ΑΛΓΕΒΡΑ Ι: 12ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Εάν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ είναι τέτοιοι, ώστε να ισχύει $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ και $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, να αποδειχθεί ότι το $\varphi(\mathsf{X}) := (\alpha - \beta)\mathsf{X}^2 + (\beta - \gamma)\mathsf{X} + (\gamma - \alpha) \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

2. Εάν $\varphi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^4 - 2\mathsf{X}^3 + \alpha\mathsf{X}^2 + \beta\mathsf{X} + 4 \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$ και $\psi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^2 - \mathsf{X} + \gamma \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$, για ποιους α, β, γ ισχύει $\varphi(\mathsf{X}) = (\psi(\mathsf{X}))^2$;

3. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα και μόνον πολυώνυμο $\varphi(\mathsf{X}) \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$ τετάρτου βαθμού, το οποίο δέχεται ως μια θέση μηδενισμού του το 0 και ικανοποιεί την $\varphi(\mathsf{X}) - \varphi(\mathsf{X} - 1) = \mathsf{X}^3$. Εν συνεχεία, να υπολογισθεί μέσω αυτού το άθροισμα

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 \quad (\text{όπου } n \in \mathbb{N}).$$

4. Εάν $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο

$$\varphi(\mathsf{X}) := (\mathsf{X} + 1)^{2n} - \mathsf{X}^{2n} - 2\mathsf{X} - 1 \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$$

διαιρείται (επακριβώς) διά τού $2\mathsf{X}^3 + 3\mathsf{X}^2 + \mathsf{X}$.

5. Εάν $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο

$$\varphi(\mathsf{X}) := (1 + \mathsf{X} + \mathsf{X}^2 + \cdots + \mathsf{X}^n)^2 - \mathsf{X}^n \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$$

διαιρείται (επακριβώς) διά τού $\psi(\mathsf{X}) := 1 + \mathsf{X} + \mathsf{X}^2 + \cdots + \mathsf{X}^{n-1}$.

6. Να προσδιορισθεί το υπόλοιπο τής διαιρέσεως ενός πολυωνύμου $\varphi(\mathsf{X}) \in \mathbb{C}[\mathsf{X}]$ διά τού $(\mathsf{X}-a)(\mathsf{X}-b)$, όπου $a, b \in \mathbb{C}$, συναρτήσει των τιμών $\varphi(a)$ και $\varphi(b)$.

7. Να προσδιορισθεί το υπόλοιπο τής διαιρέσεως ενός $\varphi(\mathsf{X}) \in \mathbb{C}[\mathsf{X}]$ διά τού $(\mathsf{X} - a)(\mathsf{X} - b)(\mathsf{X} - c)$, όπου $a, b, c \in \mathbb{C}$ με $a \neq b \neq c \neq a$, συναρτήσει των τιμών $\varphi(a), \varphi(b)$ και $\varphi(c)$.

8. Εάν το πολυώνυμο $\varphi(\mathsf{X}) := a_0 + a_1\mathsf{X} + \cdots + a_n\mathsf{X}^n$ (όπου $n \in \mathbb{N}$) έχει ακεραίους συντελεστές και δέχεται ως θέση μηδενισμού του τον ρητό αριθμό $\frac{\lambda}{\mu}$, όπου $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\})$ και μκδ$(\lambda, \mu) = 1$, να αποδειχθεί ότι

$$\lambda \mid a_0 \quad \text{και} \quad \mu \mid a_n.$$

Κατόπιν τούτου να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο

$$f(\mathsf{X}) = \mathsf{X}^n + 2\kappa\mathsf{X} + 2 \in \mathbb{Z}[\mathsf{X}],$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, δεν δέχεται ρητό αριθμό ως θέση μηδενισμού του.

9. Να προσδιορισθεί ο

$$\text{μκδ}(2\mathsf{X}^4 + 2\mathsf{X}^3 - 3\mathsf{X}^2 - 2\mathsf{X} + 1, \mathsf{X}^3 + 2\mathsf{X}^2 + 2\mathsf{X} + 1).$$

10. Να προσδιορισθεί το

$$\text{εκπ}(\mathsf{X}^3 + \mathsf{X}^2 - \mathsf{X} - 1, \mathsf{X}^3 - \mathsf{X}^2 - \mathsf{X} + 1).$$