Η Μέθοδος των Ακυκληματικών Μοντέλων

και το Θεώρημα των Eilenberg και Zilber

Εργασία στο πλαίσιο τού μαθήματος
«Αλγεβρική Τοπολογία-Ομολογία» (με κωδ. Αρ. Γ 21)
Χειμερινό Εξάμηνο 2007-2008

Μιχαήλ-Νεκτάριος Ορφανουδάκης

Εισαγωγη

Η (κλασική) Αλγεβρική Τοπολογία βασίζεται στη μελέτη καταλλήλων συναρτητών από την κατηγορία των τοπολογικών χώρων, ζευγών κ.ά., σε κάποια από τις κατηγορίες *Groups*, *Ab*, Mod_R, Alg_R ή γενικότερα κάποια «αλγεβρική κατηγορία». Στις συνήθεις θεωρίες ομολογίας και συνομολογίας χρησιμοποιούμε συναρτητές με τιμές ανήκουσες στις κατηγορίες των αλυσωτών ή συναλυσωτών συμπλόκων R-μοδίων, όπου ο R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο πολλαπλασιαστικό στοιχείο. Οι εν λόγω συναρτητές είναι από τον ορισμό τους περίπλοκα αντικείμενα, καθώς ορίζονται σε μία γνήσια «κλάση αντικειμένων». Θα ήταν λοιπόν εξαιρετικά χρήσιμο το να μπορούσαμε να εξαγάγουμε συμπεράσματα για τη συμπεριφορά τους, μελετώντας τους σε κάποια κατάλληλη «μικρή» υποκλάση -ειδικότερα, υποσύνολο- τού πεδίου ορισμού τους.

Ως αφετηρία για τη χάραξη μιας προς τούτο προσήκουσας «γραμμής πλεύσης» είναι δυνατόν να θεωρήσουμε τη θεμελιώδη ιδιότητα που χρησιμοποιείται κατά τη μελέτη των λεγομένων «ελευθέρων» R-μοδίων: Οι ομομορφισμοί με πεδίο ορισμού τους έναν τέτοιου είδους R-μόδιο καθορίζονται μοναδικά από τις τιμές που λαμβάνουν σε ένα υποσύνολό του, ήτοι στη βάση τους (βλ. «καθολική ιδιότητα» ελευθέρων R-μοδίων). Μέσω αυτής τής ιδιότητας μπορούμε να αποδείξουμε διάφορες προτάσεις ύπαρξης ομομορφισμών σε κατάλληλα μεταθετικά διαγράμματα. Η μέθοδος των «ακυκληματικών μοντέλων» είναι μια εφαρμογή αυτής τής ιδέας σε μεταθετικά διαγράμματα συναρτητών και φυσικών μετασχηματισμών μεταξύ αυτών, έχοντας πρώτα ορίσει την έννοια τού «ελεύθερου συναρτητή». Κατ' αυτόν τον τρόπο, είναι σε κάποιες -από θεωρητικής πλευράς- λίαν ενδιαφέρουσες περιπτώσεις δυνατή η κατασκευή φυσικών αλυσωτών μετασχηματισμών $\tau_c : F(C) \to G(C)$ για κάθε $C \in Ob(\mathcal{C})$, όπου $\mathcal{C}$ οιαδήποτε κατηγορία και $F, G : \mathcal{C} \to Comp(Mod_R)$, καθώς και φυσικών αλυσωτών ομοτοπιών μεταξύ τέτοιων αλυσωτών μετασχηματισμών. (Το ακριβές νόημα αυτών των εννοιών θα δοθεί σε ό,τι ακολουθεί). Μάλιστα, το βασικό αποτέλεσμα που επιτρέπει τη χρήση αυτής τής μεθόδου δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια απλή γενίκευση αντίστοιχων προτάσεων τής Ομολογικής Άλγεβρας.

Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των ακυκληματικών μοντέλων για να αποδείξουμε το θεώρημα των Eilenberg και Zilber, το οποίο σχετίζει τους ιδιάζοντες μοδίους ομολογίας δύο χώρων με αυτούς τού γινομένου τους. Συγκεκριμένα, θα κατασκευάσουμε για κάθε ζεύγος τοπολογικών χώρων X,Y φυσικούς αλυσωτούς μετασχηματισμούς:

$$\tau : S_\bullet(X \times Y;R) \to S_\bullet(X;R) \otimes_R S_\bullet(Y;R)$$
$$\tau' : S_\bullet(X;R) \otimes_R S_\bullet(Y;R) \to S_\bullet(X \times Y;R),$$

ούτως ώστε να ισχύει $\tau' \circ \tau \simeq Id_{S_\bullet(X\times Y;R)}$, $\tau \circ \tau' \simeq Id_{S_\bullet(X;R)\otimes_R S_\bullet(Y;R)}$, οι οποίοι, επιπροσθέτως, θα είναι *μονοσημάντως ορισμένοι* ως προς την πλήρωση των εν λόγω συνθηκών μέχρις *φυσικής αλυσωτής ομοτοπίας*. Από αυτό θα προκύψουν για οιουσδήποτε τοπολογικούς χώρους X, Y ισομορφισμοί R-μοδίων

$$H_q^{\sin g}(X \times Y;R) \cong H_q(S_\bullet(X;R) \otimes_R S_\bullet(Y;R))$$

για κάθε $q \in \mathbb{N}_0$, όπου το δεξιό μέλος μπορεί να υπολογισθεί μέσω τής αλγεβρικής εκδοχής τού θεωρήματος τού Künneth.

<u>ΕΝΟΤΗΤΑ 1:</u> ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ R-ΜΟΔΙΩΝ.

<u>Ορισμός 1.1:</u> Ένα αλυσωτό σύμπλοκο $(C_\bullet,\partial_\bullet)$ λέγεται ***μη αρνητικό*** όταν $C_i = 0, \forall i < 0$. Για παράδειγμα, το $S_\bullet(X;R)$ είναι μη αρνητικό, για κάθε τοπολογικό χώρο X και για κάθε μεταθετικό δακτύλιο με μοναδιαίο πολλαπλασιαστικό στοιχείο δακτύλιο R. Ένα μη αρνητικό αλυσωτό σύμπλοκο $(C_\bullet,\partial_\bullet)$ ονομάζεται ***ακυκληματικό*** όταν $H_n(C_\bullet) = 0$ για κάθε $n > 0$.

<u>Παρατηρήσεις</u>: Για κάθε μη αρνητικό αλυσωτό σύμπλοκο $(C_\bullet,\partial_\bullet)$ ισχύει ότι $\partial_i = 0, \forall i \le 0$. Επιπροσθέτως, εάν ο $t : C_\bullet \to D_\bullet$ είναι ένας είναι αλυσωτός μετασχηματισμός μεταξύ δυο μη αρνητικών συμπλόκων, τότε $t_i = 0, \forall i < 0$. Επομένως, όταν αναφερόμαστε σε μη αρνητικά αλυσωτά σύμπλοκα μπορούμε να αγνοούμε τους αρνητικούς δείκτες. Ακόμη, $H_n(C_\bullet) = 0$ για όλους τους αρνητικούς δείκτες, ενώ

$$H_0(C_\bullet) = {\ker\partial_0}/{\operatorname{Im}\partial_1} = {C_0}/{\operatorname{Im}\partial_1} = \operatorname{coker}\partial_1 .$$

Τέλος, εάν ο $p: C_0 \to H_0(C_\bullet) = \operatorname{coker}\partial_1$ είναι ο φυσικός επιμορφισμός και στο $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ «αντικαταστήσουμε» το $C_0 \xrightarrow{\partial_0} C_{-1} \xrightarrow{\partial_{-1}} C_{-2}$ με το

$$C_0 \xrightarrow{p} \operatorname{coker}\partial_1 \xrightarrow{0} 0,$$

αυτό που προκύπτει παραμένει αλυσωτό σύμπλοκο. Μάλιστα, εάν το αρχικό σύμπλοκο είναι ακυκληματικό, τότε προφανώς αυτό που προκύπτει είναι μια ακριβής ακολουθία. Όλα αυτά θα τα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια χωρίς περαιτέρω σχόλια.

<u>**Θεώρημα 1.2:**</u> (i) (Προβολικότητα των ελευθέρων R-μοδίων)
Έστω F ελεύθερος R-μόδιος. Τότε για κάθε διάγραμμα όπως το κάτωθι (χωρίς τον h'), με την κάτω του γραμμή ακριβή (δηλαδή με τον p επιμορφισμό), υπάρχει h' που το συμπληρώνει μεταθετικά.

