Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών **Άλγεβρα (Μ 110)**

Εαρινό Εξάμηνο 2006, Εξέταση Σεπτεμβρίου **Εξεταστής: Δημήτριος Νταής**

ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο Εάν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, οι $a_1, \ldots, a_n$ μη μηδενικοί ακέραιοι και $d := \text{μκδ}(a_1, \ldots, a_n)$, να αποδειχθεί ότι υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί $k_1, \ldots, k_n$, τέτοιοι ώστε να ισχύει η ισότητα $d = k_1 a_1 + \cdots + k_n a_n$.

ΘΕΜΑ 2ο Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα με τάξη $|G| = m \in \mathbb{N}$. Εάν η G είναι κυκλική, παραγόμενη από ένα στοιχείο $g \in G$, και $a = g^n$, $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Το a παράγει μια υποομάδα H τής G τάξεως $|H| = \frac{m}{\text{μκδ}(m,n)}$.

(ii) $H = \left\langle g^{\text{μκδ}(m,n)} \right\rangle$.

ΘΕΜΑ 3ο Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Εάν η H είναι μια υποομάδα μιας ομάδας $(G, \cdot)$, τότε ισχύει η ισότητα $|G| = |G : H|\ |H|$.

(ii) Εάν η $(G, \cdot)$ είναι μια πεπερασμένη ομάδα με ουδέτερο στοιχείο της το e, τότε $g^{|G|} = e$, $\forall g \in G$.

(iii) Εάν $(n, m) \in (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}) \times \mathbb{N}$ και $\text{μκδ}(n, m) = 1$, τότε ισχύει ο *τύπος τού Euler*: $n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, όπου φ η συνάρτηση τού Euler. [*Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιηθεί το (ii) για την ομάδα $(\mathbb{Z}_m^{\times}, \cdot)$.]

ΘΕΜΑ 4ο Έστω R ένας δακτύλιος. Εάν τα I, J είναι δυο ιδεώδη τού R, να αποδειχθούν οι ακόλουθοι ισομορφισμοί:

$$(I + J) / (I \cap J) \cong ((I + J) / I) \times ((I + J) / J) \cong (J / (I \cap J)) \times (I / (I \cap J)).$$

ΘΕΜΑ 5ο (i) Να διατυπωθεί το λήμμα τού Gauss και να αποδειχθεί μέσω αυτού ότι, εάν ένα πολυώνυμο $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ είναι ανάγωγο εντός τού $\mathbb{Z}[t]$, τότε είναι ανάγωγο και εντός τού $\mathbb{Q}[t]$.

(ii) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *κριτήριο αναγωγιμότητας τού Eisenstein*.

ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΘΕΜΑ 6ο (i) Να προσδιορισθεί το τελευταίο ψηφίο τού αριθμού 3^{100}. [*Υπόδειξη*: Να γίνει κατάλληλη χρήση *τού τύπου τού Euler περί ισοτιμιών*. Βλ. θέμα **3** (iii).]

(ii) Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί x, y, τέτοιοι ώστε να ισχύει η ισότητα

$$x^2 - 3y^2 = 989.$$

ΘΕΜΑ 7ο (i) Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα για την οποία υπάρχει κάποιος $k \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε να ισχύει

$$(ab)^{k+j} = a^{k+j} b^{k+j}, \ \ \forall (a, b) \in G \times G \ \text{ και } \ \forall j \in \{0, 1, 2\}.$$

Να αποδειχθεί ότι η εν λόγω ομάδα είναι αβελιανή.

(ii) Έστω $f : G_1 \longrightarrow G_2$ ένας ισομορφισμός ομάδων. Εάν $H_1 \trianglelefteq G_1$ και $H_2 := f(H_1) \trianglelefteq G_2$, να αποδειχθεί ότι $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$.

ΘΕΜΑ 8ο (i) Εάν μια μετάταξη $\sigma \in \mathfrak{S}_n,\ n \geq 2$, γραφεί ως μια πεπερασμένη ακολουθία

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_s$$

s συντιθέμενων -ανά δύο ξένων μεταξύ τους- κύκλων $\tau_1, \ldots, \tau_s$ με μήκη $k_1, \ldots, k_s \geq 2$, αντιστοίχως, να αποδειχθεί ότι $\mathrm{ord}(\sigma) = \text{εκπ}(k_1, \ldots, k_s)$.

(ii) Δίδεται η μετάταξη

$$\sigma := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \in \mathfrak{S}_{10}.$$

Να προσδιορισθεί η

$$\sigma^{100} = \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \cdots \circ \sigma}_{100 \text{ φορές}}.$$

ΘΕΜΑ 9ο (i) Έστω R ένας μη τετριμμένος δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Υποτιθεμένου ότι $r^6 = r,\ \forall r \in R$, να αποδειχθεί ότι

$$r^2 = r,\ \forall r \in R.$$

(ii) Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο

$$I := \left\{ a \in R \mid a^k = 0_R,\ \text{για κάποιον } k \in \mathbb{N} \right\}$$

είναι ένα ιδεώδες τού R.

ΘΕΜΑ 10ο (i) Για ποιες τιμές τού $n \in \mathbb{N}$ είναι το πολυώνυμο $f(t) = t^{2n} + t^n + 1 \in \mathbb{Z}[t]$ διαιρετό διά τού $h(t) = t^2 + t + 1$; [*Υπόδειξη*: Το $h(t)$ έχει ως θέσεις μηδενισμού του τους συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ και $\omega^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, για τους οποίους ισχύει $\omega^3 = 1$ και $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.]

(ii) Υπάρχει $a \in \mathbb{Z}$, τέτοιο ώστε το πολυώνυμο $f(t) = t^4 + [a]_5\, t + [1]_5$ να είναι ανάγωγο εντός τού $\mathbb{Z}_5[t]$;

- **Να απαντηθούν το πολύ 3 θέματα ανήκοντα σε μία εκ των δύο παρατιθέμενων κατηγοριών θεμάτων και το πολύ 2 θέματα ανήκοντα στην άλλη.**

- **Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει 2 μονάδες. (Καθένα των υποερωτημάτων των θεμάτων 2, 5, 6, 7, 8, 9 και 10 αξιολογείται βαθμολογικώς με μία μονάδα. Το (i) τού θέματος 3 αξιολογείται βαθμολογικώς με μία και καθένα από τα (ii), (iii) με μισή μονάδα.)**

- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως σημειώσεις και βιβλία θα παραμείνουν κλειστά.**

- **Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.**

- **Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).**

- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!