ΑΛΓΕΒΡΑ Ι: 11ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Έστω $(R, +, \cdot)$ ένας δακτύλιος και έστω $(a, b) \in R \times R$. Εάν $ab = ba$, να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες:

(i) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,\ (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,

(ii) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = (a + b)(a - b)$,

(iii) Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a - b)\left(a^{n-1} + \sum_{j=2}^{n-1} a^{n-j} b^{j-1} + b^{n-1}\right) \\ &= \left(a^{n-1} + \sum_{j=2}^{n-1} a^{n-j} b^{j-1} + b^{n-1}\right)(a - b)\,, \end{aligned}$$

(iv) Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a^{2n+1} + b^{2n+1} &= (a + b)\left(a^{2n} - a^{2n-1}b + \cdots + a^2 b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}\right) \\ &= \left(a^{2n} - a^{2n-1}b + \cdots + a^2 b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}\right)(a + b)\,, \end{aligned}$$

(v) Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} a^{2n} - b^{2n} &= (a + b)\left(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + \cdots - a^2 b^{2n-3} + ab^{2n-2} - b^{2n-1}\right) \\ &= \left(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + \cdots - a^2 b^{2n-3} + ab^{2n-2} - b^{2n-1}\right)(a + b)\,. \end{aligned}$$

2. Εάν $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ με μκδ$(m, n) = 1$ και a, b είναι αντιστρέψιμα στοιχεία ενός δακτυλίου R με μοναδιαίο στοιχείο, τέτοια ώστε να ισχύει $a^m = b^m$ και $a^n = b^n$, να αποδειχθεί ότι $a = b$.

3. Έστω $(R, +, \cdot)$ ένας δακτύλιος. Λέμε ότι ο δακτύλιος $(R, +, *)$ ο οριζόμενος επί τού συνόλου R, με την ίδια την "+" ως πράξη προσθέσεως και την

$$R \times R \ni (a, b) \longmapsto a * b := b \cdot a \in R$$

ως πράξη πολλάπλασιασμού, είναι **ο αντικείμενος δακτύλιος τού** R. Εν συντομία, ο δακτύλιος αυτός συμβολίζεται συνήθως ως R^{opp}. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) $(R^{\text{opp}})^{\text{opp}} = R$.

(ii) $R^{\text{opp}} = R$ εάν και μόνον εάν ο R είναι μεταθετικός.

(iii) Εάν ο R έχει μοναδιαίο στοιχείο, τότε και ο R^{opp} έχει μοναδιαίο στοιχείο· επιπροσθέτως, $1_{R^{\text{opp}}} = 1_R$.

4. Έστω R ένας δακτύλιος για τον οποίο ισχύει η ισότητα

$$x^2 = x, \ \ \forall x \in R.$$

Να αποδειχθεί ότι $2x = 0_R,\ \forall x \in R$, και ότι ο εν λόγω δακτύλιος οφείλει να είναι μεταθετικός. Επιπροσθέτως, στην περίπτωση κατά την οποία ο R έχει τουλάχιστον τρία στοιχεία, να αποδειχθεί ότι ο R διαθέτει μηδενοδιαιρέτες. (Αυτού τού είδους οι δακτύλιοι ονομάζονται **δακτύλιοι τού Boole**).

5. Έστω R ένας δακτύλιος για τον οποίο ισχύει η ισότητα

$$x^2 = 2x, \ \ \forall x \in R.$$

Να αποδειχθεί ότι $x^3 = 0_R$, $\forall x \in R$.

6. Έστω R ένας δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο για τον οποίο ισχύει η ισότητα

$$x^3 = x, \ \ \forall x \in R.$$

Να αποδειχθεί (i) ότι $6x = 0_R$, $\forall x \in R$, και (ii) ότι ο R είναι κατ' ανάγκην μεταθετικός.

7. Έστω p πρώτος αριθμός και $Q_p := \left\{ [a]_p^2 \;\middle|\; [a]_p \in \mathbb{Z}_p \right\}$ το σύνολο των τετραγώνων των στοιχείων τού $\mathbb{Z}_p$.