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, equal] \arrow[d, "\exists h'"'] & F \arrow[d, "h"] & \\
T \arrow[r, "p"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(ii) *Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα R-μοδίων, όπου η κάτω του γραμμή είναι ακριβής, $s \circ t = 0_F^{G''}$ και ο F είναι ελεύθερος. Τότε υπάρχει $c: F \to E'$ που το συμπληρώνει μεταθετικά.*

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\exists c"'] & G \arrow[r, "s"] \arrow[d, "b"] & G'' \arrow[d, "a"] \\
E' \arrow[r, "r"'] & E \arrow[r, "p"'] & E''
\end{tikzcd}$$

(iii) *Έστω ότι τα $F_\bullet$, $E_\bullet$ είναι δυο μη αρνητικά αλυσωτά σύμπλοκα με συνοριακούς τελεστές $d_\bullet$ και $\partial_\bullet$, αντιστοίχως, όπου το μεν $F_\bullet$ είναι ελεύθερο, το δε $E_\bullet$ ακυκληματικό. Εάν οι $e: F_0 \to \operatorname{coker} d_1$, $\varepsilon: E_0 \to \operatorname{coker}\partial_1$ είναι οι φυσικοί επιμορφισμοί και ο $f: \operatorname{coker} d_1 \to \operatorname{coker}\partial_1$ τυχών ομομορφισμός, τότε υπάρχει αλυσωτός μετασχηματισμός $t: F_\bullet \to E_\bullet$ που επεκτείνει την f* (δηλ. $f \circ e = \varepsilon \circ t_0$) :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "\exists t_2"] & F_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\exists t_1"] & F_0 \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\exists t_0"] & \operatorname{coker} d_1 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & E_2 \arrow[r, "\partial_2"'] & E_1 \arrow[r, "\partial_1"'] & E_0 \arrow[r, "\varepsilon"'] & \operatorname{coker}\partial_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη: (i) Η απόδειξη χρησιμοποιεί την καθολική ιδιότητα των ελευθέρων R-μοδίων: Εάν η $(x_j)_{j\in J}$ είναι βάση τού ελευθέρου R-μοδίου F και η $(y_j)_{j\in J}$ οικογένεια στοιχείων τυχόντος R-μοδίου G, τότε υπάρχει μοναδικός $f: F \to G$, τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x_j) = y_j$ για κάθε $j \in J$ (βλ. [Σ.Ο.Α.] πρόταση 3.2.3, σελ. 129-130).

(ii) Κατ' αρχάς θα δείξουμε ότι $\mathrm{Im}(b \circ t) \subseteq \mathrm{Im}(r)$. Λόγω τής ακριβείας τής κάτω γραμμής έχουμε $\mathrm{Im}\, r = \ker p$. Επειδή

$$p \circ (b \circ t) = (p \circ b) \circ t = (a \circ s) \circ t = a \circ (s \circ t) = a \circ 0_F^{G''} = 0_F^{E''},$$

συμπεραίνουμε ότι $p \circ (b \circ t) = 0_F^{E''} \Longrightarrow \mathrm{Im}(b \circ t) \subseteq \mathrm{Im}(r) = \mathrm{Ker}(p)$. Στη συνέχεια θεωρούμε τον περιορισμό $(b \circ t)^+ : F \to \mathrm{Im}\, r$, όπου $j \circ (b \circ t)^+ = b \circ t$ και $j: \mathrm{Im}\, r \to E$ η φυσική ένθεση. Μέσω τού (i) διασφαλίζεται η ύπαρξη ενός $c: F \to E'$, ούτως ώστε να ισχύει $r^+ \circ c = (b \circ t)^+$, όπου $r^+ : E' \to \mathrm{Im}\, r$ επιμορφισμός και $j \circ r^+ = r$.

$$\begin{array}{ccccc} F & =\!=\!=\!= & F & & \\ \downarrow{\scriptstyle \exists c} & & \downarrow{\scriptstyle (b\circ t)^+} & & \\ E' & \xrightarrow{r^+} & \mathrm{Im}\, r & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Προφανώς,

$$r^+ \circ c = (b \circ t)^+ \Rightarrow (j \circ r^+) \circ c = j \circ (r^+ \circ c) = j \circ (b \circ t)^+ \Rightarrow r \circ c = b \circ t,$$

επαληθεύοντας τον ισχυρισμό.

(iii) Κατασκευάζουμε τους $t_n : F_n \to E_n$ αναδρομικά για κάθε $n \geq 0$.
Για $n = 0$ χρησιμοποιούμε το (ii) στο ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccc} F_0 & \xrightarrow{e} & \mathrm{coker}\, d_1 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \exists t_0} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow \\ E_0 & \xrightarrow[\varepsilon]{} & \mathrm{coker}\, \partial_1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

και συνάγουμε την ύπαρξη ενός t_0, τέτοιου ώστε να ισχύει η σχέση $\varepsilon \circ t_0 = f \circ e$.
Ομοίως, για $n = 1$, υπάρχει $t_1 : F_1 \to E_1$, τέτοιος ώστε $\partial_1 \circ t_1 = t_0 \circ d_1$:

$$\begin{array}{ccccc} F_1 & \xrightarrow{d_1} & F_0 & \xrightarrow{e} & \mathrm{coker}\, d_1 \\ \downarrow{\scriptstyle \exists t_1} & & \downarrow{\scriptstyle t_0} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ E_1 & \xrightarrow[\partial_1]{} & E_0 & \xrightarrow[\varepsilon]{} & \mathrm{coker}\, \partial_1 \end{array}$$

Για το επαγωγικό βήμα υποθέτουμε ότι για $n>1$ έχουν ορισθεί οι $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$, όπου $t_i : F_i \to E_i$, τέτοιος ώστε $\partial_i \circ t_i = t_{i-1} \circ d_i$ για κάθε $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ (και $\varepsilon \circ t_0 = f \circ e$). Εφαρμόζοντας το (ii) στο κάτωθι διάγραμμα προκύπτει ότι $\exists t_n$, $t_n : F_n \to E_n$, τέτοιος ώστε $\partial_n \circ t_n = t_{n-1} \circ d_n$.

$$\begin{tikzcd}
F_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\exists t_n"] & F_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "t_{n-1}"] & F_{n-2} \arrow[d, "t_{n-2}"] \\
E_n \arrow[r, "\partial_n"'] & E_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"'] & E_{n-2}
\end{tikzcd}$$

Άρα υπάρχει ακολουθία ομομορφισμών R-μοδίων $(t_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ με $t_n : F_n \to E_n$ και $\partial_n \circ t_n = t_{n-1} \circ d_n$ για κάθε $n \geq 1$, και $\varepsilon \circ t_0 = f \circ e$. Αρκεί λοιπόν να θέσουμε $t_n = 0$ για $n < 0$. (Πρβλ. [Σ.Ο.Α.] θεώρημα 4.1.4, σελ. 189-192). □

<u>Σημείωση</u>: Μπορεί να αποδειχθεί ότι ο t στην εκφώνηση τού (iii) είναι, για δεδομένο *f*, μοναδικός μέχρις αλυσωτής ομοτοπίας. Σημειωτέον ότι αυτό θα προκύψει ως πόρισμα από ό,τι ακολουθεί.

<u>ΕΝΟΤΗΤΑ 2:</u> ΑΚΥΚΛΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ.

<u>Ορισμός 2.1:</u> (i) Μια ***κατηγορία $\mathcal{C}$ με μοντέλα $\mathcal{M}$*** είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος $(\mathcal{C}, \mathcal{M})$, όπου $\mathcal{M}$ μια υποκλάση τής κλάσης $Ob(\mathcal{C})$ των αντικειμένων τής $\mathcal{C}$· τα στοιχεία τής $\mathcal{M}$ λέγονται ***μοντέλα***.

(ii) Έστω $\mathcal{C}$ κατηγορία και έστω $F : \mathcal{C} \to Mod_R$ ένας συναρτητής[1]. Ως ***στοιχείο*** τού συναρτητή F ορίζουμε οιοδήποτε $x \in F(C)$, για κάποιο $C \in Ob(\mathcal{C})$. (Ο ορισμός αυτός εξαρτάται από το C. Ακριβέστερα, ως ***στοιχείο*** τού F οφείλουμε να νοούμε το *ζεύγος* (C, x)).

