

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

## Κυτταρική και Μονοπλεκτική Θεωρία Ομολογίας

Στο κεφάλαιο 2 εδόθη ο ορισμός των θεωριών ομολογίας, ενώ στο κεφάλαιο 3 απεδείχθη η ύπαρξη μίας (τουλάχιστον) θεωρίας ομολογίας, τής λεγομένης *ιδιάζουσας θεωρίας ομολογίας*, η οποία ορίζεται επί τής μεγίστης δυνατής (ομολογικώς επιτρεπτής) κατηγορίας, ήτοι εκείνης όλων των τοπολογικών ζευγών. Κατόπιν τούτου, είναι φυσικό το να διερωτάται κανείς για το κατά πόσον (επί κάποιας ομολογικώς επιτρεπτής κατηγορίας) είναι δυνατή η θέσπιση μιας *μονοσημάντως ορισμένης* θεωρίας ομολογίας. Αυτό καθίσταται πράγματι εφικτό επί τής *κατηγορίας των CW-ζευγών* (μέχρις φυσικής ισοδυναμίας, βλ. θεώρημα 4.1.3) μέσω τής *κυτταρικής θεωρίας ομολογίας*.

Στο παρόν κεφάλαιο θα ορίσουμε τους κυτταρικούς μοδίους ομολογίας οιοδήποτε CW-ζεύγους μέσω καταλλήλων *ιδιαζόντων* μοδίων ομολογίας και θα προβούμε σε υπολογισμό των (κυτταρικών ή -ισοδυνάμως- *ιδιαζόντων*) μοδίων ομολογίας των προβολικών χώρων, των χώρων φακού και των συνεκτικών, κλειστών (προσανατολισιμων ή μη) επιφανειών (που έχουμε ήδη περιγράψει διεξοδικώς ως CW-χώρους στην §1.21). Εν συνεχεία, θα ορίσουμε την (πλέον κλασική, από ιστορική σκοπιά) *θεωρία μονοπλεκτικής ομολογίας* επί τής κατηγορίας των πολυεδρικών (τοπολογικών) ζευγών και θα εξηγήσουμε το πώς αυτή σχετίζεται με την *ιδιάζουσα θεωρία ομολογίας*.

## § 4.1 Εισαγωγή

4.1.1. Ορισμός: Έστω  $R$  ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο πολλαπλασιαστικό στοιχείο και έστω  $\mathcal{F}$  μια ομολογικώς επιτρεπτή κατηγορία (υπό την έννοια τού ορισ. 2.1.2, σελ. 118). Δυο  $R$ -θεωρίες ομολογίας  $\mathcal{H} \equiv (\mathcal{H}, \partial)$  και  $\mathcal{H}' \equiv (\mathcal{H}', \partial')$  επί τής  $\mathcal{F}$  (υπό την έννοια τού ορισ. 2.1.6, σελ. 119) καλούνται ισοδύναμες όταν υφίσταται μια φυσική ισοδυναμία μεταξύ αυτών. Σημειωτέον ότι ένας φυσικός μετασχηματισμός  $\omega_0 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  από την  $\mathcal{H}$  στην  $\mathcal{H}'$  αντιστοιχεί σε κάθε τοπολογικό ζεύγος  $(X, A) \in \text{Ob}(\mathcal{F})$  έναν μορφισμό  $\mathbb{Z}$ -βαθμολογημένων  $R$ -μοδίων

$$\omega_0(X, A) : \mathcal{H}_0(X, A; R) \rightarrow \mathcal{H}'_0(X, A; R),$$

ούτως ώστε να ισχύουν τα εξής: (i) Το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_q(X, A; R) & \xrightarrow{\omega_q(X, A)} & \mathcal{H}'_q(X, A; R) \\ \mathcal{H}_q(\mathcal{F}) \downarrow & \text{C} & \downarrow \mathcal{H}'_q(\mathcal{F}) \\ \mathcal{H}_q(Y, B; R) & \xrightarrow{\omega_q(Y, B)} & \mathcal{H}'_q(Y, B; R) \end{array}$$

είναι μεταθετικό

για οιοδήποτε  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{B}}(X, A), (Y, B)$  και οιοδήποτε  $q \in \mathbb{Z}$ .

(ii) Το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} H_q(X, A; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\partial_q(X, A)} & H_{q-1}(A; \mathbb{R}) \\ \omega_q(X, A) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \omega_{q-1}(A) \\ H'_q(X, A; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\partial'_q(X, A)} & H'_{q-1}(A; \mathbb{R}) \end{array}$$

είναι μεταθετικό για οιοδήποτε  $q \in \mathbb{Z}$ .

Ένας φυσικός μετασχηματισμός  $\omega: H_\bullet \rightarrow H'_\bullet$  καλείται φυσική ισοδυναμία μεταξύ των  $H_\bullet \equiv (H_\bullet, \partial_\bullet)$  και  $H'_\bullet \equiv (H'_\bullet, \partial'_\bullet)$  όταν ο ομομορφισμός  $\mathbb{R}$ -μοδίων  $\omega_q(X, A)$  είναι ισομορφισμός για κάθε τοπολογικό ζεύγος  $(X, A) \in \text{Ob}(\mathcal{B})$  και για κάθε  $q \in \mathbb{Z}$ .

4.1.2. Παράδειγμα: Στο κεφάλαιο 3 ορίσαμε την  $(H_\bullet^{\text{sing}}, \partial_\bullet^{\text{sing}})$

και αποδείξαμε ότι πρόκειται για μια θεωρία ομολογίας επί της  $\mathcal{B} = \text{Top}^{(2)}$ . Σε ορισμένα συγχρόνισμα, όπως π.χ. στο βιβλίο του W. S. Massey: "A Basic Course in Algebraic Topology", GTM, Vol. 127, Springer-Verlag, 1991, χρησιμοποιείται αντ'αυτής

η λεγόμενη κυβική ιδιότυπη θεωρία ομολογίας  $(H_\bullet^{\text{cub}}, \partial_\bullet^{\text{cub}})$ .

Η διαφορά της  $H_\bullet^{\text{cub}}$  και της "συνηθούς" ιδιότυπης θεωρίας ομολογίας

$H_\bullet^{\text{sing}}$  έγκειται μόνον στον ότι στον ορισμό των  $q$ -οστών αλυσίδων εντός ενός τοπολογικού χώρου  $X$  υπεισέρχονται συνεχείς απεικονί-

$\Gamma: I^q \rightarrow X$  (ιδιότυπες  $q$ -κύβοι) αντί των συνεχών απεικονίσεων

$\sigma: \Delta_q \rightarrow X$  (ιδιότυπων  $q$ -μονοπλάκων). Ωστόσο, επειδή  $I^q \approx \mathbb{D}^q \approx \Delta_q$

μέσω απλής σύγκρισης του τρόπου ορισμού των  $\partial_\bullet^{\text{sing}}$  και  $\partial_\bullet^{\text{cub}}$

μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι η  $H_\bullet^{\text{cub}}$  είναι ισοδύναμη της

$H_\bullet^{\text{sing}}$  (υπό την έννοια του αρθ. 4.1.1). Εγίστε, η χρήση της  $H_\bullet^{\text{cub}}$

προτιμάται έναντι της χρήσεως της  $H_\bullet^{\text{sing}}$ , όπως π.χ. κατά τη

σύγκριση ομάδων ομολογίας και ομάδων ομοτοπίας (οιασδήποτε τάξεως), για καθαρώς "γεωμετρικούς" λόγους.

Στην επόμενη ενότητα (βλ. ορσ. 4.2.7) θα ορίσουμε τη λεγόμενη Κυρίαρχη Θεωρία Ομολογίας  $(H_*^{CW}, \partial_*^{CW})$  επί της (ομολογικώς επιτρεπτής) κατηγορίας  $\beta = \text{Top}_{CW}^{(2)}$  των CW-γευχών. Το ακόλουθο θεώρημα (το οποίο παρατίθεται χωρίς απόδειξη) περιγράφει τις κύριες ιδιότητες της  $(H_*^{CW}, \partial_*^{CW})$ :

4.1.3. Θεώρημα: (i) Το γεύχος  $(H_*^{CW}, \partial_*^{CW})$  αποτελεί όντως μια (συνήθη)  $\mathbb{R}$ -θεωρία ομολογίας επί της  $\text{Top}_{CW}^{(2)}$  υπό την έννοια του ορισμού 2.1.6., σελ. 119-121.

(ii) Εάν η  $\mathcal{H}_* \equiv (\mathcal{H}_*, \partial_*)$  είναι οιαδήποτε  $\mathbb{R}$ -θεωρία ομολογίας επί της  $\text{Top}_{CW}^{(2)}$ , τότε υφίσταται μια φυσική ισοδυναμία

$$\omega_* : H_*^{CW} \longrightarrow \mathcal{H}_*$$

(υπό την έννοια του ορσ. 4.1.1), ούτως ώστε ο ισομορφισμός  $\mathbb{R}$ -μωδιών  $\omega_*(\{pt\}) : H_0^{CW}(\{pt\}; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cong \mathcal{H}_0(\{pt\}; \mathbb{R})$  να είναι ο ταυτοτικός.

(iii) Εάν οι  $\mathcal{H}_* \equiv (\mathcal{H}_*, \partial_*)$  και  $\mathcal{H}'_* \equiv (\mathcal{H}'_*, \partial'_*)$  είναι δυο τυχούσες  $\mathbb{R}$ -θεωρίες ομολογίας επί της  $\text{Top}_{CW}^{(2)}$  και η

$$\mathcal{F} : \mathcal{H}_0(\{pt\}; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cong \mathcal{H}'_0(\{pt\}; \mathbb{R})$$

ομομορφισμός  $\mathbb{R}$ -μωδιών, τότε υφίσταται ένας φυσικός μετασχηματισμός  $\omega_*^{\mathcal{F}} : \mathcal{H}_* \longrightarrow \mathcal{H}'_*$  (υπό την έννοια του ορσ. 4.1.1).

Εάν η  $\mathcal{F}$  είναι ισομορφισμός  $\mathbb{R}$ -μωδιών, τότε ο  $\omega_*^{\mathcal{F}}$  είναι φυσική ισοδυναμία μεταξύ των  $\mathcal{H}_*$  και  $\mathcal{H}'_*$ .

