

ΑΛΓΕΒΡΑ Ι: 1ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Ας υποθέσουμε ότι τα A, B και C είναι τυχόντα σύνολα. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) $A \cap B \subseteq A, A \subseteq A \cup B,$

(ii) $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$ (**Μεταθετικοί νόμοι**)

(iii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (**Προσεταιριστικοί νόμοι**)

(iv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (**Επιμεριστικοί νόμοι**)

2. Έστω ότι τα A, B, C είναι τρία σύνολα. Να αποδειχθεί ότι ισχύει η ακόλουθη αμφίπλευρη συνεπαγωγή:

$$A \cup B = B \cap C \iff A \subseteq B \subseteq C.$$

3. Έστω I ένα μη κενό σύνολο. Ας υποθέσουμε ότι για κάθε $i \in I$ διαθέτουμε ένα σύνολο A_i και ότι J και K είναι δυο μη κενά υποσύνολα του I . Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) για οιοδήποτε παγιομένο δείκτη $i_0 \in I,$

$$\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_{i_0}, A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i.$$

(ii) $\bigcup_{i \in J} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i, \bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{i \in J} A_i,$

(iii) $\left(\bigcup_{i \in J} A_i \right) \cup \left(\bigcup_{i \in K} A_i \right) = \bigcup_{i \in J \cup K} A_i,$

(iv) $\left(\bigcap_{i \in J} A_i \right) \cap \left(\bigcap_{i \in K} A_i \right) = \bigcap_{i \in J \cup K} A_i.$

4. Έστω I ένα μη κενό σύνολο. Ας υποθέσουμε ότι για κάθε $i \in I$ διαθέτουμε ένα σύνολο A_i και ότι το B είναι ένα τυχόν σύνολο. Να αποδειχθεί η ισχύς των ισοτήτων

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B), \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B).$$

5. Έστω ότι τα A, B, C και D είναι τυχόντα σύνολα. Να αποδειχθούν οι ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $A \setminus B \subseteq A,$

(ii) $(A \setminus B) \cap B = \emptyset,$

(iii) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B,$

(iv) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C),$

(v) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C),$

(vi) $A \subseteq B$ και $C \subseteq D \implies A \setminus D \subseteq B \setminus C.$

6. Έστω ότι τα A, B και C είναι τυχόντα σύνολα. Να αποδειχθούν οι ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C),$

(ii) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C),$

(iii) $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B = A \setminus (A \cap B),$

(iv) $A \setminus B = A \iff A \cap B = \emptyset, A \setminus B = B \setminus A \iff A = B,$

(v) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C), A \setminus (B \setminus C) = A \setminus B \cup (A \cap C),$

(vi) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B.$

7. Έστω ότι τα A, B, C και D είναι τυχόντα σύνολα. Να αποδειχθεί ότι το **καρτεσιανό γινόμενο** έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $A \subseteq B$ και $C \subseteq D \implies A \times C \subseteq B \times D$,

(ii) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$,

(iii) $A \neq \emptyset$ και $B \neq \emptyset \implies (A \times B = B \times A \iff A = B)$,

(iv) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,

(v) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$,

(vi) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$, με την ισότητα ισχύουσα εάν και μόνον εάν τα εν λόγω σύνολα πληρούν τουλάχιστον μία εκ των ακόλουθων συνθηκών:

a) $A = C$,

b) $B = D$,

c) $A \subseteq C$ και $B \subseteq D$,

d) $C \subseteq A$ και $D \subseteq B$,

(vii) $(A \times B) \setminus (C \times D) = ((A \setminus C) \times B) \cup (C \times (B \setminus D))$.

8. Ως **συμμετρική διαφορά** $A \Delta B$ δυο συνόλων A, B ορίζεται το σύνολο

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Εάν τα A, B, C είναι τυχόντα σύνολα, να αποδειχθούν οι ακόλουθες ιδιότητες τής συμμετρικής διαφοράς:

(i) $A \Delta \emptyset = A$ και $A \Delta B = B \Delta A$,

(ii) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \Delta (B \setminus A)$,

(iii) $A \Delta B = \emptyset \iff A = B$,

(iv) $A \Delta C = B \Delta C \implies A = B$,

(v) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$,

(vi) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$,

(vii) $A \Delta B \Delta (A \cap B) = A \cup B$,

(viii) $(A \cup B \cup C) \setminus ((A \cap B) \cup (A \cap C)) = (A \Delta B) \cap (A \Delta C)$.