Γενικότερα, μια ***οικογένεια στοιχείων τού*** F είναι μια οικογένεια $(x_j)_{j \in J}$, όπου $x_j \in F(C_j)$ για κάθε j, με $(C_j)_{j \in J}$ μια οικογένεια αντικειμένων τής $\mathcal{C}$. (Ακριβέστερα, υπονοούμε την οικογένεια ζευγών $(C_j, x_j)_{j \in J}$). Δυο τέτοιες οικογένειες στοιχείων (όχι απαραίτητα τού ιδίου συναρτητή) λέγονται ***συμβατές*** όταν οι οικογένειες τού ορισμού τους είναι οι ίδιες. Στην περίπτωση κατά την οποία η θεωρούμενη κατηγορία $\mathcal{C}$ έχει μοντέλα $\mathcal{M}$, τότε οιαδήποτε (συνήθης) οικογένεια στοιχείων τού F με την επιπλέον συνθήκη $C_j \in \mathcal{M}$, για κάθε j, καλείται ***$\mathcal{M}$-οικογένεια στοιχείων τού*** F.

<u>Παρατήρηση</u>: Η έννοια τής κατηγορίας με μοντέλα είναι περισσότερο χρήσιμη όταν η $\mathcal{M}$ είναι υποσύνολο (και όχι απλώς υποκλάση) τής $Ob(\mathcal{C})$, οπότε σε αυτή

[1] Από τούδε και στο εξής «συναρτητής» θα σημαίνει «συναλλοίωτος συναρτητής».

την περίπτωση πρόκειται απλώς για μια «μικρή» συλλογή αντικειμένων επιλεγμένων από μια κατηγορία $\mathcal{C}$. Επίσης, η έννοια τού στοιχείου ενός συναρτητή μπορεί να ορισθεί και για άλλες κατηγορίες εκτός τής Mod_R, αρκεί τα αντικείμενά τους να «έχουν στοιχεία».

<u>Ορισμός 2.2:</u> Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία (με μοντέλα $\mathcal{M}$) και έστω $F:\mathcal{C}\to Mod_R$ ένας συναρτητής. Τότε ο F λέγεται ***ελεύθερος*** (***ως προς τα μοντέλα*** $\mathcal{M}$) όταν ισχύουν τα εξής:
(i) Το $F(C)$ είναι ένας ελεύθερος R-μόδιος για κάθε $C\in Ob(\mathcal{C})$.
(ii) Υπάρχει μια ($\mathcal{M}$-)οικογένεια στοιχείων $(M_j,x_j)_{j\in J}$ τού F, ούτως ώστε για κάθε $C\in Ob(\mathcal{C})$ το σύνολο $\left\{(F(\sigma)(x_j):\sigma\in Mor_{\mathcal{C}}(M_j,C), j\in J\right\}$ να είναι βάση τού $F(C)$. (Αυτό έχει νόημα, διότι

$$\sigma\in Mor_{\mathcal{C}}(M_j,C)\Rightarrow F(\sigma)\in Hom_R(F(M_j),F(C))$$

για όλους τους σ, αφού ο F είναι συναρτητής. Επειδή $x_j\in F(M_j)$, προκύπτει ότι $F\left(\sigma\right)(x_j)\in F(C)$). Μια τέτοιου είδους οικογένεια στοιχείων τού F λέγεται ***βάση τού F*** (***ως προς την*** $\mathcal{M}$).

<u>Σημείωση</u>: Εδώ ορίσαμε δύο έννοιες «ελευθερίας»: Μία «απόλυτη» και μία που εξαρτάται από κάποια συλλογή μοντέλων $\mathcal{M}$. Το ότι ένας συναρτητής είναι ελεύθερος ως προς την $\mathcal{M}$ σημαίνει απλώς ότι είναι ελεύθερος με κάποιο περιορισμό για τις πιθανές βάσεις. Δηλαδή μια βάση τού F ως προς την $\mathcal{M}$ είναι μια συνήθης βάση $(M_j,x_j)_{j\in J}$ με την επιπλέον ιδιότητα $M_j\in\mathcal{M}$, για κάθε j. Εάν λοιπόν ο συναρτητής F είναι $\mathcal{M}$-ελεύθερος και $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{M}'$, τότε είναι και $\mathcal{M}$ -ελεύθερος. Επιπροσθέτως, ένας ελεύθερος F με την ανωτέρω βάση είναι πάντοτε $\mathcal{M}$-ελεύθερος θέτοντας ως $\mathcal{M}:=\{M_j : j\in J\}$.

<u>Παραδείγματα 2.3:</u> (i) Έστω $\mathcal{C}$ κατηγορία. (Για λόγους διευκόλυνσής μας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathcal{C}$ = *Sets*). Για οιονδήποτε R-μόδιο L ορίζουμε τον σταθερό συναρτητή $F_L:\mathcal{C}\to Mod_R$, όπου $F_L(C) = L$, $F_L(f) = Id_L$ για οιαδήποτε $C,D\in Ob(\mathcal{C})$ και οιονδήποτε μορφισμό $f:C\to D$. Παρατηρούμε ότι εάν η $(C_j,x_j)_{j\in J}$ είναι μια οικογένεια στοιχείων τού συναρτητή F_L, τότε η $(x_j)_{j\in J}$ είναι μια οικογένεια στοιχείων τού L. Και αντιστρόφως· κάθε οικογένεια στοιχείων τού L προέρχεται από μία αντίστοιχη τού F_L κατ' αυτόν τον τρόπο. Προκύπτει εύκολα ότι ο F_L είναι ελεύθερος με βάση του την $(C_j,x_j)_{j\in J}$ εάν και μόνον εάν ο L είναι ελεύθερος με του την βάση $(x_j)_{j\in J}$. (Εν προκειμένω, ο F_L θα είναι ελεύθερος και ως προς οιοδήποτε σύνολο μοντέλων $\mathcal{M}$, αρκεί να επιλεγεί κατάλληλα η οικογένεια $(C_j)_{j\in J}$). Ως εκ τούτου, η έννοια τού ελευθέρου συναρτητή μπορεί να θεωρηθεί ως γενίκευση τής έννοιας τού ελευθέρου R-μοδίου. (Μάλιστα, έχουμε και μια παρόμοια αντιστοιχία μεταξύ ομομορφισμών R-μοδίων και φυσικών μετασχηματισμών μεταξύ των αντίστοιχων σταθερών συναρτητών. Αυτό επιτρέπει να αναφανεί καλύτερα η αναλογία μεταξύ R-μοδίων και συναρτητών $F:\mathcal{C}\to Mod_R$ σε ό,τι ακολουθεί).

(ii) Ο «ελεύθερος συναρτητής» $Fr_R : Sets \to Mod_R$ που ορίσθηκε στο 6.2.3 (iv) των [Σ.Ο.Α.] είναι ελεύθερος με βάση του το $\{(\mu, 1_{Fr_R(\mu)})\}$, όπου $\mu=\{*\}$ οιοδήποτε μονοσύνολο, δηλ. $Fr_R(\mu)\cong R$. Πράγματι· ας συμβολίσουμε ως i_C τις φυσικές ενθέσεις $i_C : C\to Fr_R(C)$. Υπάρχει μια αμφίρριψη μεταξύ των στοιχείων x τού $C\in Ob(Sets)$ και των απεικονίσεων $\overline{x}:\mu\to C$, ώστε $\overline{x}(*)=x$. Επίσης, από τον ορισμό τους, οι ομομορφισμοί $Fr_R(\overline{x}) : Fr_R(\mu)\to Fr_R(C)$ καθορίζονται από το ότι στέλνουν το $i_\mu(*)=1_{Fr_R(\mu)}$ στο $i_C(\overline{x}(*))=i_C(x)$. Άρα

$$\left\{(Fr_R(\overline{x})(1_{Fr_R(\mu)}) \mid \overline{x}:\mu\to C\right\} = \left\{i_C(\overline{x}(*)) \mid \overline{x}:\mu\to C\right\} = \left\{i_C(x) \mid x\in C\right\}$$

που είναι εξ ορισμού βάση τού $Fr_R(C)$.

