ΑΛΓΕΒΡΑ Ι: 9ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Το **σύνολο των ισομετριών τού** $\mathbb{R}$ είναι το

$$\boxed{\mathrm{Isom}(\mathbb{R}) := \{\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{R}} | \ |\sigma(x) - \sigma(y)| = |x - y|\,,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}.}$$

(Τα στοιχεία του καλούνται **ισομετρίες τού** $\mathbb{R}$.) Να αποδειχθεί ότι $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}) \sqsubset \mathfrak{S}_{\mathbb{R}}$.

2. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε ως **μεταφορά τού** $\mathbb{R}$ **κατά** a την αμφιρριπτική απεικόνιση $T_a \in \mathfrak{S}_{\mathbb{R}}$ με $T_a(x) := x + a, \forall x \in \mathbb{R}$. Προφανώς, $T_a \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R})$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο

$$\boxed{\mathrm{Trans}(\mathbb{R}) := \{T_a \,| a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathrm{Isom}(\mathbb{R}),}$$

όλων των μεταφορών τού $\mathbb{R}$ συγκροτεί μια άπειρη αβελιανή υποομάδα τής $\mathrm{Isom}(\mathbb{R})$ και ότι $(\mathrm{Trans}(\mathbb{R}), \circ) \cong (\mathbb{R}, +)$.

3. Εάν με το γράμμα S συμβολίσουμε τον *κατοπτρισμό* $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto S(x) := -x$, τού $\mathbb{R}$ ως προς το 0, να αποδειχθεί ότι κάθε ισομετρία $\sigma \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}) \smallsetminus \mathrm{Trans}(\mathbb{R})$ γράφεται υπό τη μορφή $\sigma = T_a \circ S = S \circ T_a^{-1} = S \circ T_{-a}$ για κάποιον $a \in \mathbb{R}$, και ότι

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}) = \left\{ S^j \circ T_{-a} \middle| \, a \in \mathbb{R} \text{ και } j \in \{0, 1\} \right\}.$$

4. Η υποομάδα

$$\boxed{\mathbf{D}_\infty := \{\sigma \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}) |\, \sigma(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\}}$$

τής $\mathrm{Isom}(\mathbb{R})$, η απαρτιζόμενη από εκείνες τις ισομετρίες τού $\mathbb{R}$ που απεικονίζουν το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων επί τού εαυτού του, καλείται **άπειρη διεδρική ομάδα**. Να αποδειχθεί ότι αυτή είναι μια άπειρη μη αβελιανή ομάδα με

$$\boxed{\mathbf{D}_\infty = \langle S, T_{-1} \rangle = \left\{ S^j \circ T_{-1}^k \,| j \in \{0, 1\}\ ,\ k \in \mathbb{Z} \right\},}$$

όπου $T_{-1} \circ S = S \circ {T_{-1}}^{-1}$ $(= S \circ T_1)$.

5. Έστω $(G, \cdot)$ μια άπειρη μη αβελιανή ομάδα η οποία μπορεί να παραχθεί από το σύνολο $\{s, t\}$ δύο στοιχείων της s και t. Εάν αυτοί οι γεννήτορες τής $(G, \cdot)$ υπόκεινται στις σχέσεις

$$\boxed{s^2 = e_G,\ \ ts = st^{-1},}$$

να αποδειχθεί ότι $(G, \cdot) \cong (\mathbf{D}_\infty, \circ)$.

6. Εάν $(G, \cdot)$ είναι μια ομάδα, να αποδειχθούν τα εξής:

(i) $HH = H$, $\forall H \in \mathbf{Subg}(G)$.

(ii) Έστω $A \in \mathfrak{P}(G) \smallsetminus \{\varnothing\}$ με $AA = A$. Εάν το A είναι πεπερασμένο σύνολο, τότε $A \sqsubseteq G$.

(iii) Το (ii) δεν είναι πάντοτε αληθές εάν αφαιρεθεί η προϋπόθεση ότι το A είναι πεπερασμένο.

7. Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα. Εάν $A \in \mathfrak{P}(G) \smallsetminus \{\varnothing\}$, τότε θέτουμε $A^{-1} := \left\{ a^{-1} \middle| \, a \in A \right\}$. Να αποδειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $A \sqsubseteq G$.

(ii) Εάν $a, b \in A$, τότε $ab \in A$ και $a^{-1} \in A$.

(iii) $AA \subseteqq A$ και $A^{-1} \subseteqq A$.

(iv) $AA = A$ και $A^{-1} = A$.

(v) Εάν $a, b \in A$, τότε $ab^{-1} \in A$.

(vi) $AA^{-1} \subseteqq A$.

(vii) $AA^{-1} = A$.

8. Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα. Εάν $K_1, K_2, H \in \mathbf{Subg}(G)$ και $K_1 \sqsubseteq K_2$, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) $K_1 H \cap K_2 = K_1(H \cap K_2)$.