(i) Ποιος είναι ο πληθικός αριθμός $\mathrm{card}(Q_p)$ τού Q_p;

(ii) Να αποδειχθεί ότι το ζεύγος $(Q_p, +)$ είναι μια υποομάδα τής $(\mathbb{Z}_p, +)$ μόνον όταν $p = 2$.

(iii) Για οιαδήποτε $u, v \in \mathbb{Z}_p \smallsetminus Q_p$, να αποδειχθεί ότι $uv \in Q_p$.

8. Έστω p πρώτος αριθμός. Να αποδειχθεί ότι κάθε στοιχείο τού $\mathbb{Z}_p$ *μπορεί να παρασταθεί ως άθροισμα τετραγώνων* δύο στοιχείων τού $\mathbb{Z}_p$. (*Υπόδειξη*: Να γίνει κατάλληλη χρήση τής ασκήσεως 7.)

9. Εάν R είναι τυχών δακτύλιος, να αποδειχθεί ότι το $\{ (r, r) \mid r \in R\}$ αποτελεί έναν υποδακτύλιο τού $R \times R$.

10. Για οιονδήποτε πρώτο αριθμό p ορίζουμε το σύνολο

$$\boxed{\mathbb{Z}_{\langle p \rangle} := \left\{ r \in \mathbb{Q} \mid r = \tfrac{a}{b}, \ \ (a, b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}), \text{ με μκδ}\,(a, b) = 1 \text{ και } p \nmid b \right\}.}$$

Να αποδειχθεί ότι το $\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$ είναι υποδακτύλιος τού $\mathbb{Q}$. (Το $\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$ ονομάζεται **δακτύλιος των p-αδικών κλασμάτων** και παίζει έναν ιδιαίτερο ρόλο στην Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών.)

11. Να εξετασθεί ποια εκ των ακολούθων συνόλων είναι υποδακτύλιοι τού $\mathbb{Q}$:

(i) $S_1 := \left\{ r \in \mathbb{Q} \;\middle|\; \begin{array}{c} r = \frac{a}{b}, \ \ (a, b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}), \\ \text{με μκδ}\,(a, b) = 1 \text{ και } b \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2) \end{array} \right\}$.

(ii) $S_2 := \left\{ r \in \mathbb{Q} \;\middle|\; \begin{array}{c} r = \frac{a}{b}, \ \ (a, b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}), \\ \text{με μκδ}\,(a, b) = 1 \text{ και } b \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2) \end{array} \right\}$.

(iii) $S_3 := \left\{ r \in \mathbb{Q} \;\middle|\; \begin{array}{c} r = \frac{a}{b}, \ \ (a, b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}), \\ \text{με μκδ}\,(a, b) = 1 \text{ και } a \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2) \end{array} \right\}$.

(iv) $S_4 := \left\{ r \in \mathbb{Q} \;\middle|\; \begin{array}{c} r = \frac{a}{b}, \ \ (a, b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}), \\ \text{με μκδ}\,(a, b) = 1 \text{ και } a \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2) \end{array} \right\}$.

(v) $S_5 := \mathbb{Q}_{\geq 0} := \{ r \in \mathbb{Q} \mid r \geq 0 \}$.

(vi) $S_6 := \left\{ r^2 \;\middle|\; r \in \mathbb{Q} \right\}$.

12. Να εξετασθεί ποια εκ των ακολούθων συνόλων είναι υποδακτύλιοι τού $\mathbb{R}^{[0,1]}$:

(i) $S_1 := \left\{ f \in \mathbb{R}^{[0,1]} \;\middle|\; f(q) = 0, \forall q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \right\}$.

(ii) $S_2 := \left\{ f \in \mathbb{R}^{[0,1]} \;\middle|\; \begin{array}{c} f(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\nu} s_j x^j, \forall x \in [0, 1], \\ \text{όπου } \nu \in \mathbb{N}_0 \text{ και } s_0, \ldots, s_\nu \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$.