(iii) Παγιώνουμε έναν $q\geq 0$ και θεωρούμε την κατηγορία $\mathcal{Top}$ με μοντέλα $\mathcal{M}=\{\Delta_q\}$. Έστω $S_q:\mathcal{Top}\to Mod_R$ ο συναρτητής $X\mapsto S_q(X;R)$, $f\mapsto S_q(f)$, όπου $S_q(X;R)$ ο μόδιος των q-αλυσίδων με συντελεστές ειλημμένους από τον R και

$$S_q(f) : S_q(X;R) \longrightarrow S_q(Y;R)$$

ο ομομορφισμός R-μοδίων ο οριζόμενος μέσω τού τύπου $S_q(f)\,(\sigma_q) := f\circ\sigma_q$ για κάθε ιδιάζον q-μονόπλοκο σ_q εντός τού X και μέσω γραμμικής επέκτασης επί ολοκλήρου τού $S_q(X;R)$. (Το ότι ο ανωτέρω $S_q:\mathcal{Top}\to Mod_R$ είναι συναρτητής έπεται από το λήμμα 3.1.9 των διανεμηθεισών χειρογράφων σημειώσεων τού διδάσκοντος, σελ. 164.) Θεωρώντας τή $\delta = Id_{\Delta_q}:\Delta_q\to\Delta_q$ (ιδωμένη ως ένα ιδιάζον q-μονόπλοκο $\delta\in S_q(\Delta_q;R)$), το μονοσύνολο $\{\delta\}$ είναι (τετριμμένα) $\mathcal{M}$-οικογένεια στοιχείων τού S_q. (Ακριβέστερα, η οικογένεια είναι η $\{(\Delta_q,\delta)\}$). Ο μόδιος $S_q\,(X;R)$ είναι εξ ορισμού ελεύθερος για κάθε τοπολογικό χώρο X, και μάλιστα με βάση του όλες τις συνεχείς απεικονίσεις $\sigma:\Delta_q\to X$. Όμως για κάθε τέτοια απεικόνιση έχουμε $S_q(\sigma)(\delta)=\sigma\circ\delta=\sigma$, οπότε

$$\left\{(F(\sigma)(x_j) : (\sigma : M_j\to C), j\in J\right\} = \left\{\sigma : \sigma \text{ συνεχής } \Delta_q\to X\right\}$$

που είναι μια βάση τού $S_q(X;R)$. Άρα ο S_q είναι $\mathcal{M}$-ελεύθερος με βάση του το $\{\delta\}$. (Ένας άλλος τρόπος να δειχθεί αυτό είναι να παρατηρήσουμε ότι ο S_q ισούται με τη σύνθεση τού $Hom_{\mathcal{Top}}(\Delta_q, \_\,)$ και τού συναρτητή τού (ii)). □

Από εδώ και στο εξής θα επικεντρωθούμε σε συναρτητές $F:\mathcal{C}\to Mod_R$ και σε φυσικούς μετασχηματισμούς μεταξύ αυτών. Παρότι οι εν λόγω συναρτητές δεν αποτελούν πάντοτε μια κατηγορία, υπάρχει μια «αναλογική ομοιότητα» προς την κατηγορία Mod_R, η οποία εξηγήθηκε εν μέρει στο παράδειγμα 2.3 (i) και η οποία θα οδηγήσει τόσο στη θεώρηση μεταθετικών διαγραμμάτων συναρτητών και φυσικών μετασχηματισμών μεταξύ αυτών όσο και στην απόδειξη διάφορων αποτελεσμάτων απορρεόντων από γενικεύσεις των αντίστοιχων τής πρώτης ενότητας. Σε ό,τι ακολουθεί, η σύνθεση φυσικών μετασχηματισμών, το άθροισμα, η διαφορά τους, ο ταυτοτικός μετασχηματισμός, ο μηδενικός, ορίζονται «κατά συντεταγμένες»· για παράδειγμα, $(\sigma\circ\tau)_C=\sigma_C\circ\tau_C$ κ.λπ. (Θα μπορούσαμε να ορίσουμε και «πυρήνες» ή «εικόνες» φυσικών μετασχηματισμών με όμοιο τρόπο. Για παράδειγμα, εάν $\tau:F\to E$, θα μπορούσαμε να ορίσουμε $(\ker\tau)_C=\ker\tau_C$. Σημειωτέον ότι ο $(\ker\tau)_C=\ker\tau(C)$ μπορεί να θεωρηθεί, με τον μόνο δυνατό ορισμό τού $\ker\tau(f):\ker\tau_C\to\ker\tau_D$, $f:C\to D$, ως συναρτητής $\ker\tau:\mathcal{C}\to Mod_R$, με τις ενθέσεις $i_C:\ker\tau_C\to F(C)$ να αποτελούν φυσικό μετασχηματισμό $i:\ker\tau\to F$, τη «συνήθη ένθεση». Ωστόσο, δεν συγκαταλέγεται στις προθέσεις μας η επέκταση τής προαναφερθείσας «αναλογική ομοιότητας» σε τέτοιο βαθμό γενικότητας.)

<u>**Ορισμός 2.4:**</u> Έστω ότι η $\mathcal{C}$ είναι μια κατηγορία με μοντέλα $\mathcal{M}$ και ότι οι E, F, G, είναι τρεις συναρτητές $\mathcal{C}\to Mod_R$. Δοθέντων δύο φυσικών μετασχηματισμών $E\xrightarrow{\tau}F\xrightarrow{\sigma}G$, λέμε ότι το διάγραμμα είναι ***ακριβές*** στην ενδιάμεση θέση όταν $\operatorname{Im}\tau=\ker\sigma$, δηλαδή όταν $\operatorname{Im}\tau_C=\ker\sigma_C$, $\forall C\in Ob(\mathcal{C})$, ενώ λέμε ότι είναι ***$\mathcal{M}$-ακριβές*** όταν $\operatorname{Im}\tau_M=\ker\sigma_M$, $\forall M\in\mathcal{M}$.

<u>*Παρατήρηση*</u>: Αυτοί οι ορισμοί επεκτείνονται κατά προφανή τρόπο και σε πιο περίπλοκα διαγράμματα. Παρατηρούμε επίσης ότι η συνθήκη $\operatorname{Im}\tau_C\subseteq\ker\sigma_C$, $\forall C\in Ob(\mathcal{C})$, ισοδυναμεί με την $\sigma\circ\tau=0$. Μάλιστα, μπορούμε να κάνουμε λόγο και για «αλυσωτά σύμπλοκα» συναρτητών.

<u>**Λήμμα 2.5:**</u> *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία (με μοντέλα $\mathcal{M}$) και έστω $F:\mathcal{C}\to Mod_R$ ένας ελεύθερος (ως προς $\mathcal{M}$) συναρτητής με την $\mathcal{X}=(M_j,x_j)_{j\in J}$ ως βάση του. Εάν ο $G:\mathcal{C}\to Mod_R$ είναι τυχών συναρτητής και η $\mathcal{Y}=(M_j,y_j)_{j\in J}$ τυχούσα <u>συμβατή</u> ($\mathcal{M}$-)οικογένεια στοιχείων τού G, τότε υπάρχει ένας μοναδικός φυσικός μετασχηματισμός $\tau:F\to G$, ο οποίος «απεικονίζει την $\mathcal{X}$ στην $\mathcal{Y}$», δηλαδή $\tau_{M_j}(x_j)=y_j$, $\forall j\in J$.*

<u>**Απόδειξη:**</u> Ας υποθέσουμε κατ' αρχάς ότι υπάρχει ένας τ με αυτήν την ιδιότητα. Παγιώνουμε κάποιον δείκτη $j\in J$. Τότε για κάθε $C\in Ob(\mathcal{C})$ και για κάθε $\sigma\in Mor_{\mathcal{C}}(M_j,C)$ προκύπτει το εξής μεταθετικό διάγραμμα (όπου $\tau_j:=\tau_{M_j}$):

$$\begin{array}{ccc} F(M_j) & \xrightarrow{F(\sigma)} & F(C) \\ \tau_j \downarrow & & \downarrow \tau_C \\ G(M_j) & \xrightarrow[G(\sigma)]{} & G(C) \end{array}$$

Άρα $(\tau_C \circ F(\sigma))(x_j) = (G(\sigma)\circ \tau_j)(x_j) \Rightarrow \tau_C(F(\sigma)(x_j)) = G(\sigma)(\tau_j(x_j)) = G(\sigma)(y_j)$.
(Η τελευταία ισότητα από υπόθεση, η άλλη από μεταθετικότητα διαγράμματος). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για οιουσδήποτε τ, τ' που ικανοποιούν την υπόθεση και για οιοδήποτε $C \in Ob(\mathcal{C})$ έχουμε: $\tau_C(F(\sigma)(x_j)) = \tau'_C(F(\sigma)(x_j)) = G(\sigma)(y_j)$ για όλα τα $\sigma \in Mor_{\mathcal{C}}(M_j, C)$ και για κάθε $j \in J$. Όμως τα $F(\sigma)(x_j)$ αποτελούν βάση τού $F(C)$, λόγω ελευθερίας, οπότε $\tau_C = \tau'_C$. Επειδή το C ήταν αυθαιρέτως επιλεγμένο, έχουμε $\tau = \tau'$, δείχνοντας τη μοναδικότητα.

