ΑΛΓΕΒΡΑ Ι: 5ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Επί τού $\mathbb{N}$ ορίζονται οι εσωτερικές πράξεις $(m,n) \longmapsto m *_1 n := m^n$,

$$(m,n) \longmapsto m *_2 n := \text{μκδ}(m,n) \;\text{ και }\; (m,n) \longmapsto m *_3 n := \text{εκπ}(m,n).$$

Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Η "$*_1$" δεν είναι ούτε προσεταιριστική ούτε μεταθετική, το δε 1 είναι ουδέτερο στοιχείο *μόνον εκ δεξιών* (ως προς αυτήν).

(ii) Η "$*_2$" είναι προσεταιριστική και μεταθετική, αλλά δεν υφίσταται ουδέτερο στοιχείο ως προς αυτήν.

(iii) Η "$*_3$" είναι προσεταιριστική και μεταθετική, το δε 1 είναι ουδέτερο στοιχείο.

2. Επί τού συνόλου $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ ορίζονται οι εσωτερικές πράξεις

$$(x,y) \longmapsto x \star_1 y := |x-y| \;\text{ και }\; (x,y) \longmapsto x \star_2 y := \max\{x,y\}.$$

Να εξετασθεί το κατά πόσον η "$\star_1$"(και αντιστοίχως, η "$\star_2$") είναι (ή δεν είναι) προσεταιριστική ή/και μεταθετική.

3. Να αποδειχθεί ότι το ομαδοειδές $(\mathbb{R}, \boxdot)$, όπου

$$(x,y) \longmapsto x \boxdot y := \sqrt[3]{x^3+y^3},$$

είναι αβελιανό μονοειδές.

4. Να αποδειχθεί ότι το $\mathbb{Q} \smallsetminus \{0\}$, εφοδιαζόμενο με την πράξη τής συνήθους διαιρέσεως, είναι ένα ομαδοειδές. Εν συνεχεία, να εξετασθεί το κατά πόσον αυτό είναι (ή δεν είναι) (i) προσεταιριστικό και (ii) αβελιανό.

5. Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο A εφοδιασμένο με μια εσωτερική πράξη "$\circledcirc$", η οποία ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη:

$$(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc c) \circledcirc (b \circledcirc d), \;\; \forall\, (a,b,c,d) \in A^4.$$

Υποθέτοντας ότι το ομαδοειδές $(A, \circledcirc)$ διαθέτει ουδέτερο στοιχείο, να αποδειχθεί ότι είναι *και* προσεταιριστικό *και* αβελιανό.

6. Να εξετασθεί η ύπαρξη εξ αριστερών και εκ δεξιών ουδετέρων στοιχείων τού ομαδοειδούς $(\mathbb{R}, \star)$, όπου

$$x \star y := |x|\, y, \;\; \forall\, (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

7. Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με την εσωτερική πράξη "$\circledast$", όπου

$$x \circledast y := xy + x + y, \;\; \forall\, (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Διαθέτει το ομαδοειδές $(\mathbb{R}, \circledast)$ ουδέτερο στοιχείο; Και αν ναι, τότε ποια $x \in \mathbb{R}$ επιδέχονται συμμετρικά στοιχεία ως προς την "$\circledast$"; Ποιες θα είναι οι απαντήσεις στα ίδια ερωτήματα στην περίπτωση κατά την οποία, αντί τού ομαδοειδούς $(\mathbb{R}, \circledast)$, θεωρήσουμε το $(\mathbb{Z}, \circledast|_{\mathbb{Z}})$;

8. Επί τού συνόλου $\mathbb{R}$ ορίζουμε μια εσωτερική πράξη "$\odot$" ως ακολούθως:

$$x \odot y := ax + ay + bxy + c, \;\; \forall\, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$. Υποθέτοντας ότι το ομαδοειδές $(\mathbb{R}, \odot)$ έχει το $e \in \mathbb{R}$ ως ουδέτερό του στοιχείο και ότι κάθε $x \in \mathbb{R} \diagdown \{d\}$ διαθέτει συμμετρικό στοιχείο ως προς την "$\odot$", όπου d είναι ένας πραγματικός αριθμός διάφορος τού e, να προσδιορισθούν τα a, b, c συναρτήσει των d και e.

9. Έστω $(\mathbb{R}, *)$ το ομαδοειδές το οριζόμενο μέσω τής εσωτερικής πράξεως:

$$x * y := x + y + x^2 y^2, \;\; \forall\, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Να αποδειχθεί ότι το $(\mathbb{R}, *)$ είναι ένα αβελιανό, μη προσεταιριστικό ομαδοειδές με ουδέτερο στοιχείο, καθώς και το ότι υπάρχουν στοιχεία τού $\mathbb{R}$ τα οποία διαθέτουν δύο συμμετρικά στοιχεία, ένα συμμετρικό στοιχείο ή και κανένα συμμετρικό στοιχείο ως προς την πράξη "$*$".

