάδα.

(iii) Η απεικόνιση $f:(G,*)\longrightarrow(\mathbb{R},+)$, $x\mapsto f(x):=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, είναι ισομορφισμός ομάδων.

17. Για οιονδήποτε πραγματικό αριθμό $\theta\in\mathbb{R}$ ορίζεται ο πίνακας

$$\mathbf{A}_{[\theta]} := \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & -\sin(\theta) \\ -1 & 0 & \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{array} \right) \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) $\mathbf{A}_{[\theta]}^3 = \mathbf{0}_{\mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{R})}$.

(ii) Εάν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τεθεί $\mathbf{A}_{[\theta],x} := \mathbf{I}_3 + x\mathbf{A}_{[\theta]} + \frac{1}{2}x\mathbf{A}_{[\theta]}^2$, τότε το σύνολο 3×3-πινάκων $G_{[\theta]} := \{\mathbf{A}_{[\theta],x} \mid x\in\mathbb{R}\}$, εφοδιασμένο με την πράξη τού πολλαπλασιασμού πινάκων, αποτελεί μια αβελιανή ομάδα η οποία είναι ισόμορφη με την $(\mathbb{R},+)$.

18. (i) Από το σύνολο των απεικονίσεων $f:\mathbb{R}\smallsetminus\{0,1\}\longrightarrow\mathbb{R}\smallsetminus\{0,1\}$ επιλέγονται οι ακόλουθες έξι:

$$f_1(x):=x,\qquad f_2(x):=\frac{1}{1-x},\qquad f_3(x):=\frac{x-1}{x},$$
$$f_4(x):=\frac{1}{x},\qquad f_5(x):=1-x,\qquad f_6(x):=\frac{x}{x-1},$$

$\forall x\in\mathbb{R}\smallsetminus\{0,1\}$. Εάν $G_1:=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6\}$, να αποδειχθεί ότι το ζεύγος $(G_1,\circ)$ αποτελεί μια μη αβελιανή ομάδα με $e_{G_1}=f_1$ και να δοθεί ο πολλαπλασιαστικός κατάλογος αυτής (όπου ως «πολλαπλασιασμός» νοείται, εν προκειμένω, η σύνθεση απεικονίσεων "$\circ$").

(ii) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο των έξι 2×2-πινάκων

$$G_2 := \left\{ \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} 0 & \omega^2 \\ \omega & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} 0 & \omega \\ \omega^2 & 0 \end{array}\right) \right\},$$

όπου $\omega\in\mathbb{C}\smallsetminus\{1\}$, $\omega^3=1$ (ήτοι $\omega\in\{\zeta_3,\zeta_3^2\}$), αποτελεί τη μη αβελιανή υποομάδα τής $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ την παραγόμενη από τους πίνακες

$$\mathbf{A} := \left(\begin{array}{cc} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{array}\right) \text{ και } \mathbf{B} := \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right).$$

(iii) Να αποδειχθεί ότι $G_1\cong G_2$.

19. (i) Έστω $(G,\cdot)$ μια πεπερασμένη μη αβελιανή ομάδα (έχουσα το $e = e_G$ ως ουδέτερό της στοιχείο) η οποία μπορεί να παραχθεί από το σύνολο $\{s,t\}$ δύο στοιχείων της s και t. Εάν $\mathrm{ord}(s) = 4$ και αυτοί οι γεννήτορες τής $(G,\cdot)$ υπόκεινται στις σχέσεις

$$s^2 = t^2 \ \text{ και } \ st = ts^{-1},$$

να αποδειχθεί ότι $G = \{e, s, s^2, s^3, t, ts, ts^2, ts^3\}$ και $(G,\cdot) \cong (\mathbf{Q},\cdot)$.

(ii) Να αποδειχθεί (μέσω τού (i)) ότι η υποομάδα

$$H := \left\langle \begin{pmatrix} [0]_3 & [-1]_3 \\ [1]_3 & [0]_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [1]_3 & [1]_3 \\ [1]_3 & [-1]_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

τής $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_3)$ είναι ισόμορφη με την ομάδα των τετρανίων.

20. Να αποδειχθεί ότι για κάθε αβελιανή ομάδα $(G,*)$ υφίσταται ισομορφισμός

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\cong} G.$$