4.1.4. Σημείωση: Το  $(H_*^{CW}, \partial_*^{CW})$  θα ορισθεί μέσω της γνωστής μας ιδιόρρυθμης θεωρίας ομολογίας  $(H_*^{\text{sing}}, \partial_*^{\text{sing}})$ . Θα πρέπει να υπογραμμισθεί ότι είναι δυνατός και ένας απ' ευθείας ορισμός του  $(H_*^{CW}, \partial_*^{CW})$  μέσω του υπολογισμού βαθμίων ορισμένων συνεχών απεικονίσεων ισοδυστάτων σφαιρών, έστω κι αν εδώ δεν ακολουθηθεί αυτή η μεθοδολογική προσέγγιση. (βλ. J.E. May: "A Concise Course in Algebraic Topology", Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, 1999, Chapter 13, §2.)

§ 4.2 Ορισμός και ιδιότητες κυτταρικών ομολογικών μοδίων

Έστω  $(X, \mathcal{X})$  ένας CW-χώρος (βλ. 1.21.1, 1.21.3, σελ. 99-100).

4.2.1. Λήμμα: Εάν η κυτταρική διάσπαση του  $X$  γίνεται μέσω της ακολουθίας υποχώρων:  $\emptyset = X^{(-1)} \subset X^{(0)} \subset X^{(1)} \subset \dots \subset X^{(n-1)} \subset X^{(n)}$ , τότε για κάθε  $n \in \mathbb{N}_0$  και για κάθε  $q \in \mathbb{Z}$  έχουμε:

$$H_q^{Sing}(X^{(n)}, X^{(n-1)}; \mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R}^{\{\epsilon \in \mathcal{X} \mid \dim(\epsilon) = n\}}, & \text{όταν } q = n, \\ \{0\}, & \text{όταν } q \in \mathbb{Z} \setminus \{n\}. \end{cases}$$

Απόδειξη: Εάν  $Y^{(n)} := X^{(n)} \setminus \{\epsilon \in \mathcal{X} \mid \dim(\epsilon) = n\}$ ,  $\epsilon_e := f_e(0)$ , τότε, σύμφωνα με το θεώρημα 1.21.21, σελ. 115-116, ο  $(n-1)$ -οσός σκελετός  $X^{(n-1)}$  αποτελεί μια ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη του  $Y^{(n)}$ . Επομένως,  $H_q^{Sing}(X^{(n-1)}; \mathbb{R}) \cong H_q^{Sing}(Y^{(n)}; \mathbb{R})$ ,  $\forall q \in \mathbb{Z}$  (βλ. 2.2.1, σελ. 122). Οι ενθέσεις  $(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \hookrightarrow (X^{(n)}, Y^{(n)})$  επαχούν το εξής μεαθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccccc} H_q^{Sing}(X^{(n-1)}; \mathbb{R}) & \longrightarrow & H_q^{Sing}(X^{(n)}; \mathbb{R}) & \longrightarrow & H_q^{Sing}(X^{(n)}, X^{(n-1)}; \mathbb{R}) & \longrightarrow & H_{q-1}^{Sing}(X^{(n-1)}; \mathbb{R}) & \longrightarrow & H_{q-1}^{Sing}(X^{(n)}; \mathbb{R}) \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow Id & & \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow Id \\ H_q^{Sing}(Y^{(n)}; \mathbb{R}) & \longrightarrow & H_q^{Sing}(X^{(n)}; \mathbb{R}) & \longrightarrow & H_q^{Sing}(X^{(n)}, Y^{(n)}; \mathbb{R}) & \longrightarrow & H_{q-1}^{Sing}(Y^{(n)}; \mathbb{R}) & \longrightarrow & H_{q-1}^{Sing}(X^{(n)}; \mathbb{R}) \end{array}$$

με ακριβείς γραμμές. Κατά το "λήμμα των πέντε" ([ΣοΑ], 2.2.2, σελ. 81)

$$H_q^{Sing}(X^{(n)}, X^{(n-1)}; \mathbb{R}) \cong H_q^{Sing}(X^{(n)}, Y^{(n)}; \mathbb{R}), \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Όταν  $X^{(n)} \neq X^{(n-1)}$ , τότε το  $X^{(n-1)}$  είναι κλειστό εντός του  $X^{(n)}$  και το  $Y^{(n)}$  ανοικτό εντός του  $X^{(n)}$ , οπότε η φυσική ένθεση

$(X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}, Y^{(n)} \setminus X^{(n-1)}) \hookrightarrow (X^{(n)}, Y^{(n)})$  επαχεί ισομορφισμούς

$$H_q^{Sing}(X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}, Y^{(n)} \setminus X^{(n-1)}; \mathbb{R}) \cong H_q^{Sing}(X^{(n)}, Y^{(n)}; \mathbb{R}), \forall q \in \mathbb{Z},$$

βάσει του αξιώματος  $(A3)$  της εκτομής.

Επειδή  $X^{(n)} \setminus X^{(n-1)} = \coprod \{\epsilon \in \mathcal{X} \mid \dim(\epsilon) = n\}$  είναι η απο-

σύνθεση του  $X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}$  ως ένωση των συνεκτικών συνιστωσών του και κάθε κύτταρο είναι δμοσυνεκτικό, η  $\{e \in \mathcal{X} \mid \dim(e) = n\}$  είναι η οικογένεια των δμοσυνεκτικών συνιστωσών του  $X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}$ .

Ως εκ τούτου, για κάθε  $q \in \mathbb{Z}$  έχουμε:

$$H_q^{\text{sing}}(X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}, \mathbb{R}) \cong \bigoplus_{\{e \in \mathcal{X} \mid \dim(e) = n\}} H_q^{\text{sing}}(e, \mathbb{R})$$

Πρόταση 3.3.3  
σελ. 172

Τέλος, επειδή  $(e, \mathbb{R}) \cong (\mathbb{D}^{\dim(e)}, \mathbb{D}^{\dim(e)} \setminus \{0\}) \cong (\mathbb{R}^{\dim(e)}, \mathbb{R}^{\dim(e)} \setminus \{0\})$ ,

1.5.3 (ii)  
σελ. 9

ο ισομορφισμός είναι αληθής επί τη βάση του προτάματος 2.4.5 (ii), σελ. 130.  $\square$

4.2.2. Ορισμός: Έστω  $(X, \mathcal{X})$  ένας CW-χώρος. Για κάθε  $q \in \mathbb{Z}$

ορίζουμε

$$W_q(\mathcal{X}; \mathbb{R}) := \begin{cases} H_q^{\text{sing}}(X^{(q)}, X^{(q-1)}; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{\#\{e \in \mathcal{X} \mid \dim(e) = q\}}, & \text{όταν } q \geq 0, \\ \{0\}, & \text{όταν } q < 0. \end{cases}$$

Για  $q \in \mathbb{Z}$  ορίζουμε τον ομομορφισμό  $\mathbb{R}$ -μοδίων

$$d_q^{\text{CW}}: W_q(\mathcal{X}; \mathbb{R}) \rightarrow W_{q-1}(\mathcal{X}; \mathbb{R})$$

ως τη σύνθεση

$$W_q(\mathcal{X}; \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial_q^{\text{sing}}} H_{q-1}^{\text{sing}}(X^{(q-1)}; \mathbb{R}) \xrightarrow{H_{q-1}^{\text{sing}}(j_{q-1})} W_{q-1}(\mathcal{X}; \mathbb{R}),$$

$\downarrow d_q^{\text{CW}}$

όπου  $\partial_q^{\text{sing}} = \partial_q^{\text{sing}}(X^{(q)}, X^{(q-1)})$  (βλ. 3.2.5, σελ. 169),  $j_{q-1}: X^{(q-1)} \hookrightarrow (X^{(q-1)}, X^{(q-2)})$  η φυσική ένθεση και  $H_{q-1}^{\text{sing}}(j_{q-1})$  ο μέσω αυτής επαγόμενος ομομορφισμός  $\mathbb{R}$ -μοδίων (βλ. 3.2.3, σελ. 168).

4.2.3. Λήμμα: Το  $(W_*(\mathcal{X}; \mathbb{R}), d_*^{\text{CW}})$  είναι αλυσωτό σύμπλοκο.

Απόδειξη: Για κάθε  $q \in \mathbb{Z}$  έχουμε

$$d_q^{\text{CW}} \circ d_{q+1}^{\text{CW}} = H_{q-1}^{\text{sing}}(j_{q-1}) \circ \partial_q^{\text{sing}} \circ H_q^{\text{sing}}(j_q) \circ \partial_{q+1}^{\text{sing}} = 0,$$

διότι  $\partial_q^{\text{sing}} \circ H_q^{\text{sing}}(j_q) = 0$ . (Οι  $\partial_q^{\text{sing}}$  και  $H_q^{\text{sing}}(j_q)$  είναι διαδοχικοί ομομορφισμοί  $\mathbb{R}$ -μοδίων στη μακρά ακριβή ακολουθία του συμπλόκου  $(X^{(q)}, X^{(q-1)})$ .  $\square$

4.2.4. Λήμμα: Έστω  $(X, \mathcal{X})$  ένας CW-χώρος. Τότε για οιοσδήποτε  $m, k \in \mathbb{N}_0$  και για οιοδήποτε  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $q < m$ , η φυσική ένθεση  $i_{m,k}: X^{(m)} \hookrightarrow X^{(m+k)}$  επέχει ισομορφισμούς  $\mathbb{R}$ -μοδίων:

$$H_q^{\text{Sing}}(i_{m,k}): H_q^{\text{Sing}}(X^{(m)}; \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H_q^{\text{Sing}}(X^{(m+k)}; \mathbb{R}).$$

Απόδειξη: Για  $q < 0$  τούτο είναι προφανές. Έστω λοιπόν τυχόν  $q \geq 0$ .

