ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο (i) Να αποδειχθεί ότι κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 2$ διαθέτει τουλάχιστον έναν πρώτο διαιρέτη.

(ii) Με τη βοήθεια τού (i) και τής «εις άτοπον απαγωγής» να αποδειχθεί ότι το σύνολο των πρώτων αριθμών είναι ένα απειροσύνολο.

ΘΕΜΑ 2ο (i) Να ορισθεί η *απεικόνιση προσημάνσεως*

$$\mathrm{sgn} : (\mathfrak{S}_n, \circ) \longrightarrow (\{\pm 1\}, \cdot), \;\; n \in \mathbb{N},\; n \geq 2,$$

μέσω «παραβατικών ζευγών» και να δοθεί και αποδειχθεί ο «κλειστός» τύπος για τον υπολογισμό της. Κατόπιν τούτου, κάνοντας χρήση τού εν λόγω τύπου να αποδειχθεί ότι είναι η sgn αποτελεί επιμορφισμό μεταξύ των ως άνω αναγραφομένων ομάδων.

(ii) Να αποδειχθεί (κατόπιν χρήσεως τού (i) και λοιπής θεωρητικής αιτιολογήσεως) ότι η εναλλάσσουσα ομάδα $\mathfrak{A}_n$ είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής $\mathfrak{S}_n$ και να προσδιορισθεί (μέχρις ισομορφισμού) η πηλικοομάδα $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n$.

ΘΕΜΑ 3ο Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί *το θεώρημα τού Cayley*.

ΘΕΜΑ 4ο Να διατυπωθούν το 1ο και το 2ο *θεώρημα ισομορφισμών δακτυλίων* και να αποδειχθεί το 2ο.

ΘΕΜΑ 5ο (i) Να διατυπωθεί το λήμμα τού Gauss και να αποδειχθεί μέσω αυτού ότι, εάν ένα πολυώνυμο $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ είναι ανάγωγο εντός τού $\mathbb{Z}[t]$, τότε είναι ανάγωγο και εντός τού $\mathbb{Q}[t]$.

(ii) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *κριτήριο αναγωγιμότητας τού Eisenstein*.

ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΘΕΜΑ 6ο Έστω

$$\varphi(n) := \sharp\{\ell \in \mathbb{N} \mid \ell \leq n \text{ και } \mu\kappa\delta(\ell, n) = 1\}$$

η *αριθμητική συνάρτηση τού Euler*. Να αποδειχθούν οι ακόλουθες ιδιότητές της:

(i) Για κάθε $n > 2$, ο φυσικός αριθμός $\varphi(n)$ είναι άρτιος.

(ii) Εάν $m, n, k \in \mathbb{N}$, και $n \mid m$, τότε $\varphi\left(mn^k\right) = n^k \varphi(m)$.

(iii) Εάν $m \in \mathbb{N}$, τότε $3 \mid m \Longleftrightarrow \varphi(3m) = 3\varphi(m)$ και $3 \nmid m \Longleftrightarrow \varphi(3m) = 2\varphi(m)$.

(iv) $\varphi(n) = \frac{n}{2} \Longleftrightarrow n = 2^k$, για κάποιον $k \in \mathbb{N}$.

ΘΕΜΑ 7ο Ποιος είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός k, για τον οποίο υπάρχει μια πεπερασμένη μη αβελιανή ομάδα G τάξεως k; (Να δικαιολογηθεί πλήρως η απάντηση.)

ΘΕΜΑ 8ο (i) Να παρατεθούν όλα τα στοιχεία τής εναλλάσσουσας ομάδας $\mathfrak{A}_4$.

(ii) Εάν η H είναι μια υποομάδα μιας ομάδας G με $|G : H| = 2$, να αποδειχθεί ότι $g^2 \in H$ για κάθε $g \in G$.

(iii) Κάνοντας χρήση των (i) και (ii) να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει υποομάδα H τής $\mathfrak{A}_4$ τάξεως 6.

ΘΕΜΑ 9ο (i) Εάν

$$R_k := \left\{ \left(\begin{array}{cc} x & y \\ -ky & x+2y \end{array} \right) \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\},\ k \in \mathbb{R},$$

να αποδειχθεί ότι το R_k είναι μεταθετικός υποδακτύλιος τού $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ για κάθε $k \in \mathbb{R}$ και να προσδιορισθούν οι τιμές τού k για τις οποίες ο R_k είναι σώμα.

(ii) Εάν $m, n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$, να αποδειχθεί ο ισομορφισμός δακτυλίων

$$(m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z})/m\mathbb{Z} \cong n\mathbb{Z}/\text{εκπ}(m, n)\mathbb{Z}.$$

ΘΕΜΑ 10ο (i) Να αποδειχθεί ότι ένα μη μηδενικό πολυώνυμο $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ είναι ανάγωγο εντός τού $\mathbb{Z}[t]$ εάν και μόνον εάν το $f(t+a) \in \mathbb{Z}[t]$ είναι ανάγωγο εντός τού $\mathbb{Z}[t]$, όπου $a \in \mathbb{Z}$.

(ii) Να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο

$$g(t) = t^4 + 1 \in \mathbb{Z}[t]$$

είναι ανάγωγο εντός τού $\mathbb{Q}[t]$.

(iii) Για ποιές τιμές τού $k \in \mathbb{Z}$ είναι το πολυώνυμο

$$h_k(t) = t^5 - kt + 1 \in \mathbb{Z}[t]$$

ανάγωγο εντός τού $\mathbb{Z}[t]$;

- **Να απαντηθούν το πολύ 3 θέματα ανήκοντα σε μία εκ των δύο παρατιθέμενων κατηγοριών θεμάτων και το πολύ 2 θέματα ανήκοντα στην άλλη.**
- **Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει 2 μονάδες.**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως σημειώσεις και βιβλία θα παραμείνουν κλειστά.**
- **Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.**
- **Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!