9. Εάν τα A, B είναι δυο τυχόντα σύνολα, να αποδειχθούν οι ακόλουθες ιδιότητες τού **δυναμοσυνόλου**:

(i) $A \subseteq B \iff \mathfrak{P}(A) \subseteq \mathfrak{P}(B)$,

(ii) $\mathfrak{P}(A \cap B) = \mathfrak{P}(A) \cap \mathfrak{P}(B)$,

(iii) $\mathfrak{P}(A) \cup \mathfrak{P}(B) \subseteq \mathfrak{P}(A \cup B)$,

(iv) $\mathfrak{P}(A) \cup \mathfrak{P}(B) = \mathfrak{P}(A \cup B) \iff (A \subseteq B \text{ ή } B \subseteq A)$,

(v) $\mathfrak{P}(A \setminus B) = (\mathfrak{P}(A) \setminus \mathfrak{P}(B)) \cup \{\emptyset\}$.

10. Έστω ότι η $f : A \longrightarrow B$ είναι μια απεικόνιση, τα C, D υποσύνολα τού A , η $(C_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια υποσυνόλων τού A , τα E, F υποσύνολα τού B , και η $(E_j)_{j \in J}$ μια οικογένεια υποσυνόλων τού B . Να αποδειχθούν τα εξής:

(i) $f(\emptyset) = \emptyset = f^{-1}(\emptyset)$.

(ii) $C \subseteq D \implies f(C) \subseteq f(D)$. Και αντιστοίχως, $E \subseteq F \implies f^{-1}(E) \subseteq f^{-1}(F)$.

(iii) $C \subseteq f^{-1}(f(C))$ και $f(f^{-1}(E)) \subseteq E$.

(iv) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$ και $f^{-1}(E \cup F) = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$.

$$(v) f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D), \text{ ενώ } f^{-1}(E \cap F) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F).$$

$$(vi) f(C) \setminus f(D) \subseteq f(C \setminus D).$$

$$(vii) F \subseteq E \implies f^{-1}(E \setminus F) = f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F).$$

Γενικότερα:

$$(viii) f\left(\bigcup_{i \in I} C_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(C_i) \text{ και } f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} E_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(E_j).$$

$$(ix) f\left(\bigcap_{i \in I} C_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(C_i), \text{ ενώ } f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} E_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(E_j).$$

11. Έστω $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ η απεικόνιση

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^*,$$

όπου $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Να αποδειχθεί ότι η f δεν είναι ούτε ενριπτική ούτε επιρριπτική.

12. Να εξετασθεί το ποιες εκ των ακολούθων απεικονίσεων $f : A \longrightarrow B$ είναι ενριπτικές και ποιες επιρριπτικές:

(i) $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Q}, f(x) = 2x + 1,$

(ii) $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, f(x) = (x - 1, 1),$

(iii) $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f(x) = x^3,$

(iv) $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f(x) = |x|$, όπου με το $|x|$ συμβολίζουμε (ως συνήθως) την απόλυτη τιμή του πραγματικού αριθμού x , και

(v) $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x + 1.$

13. Έστω a ένας παγιωμένος πραγματικός αριθμός και $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ η απεικόνιση που ορίζεται μέσω του τύπου

$$f(x, y) := (ax + 4y, x + 2y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Να αποδειχθεί η ισοδυναμία των κάτωθι συνθηκών:

(i) η f είναι επιρριπτική,

(ii) η f είναι ενριπτική,

(iii) $a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

14. Έστω $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ η απεικόνιση $f(x) = x \cdot |x|, \forall x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι μια αμφίρριψη και να προσδιορισθεί η αντίστροφός της f^{-1} .

15. Έστω $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ η απεικόνιση $f(n) := \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ και έστω $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ $g(k) := 3k$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι επιρριπτική μη ενριπτική, η g ενριπτική μη επιρριπτική και η σύνθεσή τους $g \circ f$ αμφιρριπτική (διότι $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$).