Θα χρησιμοποιήσουμε πλήρη επαγωγή επί του  $k$ . Για  $k=0$  ο ισχυρισμός είναι προφανώς αληθής. Για  $k=1$  είναι ωσαύτως αληθής λόγω της μακράς ακριβούς ακολουθίας

$$\dots \rightarrow H_{q+1}^{\text{Sing}}(X^{(m+1)}, X^{(m)}; \mathbb{R}) \rightarrow H_q^{\text{Sing}}(X^{(m)}; \mathbb{R}) \rightarrow H_q^{\text{Sing}}(X^{(m+1)}; \mathbb{R})$$

$$\rightarrow H_q^{\text{Sing}}(X^{(m+1)}, X^{(m)}; \mathbb{R}) \rightarrow \dots \quad \text{και τού ότι } H_j^{\text{Sing}}(X^{(m+1)}, X^{(m)}; \mathbb{R}) \cong \{0\},$$

για κάθε  $j < m+1$  (βλ. λήμμα 4.2.1). Εάν υποθέσουμε ότι είναι

αληθής για κάποιον  $k \geq 1$ , τότε, επειδή  $i_{m,k+1} = i_{m+k,1} \circ i_{m,k}$

και οι  $H_q^{\text{Sing}}(i_{m,k})$ ,  $H_q^{\text{Sing}}(i_{m+k,1})$  ισομορφισμοί (από την επαγωγική μας υπόθεση), ο  $H_q^{\text{Sing}}(i_{m,k+1})$  θα είναι ωσαύτως ισομορφισμός.  $\square$

4.2.5. Πρόταση: Έστω  $(X, \mathcal{X})$  ένας CW-χώρος. Τότε για οιοδήποτε  $q \in \mathbb{N}_0$  η φυσική ένθεση  $i: X^{(q+1)} \rightarrow X$  επέχει ισομορφισμούς  $\mathbb{R}$ -μοδίων:

$$H_q^{\text{Sing}}(i): H_q^{\text{Sing}}(X^{(q+1)}; \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H_q^{\text{Sing}}(X; \mathbb{R}).$$

Απόδειξη: Κατά το λήμμα 4.2.4 τούτο είναι αληθές όταν ο CW-χώρος  $(X, \mathcal{X})$  έχει πεπερασμένη διάσταση (βλ. 1.24.3, σελ. 101). Έστω ότι ο θεωρούμενος CW-χώρος είναι απείροδιαστατος. Τότε για κάθε φυσικό αριθμό  $m \geq 1$

ο ισομορφισμός  $H_q^{\text{Sing}}(i)$  γράφεται ως σύνθεση των

$$H_q^{\text{Sing}}(X^{(q+1)}; \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H_q^{\text{Sing}}(X^{(q+m)}; \mathbb{R}) \rightarrow H_q^{\text{Sing}}(X; \mathbb{R}).$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{H_q^{\text{Sing}}(i)}$

Έστω  $(z + B_q^{\text{Sing}}(X; \mathbb{R})) \in H_q^{\text{Sing}}(X; \mathbb{R})$  με  $z \in Z_q^{\text{Sing}}(X; \mathbb{R})$ ,

$z = \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu \sigma_\nu$ ,  $\lambda_\nu \in \mathbb{Z}$ ,  $\sigma_\nu: \Delta_q \rightarrow X$  ιδιαίτερα  $q$ -μονόπλοκα,  $\mu \in \mathbb{N}$ .

Επειδή το  $\bigcup_{\gamma=1}^{\mu} \sigma_{\gamma}(\Delta_q)$  είναι συμπαγές  $\subset X$ , περιέχεται κατ' ανάγκην σε έναν πεπερασμένο  $CW$ -υπόχωρο του  $X$  (βλ. 1.21.10, σελ. 140).

Κι επειδή οι σκελετοί του  $X$  είναι  $CW$ -υπόχωροι αυτού (βλ. 1.21.7(ii), σελ. 108) θα υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός  $m \geq 1$ , τέτοιος ώστε να ισχύει  $\bigcup_{\gamma=1}^{\mu} \sigma_{\gamma}(\Delta_q) \subseteq X^{(q+m)}$ , δηλαδή  $z \in S_q(X^{(q+m)})$ . Αυτό σημαίνει ότι

$$H_q^{\text{Sing}}(i)(z + B_q^{\text{Sing}}(X^{(q+m)}; \mathbb{R})) = z + B_q^{\text{Sing}}(X; \mathbb{R})$$

$\implies$  ο  $H_q^{\text{Sing}}(i)$  είναι επιμορφισμός  $\mathbb{R}$ -μοδίων.

Για την απόδειξη του ότι ο  $H_q^{\text{Sing}}(i)$  είναι και μονομορφισμός θεωρούμε ένα στοιχείο  $(u + B_q^{\text{Sing}}(X^{(q+1)}; \mathbb{R})) \in \text{Ker}(H_q^{\text{Sing}}(i)) \subset H_q^{\text{Sing}}(X^{(q+1)}; \mathbb{R})$ .

Προφανώς,  $H_q^{\text{Sing}}(i)(u + B_q^{\text{Sing}}(X^{(q+1)}; \mathbb{R})) = u + B_q^{\text{Sing}}(X; \mathbb{R}) = B_q^{\text{Sing}}(X; \mathbb{R})$

$\implies u \in B_q^{\text{Sing}}(X; \mathbb{R}) = \text{Im}(d_{X, q+1}^{\text{Sing}}) \implies \exists c \in S_{q+1}(X; \mathbb{R}): d_{X, q+1}^{\text{Sing}}(c) = u$ .

Με επιχειρήματα ανάλογα των προηγούμενων αποδεικνύουμε ότι υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός  $m \geq 1$  με  $c \in S_{q+1}(X^{(q+m)}; \mathbb{R})$ . Επομένως,  $u \in B_q^{\text{Sing}}(X^{(q+m)}; \mathbb{R}) \xrightarrow{4.2.4} u \in B_q^{\text{Sing}}(X^{(q+1)}; \mathbb{R}) = 0_{H_q^{\text{Sing}}(X^{(q+1)}; \mathbb{R})}$

$\implies$  ο  $H_q^{\text{Sing}}(i)$  είναι μονομορφισμός  $\mathbb{R}$ -μοδίων.  $\square$

**4.2.6. Πρόταση:** Εάν ο  $(X, \mathcal{K})$  είναι ένας  $n$ -διάστατος  $CW$ -χώρος, τότε  $H_q^{\text{Sing}}(X; \mathbb{R}) \cong \{0\}$ , για όλους τους  $q > n$ .

Απόδειξη: Θα εργαθούμε επαγωγικά επί του  $n$ . Εάν  $n = 0$ , τότε ο  $X$  είναι ένας διακριτός τοπολογικός χώρος (επειδή κάθε σημείο του  $X$  είναι κλειστό και το συμπλήρωμα κάθε σημείου του  $X$  είναι κλειστό βάσει της συνθήκης 1.21.3 (W), σελ. 100). Επομένως ο ισχυρισμός είναι αληθής (λόγω του θεωρήματος 3.3.1 και του λήματος 3.3.1, σελ. 171-172).

Ας υποθέσουμε ότι είναι αληθής και για  $k < n$  ( $k \geq 1$ ). Ο  $(n-1)$ -στός σκελετός  $X^{(n-1)}$  του  $X$  είναι αφανώς ένας  $CW$ -χώρος (βλ. 1.21.7(ii), σελ. 108). Κατά την επαγωγική μας υπόθεση,  $H_q^{\text{Sing}}(X^{(n-1)}; \mathbb{R}) \cong \{0\}$  για όλους τους  $q \geq n$ . Επειδή  $X = X^{(n)}$  η μακρά ακριβής ακολουθία

$$\dots \rightarrow H_q^{\text{sing}}(X^{(n-1)}; \mathbb{R}) \rightarrow H_q^{\text{sing}}(X; \mathbb{R}) \rightarrow H_q^{\text{sing}}(X, X^{(n-1)}; \mathbb{R}) \rightarrow \dots$$

του τοπολογικού γεύχους  $(X, X^{(n-1)})$  δίδει

$$H_q^{\text{sing}}(X; \mathbb{R}) \cong \{0\} \quad \text{για όλους τους } q > n. \quad \square$$

4.2.4. Ορισμός: (i) Εάν ο  $(X, \mathcal{K})$  είναι ένας  $\text{GW}$ -χώρος και  $q \in \mathbb{Z}$ , τότε ορίζουμε ως  $q$ -οστό κυτταρικό μόδιο ομολογίας  $H_q^{\text{CW}}(X; \mathbb{R})$  του  $X$  (με συντελεστές ελημμένους από τον  $\mathbb{R}$ ) τον  $\mathbb{R}$ -μόδιο

$$H_q^{\text{CW}}(X; \mathbb{R}) := H_q(W_*(\mathcal{K}; \mathbb{R})),$$

ήτοι τον  $q$ -οστό μόδιο ομολογίας του αλυσωτού συμπλόκου  $(W_*(\mathcal{K}; \mathbb{R}), d_*^{\text{CW}})$  (βλ. λήμμα 4.2.3, σελ. 237).

(ii) Εάν ο  $(X, \mathcal{K})$  είναι ένας  $\text{GW}$ -χώρος και ο  $(A, \mathcal{K}')$  ένας  $\text{GW}$ -υπόχωρος του (όπου  $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$ ,  $A = \cup \{e \mid e \in \mathcal{K}'\}$ ), τότε θέτουμε  $X_A^q := X^{(q)} \cup A$ ,  $\forall q \geq -1$ .

(Σημειωτέον ότι  $X_A^{-1} = A$ .) Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι ο  $X = \cup_{q \geq -1} X_A^q$  είναι εφοδιασμένος με την ασθενή τοπολογία ως προς την οικογένεια  $\{X_A^q \mid q \geq -1\}$

(βλ. πρόταση 1.21.11 (ii), σελ. 110-111). Για κάθε  $q \in \mathbb{Z}$  ορίζουμε τον  $\mathbb{R}$ -μόδιο

$$\bar{W}_q(\mathcal{K}_A; \mathbb{R}) := \begin{cases} H_q^{\text{sing}}(X_A^q, X_A^{q-1}; \mathbb{R}), & \text{όταν } q \geq 0, \\ \{0\}, & \text{όταν } q < 0. \end{cases}$$

Κατ' αναλογία προς το λήμμα 4.2.1 αποδεικνύεται ότι για  $q \geq 0$  ισχύει  $\bar{W}_q(\mathcal{K}_A; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{\{e \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}' \mid \dim(e) = q\}}$ .

(βλ. π.χ. J.J. Rotman: "An Introduction to Algebraic Topology", GTM, Vol. 119, Springer-Verlag, 1988, Theorem 8.39, σελ. 218-219.)