Για να *κατασκευάσουμε* τον φυσικό μετασχηματισμό τ, ορίζουμε για κάθε $C \in Ob(\mathcal{C})$: $\tau_C(F(\sigma)(x_j)) = G(\sigma)(y_j)$, για κάθε $\sigma \in Mor_{\mathcal{C}}(M_j, C)$ και για κάθε $j \in J$ και χρησιμοποιούμε γραμμική επέκταση. Προφανώς, $\tau_{M_j}(x_j) = y_j$, $\forall j \in J$ για $C = M_j, \sigma = Id_{M_j}$. Απομένει, ως εκ τούτου, να δείξουμε την ιδιότητα τού φυσικού μετασχηματισμού: Εάν $f \in Mor_{\mathcal{C}}(C, D)$, για κάποια C, D, τότε πρέπει να δείξουμε τη μεταθετικότητα τού ακόλουθου διαγράμματος:

$$\begin{array}{ccc} F(C) & \xrightarrow{F(f)} & F(D) \\ \tau_C \downarrow & & \downarrow \tau_D \\ G(C) & \xrightarrow[G(f)]{} & G(D) \end{array}$$

δηλαδή να δείξουμε ότι $G(f)\circ \tau_C = \tau_D \circ F(f)$ ως ομομορφισμοί $F(C) \to G(D)$. Επειδή ο $F(C)$ είναι ελεύθερος, αρκεί να δείξουμε την ισότητα στα στοιχεία μιας βάσης τού $F(C)$, συγκεκριμένα τής $\{(F(\sigma)(x_j) : \sigma \in Mor_{\mathcal{C}}(M_j, C), j \in J\}$. Έστω $j \in J$ και έστω $\sigma \in Mor_{\mathcal{C}}(M_j, C)$. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\tau_C(F(\sigma)(x_j)) = G(\sigma)(y_j).$$

Προφανώς,
$(G(f)\circ \tau_C)(F(\sigma)(x_j)) = G(f)(\tau_C(F(\sigma)(x_j)) = G(f)(G(\sigma)(y_j) = G(f \circ \sigma)(y_j)$,
$(\tau_D \circ F(f))(F(\sigma)(x_j)) = \tau_D((F(f)\circ F(\sigma))(x_j)) = \tau_D(F(f\circ\sigma)(x_j)) = G(f\circ\sigma)(y_j)$.
Άρα οι τ_C αποτελούν όντως φυσικό μετασχηματισμό. □

<u>Λήμμα 2.6:</u> *Έστω $\mathcal{C}$ κατηγορία με μοντέλα $\mathcal{M}$. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα συναρτητών $\mathcal{C} \to Mod_R$ και φυσικών μετασχηματισμών μεταξύ αυτών (χωρίς τον γ), στο οποίο $\sigma \circ \tau = 0$, η κάτω γραμμή είναι ακριβής ως προς $\mathcal{M}$ (δηλαδή $\operatorname{Im}\rho_M = \ker \pi_M$, $\forall M \in \mathcal{M}$) και ο F είναι ελεύθερος ως προς την $\mathcal{M}$.*

Τότε υπάρχει ένας φυσικός μετασχηματισμός $\gamma : F \to E'$ *που το συμπληρώνει μεταθετικά.*

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{\tau} & G & \xrightarrow{\sigma} & G'' \\ \downarrow{\scriptstyle \exists\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ E' & \xrightarrow[\rho]{} & E & \xrightarrow[\pi]{} & E'' \end{array}$$

Απόδειξη: Από την υπόθεσή μας υπάρχει μια οικογένεια $(x_j)_{j\in J}$, τέτοια ώστε να ισχύει $x_j \in F(M_j)$ για κάθε *j*. Σε κάθε τιμή τού *j* αντιστοιχεί ένα μεταθετικό διάγραμμα στην Mod_R που ικανοποιεί τις υποθέσεις τού θεωρήματος 1.2 (ii), οπότε κάθε $x_j \in F(M_j)$ καθορίζει ένα $y'_j \in E'(M_j)$, όπου $y'_j = c_j(x_j)$.

$$\begin{array}{ccccc} F(M_j) & \xrightarrow{\tau_{M_j}} & G(M_j) & \xrightarrow{\sigma_{M_j}} & G''(M_j) \\ \downarrow{\scriptstyle \exists c_j} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_{M_j}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{M_j}} \\ E'(M_j) & \xrightarrow[\rho_{M_j}]{} & E(M_j) & \xrightarrow[\pi_{M_j}]{} & E''(M_j) \end{array}$$

Τα y'_j είναι μια (συμβατή) οικογένεια στοιχείων για τον E'. Από το Λήμμα 2.5 υπάρχει ένας φυσικός μετασχηματισμός $\gamma : F \to E'$, τέτοιος ώστε $\gamma_{M_j}(x_j) = y'_j$. Απομένει να ελέγξουμε τη μεταθετικότητα. Ορίζουμε μια συμβατή συλλογή στοιχείων για τον *E* θέτοντας $y_j := \rho_{M_j}(y'_j)$.

$$\beta_{M_j}(\tau_{M_j}(x_j)) = \rho_{M_j}(c_j(x_j)) = \rho_{M_j}(y'_j) = \rho_{M_j}(\gamma_{M_j}(x_j)$$

$$\Longrightarrow (\beta \circ \tau)_{M_j}(x_j) = (\rho \circ \gamma)_{M_j}(x_j) = \rho_{M_j}(y'_j) = y_j, \ \forall j.$$

Επομένως, αφού τα $(x_j)_{j\in J}$ αποτελούν βάση τού *F*, έχουμε λόγω μοναδικότητας $\beta \circ \tau = \rho \circ \gamma$. □

Τώρα θα επικεντρωθούμε σε συναρτητές $E : \mathcal{C} \to Comp(Mod_R)$, όπου $\mathcal{C}$ τυχούσα κατηγορία. Για κάθε $i \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε την προβολή στην *i*-στη συντεταγμένη: $P_i : Comp(Mod_R) \to Mod_R$, όπου $P_i(C_\bullet) = C_i$, $P_i(f_\bullet) = f_i$. Ο συναρτητής $E_i = P_i \circ E : \mathcal{C} \to Mod_R$ είναι το *i*-οστό τμήμα τού *E*. Εάν για κάθε $C \in Ob(\mathcal{C})$ συμβολίσουμε τους συνοριακούς τελεστές τού $E(C)$ ως $\partial^C_\bullet = (\partial^C_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, εύκολα προκύπτει ότι για παγιωμένο *i* σχηματίζεται μια οικογένεια ομομορφισμών ως προς $C \in Ob(\mathcal{C})$, η οποία αποτελεί φυσικό μετασχηματισμό $\partial_i : E_i \to E_{i-1}$. Πράγματι·

$$E_i(C) = E(C)_i, E_i(D) = E(D)_i, E_i(f) = E(f)_i : E(C)_i \to E(D)_i$$

για τυχόντα $C, D \in Ob(\mathcal{C}), f : C \to D$, και, ως εκ τούτου, πληρούται η συνθήκη τού φυσικού μετασχηματισμού:

$$\begin{array}{ccc} E_i(C) & \xrightarrow{\partial_i^C} & E_{i-1}(C) \\ {\scriptstyle E_i(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle E_{i-1}(f)} \\ E_i(D) & \xrightarrow[\partial_i^D]{} & E_{i-1}(D) \end{array}$$

