ΑΛΓΕΒΡΑ Ι: 10ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Να υπολογισθούν: (i) Η τάξη τού στοιχείου $[5]_{12} + \langle [4]_{12} \rangle$ τής πηλικοομάδας $\mathbb{Z}_{12}/\langle [4]_{12} \rangle$ και (ii) η τάξη τού στοιχείου $[26]_{60} + \langle [12]_{60} \rangle$ τής πηλικοομάδας $\mathbb{Z}_{60}/\langle [12]_{60} \rangle$.

2. Έστω $H := \langle [12]_{24} \rangle \sqsubset \mathbb{Z}_{24}$. Να προσδιορισθούν τα στοιχεία τής πηλικοομάδας $\mathbb{Z}_{24}/H$ και να υπολογισθεί η τάξη καθενός εξ αυτών. Εν συνεχεία, να δειχθεί ότι $\mathbb{Z}_{24}/H \cong \mathbb{Z}_{12}$.

3. Έστω $H := \langle [13]_{28} \rangle \sqsubset \mathbb{Z}_{28}^{\times}$. Να προσδιορισθούν τα στοιχεία τής πηλικοομάδας $\mathbb{Z}_{28}^{\times}/H$ και να υπολογισθεί η τάξη καθενός εξ αυτών. Εν συνεχεία, να δειχθεί ότι $\mathbb{Z}_{28}^{\times}/H \cong \mathbb{Z}_{6}$.

4. Να προσδιορισθεί το σύνολο $\mathbf{NSubg}(\mathfrak{A}_4)$ των ορθόθετων υποομάδων τής εναλλάσσουσας ομάδας $(\mathfrak{A}_4, \circ)$.

5. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Εάν $G \sqsubseteq \mathfrak{S}_n$ και $H := G \cap \mathfrak{A}_n$, να αποδειχθεί ότι είτε $H = G$ είτε $|H| = \frac{1}{2}|G|$.

6. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Εάν $G \sqsubseteq \mathfrak{S}_n$ και $G \not\sqsubseteq \mathfrak{A}_n$, να αποδειχθεί ότι είτε $G \cong \mathbb{Z}_2$ είτε η G είναι μη απλή.

7. Να αποδειχθεί ότι η $\mathfrak{A}_4$ είναι η μοναδική υποομάδα τής $\mathfrak{S}_4$ που έχει τάξη 12.

8. Έστω $(G, \cdot)$ μια πεπερασμένη κυκλική ομάδα, όπου $G = \langle g \rangle$ και $|G| = n$. Εάν ο $m \in \mathbb{N}$ είναι ένας διαιρέτης τού n, να αποδειχθεί ότι:

(i) $|G/\langle g^m \rangle| = m$, και

(ii) $G/\langle g^m \rangle = \langle g \langle g^m \rangle \rangle$.

9. Εάν H είναι μια ορθόθετη υποομάδα μιας πεπερασμένης ομάδας $(G, \cdot)$ με μκδ$(|G/H|, |H|) = 1$ και $g \in G$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $g^{|H|} = e_G$, να αποδειχθεί ότι $g \in H$.

10. Εάν H είναι μια ορθόθετη υποομάδα μιας πεπερασμένης ομάδας $(G, \cdot)$ και $K \sqsubseteq G$ με μκδ$(|G/H|, |K|) = 1$, να αποδειχθεί ότι $K \sqsubseteq H$.

11. Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα τάξεως 105. Εάν $H \sqsubseteq G$ με $|H| \geq 36$, να αποδειχθεί ότι $H = G$.

12. Έστω $H \sqsubset \mathfrak{S}_4$. Εάν $|H| > 8$, να αποδειχθεί ότι $|H| = 12$.

13. Εάν $H := \langle \sigma \rangle \sqsubset \mathfrak{S}_7$ και $K := \langle \tau \rangle \sqsubset \mathfrak{S}_7$, όπου

$$\sigma := [1\ 2\ 3\ 4\ 5] \ \text{ και } \ \tau := [1\ 3] \circ [2\ 4\ 5] \circ [6\ 7],$$

να αποδειχθεί ότι $H \cap K = \{\mathrm{id}\}$.

14. Εάν $m, n \in \mathbb{N}$ και $m \geq 2$, να αποδειχθεί ότι $n \mid \phi(m^n - 1)$, όπου ϕ η συνάρτηση φι τού Euler.

[*Υπόδειξη*: Να εφαρμοσθεί το θεώρημα τού Lagrange για μια υποομάδα τάξεως n μιας ομάδας τάξεως $\phi(m^n - 1)$.]

15. Να δειχθεί ότι η προσθετική πηλικοομάδα $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ είναι ισόμορφη με την $(\mathcal{E}_\infty, \cdot)$.

16. Εάν p είναι ένας πρώτος αριθμός και $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί ότι

$$\mathcal{E}_{p^\infty}/\mathcal{E}_{p^n} \cong \mathcal{E}_{p^\infty}.$$

17. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a,b) \neq (0,0) \right\},$$

εφοδιασμένο με τον πολλαπλασιασμό πινάκων, αποτελεί μια υποομάδα τής $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ και είναι ισόμορφη με την $(\mathbb{C}\smallsetminus\{0\},\cdot)$.

18. Εάν $G := \mathrm{UT}_2(\mathbb{R})^{\times}$ και

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\},$$

να αποδειχθούν τα εξής:

(i) $H \lhd G$.

(ii) Η H είναι ισόμορφη με την $(\mathbb{R},+)$.

(iii) Η G/H είναι αβελιανή (παρότι η ίδια η G δεν είναι αβελιανή).

19. Θεωρούνται οι ακόλουθες υποομάδες τής $\mathrm{UT}_3(\mathbb{R})^{\times}$:

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{R}, c > 0 \right\},\; H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Να αποδειχθούν τα εξής:

(i) $H \lhd G$.

(ii) Η πηλικοομάδα G/H είναι ισόμορφη με την $(\mathbb{R}_{>0},\cdot)$.

20. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, και για κάθε μη τετριμμένο μεταθετικό δακτύλιο R με μοναδιαίο στοιχείο υφίστανται ισομορφισμοί (πολλαπλασιαστικών) ομάδων:

$$\mathrm{UT}_n(R)^{\times}/\mathrm{UT}_n^{[1]}(R) \cong \mathrm{Diag}_n(R) \cong \mathrm{LT}_n(R)^{\times}/\mathrm{LT}_n^{[1]}(R).$$