Ορίζοντας τον  $d_q^{\text{CW}}$  όπως στον ορισμό 4.2.2, με μόνη διαφορά την αντικατάσταση των  $X^{(q)}$  με τα  $X_A^q$ , είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι το  $(W_*(\mathcal{K}_A; \mathbb{R}), d_*^{\text{CW}})$  είναι αλυσωτό συμπλόκο. Κατόπιν τούτου είμαστε σε θέση να ορίσουμε για οιοδήποτε  $q \in \mathbb{Z}$  τον  $q$ -οστό



(σχετικό) κυτταρικό μόδιο ομολογίας  $H_q^{CW}(X, A; R)$  του  $CW$ -ζεύγους  $(X, A)$  (με συντελεστές επιλεγμένους από τον  $R$ ) των  $R$ -μόδιο

$$H_q^{CW}(X, A; R) := H_q(W_*(X, A; R)).$$

4.2.8. Σχόλια: (i) Εάν κανείς θεωρήσει τη βραχεία ακριβή ακολουθία αλυσωτών συμπλοκών

$$0 \rightarrow W_*(X'; R) \xrightarrow{i_*} W_*(X; R) \xrightarrow{p_*} W_*(X, A; R) \rightarrow 0,$$

τότε ορίζει τον συνδετικό μορφοισμό  $\partial_q^{CW}(X, A)$  (για κάθε  $q \in \mathbb{Z}$ ) μέσω της επαγομένης μακράς ακριβούς ακολουθίας

$$\partial_{q+1}^{CW}(X, A) \rightarrow H_q^{CW}(A; R) \xrightarrow{H_q(i_*)} H_q^{CW}(X; R) \xrightarrow{H_q(p_*)} H_q^{CW}(X, A; R)$$

$$\left( \partial_q^{CW}(X, A) \rightarrow H_{q-1}^{CW}(A; R) \rightarrow \dots \right) \text{ (βλ. [ΣΟΑ], 2.3.11, σελ. 97-100).}$$

(ii) Κατά το (i) του θεωρήματος 4.1.3 το ζεύγος  $(H_*^{CW}, \partial_*^{CW})$  αποτελεί μια (συμπίθη)  $R$ -θεωρία ομολογίας επί της  $\text{Top}_{CW}^{(2)}$ . Επίσης, είναι δυνατή η απόδειξη του (ii) του θεωρήματος 4.1.3, στην ειδική περίπτωση θεωρήσεως της ιδιαίτερης θεωρίας ομολογίας επί της  $\text{Top}_{CW}^{(2)}$  κάνοντας χρήση του θεωρήματος 4.2.9 (ή ακόμη και η -εκ των υστέρων - απόδειξη του (i) του θεωρήματος 4.1.3, εάν το  $(H_*^{CW}, \partial_*^{CW})$  εκληφθεί αποτελούμενο απλώς από τον συναλλοίωτο συναρτητή  $H_*^{CW}$  και τον φυσικό μετασχηματισμό  $\partial_*^{CW}$  και γίνει χρήση του θεωρήματος 3.2.8, σελ. 170).

(iii) Μέσω του θεωρήματος 4.2.9 αποδεικνύεται, συν τοις άλλοις, ότι ο ορισμός των  $H_q^{CW}(X; R)$  και  $H_q^{CW}(X, A; R)$  δεν εξαρτάται από μια συγκεκριμένη επιλογή της κυτταρικής διασπάσεως  $\mathcal{X}$ , μέσω της οποίας ο  $X$  καθίσταται  $CW$ -χώρος.

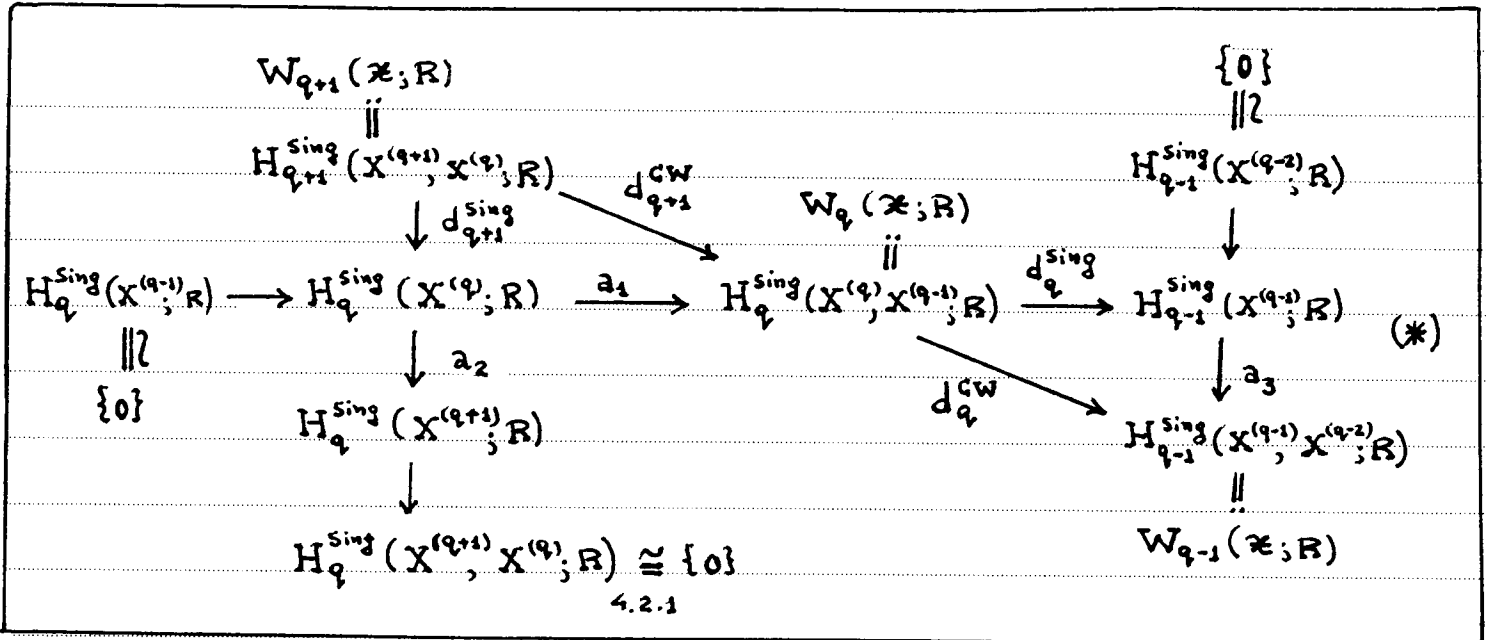
4.2.9. Θεώρημα. (i) Εάν ο  $(X, \mathcal{X})$  είναι ένας CW-χώρος, τότε

$$H_q^{CW}(X; R) \cong H_q^{Sing}(X; R), \forall q \in \mathbb{Z}.$$

(ii) Εάν ο  $(X, \mathcal{X})$  είναι ένας CW-χώρος και ο  $A$  ένας CW-υπόχωρός του, τότε

$$H_q^{CW}(X, A; R) \cong H_q^{Sing}(X, A; R), \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Απόδειξη: (i). Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι ο μόδιος ομολογίας  $H_q^{Sing}(X^{(q+1)}; R)$  είναι (κατά την 4.2.5)  $\cong H_q^{Sing}(X; R)$ . Θεωρούμε το μεταθετικό διάγραμμα (\*): Η οριζόντια ακολουθία είναι τμήμα της μακράς ακριβούς ακολουθίας του τοπολογικού ζεύγους  $(X^{(q)}, X^{(q-1)})$ , οι κατακόρυφες ακολουθίες είναι τμήματα των μακρών ακριβών ακολουθιών των τοπολογικών ζευγών  $(X^{(q+1)}, X^{(q)})$  και  $(X^{(q-1)}, X^{(q-2)})$ , αντιστοίχως, ενώ η διαγώνια ακολουθία είναι τμήμα του αλυσωτού συμπλόκου  $(W_*(\mathcal{X}; R), d_*^{CW})$ . Σημειωτέον ότι, κατά την πρόταση 4.2.6,  $H_q^{Sing}(X^{(q-1)}; R) \cong \{0\}$  και  $H_{q-1}^{Sing}(X^{(q-2)}; R) \cong \{0\}$ .



Εν προκειμένω,  $H_q^{CW}(X; R) = \text{Ker}(d_q^{CW}) / \text{Im}(d_{q+1}^{CW})$  και οι ομομορφισμοί  $R$ -μοδίων  $a_1, a_2$  και  $a_3$  είναι εκείνοι που επάγονται από τις αντίστοιχες φυσικές ενθέσεις, με τους  $a_1$  και  $a_2$  μονομορφισμούς (λόγω της ακριβείας της οριζόντιας ακολουθίας και της δεξιά κατακόρυφης ακολουθίας).

Θα δείξουμε ότι ο  $a_1$  επάγει τον επιθυμητό ισομορφισμό. Έστω  $x \in H_q^{\text{sing}}(X^{(q)}; \mathbb{R})$ . Από την ακριβεία της οριζόντιας ακολουθίας έχουμε  $d_q^{\text{sing}} \circ a_1 = 0$ . Άρα

$$d_q^{\text{CW}}(a_1(x)) = (a_3 \circ d_q^{\text{sing}} \circ a_1)(x) = 0 \Rightarrow a_1(x) \in \text{Ker}(d_q^{\text{CW}}), \text{ δηλαδή}$$

$$\text{Im}(a_1) \subseteq \text{Ker}(d_q^{\text{CW}}). \quad (1)$$

Έστω τώρα  $y \in \text{Ker}(d_q^{\text{CW}})$ . Προφανώς,  $d_q^{\text{CW}}(y) = (a_3 \circ d_q^{\text{sing}})(y) = 0$

$$\begin{aligned} \implies d_q^{\text{sing}}(y) = 0 &\implies y \in \text{Ker}(d_q^{\text{sing}}) \stackrel{\text{ακριβεία}}{=} \text{Im}(a_1), \text{ δηλαδή} \\ \text{α}_3 \text{ μονομορφισμός} & \qquad \qquad \qquad \text{Ker}(d_q^{\text{CW}}) \subseteq \text{Im}(a_1). \quad (2) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Από (1), (2) έπεται ότι } \text{Ker}(d_q^{\text{CW}}) = \text{Im}(a_1) \\ \text{α}_1 \text{ μονομορφισμός } \implies \text{Im}(a_1) \cong H_q^{\text{sing}}(X^{(q)}; \mathbb{R}) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Ker}(d_q^{\text{CW}}) \cong H_q^{\text{sing}}(X^{(q)}; \mathbb{R})$$