όπως διαπιστώνουμε κατόπιν απλής εφαρμογής τού ορισμού τού αλυσωτού μετασχηματισμού. Επίσης, είναι προφανές ότι $\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0$ ως φυσικοί μετασχηματισμοί. Επομένως, από έναν συναρτητή $E : \mathcal{C} \to Comp(Mod_R)$ σχηματίζεται ένα «αλυσωτό σύμπλοκο» συναρτητών $\mathcal{C} \to Mod_R$, ήτοι το $E_\bullet = (E_i, \partial_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Και αντίστροφα· ένα τέτοιο «σύμπλοκο» μπορεί να θεωρηθεί συναρτητής $\mathcal{C} \to Comp(Mod_R)$ με τον προφανή τρόπο. Θα χρησιμοποιούμε λοιπόν αυτήν την αντιστοιχία σε ό,τι ακολουθεί. Ορίζουμε $H_n(E) := H_n \circ E$, για κάθε ακέραιο n, όπου ο H_n είναι ιδωμένος ως συναρτητής $Comp(Mod_R) \to Mod_R$. Τέλος, παρατηρούμε ότι εάν $F, E : \mathcal{C} \to Comp(Mod_R)$ και ο $\tau : F \to E$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός, τότε αυτός μπορεί ομοίως να εκληφθεί ως «αλυσωτός μετασχηματισμός» μεταξύ των αντίστοιχων «αλυσωτών συμπλόκων», ήτοι μια ακολουθία $\tau_i : F_i \to E_i$, οι όροι τής οποίας μετατίθενται με τους «συνοριακούς τελεστές».

<u>Ορισμός 2.7:</u> Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία (με μοντέλα $\mathcal{M}$), και έστω $E : \mathcal{C} \to Comp(Mod_R)$ ένας συναρτητής. Ο E λέγεται ***μη αρνητικός*** όταν το $E(C)$ είναι μη αρνητικό για κάθε αντικείμενο C, ενώ λέγεται ($\mathcal{M}$***-)ακυκληματικός***, όταν το $E(C)$ είναι ακυκληματικό για κάθε αντικείμενο $C \in Ob(\mathcal{C})$ ($\in \mathcal{M}$). Τέλος, ο συναρτητής E ονομάζεται ($\mathcal{M}$-)***ελεύθερος*** όταν τα i-οστά τμήματα E_i τού E είναι ($\mathcal{M}$-)ελεύθερα για κάθε i. Ισοδύναμα, ο E είναι μη αρνητικός όταν $E_i = 0, \forall i < 0$, και ($\mathcal{M}$-)ακυκληματικός όταν $\forall i > 0, H_i(E) = 0$ ως συναρτητής (και αντιστοίχως, ως συναρτητής περιορισμένος στο $\mathcal{M}$).

Στην περίπτωση μη αρνητικού συναρτητή, μπορούμε να επεκτείνουμε κάθε $E(C)$ επισυνάπτοντας τον $E_0(C) \xrightarrow{\pi_C} \operatorname{coker} \partial_1^C \xrightarrow{0} 0$ (βλ. παρατήρηση στον ορισμό 1.1). Ο $\operatorname{coker} \partial_1^C$ είναι συναρτητής αφού ισούται με τον $H_0 \circ E$, ενώ η συλλογή των επιμορφισμών π_C είναι φυσικός μετασχηματισμός $E_0 \to H_0 \circ E$ (επειδή ο $H_0(E_0(f))$ είναι απλώς ο ομομορφισμός που επάγεται από τον $E_0(f)$, μεταβαίνοντας στο πηλίκο). Συνεπώς, η έννοια τού «αλυσωτού συμπλόκου συναρτητών» επεκτείνεται στην περίπτωση που αυτό είναι μη αρνητικό, όπως ακριβώς συμβαίνει και με τα συνήθη αλυσωτά σύμπλοκα.

<u>Θεώρημα 2.8 (Ακυκληματικά Μοντέλα):</u> *Έστω ότι η $\mathcal{C}$ είναι μια κατηγορία με μοντέλα $\mathcal{M}$ και ότι οι $F, E : \mathcal{C} \to Comp(Mod_R)$ είναι μη αρνητικοί συναρτητές, με τον μεν F $\mathcal{M}$-ελεύθερο, τον δε E $\mathcal{M}$-ακυκληματικό. Τότε:*

(i) *Για κάθε φυσικό μετασχηματισμό $\varphi : H_0 F \to H_0 E$ υπάρχει φυσικός αλυσωτός μετασχηματισμός $\tau : F \to E$ ο οποίος επεκτείνει τον φ, δηλαδή $\varphi \circ e = \varepsilon \circ \tau_0$. (Λέγοντας «φυσικό αλυσωτό μετασχηματισμό» εννοούμε έναν φυσικό μετασχη-*

ματισμό $\tau: F \to E$ *ή ισοδύναμα έναν «αλυσωτό μετασχηματισμό» μεταξύ των δυο «αλυσωτών συμπλόκων» που αντιστοιχούν στους F, E). Δηλαδή υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots\longrightarrow F_2 & \xrightarrow{d_2} & F_1 & \xrightarrow{d_1} & F_0 & \xrightarrow{e} & H_0F & \longrightarrow & 0 \\
\vdots \quad \downarrow{\exists\tau_2} & & \downarrow{\exists\tau_1} & & \downarrow{\exists\tau_0} & & \downarrow{\varphi} & & \\
\cdots\longrightarrow E_2 & \xrightarrow[\partial_2]{} & E_1 & \xrightarrow[\partial_1]{} & E_0 & \xrightarrow[\varepsilon]{} & H_0E & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

(ii) *Εάν* τ, τ' *είναι φυσικοί αλυσωτοί μετασχηματισμοί που επεκτείνουν τον φ, τότε οι* τ, τ' *είναι φυσικώς αλυσωτώς ομότοποι, ήτοι υπάρχει ακολουθία φυσικών μετασχηματισμών* $s_k : F_k \to E_k$*, τέτοια ώστε* $\partial_{k+1} \circ s_k + s_{k-1} \circ d_k = \tau_k - \tau'_k$.

(iii) *Εάν αμφότεροι οι E και F είναι* $\mathcal{M}$*-ελεύθεροι και* $\mathcal{M}$*-ακυκληματικοί, και ο φ φυσική ισοδυναμία, τότε κάθε φυσικός αλυσωτός μετασχηματισμός υπεράνω τού φ είναι φυσική αλυσωτή ισοδυναμία. Δηλαδή εάν ο* $\tau: F \to E$ *είναι φυσικός αλυσωτός μετασχηματισμός, τότε υπάρχει ένας* $\sigma: E \to F$, *τέτοιος ώστε:* $\sigma \circ \tau \simeq Id_F$, $\tau \circ \sigma \simeq Id_E$, *όπου* $Id_F : F \to F, Id_E : E \to E$ *είναι οι ταυτοτικοί φυσικοί μετασχηματισμοί.*

Απόδειξη: (i) Κατασκευάζουμε τους $\tau_n : F_n \to E_n$ εργαζόμενοι επαγωγικά επί τού $n \in \mathbb{N}_0$. Η ύπαρξη τού τ_0 προκύπτει κατόπιν εφαρμογής τού λήμματος 2.6 στο κάτωθι διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccc}
F_0 & \xrightarrow{e} & H_0F & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\exists\tau_0} & & \downarrow{\varphi} & & \downarrow \\
E_0 & \xrightarrow[\varepsilon]{} & H_0E & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Άρα υπάρχει τ_0, τέτοιο ώστε $\varepsilon \circ \tau_0 = \varphi \circ e$. Ομοίως για $n = 1$:

$$\begin{array}{ccccc}
F_1 & \xrightarrow{d_1} & F_0 & \xrightarrow{e} & H_0F \\
\downarrow{\exists\tau_1} & & \downarrow{\tau_0} & & \downarrow{\varphi} \\
E_1 & \xrightarrow[\partial_1]{} & E_0 & \xrightarrow[\varepsilon]{} & H_0E
\end{array}$$

(διότι η κάτω γραμμή είναι προφανώς $\mathcal{M}$-ακριβής, και μάλιστα ακριβής για κάθε *C*, και στα δύο διαγράμματα.)