10. Για ποιες τιμές τού $n \in \mathbb{N}$ είναι το ομαδοειδές $(\mathbb{Q}, \boxdot_n)$, όπου

$$(r, s) \longmapsto r \boxdot_n s := \frac{r + s}{n},$$

ημιομάδα;

11. Έστω $(G, \cdot)$ μια ημιομάδα. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Η $(G, \cdot)$ είναι ομάδα εάν και μόνον εάν για οιαδήποτε στοιχεία $a, b \in G$ οι «εξισώσεις» $ax = b$ και $ya = b$ είναι επιλύσιμες (ως προς x και y).

(ii) Εάν για κάθε $g \in G$ υπάρχει μοναδικό στοιχείο $\widetilde{g} \in G$ με $g\widetilde{g}g = g$, τότε η $(G, \cdot)$ είναι ομάδα.

12. Έστω m ένας φυσικός αριθμός και $E := \{0, 1, ..., m - 1\}$. Επί τού E ορίζεται η εσωτερική πράξη:

$$a * b := \begin{cases} a + b, & \text{όταν } a + b < m, \\ r, & \text{όταν } a + b = m + r, \;\; 0 \leq r < m. \end{cases}$$

για κάθε $a, b \in E$. Να δειχθεί ότι το ζεύγος $(E, *)$ αποτελεί ομάδα τάξεως m.

13. (i) Εάν $n \in \mathbb{N}, \; n \geq 2$, και η $(G_j, \circledast_j)_{1 \leq j \leq n}$ είναι μια οικογένεια n ομάδων, να αποδειχθεί ότι το *καρτεσιανό* (ή *ευθύ*) *γινόμενο* $\prod_{j=1}^{n} G_j$ των μελών της, εφοδιασμένο με την πράξη "$\odot$", όπου

$$(g_1, \ldots, g_n) \odot (g_1', \ldots, g_n') := (g_1 \circledast_1 g_1', \ldots, g_n \circledast_n g_n'),$$

$\forall ((g_1, \ldots, g_n), (g_1', \ldots, g_n')) \in (\prod_{j=1}^{n} G_j)^2$, αποτελεί μια ομάδα.

(ii) Έστω $H := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Επί τού H ορίζεται η εσωτερική πράξη:

$$(\alpha, \beta, \gamma) * (\xi, \eta, \zeta) := \left(\alpha + (-1)^{\beta}\, \xi, \beta + (-1)^{\gamma}\, \eta, (-1)^{\xi}\, \gamma + \zeta\right).$$

Να αποδειχθεί ότι το ζεύγος $(H, *)$ αποτελεί μια μη αβελιανή ομάδα. (Σημειωτέον ότι η ανωτέρω πράξη "$*$" επί τού $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ είναι διαφορετική τής «συνήθους» πράξεως "$\odot$" (τού (i)) με την οποία εφοδιάζεται ένα καρτεσιανό γινόμενο ομάδων.)

14. Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα έχουσα τάξη $|G| = n \in \mathbb{N}$. Για οιαδήποτε n-άδα στοιχείων $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ να αποδειχθεί η ύπαρξη φυσικών αριθμών k, m για τους οποίους ισχύει $1 \leq k \leq m \leq n$ και $g_k g_{k+1} \cdots g_{m-1} g_m = e_G$.

15. Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα. Εάν $x, y \in G$ με $xy = yx$, να δειχθεί ότι

$$(xy)^n = x^n y^n,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \text{ και }\ x^m y^n = y^n x^m,\ \forall (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

16. Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα. Υποθέτοντας ότι
(a) $(ab)^2 = (ba)^2, \forall\, (a,b) \in G \times G$, και (b) $(\forall a \in G)\left(a^2 = e_G \Longrightarrow a = e_G\right)$, να αποδειχθεί ότι ισχύουν τα ακόλουθα:
(i) $x^2 = yx^2y^{-1},\ \forall\, (x,y) \in G \times G$,
(ii) $yxy^{-1} = y^{-1}xy,\ \forall\, (x,y) \in G \times G$,
(iii) η $(G, \cdot)$ είναι αβελιανή.

17. Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα για την οποία υπάρχει κάποιος $k \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε να ισχύει

$$(ab)^{k+j} = a^{k+j} b^{k+j},\ \ \forall (a,b) \in G \times G\ \text{ και }\ \forall j \in \{0,1,2\}.$$

Να αποδειχθεί ότι η εν λόγω ομάδα είναι αβελιανή.

18. Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ να αποδειχθεί ότι

$$\left(aba^{-1}\right)^n = ab^n a^{-1},\quad \forall\, (a,b) \in G \times G.$$

Έστω $(G, \cdot)$ μια αβελιανή ομάδα με ουδέτερο στοιχείο της το e.

19. Εάν $(G, \cdot)$ είναι μια ομάδα και $a, b \in G$ τέτοια, ώστε να ισχύει $b^{-1}ab = a^{\nu}$ για κάποιον $\nu \in \mathbb{Z}$, να αποδειχθεί ότι $b^{-m}a^n b^m = a^{n\nu^m},\ \forall\, (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

20. Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα. Εάν $x, y \in G$, να αποδειχθούν οι συνεπαγωγές
(i) $[xy^2 = y^3x\ \text{ και }\ x^3y = yx^2] \Longrightarrow x = y = e_G$, και
(ii) $[x^2 = e_G\ \text{ και }\ x^{-1}y^2x = y^3] \Longrightarrow y^5 = e_G$.