Κατά συνέπεια, ο  $a_1$  απεικονίζει ισομορφικώς τον  $H_q^{\text{sing}}(X^{(q)}; \mathbb{R})$  επί του  $\text{Ker}(d_q^{\text{CW}})$

$$\text{και επάγει τον } \underline{\text{επιμορφισμό}} \quad \begin{array}{ccc} \tilde{a}_1: H_q^{\text{sing}}(X^{(q)}; \mathbb{R}) & \longrightarrow & H_q^{\text{CW}}(X; \mathbb{R}) \\ \xi & \longmapsto & a_1(\xi) + \text{Im}(d_{q+1}^{\text{CW}}). \end{array}$$

Έστω  $\xi \in \text{Ker}(\tilde{a}_1)$ . Τότε  $a_1(\xi) \in \text{Im}(d_{q+1}^{\text{CW}}) \Rightarrow \exists u \in H_{q+1}^{\text{sing}}(X^{(q+1)}; X^{(q)}; \mathbb{R})$ :

$$d_{q+1}^{\text{CW}}(u) = a_1(\xi). \text{ Επειδή } d_{q+1}^{\text{CW}}(u) \stackrel{\text{(μεταθετικότητα διαγράμματος)}}{=} a_1(d_{q+1}^{\text{sing}}(u)), \text{ από το ότι}$$

ο  $a_1$  είναι μονομορφισμός έπεται ότι  $\xi = d_{q+1}^{\text{sing}}(u) \in \text{Im}(d_{q+1}^{\text{sing}})$ ,

$$\text{δηλαδή } \text{Ker}(\tilde{a}_1) \subseteq \text{Im}(d_{q+1}^{\text{sing}}). \quad (3)$$

Έστω τώρα  $z \in H_{q+1}^{\text{sing}}(X^{(q+1)}; X^{(q)}; \mathbb{R})$ . Προφανώς,

$$a_1(d_{q+1}^{\text{sing}}(z)) \stackrel{\text{μεταθετικότητα διαγράμματος}}{=} d_{q+1}^{\text{CW}}(z) \in \text{Im}(d_{q+1}^{\text{CW}}) \Rightarrow d_{q+1}^{\text{sing}}(z) \in \text{Ker}(\tilde{a}_1),$$

$$\text{ατότε } \text{Im}(d_{q+1}^{\text{sing}}) \subseteq \text{Ker}(\tilde{a}_1) \quad (4)$$

Από τις (3) και (4) έπεται ότι  $\text{Ker}(\tilde{a}_1) = \text{Im}(d_{q+1}^{\text{sing}})$ .

Λόγω της ακριβείας της αριστερά κατακόρυφης ακολουθίας έχουμε

$$\text{Im}(d_{q+1}^{\text{sing}}) = \text{Ker}(a_2) \text{ και ο } a_2 \text{ οφείλει να είναι επιμορφισμός.}$$

Από το 1<sup>ο</sup> Θεώρημα ισομορφισμών μοδίων (βλ. ΓΣΟΑ1, 1.4.8, σελ. 19)

$$\text{συνάγουμε ότι } H_q^{\text{sing}}(X^{(q)}; \mathbb{R}) / \text{Ker}(a_2) \cong H_q^{\text{sing}}(X^{(q+1)}; \mathbb{R}).$$

Ός εκ τούτου, βάσει των προαναφερθέντων συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} H_q^{\text{sing}}(X; \mathbb{R}) &\cong H_q^{\text{sing}}(X^{(q+1)}; \mathbb{R}) \cong H_q^{\text{sing}}(X^{(q)}; \mathbb{R}) / \text{Ker}(a_2) \\ &\cong H_q^{\text{sing}}(X^{(q)}; \mathbb{R}) / \text{Im}(d_{q+1}^{\text{sing}}) \cong H_q^{\text{sing}}(X^{(q)}; \mathbb{R}) / \text{Ker}(\tilde{a}_1) \\ &\cong \text{Ker}(d_q^{\text{CW}}) / \text{Im}(d_{q+1}^{\text{CW}}) =: H_q^{\text{CW}}(X; \mathbb{R}). \end{aligned}$$

(ii) Ένας τρόπος απόδειξης αυτού είναι κανείς να επαναλάβει την επιχειρηματολογία που ακολουθήθηκε στο (i) αντικαθιστώντας τα  $X^{(p)}$  με τα  $X_A^p$  και να καταλήξει στους επιθυμητούς ισομορφισμούς.

(Για περαιτέρω λεπτομέρειες βλ. J.J. Rotman: "An Introduction to Algebraic Topology", GTM, Vol. 119, Springer-Verlag, 1988, Thm. 8.38, σελ. 216-217.) Μια δεύτερη απόδειξη έπεται κατόπιν μεταβίβασης στον πεπαικτόχωρο  $X/A$  (πρβλ. πρόταση 1.21.17), καθότι

$$H_q^{CW}(X, A; \mathbb{R}) \cong H_q^{CW}(X/A; \mathbb{R}) \stackrel{(i)}{\cong} H_q^{sing}(X/A; \mathbb{R}) \cong H_q^{sing}(X, A; \mathbb{R}),$$

για κάθε  $q \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

4.2.10. Σχόλια: (i) Από τα όσα προαναφέρθηκαν συμπεραίνουμε ότι η κυτταρική θεωρία ομολογίας είναι ισοδύναμη με τον περιορισμό της ιδιόχουσας θεωρίας ομολογίας επί της  $Top_{CW}^{(2)}$  (όταν οι συντελεστές είναι ειλημμένοι από τον ίδιο μεταθετικό δακτύλιο με μοναδιαίο πολλαπλασιαστικό στοιχείο  $R$ ).

(ii) Φυσικά, είναι δυνατός ο ορισμός κυτταρικών  $R$ -μοδίων ομολογίας  $H_q^{CW}(X, A; M) := H_q^{CW}(W_*(X, A; R) \otimes_R M)$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $CW$ -ζευγών  $(X, A)$  με συντελεστές ειλημμένους από οιοδήποτε  $R$ -μόδιο  $M$ . Επειδή  $H_{q-1}^{sing}(X_A^q, X_A^{q-1}; R) \cong \{0\}$ , το τοπολογικό καθολικό θεώρημα συντελεστών 3.6.3 (σελ. 197) μας πληροφορεί ότι

$$H_q^{sing}(X_A^q, X_A^{q-1}; R) \otimes_R M \cong H_q^{sing}(X_A^q, X_A^{q-1}; M), \forall q \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow W_q(X; R) \otimes_R M \cong H_q^{sing}(X_A^q, X_A^{q-1}; M), \forall q \in \mathbb{Z},$$

$$\Rightarrow H_q^{CW}(X, A; M) \cong H_q(H_*^{sing}(X_A^q, X_A^{q-1}; M))$$

$$\cong H_q^{sing}(X, A; M)$$

για κάθε  $q \in \mathbb{Z}$ .

απόδειξη όμοια  
εκείνης τού θεωρήματος  
4.2.9 (ii).

4.2.11. Ο ρόλος των χαρακτηρισικών απεικονίσεων βας εφαρμογές.

Εάν προαθέμεθα να υπολογίσουμε διεξοδικώς τους κυτταρικούς μοδίους ομολογίας  $H_q^{GW}(X; R) := H_q(W_*(\mathcal{X}; R))$  δοθέντος GW-χώρου  $(X, \mathcal{X})$ , τότε είναι εν πρώτοις απαραίτητη η γνώση της φύσεως των συνοριακών τελεστών  $d_q^{GW}$  του αλυσωτού συμπλόκου  $W_*(\mathcal{X}; R)$ . Για  $q \geq 0$  ας συμβολίσουμε

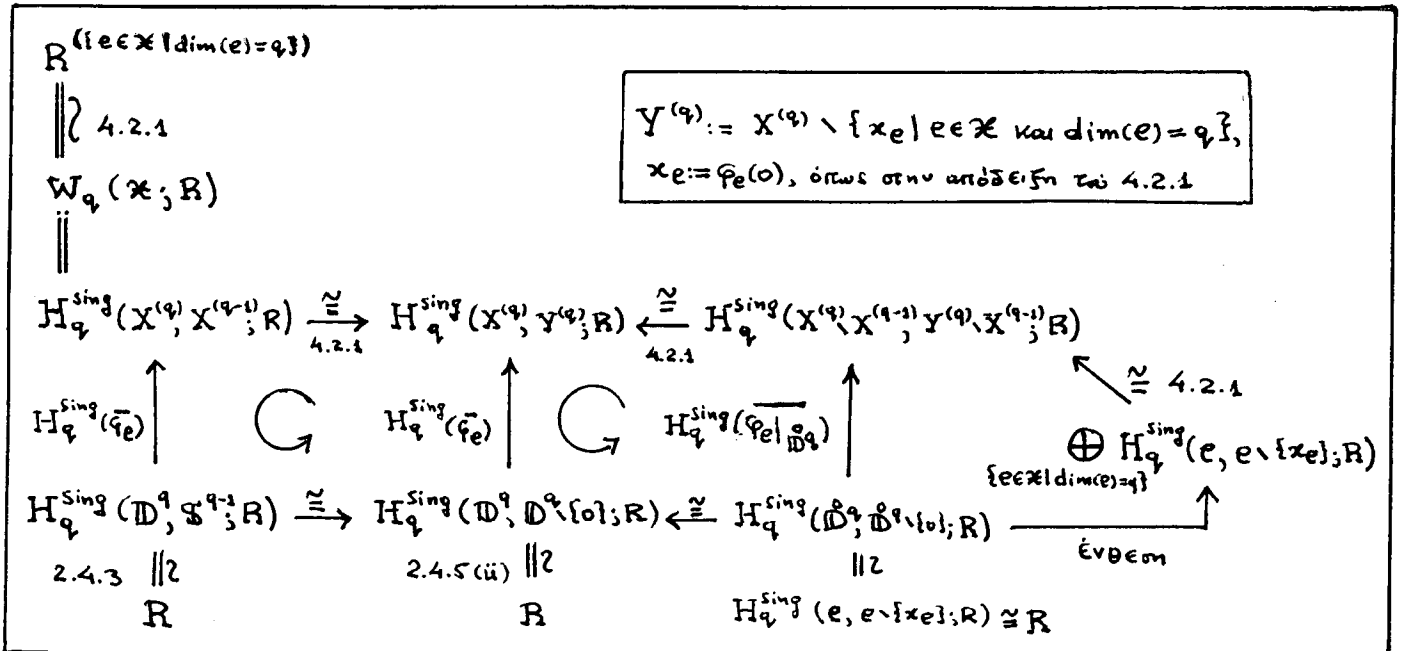
ως  $\varphi_e: \mathbb{D}^q \rightarrow X$  τη χαρακτηρισική απεικόνιση οιαδήποτε  $q$ -κυττάρου  $e$  τού  $X$  (με  $\mathbb{D}^q \xrightarrow[\varphi_e|_{\mathbb{D}^q}]{\cong} e \in X^{(q)}$ ,  $\varphi_e(\mathbb{D}^q) = \bar{e}$ ,  $\varphi_e(\mathbb{S}^{q-1}) = \partial e \subset X^{(q-1)}$ , βλ. 1.21.2, 1.21.3, σελ. 99-100).

