ΑΛΓΕΒΡΑ Ι: 3ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Να αποδειχθεί ότι κάθε *άρτιος* $n \in \mathbb{N}$ είναι τής μορφής 2^ν ή τής μορφής $2^\nu(2\lambda+1)$, όπου $\nu, \lambda \in \mathbb{N}$.

2. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο n διαδοχικών ακεραίων διαιρείται διά τού n.

3. Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων διαιρείται διά τού 6 και ότι το γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών ακεραίων διαιρείται διά τού 24.

4. Να αποδειχθεί με τη βοήθεια τής ταυτότητας τής ευκλειδείου διαιρέσεως ότι κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 1$ γράφεται ως άθροισμα δυνάμεων τού δύο, ήτοι υπό τη μορφή

$$n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_s},$$

όπου $k_1, k_2, \ldots, k_s \in \mathbb{N}_0$ και $0 \leq k_s < \cdots < k_2 < k_1$.

5. Εάν $\nu \in \mathbb{N}$ και ο $2^\nu + 1$ είναι πρώτος αριθμός, να αποδειχθεί ότι ο ν είναι μια δύναμη τού 2. [*Υπόδειξη*. Θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί κατά την αποδεικτική πορεία και η άσκηση **1**.]

6. Εάν $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $2^{2^{4n+1}} + 7$ είναι σύνθετος.

7. Να αποδειχθεί ότι $7 \mid 2222^{5555} + 5555^{2222}$.

8. Να αποδειχθεί ότι $121 \nmid k^2 + 3k + 5$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

9. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Κάθε πρώτος περιττός αριθμός p γράφεται είτε υπό τη μορφή $p = 4k+1$ είτε υπό τη μορφή $p = 4k+3$, για κάποιον $k \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Κάθε φυσικός αριθμός τής μορφής $4m+3,\ m \in \mathbb{N}_0$, έχει έναν πρώτο διαιρέτη τής μορφής $4n+3,\ n \in \mathbb{N}_0$.

10. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Εάν ο n είναι περιττός, τότε $\frac{n(n+1)}{2} \mid n!$.

(ii) Εάν $\frac{n(n+1)}{2} \nmid n!$, τότε ο $n+1$ είναι κατ' ανάγκην πρώτος.

11. Εάν οι $m, n \in \mathbb{N}$ είναι μεταξύ τους πρώτοι, να αποδειχθεί ότι μκδ$(m^2+n^2, m+n) \in \{1,2\}$.

12. Να αποδειχθεί ότι μκδ$\big(15n^2+8n+6, 30n^2+21n+13\big) = 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

13. Για οιουσδήποτε μη μηδενικούς ακεραίους a, b να αποδειχθεί η αμφίπλευρη συνεπαγωγή

$$\text{μκδ}\,(a,b) = \text{εκπ}\,(a,b) \Longleftrightarrow |a| = |b|\,.$$

14. Για οιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς a, b, c να αποδειχθούν οι ακόλουθες ισότητες:

(i) μκδ$(a, \text{εκπ}\,(b,c)) = $ εκπ$(\text{μκδ}\,(a,b)\,, \text{μκδ}\,(a,c))\,,$

(ii) εκπ$(a, \text{μκδ}\,(b,c)) = $ μκδ$(\text{εκπ}\,(a,b)\,, \text{εκπ}\,(a,c))\,.$

15. Για οιουσδήποτε μη μηδενικούς ακεραίους a, b, c να αποδειχθεί η ισότητα

$$\text{μκδ}\,(\text{εκπ}\,(a,b)\,, \text{εκπ}\,(b,c)\,, \text{εκπ}\,(c,a)) = \text{εκπ}\,(\text{μκδ}\,(a,b)\,, \text{μκδ}\,(b,c)\,, \text{μκδ}\,(c,a))\,.$$

16. Για οιουσδήποτε μη μηδενικούς ακεραίους a, b, c να αποδειχθεί η ισότητα

$$\text{εκπ}\,(a,b,c) = \frac{|abc| \cdot \text{μκδ}\,(a,b,c)}{\text{μκδ}\,(a,b)\cdot \text{μκδ}\,(b,c)\cdot \text{μκδ}\,(c,a)}.$$

17. Εάν $a, b, c \in \mathbb{N}$ και εάν μκδ(a,b,c)εκπ$(a,b,c) = abc$, να δειχθεί ότι

$$\text{μκδ}\,(a,b) = \text{μκδ}\,(b,c) = \text{μκδ}\,(c,a) = 1.$$

18. Εάν $m, n \in \mathbb{N}$ και οι $a_1, \ldots, a_n$ μη μηδενικοί ακέραιοι αριθμοί, να αποδειχθούν οι ακόλουθες ισότητες:

(i) μκδ$(a_1^m, \ldots, a_n^m) =$ μκδ$(a_1, \ldots, a_n)^m$,

(ii) εκπ$(a_1^m, \ldots, a_n^m) =$ εκπ$(a_1, \ldots, a_n)^m$.

19. Λέμε πως ένας ακέραιος $n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}$ **στερείται τετραγώνων** όταν δεν υπάρχει ακέραιος αριθμός $m \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0, \pm 1\}$ με $m^2 \mid n$. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Ένας ακέραιος αριθμός $n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0, \pm 1\}$ στερείται τετραγώνων εάν και μόνον εάν στη (μονοσημάντως ορισμένη) παράσταση τού n,

$$n = \text{sign}\,(n)\; p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

ως γινομένου διακεκριμένων πρώτων, έχουμε

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 1.$$

(ii) Κάθε ακέραιος αριθμός $n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}$ γράφεται ως γινόμενο $n = ab$ δύο κατ' απόλυτη τιμή μονοσημάντως ορισμένων μη μηδενικών ακεραίων a, b, όπου ο μεν a στερείται τετραγώνων, ο δε b είναι τέλειο τετράγωνο[1].

20. Εάν ως $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συμβολίσουμε την ακολουθία των πρώτων αριθμών, να αποδειχθεί η ισχύς των ακολούθων ανισοϊσοτήτων:

(i) $p_n \leq p_1 \cdots p_{n-1} + 1, \;\; \forall n \in \mathbb{N},\; n \geq 2$,

(ii) $p_{n-1} \geq n + 2$ για οιονδήποτε φυσικό αριθμό $n \geq 5$,

(iii) $p_{n-1} \geq 2n + 2$ για οιονδήποτε φυσικό αριθμό $n \geq 10$,

(iv) $p_n \leq 2^{2^{n-1}}, \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.

[1] Ένας $m \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}$ καλείται **τέλειο τετράγωνο** όταν $\exists r \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0\} : r^2 = m$.