Συνεχίζουμε επαγωγικά όπως στο 1.2 (iii):

$$\begin{array}{ccccc}
F_n & \xrightarrow{d_n} & F_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & F_{n-2} \\
\downarrow{\exists\tau_n} & & \downarrow{\tau_{n-1}} & & \downarrow{\tau_{n-2}} \\
E_n & \xrightarrow[\partial_n]{} & E_{n-1} & \xrightarrow[\partial_{n-1}]{} & E_{n-2}
\end{array}$$

Άρα υπάρχει ακολουθία φυσικών μετασχηματισμών $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, τέτοια ώστε να ισχύει $\tau_n : F_n \to E_n$, $\partial_n \circ t_n = t_{n-1} \circ d_n$ για κάθε $n \geq 1$ και $\varepsilon \circ t_0 = f \circ e$.

(ii) Ας υποθέσουμε ότι οι τ, τ' είναι φυσικοί αλυσωτοί μετασχηματισμοί που επεκτείνουν τον φ. Ορίζουμε $\theta_k := \tau_k - \tau'_k$. Αναζητούμε φυσικούς μετασχηματισμούς $s_k : F_k \to E_{k+1}$, τέτοιους ώστε $\partial_{k+1} \circ s_k + s_{k-1} \circ d_k = \theta_k$. Θέτουμε $s_{-1} := 0$ και κατασκευάζουμε τους s_n αναδρομικά ως προς $n \geq 0$:

Επειδή $\varphi \circ e = \varepsilon \circ \tau_0 = \varepsilon \circ \tau'_0$, έχουμε $\varepsilon \circ \theta_0 = 0$, οπότε το ακόλουθο διάγραμμα μετατίθεται και από το λήμμα 2.6 υπάρχει s_0 ώστε:

$$\begin{array}{ccccc} F_0 & \xrightarrow{Id} & F_0 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \exists s_0} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_0} & & \downarrow \\ E_1 & \xrightarrow[\partial_1]{} & E_0 & \xrightarrow[\varepsilon]{} & H_0E \end{array}$$

με $\partial_1 \circ s_0 = \partial_1 \circ s_0 + 0 = \partial_1 \circ s_0 + s_{-1} \circ d_0 = \theta_0$, ενώ για το επαγωγικό βήμα θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccc} F_k & \xrightarrow{Id} & F_k & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \exists s_k} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_k - s_{k-1} \circ d_k} & & \downarrow \\ E_{k+1} & \xrightarrow[\partial_{k+1}]{} & E_k & \xrightarrow[\partial_k]{} & E_{k-1} \end{array}$$

Προφανώς, $\partial_k \circ (\theta_k - s_{k-1} \circ d_k) = \partial_k \circ \theta_k - (\partial_k \circ s_{k-1}) \circ d_k = \partial_k \circ \theta_k - (\theta_{k-1} - s_{k-2} \circ d_{k-1}) \circ d_k$ (αφού $\partial_k \circ s_{k-1} + s_{k-2} \circ d_{k-1} = \theta_{k-1}$)

$$\Rightarrow \partial_k \circ (\theta_k - s_{k-1} \circ d_k) = \partial_k \circ \theta_k - \theta_{k-1} \circ d_k + s_{k-2} \circ (d_{k-1} \circ d_k) = \partial_k \circ \theta_k - \theta_{k-1} \circ d_k = 0,$$

επειδή ο θ είναι φυσικός αλυσωτός μετασχηματισμός.

Αυτό αποδεικνύει και τον ισχυρισμό στη σημείωση τού θεωρήματος 1.2.(iii), σε πολύ μεγαλύτερη γενικότητα.

(iii) Εάν ο φ είναι φυσική ισοδυναμία, τότε έχει αντίστροφο $\varphi^{-1} : H_0E \to H_0F$. Από το (i) υπάρχει φυσικός αλυσωτός μετασχηματισμός $\sigma : E \to F$ που επεκτείνει την φ^{-1}. Άρα ο $\sigma \circ \tau : F \to F$ είναι αλυσωτός μετασχηματισμός που επεκτείνει την $\varphi \circ \varphi^{-1} = Id_{H_0F}$. Και επειδή το ίδιο κάνει και ο ταυτοτικός, έχουμε $\sigma \circ \tau \simeq Id_F$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\tau \circ \sigma \simeq Id_E$. Άρα ο τ είναι μια φυσική αλυσωτή ισοδυναμία. □

Σχόλια: Τα αποτελέσματα τής δεύτερης ενότητας μπορούν να θεωρηθούν γενικεύσεις των αντιστοίχων τής πρώτης. Συγκεκριμένα, το λήμμα 2.5 είναι γενίκευση τής καθολικής ιδιότητας των ελευθέρων R-μοδίων, ενώ το λήμμα 2.6 και το θεώρημα 2.8 των ακυκληματικών μοντέλων γενικεύουν αντίστοιχα τα (i) και (ii) τού θεωρήματος 1.2. Επίσης, δεν είναι απαραίτητο να υποθέσουμε ότι έχουμε «κατηγορίες συναρτητών» για να τα εφαρμόσουμε.

Το 2.8 αξίζει ιδιαίτερη προσοχή: Μας δίνει την δυνατότητα να κατασκευάσουμε φυσικούς αλυσωτούς μετασχηματισμούς και φυσικές αλυσωτές ομοτοπίες μεταξύ αυτών. Η μόνη προϋπόθεση, πέραν τού ότι η άνω γραμμή οφείλει να αποτελείται από ελεύθερους συναρτητές, είναι να ισχύει $H_n(E(M)) = 0$ για θετικά n, μόνο για τα αντικείμενα M τής $\mathcal{M}$. Το 2.8 θα μας επιτρέψει σε ό,τι ακολουθεί να αποδείξουμε το Θεώρημα των Eilenberg και Zilber, εφαρμόζοντάς το σε κατάλληλους συναρτητές. Εξάλλου, ακόμη και το ότι η ιδιάζουσα θεωρία ομολογίας πληροί το «αξίωμα τής ομοτοπίας» μπορεί να αναχθεί σε αυτό το θεώρημα (βλ. Rotman **[4]**, σελ. 244).

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ EILENBERG ΚΑΙ ZILBER.

Έστω $\mathcal{Top}$ η κατηγορία των τοπολογικών χώρων και έστω $\mathcal{Top}^2$ η κατηγορία που έχει ως αντικείμενα ζεύγη τοπολογικών χώρων και ως μορφισμούς ζεύγη συνεχών συναρτήσεων μεταξύ αυτών. Ορίζουμε δύο μη αρνητικούς συναρτητές: $F,E:\mathcal{Top}^2 \to Comp(Mod_R)$, ως εξής:

(i) $F:(X,Y)\mapsto S_\bullet(X\times Y;R),\ (f,g)\mapsto S_\bullet(f\times g)$, όπου

$$f:X\to X',\ g:Y\to Y',\ f\times g:X\times Y\to X'\times Y',$$

με τύπο

$$(f\times g)(x,y):=(f(x),g(y)).$$

(ii) $E:(X,Y)\to S_\bullet(X;R)\otimes_R S_\bullet(Y;R),\ (f,g)\mapsto S_\bullet(f)\otimes_R S_\bullet(g)$.

Βήμα 1: Οι συναρτητές F, E είναι $\mathcal{M}$-ακυκληματικοί, όπου

$$\mathcal{M}=\left\{(\Delta_p,\Delta_q):(p,q)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0\right\}.$$

Πράγματι· ο $\Delta_p\times\Delta_q$ είναι συσταλτός για κάθε p, q, ως γινόμενο συσταλτών τοπολογικών χώρων, οπότε $F(\Delta_p,\Delta_q)=0_\bullet$, ήτοι το μηδενικό αλυσωτό σύμπλοκο, το οποίο είναι προφανώς ακυκληματικό. Επιπροσθέτως, από το αλγεβρικό θεώρημα τού Künneth, σε συνδυασμό με το καθολικό θεώρημα συντελεστών, προκύπτει ότι το τανυστικό γινόμενο ακυκληματικών συμπλόκων είναι ακυκληματικό. Επειδή το $S_\bullet(\Delta_p;R)$ είναι ακυκληματικό για κάθε p, έχουμε

$$H_n(S_\bullet(\Delta_p;R)\otimes_R S_\bullet(\Delta_q;R))=0,\ \forall n>0,\ (p,q)\in\mathbb{N}_0^2,$$

οπότε ο E είναι ακυκληματικός και ως προς την $\mathcal{M}$.