Ας επιλέξουμε έναν γεννήτορα  $\xi_q$  τού  $H_q^{sing}(\mathbb{D}^q, \mathbb{S}^{q-1}; R) \cong R$  και ας θεωρήσουμε την εικόνα του

$$\tilde{\xi}_{q-1} = \partial_q^{sing}(\xi_q) \text{ μέσω } \begin{matrix} \boxed{2.4.3 (I_n)} \\ \text{σελ. 128} \end{matrix} \text{ τού συνδέτικου ομομορφισμού} \\ \partial_q^{sing}: H_q^{sing}(\mathbb{D}^q, \mathbb{S}^{q-1}; R) \longrightarrow H_{q-1}^{sing}(\mathbb{S}^{q-1}; R) \xrightarrow[2.4.4.]{\cong} \begin{cases} R, & \text{όταν } q \geq 2, \\ R \oplus R, & \text{όταν } q = 1, \\ \{0\}, & \text{όταν } q = 0. \end{cases}$$

(Προφανώς, το  $\tilde{\xi}_{q-1}$  είναι γεννήτορας τού  $H_{q-1}^{sing}(\mathbb{S}^{q-1}; R)$  για  $q \geq 2$ .)

Από το μεταθετικό διάγραμμα



διαπιστώνουμε ότι το σύνολο  $\{H_q^{sing}(\bar{e})(\xi_q) \mid e \in \mathcal{X} \text{ και } \dim(e)=q\}$  αποτελεί μια βάση τού ελεύθερου R-μοδίου  $W_q(\mathcal{X}; R)$ . Προφανώς, ο συνοριακός τελεστής είναι γνωστός, όταν είναι γνωστές οι τιμές των εικόνων των στοιχείων της εν λόγω βάσεως τού  $W_q(\mathcal{X}; R)$  μέσω αυτού.

Από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc}
 W_q(X; \mathbb{R}) & \xrightarrow{d_q^{CW}} & W_{q-1}(X; \mathbb{R}) & & \\
 \parallel & & \parallel & & \\
 H_q^{sing}(X^{(q)}; X^{(q-1)}; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\partial_q^{sing}} & H_{q-1}^{sing}(X^{(q-1)}; \mathbb{R}) & \xrightarrow{H_{q-1}^{sing}(j_{q-1})} & H_{q-1}^{sing}(X^{(q-1)}; X^{(q-2)}; \mathbb{R}) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \\
 H_q^{sing}(\bar{\varphi}_e) & & H_{q-1}^{sing}(\varphi_e | \mathbb{S}^{q-1}) & & \\
 \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow & & \\
 H_q^{sing}(\mathbb{D}^q, \mathbb{S}^{q-1}; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\partial_q^{sing}} & H_{q-1}^{sing}(\mathbb{S}^{q-1}; \mathbb{R}) & & 
 \end{array}$$

λαμβάνουμε

$$d_q^{CW}(H_q^{sing}(\bar{\varphi}_e)(\xi_q)) = H_{q-1}^{sing}(j_{q-1})(H_{q-1}^{sing}(\varphi_e | \mathbb{S}^{q-1})(\tilde{\xi}_{q-1})).$$

Ως εκ τούτου, ο συνοριακός τελεστής  $d_q^{CW}$  προσδιορίζεται με τη βοήθεια των υφισταμένων χαρακτηριστικών απεικονίσεων.

### § 4.3 Υπολογισμοί κυτταρικών ομολογικών μοδίων οικείων CW-χώρων

Στην παρούσα ενότητα θα υπολογισθούν οι κυτταρικοί μόνιοι ομολογίας πολλών παραδειγμάτων CW-χώρων που έχουν ήδη παραθεθεί στην § 1.21.

α) Και πάλι η σφαίρα! Παρότι είναι αναμενόμενο το ποιοι θα είναι οι κυτταρικοί μόνιοι ομολογίας της  $\mathbb{S}^n$  (βλ. πρόταση 2.4.4., σελ. 130, ή εφαρμογή 2.7.5, σελ. 157, σε συνδυασμό με τα θεωρήματα 3.2.8, σελ. 170, και 4.2.9(i), σελ. 242-243) θα προβούμε στον απευθείας υπολογισμό τους κάνοντας χρήση της κυτταρικής διασπάσεως  $\mathcal{X}$  της  $\mathbb{S}^n$  που εισήχθη στο 1.21.5 (iv) @ στη σελίδα 102. Αυτή αποτελείται από ένα 0-κύτταρο ( $e^0 = P_+ =$  βόρειος πόλος της  $\mathbb{S}^n$ ) και ένα

$n$ -κύτταρο ( $e^n := \mathbb{S}^n \setminus \{e_0\}$ ).

4.3.1. Θεώρημα.

$$H_q^{\text{sing}}(\mathbb{S}^n; \mathbb{R}) \cong_{4.2.9} H_q^{\text{CW}}(\mathbb{S}^n; \mathbb{R}) \cong \begin{cases} \{0\}, & \text{όταν } q \in \mathbb{Z} \setminus \{0, n\}, \\ \mathbb{R}, & \text{όταν } q \in \{0, n\} \text{ και } n > 0, \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, & \text{όταν } q = n = 0. \end{cases}$$

Απόδειξη: Εάν  $n = 0$ , τότε η  $\mathbb{S}^0$  αποτελείται από δύο 0-κύτταρα και το αλυσωτό σύμπλοκο  $W_*(\mathcal{X}; \mathbb{R})$  είναι το:

$$\dots \rightarrow \begin{matrix} \{0\} \\ \parallel \\ \tilde{W}_2(\mathcal{X}; \mathbb{R}) \end{matrix} \xrightarrow{d_2^{\text{CW}}} \begin{matrix} \{0\} \\ \parallel \\ W_1(\mathcal{X}; \mathbb{R}) \end{matrix} \xrightarrow{d_1^{\text{CW}}} \begin{matrix} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \\ \parallel \\ W_0(\mathcal{X}; \mathbb{R}) \end{matrix} \xrightarrow{d_0^{\text{CW}}} \begin{matrix} \{0\} \\ \parallel \\ W_{-1}(\mathcal{X}; \mathbb{R}) \end{matrix} \xrightarrow{d_{-1}^{\text{CW}}} \begin{matrix} \{0\} \\ \parallel \\ \tilde{W}_{-2}(\mathcal{X}; \mathbb{R}) \end{matrix} \xrightarrow{d_{-2}^{\text{CW}}} \dots$$

(βλ. 4.2.1 και 4.2.2), οπότε  $H_q^{\text{CW}}(\mathbb{S}^0; \mathbb{R}) := H_q(W_*(\mathcal{X}; \mathbb{R})) \cong \begin{cases} \{0\}, & \text{όταν } q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, & \text{όταν } q = 0. \end{cases}$

Εάν  $n > 0$ , τότε το αλυσωτό σύμπλοκο  $W_*(\mathcal{X}; \mathbb{R})$  είναι το:

$$\dots \rightarrow \begin{matrix} \{0\} \\ \parallel \\ W_{n+1}(\mathcal{X}; \mathbb{R}) \end{matrix} \xrightarrow{d_{n+1}^{\text{CW}}} \begin{matrix} \mathbb{R} \\ \parallel \\ W_n(\mathcal{X}; \mathbb{R}) \end{matrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{matrix} \{0\} \\ \parallel \\ W_j(\mathcal{X}; \mathbb{R}) \end{matrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{matrix} \mathbb{R} \\ \parallel \\ W_0(\mathcal{X}; \mathbb{R}) \end{matrix} \xrightarrow{d_0^{\text{CW}}} \begin{matrix} \{0\} \\ \parallel \\ W_{-1}(\mathcal{X}; \mathbb{R}) \end{matrix} \rightarrow \dots,$$

$1 \leq j \leq n-1$

οπότε  $H_q^{\text{CW}}(\mathbb{S}^n; \mathbb{R}) := H_q(W_*(\mathcal{X}; \mathbb{R})) \cong \begin{cases} \{0\}, & \text{όταν } q \in \mathbb{Z} \setminus \{0, n\}, \\ \mathbb{R}, & \text{όταν } q = n. \end{cases}$  □

4.3.2. Άσκηση: Να συναχθεί το ίδιο αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας (αντί τις ανωτέρω) τις κυτταρικές διασπάσεις 1.21.5 (iv)  $\textcircled{\text{B}}$  και  $\textcircled{\text{C}}$  για τη σφαίρα  $\mathbb{S}^n$  που εδόθησαν στις σελίδες 103 και 104.

β) Υπολογισμός κυτταρικών μοδίων ομολογίας τού προβολικού χώρου  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ .

Ο χώρος  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  καθίσταται CW-χώρος εφοδιασμένος με μια κυτταρική διάσπαση  $\mathcal{X}$ , η οποία περιέχει  $n+1$  κύτταρα, και μάλιστα ένα κύτταρο διαστάσεως  $2j$ , για κάθε  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$  (βλ. 1.21.5 (iv), σελ. 104).