(iii) $S_3 := \left\{ f \in \mathbb{R}^{[0,1]} \;\middle|\; \begin{array}{c} f(x)=0 \text{ μόνον για} \\ \text{πεπερασμένου πλήθους } x \in [0,1] \end{array} \right\} \cup \{0_{\mathbb{R}^{[0,1]}}\}.$

(iv) $S_4 := \left\{ f \in \mathbb{R}^{[0,1]} \mid f(x) = 0 \text{ για άπειρα } x \in [0,1] \right\}.$

(v) $S_5 := \left\{ f \in \mathbb{R}^{[0,1]} \;\middle|\; \lim_{x \longrightarrow 1} f(x) = 0 \right\}.$

(vi) $S_6 := \left\{ f \in \mathbb{R}^{[0,1]} \;\middle|\; \begin{array}{c} f(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} r_i \sin(m_i x) + \sum\limits_{j=1}^{l} s_j \cos(n_j x), \\ \text{για κάποιους } r_i, s_j \in \mathbb{Q} \text{ και } m_i, n_j \in \mathbb{N}_0,\ k, l \in \mathbb{N} \end{array} \right\}.$

13. Να προσδιορισθούν όλοι οι υποδακτύλιοι τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

14. Έστω S ένας υποδακτύλιος ενός δακτυλίου R. Εάν αμφότεροι οι S και R διαθέτουν μοναδιαίο στοιχείο και $1_S \neq 1_R$, να αποδειχθεί ότι το 1_S είναι ένας μηδενοδιαιρέτης εντός τού R.

15. Έστω R ένας μη τετριμμένος δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Υποθέτοντας την ύπαρξη δύο στοιχείων $a, b \in R$, για τα οποία ισχύουν οι ισότητες

$$ab + ba = 1_R, \ \ a^2 b + b a^2 = a,$$

να αποδειχθεί ότι $a \in R^{\times}$ με το $2b$ ως αντίστροφό του.

16. Έστω R ένας μη τετριμμένος δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Υποθέτοντας ότι τα στοιχεία $x, y \in R$ είναι δεξιά αντίστροφα ενός $u \in R$ (ήτοι ότι $ux = uy = 1_R$), να αποδειχθεί (i) ότι *και* το $xu + y - 1_R$ είναι δεξιό αντίστροφο τού u, και (ii) ότι το u διαθέτει *άπειρα* δεξιά αντίστροφα όταν $x \neq y$.

17. Έστω R ένας μη τετριμμένος δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Εάν το $a \in R$ είναι ένα μηδενοδύναμο στοιχείο τού R, να αποδειχθεί ότι το $1_R + a$ είναι αντιστρέψιμο.

18. Έστω R ένας μη τετριμμένος δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο και έστω τυχόν $x \in R$. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Το $1_R - x$ είναι αντιστρέψιμο με αντίστροφό του το $1_R + y \Leftrightarrow \exists y \in R : y - x = xy = yx$.

(ii) Για οιοδήποτε $y \in R$, το $1_R - xy$ είναι αντιστρέψιμο $\Longleftrightarrow$ το $1_R - yx$ είναι αντιστρέψιμο.

(iii) Το $1_R - xy$ είναι αντιστρέψιμο για κάθε $y \in R \Longleftrightarrow$ το $1_R - zxy$ είναι αντιστρέψιμο για οιαδήποτε $y, z \in R$.

19. Εάν $n \in \mathbb{N}$ και οι $R_1, \ldots, R_n$ είναι μη τετριμμένοι δακτύλιοι με μοναδιαίο στοιχείο, να αποδειχθεί ότι $(R_1 \times \cdots \times R_n)^{\times} = R_1^{\times} \times \cdots \times R_n^{\times}$.

20. Έστω το σύνολο $R := \left\{ \frac{a}{2^n} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}_0 \right\}$ εφοδιασμένο με τις συνήθεις πράξεις προσθέσεως και πολλαπλασιασμού ρητών αριθμών. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Το R είναι δακτύλιος και $\mathbb{Z} \subsetneqq R \subsetneqq \mathbb{Q}$,

(ii) Το R είναι ακεραία περιοχή.

(iii) $R^{\times} = \{\pm\, 2^{\nu} \mid \nu \in \mathbb{Z}\}$.