Βήμα 2: Αμφότεροι οι F, E είναι $\mathcal{M}$-ελεύθεροι, διότι:

(i) Το $S_\bullet(X\times Y;R)$ είναι εξ ορισμού ελεύθερο για κάθε ζεύγος τοπολογικών χώρων X, Y. Επίσης, για κάθε παγιωμένο $p\geq 0$ η $\mathcal{M}$-οικογένεια στοιχείων $\{((\Delta_p,\Delta_p),d_p)\}$ τού F, με $d_p : x\mapsto (x,x)$ τη διαγώνιο απεικόνιση τού Δ_p ιδωμένη ως στοιχείο τού $S_p(\Delta_p{}^2;R)$, αποτελεί μια βάση τού F_p. Για κάθε $C = (X,Y)$ το σύνολο

$$\left\{(F(\sigma)(d_p)\mid \text{όπου } \sigma:(\Delta_p,\Delta_p)\to(X,Y)\right\}=\left\{(\sigma_1\times\sigma_2)\circ d_p\mid \sigma_{1,2}:\Delta_p\to X,Y\right\}$$
$$=\left\{\sigma\mid\sigma:\Delta_p\to X\times Y\right\}$$

είναι μια βάση τού R-μοδίου $S_p(X\times Y;R)=F_p(C)$. (Εν προκειμένω, χρησιμοποιήσαμε την καθολική ιδιότητα τού γινομένου: Η $(\sigma_1\times\sigma_2)\circ d_p$ είναι απλώς η απεικόνιση που καθορίζεται μονοσήμαντα από τις $\sigma_{1,2}$).

(ii) Το τανυστικό γινόμενο δύο ελεύθερων συμπλόκων είναι και πάλι ελεύθερο, αφού ευθέα αθροίσματα και τανυστικά γινόμενα ελευθέρων R-μοδίων είναι επίσης ελεύθεροι (βλέπε [Σ.Ο.Α.] 1.6.17, σελ. 47, και 3.4.6, σελ. 151). Άρα και το

$$S_\bullet(X;R)\otimes_R S_\bullet(Y;R)=E(C)$$

είναι ελεύθερο για κάθε $C = (X, Y)$. Ειδικότερα, για παγιωμένο $n\geq 0$, έχουμε

$$(S_\bullet(X;R)\otimes_R S_\bullet(Y;R))_n=\bigoplus_{p+q=n}S_p(X;R)\otimes_R S_q(Y;R)=E_n(C)$$

με το σύνολο $\left\{\sigma_1\otimes_R\sigma_2\mid\sigma_1:\Delta_p\to X,\sigma_2:\Delta_q\to Y,p+q=n\right\}$ (για την ακρίβεια, με τις εικόνες τους στο ευθύ άθροισμα) ως βάση του. Άρα λοιπόν, εάν για τυχόν μη αρνητικό p θεωρήσουμε την $Id_{\Delta_p}=\delta_p:\Delta_p\to\Delta_p$, ιδωμένη ως ιδιάζουσα p-αλυσίδα, το σύνολο

$$\left\{\delta_p\otimes_R\delta_q\in S_p(\Delta_p;R)\otimes_R S_q(\Delta_q;R): p+q=n\right\},$$

όπου $S_p(\Delta_p;R)\otimes_R S_q(\Delta_q;R)\subseteq\bigoplus_{k+l=n}S_k(\Delta_p;R)\otimes_R S_l(\Delta_q;R)=E_n(\Delta_p,\Delta_q)$,
αποτελεί $\mathcal{M}$-στοιχείο τού συναρτητή E_n.

Εάν $C=(X_1,X_2)$, $\sigma:(\Delta_p,\Delta_q)\to C$, με $p+q=n$, έχουμε
$$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2),\ \text{όπου } \sigma_1:\Delta_p\to X_1,\ \sigma_2:\Delta_q\to X_2,$$
οπότε

$$\left\{E_n(\sigma)(\delta_p \otimes_R \delta_q) \mid \sigma : (\Delta_p, \Delta_q) \to C, p+q=n\right\}$$
$$= \left\{ \Big(\bigoplus_{k+l=n} S_k(\sigma_1) \bar{\otimes} S_l(\sigma_2)\Big)(\delta_p \otimes_R \delta_q) \mid \sigma_{1,2} : \Delta_{p,q} \to X_{1,2}, p+q=n \right\}$$
$$= \left\{ (S_p(\sigma_1) \bar{\otimes} S_q(\sigma_2))(\delta_p \otimes_R \delta_q) \mid \sigma_{1,2} : \Delta_{p,q} \to X_{1,2}, p+q=n \right\}$$
$$= \left\{ (S_p(\sigma_1)(\delta_p) \otimes_R S_q(\sigma_2)(\delta_q) \mid \sigma_{1,2} : \Delta_{p,q} \to X_{1,2}, p+q=n \right\}$$
$$= \left\{ (\sigma_1 \circ \delta_p) \otimes_R (\sigma_2 \circ \delta_q) \mid \sigma_{1,2} : \Delta_{p,q} \to X_{1,2}, p+q=n \right\}$$
$$= \left\{ \sigma_1 \otimes_R \sigma_2 \mid \sigma_1 : \Delta_p \to X_1,\ \sigma_2 : \Delta_q \to X_2\ , p+q=n \right\}$$, που είναι βάση τού $E_n(C)$.

<u>*Βήμα 3:*</u> Θα κατασκευάσουμε μια φυσική ισοδυναμία $\varphi : H_0 F \to H_0 E$. Για κάθε τοπολογικό χώρο X γνωρίζουμε ότι

$$H_0(S_\bullet(X;R)) = H_0^{\text{sing}}(X;R) \cong Fr_R(\mathscr{P}(X)),$$

όπου $\mathscr{P}(X)$ το σύνολο των δρομοσυνεκτικών συνιστωσών τού X. Για κάθε (X,Y) υπάρχει μια αμφίρριψη

$$\mathscr{P}(X \times Y) \to \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(Y),\ C \mapsto (pr_X(C), pr_Y(C))$$

και για οιουσδήποτε X, Y υφίστανται φυσικοί ισομορφισμοί:

$$Fr_R(\mathscr{P}(X \times Y)) \cong Fr_R(\mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(Y)) \cong Fr_R(\mathscr{P}(X)) \otimes_R Fr_R(\mathscr{P}(Y)),$$

(βλ. [Σ.Ο.Α] 3.4.6, σελ. 151), οπότε

$$H_0(S_\bullet(X \times Y;R)) \cong H_0(S_\bullet(X;R)) \otimes_R H_0(S_\bullet(Y;R)).$$

Επίσης, λόγω τού θεωρήματος τού Künneth και τού καθολικού θεωρήματος συντελεστών έχουμε φυσικούς ισομορφισμούς:

$$H_0(S_\bullet(X;R)) \otimes_R H_0(S_\bullet(Y;R)) \cong H_0(S_\bullet(X;R) \otimes_R S_\bullet(Y;R)),$$

διότι τα *Tor* για αρνητικούς δείκτες είναι μηδέν. (Το ότι αυτοί οι ισομορφισμοί είναι *φυσικοί* σημαίνει ακριβώς ότι προέρχονται από φυσικές ισοδυναμίες, κάτι που μπορεί να αποδειχθεί λεπτομερώς).
Επομένως, κατασκευάσαμε τη ζητούμενη φυσική ισοδυναμία και αρκεί να εφαρμόσουμε το θεώρημα 2.8. προκειμένου να καταλήξουμε στην απόδειξη τού θεωρήματος των Eilenberg και Zilber (πρβλ. εισαγωγή). □

<u>ΑΡΘΡΟΓΡΑΦΙΑ ΚΑΙ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>

[1] S. Eilenberg and J.A. Zilber: *On the products of complexes*, American Journal of Mathematics **75** (1953), 200-204.

[2] J.R. Munkres: *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley Pub. Co., 1984.

[3] V.V. Prasolov: *Elements of Homology Theory*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. **81**, A.M.S., 2007.

[4] J.J. Rotman: *An Introduction to Algebraic Topology*, GTM, Vol. **119**, Springer-Verlag, 1988.

[Σ.Ο.Α.] *Στοιχεία Ομολογικής Άλγεβρας*. Χειρόγραφες σημειώσεις από τις παραδόσεις τού μαθήματος «Θέματα Άλγεβρας» με κωδ. αρ. Μ 228, Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Κρήτης, Χειμερινό εξάμηνο 2006-2007.