(ii) $[K_1 \cap H = K_2 \cap H \;\text{ και }\; K_1 H = K_2 H] \Longrightarrow K_1 = K_2$.

9. Να δοθεί ένα σύστημα αριστερών εκπροσώπων (i) τής $H := 4\mathbb{Z}$ εντός τής $2\mathbb{Z}$ και (ii) τής $K := \langle [18]_{36} \rangle$ εντός τής $\mathbb{Z}_{36}$.

10. Να γραφεί η πολλαπλασιαστική ομάδα $\mathbb{Z}_{15}^{\times}$ ως αποσυνδετή ένωση αριστερών πλευρικών κλάσεων τής $H = \langle [7]_{15} \rangle$ (εντός τής $\mathbb{Z}_{15}^{\times}$).

11. Να δοθεί ένα σύστημα αριστερών εκπροσώπων τής $H := \langle \alpha \circ \beta \rangle$ εντός τής $\mathbf{D}_4 = \langle \alpha, \beta \rangle$.

12. Να δοθεί ένα σύστημα αριστερών εκπροσώπων τής $H := \langle [1\ 2\ 3] \rangle$ εντός τής $\mathfrak{A}_4$.

13. Να δοθούν παραδείγματα ομάδων G και υποομάδων $\{e_G\} \neq H \sqsubset G$, ούτως ώστε:

(i) $|H| < \infty$ και $|G : H| < \infty$, (iii) $|H| = \infty$ και $|G : H| < \infty$,

(ii) $|H| < \infty$ και $|G : H| = \infty$, (iv) $|H| = \infty$ και $|G : H| = \infty$.

14. (i) Εάν $q \in \mathbb{Q}$, να δειχθεί ότι το $q\mathbb{Z} := \{ qk |\, k \in \mathbb{Z}\}$ αποτελεί μια υποομάδα τής $(\mathbb{Q}, +)$.

(ii) Εάν $q, q' \in \mathbb{Q}$, να δειχθεί ότι $q\mathbb{Z} \sqsubseteq q'\mathbb{Z} \Longleftrightarrow q = q'm$, για κάποιον $m \in \mathbb{Z}$.

(iii) Εάν $n, m \in \mathbb{Z}$, να προσδιορισθούν οι δείκτες $\left|\mathbb{Q} : \frac{1}{n}\mathbb{Z}\right|, \left|\frac{1}{n}\mathbb{Z} : \mathbb{Z}\right|$ και $\left|\frac{1}{n}\mathbb{Z} : m\mathbb{Z}\right|$.

15. Να αποδειχθεί ότι η $(\mathbb{Q}, +)$ δεν διαθέτει καμία γνήσια υποομάδα πεπερασμένου δείκτη και ότι δεν είναι ισόμορφη με την $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$. [*Υπόδειξη*: Εάν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, τότε η $H := \langle \{2^n, 3, 5, 7, 11, 13, ...\} \rangle$ που είναι γνήσια υποομάδα τής $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ έχει δείκτη n.]

16. Να αποδειχθούν τα εξής:

(i) Ο δείκτης τής $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ εντός τής $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ισούται με 2.

(ii) Η μόνη γνήσια υποομάδα τής $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ πεπερασμένου δείκτη είναι η $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$.

17. Εάν $K \sqsubseteq G$ και $H \sqsubseteq G$, και εάν η H είναι υποομάδα πεπερασμένου δείκτη εντός τής G, να αποδειχθεί ότι και η $K \cap H$ είναι υποομάδα πεπερασμένου δείκτη εντός τής K, και ότι -επιπροσθέτως- ισχύει η ανισοϊσότητα: $|K : H \cap K| \leq |G : H|$.

18. Εάν H και K είναι δυο υποομάδες μιας πεπερασμένης ομάδας $(G, \cdot)$, να δειχθεί ότι ισχύει η συνεπαγωγή μκδ$(|G : H|, |G : K|) = 1 \Rightarrow HK = G$.

19. Εάν H και K είναι δυο υποομάδες μιας πεπερασμένης ομάδας $(G, \cdot)$, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) $|\langle H, K \rangle : K| \geq |H : H \cap K|$.

(ii) Εάν $|H : H \cap K| > \frac{1}{2} |G : K|$, τότε $\langle H, K \rangle = G$.

(iii) $|H : H \cap K| = |G : K| \Leftrightarrow HK = G \; (= KH = \langle H, K \rangle)$.

20. Έστω $(G, \cdot)$ μια πεπερασμένη κυκλική ομάδα και έστω p ένας πρώτος αριθμός που διαιρεί την τάξη της. Να αποδειχθεί ότι το $H := \{ g^p |\, g \in G\}$ αποτελεί μια υποομάδα τής G τάξεως $\frac{|G|}{p}$.