## 4.3.3. Θεώρημα.

$$H_q^{\text{Sing}}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n; \mathbb{R}) \underset{4.2.9}{\cong} H_q^{\text{CW}}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n; \mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{όταν } q \in \{0, 2, \dots, 2n\}, \\ \{0\}, & \text{εν εναντία περίπτωσηι.} \end{cases}$$

Απόδειξη: Επειδή (επί τη βάσει των 4.2.1 και 4.2.2) έχουμε

$$W_q(\mathcal{X}; \mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{όταν } q \in \{0, 2, \dots, 2n\}, \\ \{0\}, & \text{εν εναντία περίπτωσηι,} \end{cases} \text{ ισχύει κατ' ανάγκην}$$

$$d_q^{\text{CW}} = 0, \quad \forall q \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad H_q^{\text{CW}}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n; \mathbb{R}) := H_q(W.(\mathcal{X}; \mathbb{R})) \cong W_q(\mathcal{X}; \mathbb{R})$$

για κάθε  $q \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

c) Υπολογισμός κυτταρικών μοδίων ομολογίας του προβολικού χώρου  $\mathbb{P}_{\mathbb{H}}^n$ .

Ο χώρος  $\mathbb{P}_{\mathbb{H}}^n$  καθίσταται CW-χώρος εφοδιασμένος με μια κυτταρική διάσπαση  $\mathcal{X}$ , η οποία περιέχει  $n+1$  κύτταρα, και μάλιστα ένα κύτταρο διαστάσεως  $4j$ , για κάθε  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$  (βλ. 1.21.5(v), σελ. 104). Κατ' αναλογία προς το 4.3.3 αποδεικνύεται το εξής:

## 4.3.4. Θεώρημα

$$H_q^{\text{Sing}}(\mathbb{P}_{\mathbb{H}}^n; \mathbb{R}) \underset{4.2.9}{\cong} H_q^{\text{CW}}(\mathbb{P}_{\mathbb{H}}^n; \mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{όταν } q \in \{0, 4, \dots, 4n\}, \\ \{0\}, & \text{εν εναντία περίπτωσηι.} \end{cases}$$

d) Υπολογισμός κυτταρικών μοδίων ομολογίας του προβολικού χώρου  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ .

Ο χώρος  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  καθίσταται CW-χώρος εφοδιασμένος με μια κυτταρική διάσπαση  $\mathcal{X}$ , η οποία περιέχει  $n+1$  κύτταρα, και μάλιστα ένα κύτταρο διαστάσεως  $j$ , για κάθε  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$  (βλ. 1.21.5(v), σελ. 104). Ωστόσο,

επειδή 
$$W_q(\mathcal{X}; \mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{όταν } q \in \{0, 1, \dots, n\}, \\ \{0\}, & \text{εν εναντία περίπτωσηι,} \end{cases} \text{ στο } (W.(\mathcal{X}; \mathbb{R}), d^{\text{CW}})$$



Δεν υφίστανται διαδοχικοί  $W_j(\mathcal{X}; R), W_{j-1}(\mathcal{X}; R), 1 \leq j \leq n$ , με έναν εξ αυτών ζετριμμένο, κάτι που σημαίνει ότι ο υπολογισμός του  $H_q^{GW}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n; R)$  είναι κατ' ανάγκην πιο περίπλοκος από εκείνον των  $H_q^{GW}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n; R)$  και  $H_q^{GW}(\mathbb{P}_{\mathbb{H}}^n; R)$ .

Σημειωτέον ότι  $\mathcal{X} = \{ \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \setminus \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}, \dots, \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \setminus \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^0, \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^0 \}$  και ότι οι χαρτακιριστικές απεικονίσεις  $\varphi_k : \mathbb{D}^k \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^k$  (με  $\varphi_k|_{\mathbb{D}^k} : \mathbb{D}^k \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^k \setminus \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{k-1}$ ,  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{-1} := \emptyset$ ) είναι εξ ορισμού οι συνθέσεις  $\varphi_k := p_k \circ \sigma_k$ , όπου  $p_k : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^k (= \mathbb{S}^k / \mathbb{S}^1)$  η φυσική επίρριψη και  $\sigma_k$  η απεικόνιση που ορίζεται στην τελευταία γραμμή τις σελίδας 63.

Για τον προσδιορισμό του συνοριακού τελεστή  $d_q^{GW}$  για  $q \geq 2$  θα χρησιμοποιηθεί το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc}
 W_q(\mathcal{X}; R) & \xrightarrow{d_q^{GW}} & W_{q-1}(\mathcal{X}; R) & & \\
 \parallel & & \parallel & & \\
 H_q^{Sing}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^q, \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{q-1}; R) & \xrightarrow{\partial_q^{Sing}} & H_{q-1}^{Sing}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{q-1}; R) & \xrightarrow{H_{q-1}^{Sing}(i)} & H_{q-1}^{Sing}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{q-1}, \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{q-2}; R) \\
 \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \\
 H_q^{Sing}(\overline{\varphi}_q) & & H_{q-1}^{Sing}(p_{q-1}) & & H_{q-1}^{Sing}(\overline{p}_{q-1}) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 H_q^{Sing}(\mathbb{D}^q, \mathbb{S}^{q-1}; R) & \xrightarrow{\partial_q^{Sing}} & H_{q-1}^{Sing}(\mathbb{S}^{q-1}; R) & \xrightarrow{H_{q-1}^{Sing}(j)} & H_{q-1}^{Sing}(\mathbb{S}^{q-1}, \mathbb{S}^{q-2}; R) \\
 \parallel & & \parallel & & \\
 R & & R & & 
 \end{array}$$

όπου  $i, j$  οι αντίστοιχες φυσικές ενθέσεις και  $p_{q-1} = \varphi_{q-1}|_{\mathbb{S}^{q-1}}$ . Εάν  $\xi_q$  είναι ένας γεννήτορας του  $H_q^{Sing}(\mathbb{D}^q, \mathbb{S}^{q-1}; R) \cong R$ , τότε, βάσει των όσων προαναφέρθηκαν στην παρατήρηση 4.2.11,

$$d_q^{GW}(H_q^{Sing}(\overline{\varphi}_q)(\xi_q)) = H_{q-1}^{Sing}(i)(H_{q-1}^{Sing}(p_{q-1})(\tilde{\xi}_{q-1})),$$

όπου  $\tilde{\xi}_{q-1} := \partial_q^{Sing}(\xi_q)$  ένας γεννήτορας του  $H_{q-1}^{Sing}(\mathbb{S}^{q-1}; R) \cong R$ .

Αρκεί λοιπόν να υπολογισθεί η εικόνα  $(H_{q-1}^{Sing}(i) \circ H_{q-1}^{Sing}(p_{q-1}))(\tilde{\xi}_{q-1})$ .

4.3.5. Λήμμα: Έστω  $q$  ένας φυσικός αριθμός  $\geq 1$ . Εάν οι

$$i : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^q \hookrightarrow (\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^q, \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{q-1}), \quad j : \mathbb{S}^q \hookrightarrow (\mathbb{S}^q, \mathbb{S}^{q-1})$$

είναι οι φυσικές ενθέσεις και  $p_q : \mathbb{S}^q \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^q$  η φυσική επίρριψη,

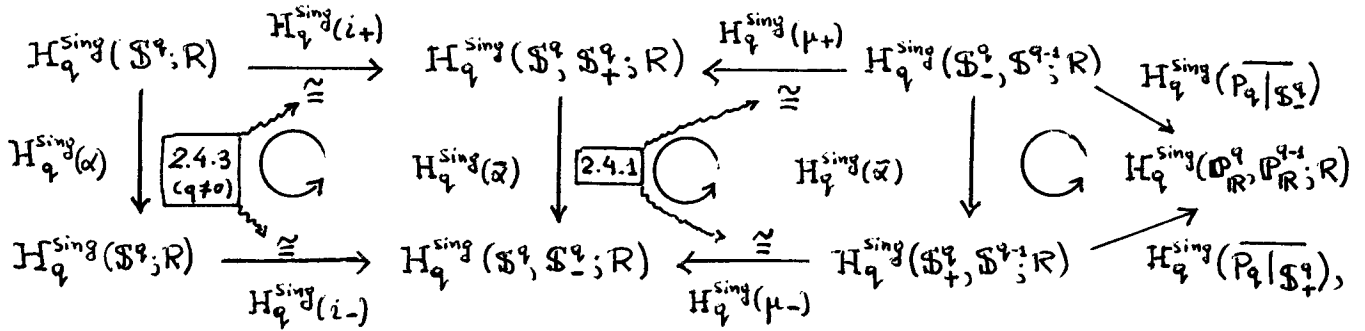
και εάν το  $\tilde{\xi}_q$  είναι ένας γεννήτορας του  $H_q^{Sing}(\mathbb{S}^q; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ , τότε

$$(H_q^{Sing}(i) \circ H_q^{Sing}(p_q))(\tilde{\xi}_q) := \begin{cases} 0, & \text{όταν } q \text{ είναι άρτιος,} \\ 2\bar{\xi}_q, & \text{όταν } q \text{ είναι περιττός,} \end{cases}$$

όπου  $\bar{\xi}_q$  ένας γεννήτορας του  $H_q^{Sing}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^q, \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{q-1}; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ .

Απόδειξη: Συμβολίζουμε ως  $\begin{cases} i_+ : \mathbb{S}^q \hookrightarrow (\mathbb{S}^q, \mathbb{S}_+^q), & \mu_+ : (\mathbb{S}_-^q, \mathbb{S}^{q-1}) \hookrightarrow (\mathbb{S}^q, \mathbb{S}_+^q), \\ i_- : \mathbb{S}^q \hookrightarrow (\mathbb{S}^q, \mathbb{S}_-^q), & \mu_- : (\mathbb{S}_+^q, \mathbb{S}^{q-1}) \hookrightarrow (\mathbb{S}^q, \mathbb{S}_-^q), \end{cases}$  τις φυσικές ενθέσεις και ως  $\alpha : \mathbb{S}^q \rightarrow \mathbb{S}^q$  την "αντιποδική απεικόνιση" (βλ. σελ. 205).

