ΑΛΓΕΒΡΑ Ι: 13ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Δοθέντος ενός πολυωνύμου $\varphi(\mathsf{X}) := a_n\mathsf{X}^n + a_{n-1}\mathsf{X}^{n-1} + \cdots + a_1\mathsf{X} + a_0 \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$ βαθμού $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x| \neq 1$ ισχύει

$$|\varphi(x)| \leq m\,\frac{|x|^{n-1} - 1}{|x| - 1},$$

όπου $m := \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|, |a_n|\}$.

2. Δοθέντος ενός πολυωνύμου $\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^n + a_{n-1}\mathsf{X}^{n-1} + \cdots + a_1\mathsf{X} + a_0 \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$ βαθμού $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί ότι για κάθε $\rho \in \mathbb{R}$ με $\varphi(\rho) = 0$ ισχύει η ανισότητα

$$|\rho| < 1 + |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|.$$

3. Εάν ένα πολυώνυμο $\varphi(\mathsf{X}) \in \mathbb{Q}[\mathsf{X}]$ δέχεται ως θέση μηδενισμού του τον άρρητο αριθμό $a + \sqrt{b}$ (όπου $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}_{>0}$ και $\nexists \theta \in \mathbb{Q} : b = \theta^2$), να αποδειχθεί ότι δέχεται ως θέση μηδενισμού του *και* τον $a - \sqrt{b}$ και ότι

$$\mathrm{mult}(\varphi(\mathsf{X}); a + \sqrt{b}) = \mathrm{mult}(\varphi(\mathsf{X}); a - \sqrt{b}).$$

4. Θεωρούμε το πολυώνυμο $\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^4 + a\mathsf{X}^2 + \mathsf{X} + b \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$. Να προσδιορισθούν οι a, b, ούτως ώστε το $\varphi(\mathsf{X})$ να διαθέτει μια θέση μηδενισμού $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\mathrm{mult}(\varphi(\mathsf{X}); \lambda) = 3$.

5. Εάν $\mu, \nu \in \mathbb{N}$, πόσες κοινές μιγαδικές θέσεις μηδενισμού έχουν τα πολυώνυμα $\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^\mu - 1$ και $\psi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^\nu - 1$;

6. Ποια είναι η αποσύνθεση των $\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^6 - 1$ και $\psi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^6 + 1$ σε γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων

(i) υπεράνω τού σώματος $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών και

(ii) υπεράνω τού σώματος $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών;

7. Να προσδιορισθούν οι θέσεις μηδενισμού τού πολυωνύμου

$$\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^3 - 4\mathsf{X}^2 + 6\mathsf{X} - 4 \in \mathbb{Z}[\mathsf{X}]$$

εντός τού σώματος $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών. [*Υπόδειξη*: $\varphi(1 + i) = 0$.]

8. Έστω p ένας πρώτος αριθμός. Ποια είναι η αποσύνθεση τού πολυωνύμου

$$\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^{p-1} + [p + 1]_p \in \mathbb{Z}_p[\mathsf{X}]$$

σε ανάγωγα πολυώνυμα υπεράνω τού σώματος $\mathbb{Z}_p$;

9. Ποια είναι η αποσύνθεση τού πολυωνύμου

$$\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^4 - \mathsf{X}^3 + \mathsf{X}^2 - \mathsf{X} \in \mathbb{Z}_3[\mathsf{X}]$$

σε ανάγωγα πολυώνυμα υπεράνω τού σώματος $\mathbb{Z}_3$;

10. Να αποδειχθεί ότι τα πολυώνυμα

$$\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^2 + 5\mathsf{X} + 1 \in \mathbb{Q}[\mathsf{X}], \ \ \psi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^3 + 39\mathsf{X}^2 - 4\mathsf{X} + 8 \in \mathbb{Q}[\mathsf{X}]$$

είναι ανάγωγα υπεράνω τού σώματος $\mathbb{Q}$.

11. Να προσδιορισθούν όλα τα μονικά ανάγωγα πολυώνυμα

(i) βαθμού 4 εντός τού $\mathbb{Z}_2[\mathsf{X}]$ και

(ii) βαθμού 3 εντός τού $\mathbb{Z}_3[\mathsf{X}]$.

12. Έστω $\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^3 - 3a\mathsf{X}^2 - 3\mathsf{X} + a \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$. Να αποδειχθεί ότι το $\varphi(\mathsf{X})$ δεν μπορεί να διαθέτει δύο ίσες θέσεις μηδενισμού εντός τού $\mathbb{C}$.

13. Έστω $\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^3 - a\mathsf{X}^2 + b\mathsf{X} - c \in \mathbb{C}[\mathsf{X}]$ με $a \neq 0$. Να αποδειχθεί η ισοδυναμία των κάτωθι συνθηκών:

(i) Η μία (εκ των τριών μιγαδικών θέσεων μηδενισμού τού $\varphi(\mathsf{X})$) είναι μέση ανάλογος των άλλων δύο.

(ii) $b^3 = ca^3$.

14. Να προσδιορισθεί το άθροισμα των τετραγώνων και των κύβων των (μιγαδικών) θέσεων μηδενισμού τής εξισώσεως:

$$2\mathsf{X}^3 - 3\mathsf{X}^2 + 4\mathsf{X} - 8 = 0.$$

15. Να προσδιορισθεί πολυώνυμο τρίτου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές, το οποίο να έχει τις $\rho_1 = 5$ και $\rho_2 = i$ ως θέσεις μηδενισμού του.

16. Εάν υποτεθεί ότι όλες οι θέσεις μηδενισμού δοθέντος πολυωνύμου $\varphi(\mathsf{X}) \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$ (εντός τού $\mathbb{C}$) είναι πραγματικές και απλές, να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο $(\mathcal{D}(\varphi(\mathsf{X})))^2 - \varphi(\mathsf{X})\mathcal{D}^2(\varphi(\mathsf{X}))$ στερείται πραγματικών θέσεων μηδενισμού.

17. Δίδεται ένα πολυώνυμο $\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^\nu - a\mathsf{X}^{\nu-\mu} + b \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$, όπου $\nu, \mu \in \mathbb{N}$ με $\nu > \mu$ και $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$. Να αποδειχθεί η ισοδυναμία των κάτωθι συνθηκών:

(i) Το $\varphi(\mathsf{X})$ έχει τουλάχιστον μία διπλή πραγματική θέση μηδενισμού.

(ii) Ισχύει η ισότητα: $(a\frac{\nu-\mu}{\nu})^\nu = (b\frac{\nu-\mu}{\mu})^\mu$.

18. Ποια είναι η αποσύνθεση τού πολυωνύμου

$$\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^3 - 4\mathsf{X}^2 + (2+3i)\mathsf{X} + (3-9i) \in \mathbb{C}[\mathsf{X}]$$

σε ανάγωγα πολυώνυμα υπεράνω τού σώματος $\mathbb{C}$; [*Υπόδειξη*: $\varphi(3) = 0$.]

19. Εάν υποτεθεί ότι ένα πολυώνυμο $\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^3 - a^2\mathsf{X} + a^2 b \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$ με $b < 0$ έχει τρεις πραγματικές και ανά δύο άνισες θέσεις μηδενισμού, να αποδειχθεί ότι ισχύει η σχέση

$$|a| + \frac{3\sqrt{3}}{2} b > 0.$$

20. Να αποδειχθεί ότι το $\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^3 - \mathsf{X} - 1$ έχει μια ρητή θέση μηδενισμού λ για την οποία ισχύει $1 < \lambda < \sqrt{2}$.