Το μεταθετικό διάγραμμα



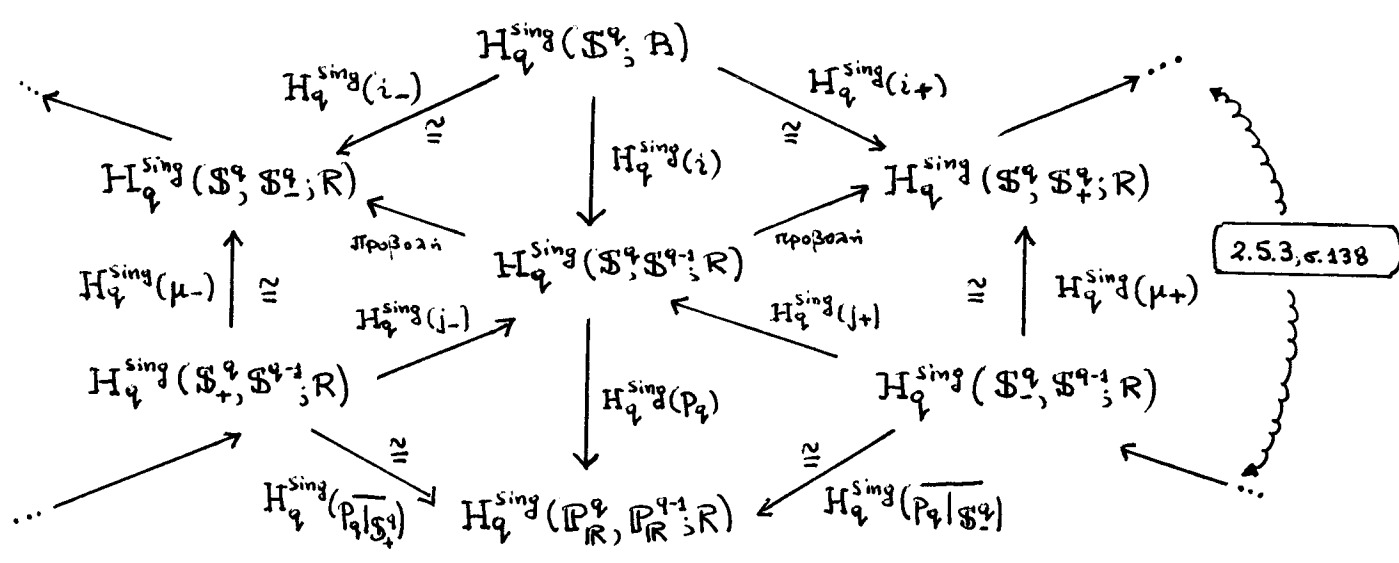
σε συνδυασμό με το ότι  $H_q^{Sing}(\alpha) = (-1)^{q+1} \text{Id}_{H_q^{Sing}(\mathbb{S}^q; \mathbb{R})}$  (βλ. 3.7.4, 3.7.9 και 3.6.3) μας δίνει:

$$(*) \quad (H_q^{Sing}(\overline{p_q|\mathbb{S}_-^q}) \circ H_q^{Sing}(\mu_+)^{-1} \circ H_q^{Sing}(i_+))(\tilde{\xi}_q) = (-1)^{q+1} (H_q^{Sing}(\overline{p_q|\mathbb{S}_+^q}) \circ H_q^{Sing}(\mu_-)^{-1} \circ H_q^{Sing}(i_-))(\tilde{\xi}_q).$$

Εν συνεχεία παρατηρούμε ότι η σχετική ακολουθία των Mayer και Victoris της εκφυλιστικής τοπολογικής τριάδας  $(\mathbb{S}^q, \mathbb{S}_+^q, \mathbb{S}_-^q)$  (βλ. 2.6.5, σελ. 142-143) μας δίνει έναν ισομορφισμό

$$\begin{array}{ccc} \dots \rightarrow H_{q+1}^{Sing}(\mathbb{S}^q, \mathbb{S}_+^q; \mathbb{R}) \rightarrow H_q^{Sing}(\mathbb{S}^q, \mathbb{S}_+^q; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\cong} & H_q^{Sing}(\mathbb{S}^q, \mathbb{S}_+^q; \mathbb{R}) \oplus H_q^{Sing}(\mathbb{S}^q, \mathbb{S}_-^q; \mathbb{R}) \\ \parallel & \text{(} H_q^{Sing}(i_+), H_q^{Sing}(i_-) \text{)} & \downarrow \\ \{0\} & & H_q^{Sing}(\mathbb{S}^q, \mathbb{S}_+^q; \mathbb{R}) \cong \{0\}. \end{array}$$

Θεωρώντας το μεταθετικό διάγραμμα



και εφαρμόζοντας σε αυτό το "λήμμα του Εξαγώνου" (βλ. άσκηση 22(iii) του 4ου φυλλαδίου των [ΣΟΑ]) λαμβάνουμε

$$(H_q^{Sing}(P_q) \circ H_q^{Sing}(i))(\tilde{\xi}_q) \stackrel{(*)}{=} (1 + (-1)^{q+1}) (H_q^{Sing}(\overline{P_q|S^q}) \circ H_q^{Sing}(\mu_+)^{-1} \circ H_q^{Sing}(i_+))(\tilde{\xi}_q),$$

$\tilde{\xi}_q := (H_q^{Sing}(\overline{P_q|S^q}) \circ H_q^{Sing}(\mu_+)^{-1} \circ H_q^{Sing}(i_+))(\tilde{\xi}_q)$  είναι ένας γεννήτορας του  $R$ -μοδίου  $H_q^{Sing}(P_q^q, P_R^{q-1}; R) \cong R$ .  $\square$

4.3.6. Λήμμα: Εάν  $\eta \neq f: X \rightarrow Y$  είναι μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ (μη κενών) δρομοσυνεκτικών τοπολογικών χώρων, τότε ο ομομορφισμός  $R$ -μοδίων  $H_0^{Sing}(f): H_0^{Sing}(X; R) \rightarrow H_0^{Sing}(Y; R)$  είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη: Κατ' αρχάς,  $H_0^{Sing}(X; R) \cong R \cong H_0^{Sing}(Y; R)$  (βλ. 3.3.5 (i), σελ. 174). Κάθε στοιχείο του  $H_0^{Sing}(X; R)$  είναι γραμμικός συνδυασμός των κλάσεων ομολογίας των ιδιοτήτων  $0$ -μονοπλόκων εντός του  $X$ , τα οποία είναι της μορφής  $\sigma_x: \{x\} \rightarrow \Delta_0$ , για  $x \in X$ . Η κλάση ομολογίας ουσιαστικότερα  $\sigma_x$  είναι γεννήτορας του  $H_0^{Sing}(X; R)$ , ενώ η εικόνα της μέσω του  $f$  είναι γεννήτορας του  $H_0^{Sing}(Y; R)$ . Επειδή  $H_0^{Sing}(f)(\sigma_x + B_0^{Sing}(X; R)) = (f \circ \sigma_x) + B_0^{Sing}(Y; R)$ , ο  $H_0^{Sing}(f)$  είναι ισομορφισμός. (βλ. [ΣΟΑ], 1.6.15, (ii)  $\Rightarrow$  (i), σελ. 46)  $\square$

4.3.7. Θεώρημα:

$$H_q^{sing}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n; \mathbb{R}) \underset{4.2.9}{\cong} H_q^{CW}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n; \mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{όταν } q=0 \text{ ή } q=n \text{ περιττός,} \\ \mathbb{R}_2, & \text{όταν } q \text{ περιττός και } 0 < q < n, \\ \mathbb{t}_2(\mathbb{R}), & \text{όταν } q \text{ άρτιος και } 0 < q < n, \\ \{0\}, & \text{εν εναντία περιπτώσει,} \end{cases}$$

όπου  $\mathbb{R}_2 := \mathbb{R}/2\mathbb{R}$ ,  $2\mathbb{R} := \{2r \mid r \in \mathbb{R}\}$ ,  $\mathbb{t}_2(\mathbb{R}) := \{r \in \mathbb{R} \mid 2r = 0_{\mathbb{R}}\}$ .

Απόδειξη: Το αλυσωτό ούμπλοκο  $(W_*(\mathbb{X}; \mathbb{R}), d_*^{CW})$  είναι το:

$$\dots \rightarrow W_{n+1}(\mathbb{X}; \mathbb{R}) \xrightarrow{d_{n+1}^{CW}} W_n(\mathbb{X}; \mathbb{R}) \xrightarrow{d_n^{CW}} W_{n-1}(\mathbb{X}; \mathbb{R}) \xrightarrow{d_{n-1}^{CW}} \dots \xrightarrow{d_2^{CW}} W_1(\mathbb{X}; \mathbb{R}) \xrightarrow{d_1^{CW}} W_0(\mathbb{X}; \mathbb{R}) \xrightarrow{d_0^{CW}} \{0\}$$

Προφανώς,  $d_0^{CW} = 0$ . Εξάλλου, από τη μακρά ακριβή ακολουθία του τοπολογικά ζεύγους  $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1, \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^0)$  (όπου  $\gamma: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^0 \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  η φυσική ένθεση):

$$\dots \rightarrow H_1^{sing}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1, \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^0; \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial_1^{sing}} H_0^{sing}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^0; \mathbb{R}) \xrightarrow{H_0^{sing}(\gamma)} H_0^{sing}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1; \mathbb{R}) \rightarrow \dots$$

Λαμβάνουμε  $\partial_1^{sing} = 0$  (δύο κατά το λήμμα 4.3.6 ο  $H_0^{sing}(\gamma)$  είναι ισομορφισμός), οπότε (βάσει τού ορο. 4.2.2)  $d_1^{CW} = 0$ . Εάν  $2 \leq q \leq n$  και εάν  $\xi_q$  είναι ένας γεννήτορας τού  $H_q^{sing}(\mathbb{D}^q, \mathbb{S}^{q-1}; \mathbb{R})$ , τότε το  $H_q^{sing}(\bar{\varphi}_q)(\xi_q)$  είναι γεννήτορας τού  $W_q(\mathbb{X}; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$  και  $\mathbb{R}$  το

$$d_q^{CW} (H_q^{sing}(\bar{\varphi}_q)(\xi_q)) = H_{q-1}^{sing}(\iota) (H_{q-1}^{sing}(\mathcal{P}_{q-1})(\tilde{\xi}_{q-1}))$$

γεννήτορας τού  $W_{q-1}(\mathbb{X}; \mathbb{R})$ , όπου  $\tilde{\xi}_{q-1} = \partial_q^{sing}(\xi_q)$ . Κατά το λήμμα 4.3.5,

$$d_q^{CW} (H_q^{sing}(\bar{\varphi}_q)(\xi_q)) = \begin{cases} 0_{\mathbb{R}}, & \text{όταν } q \text{ περιττός και } 3 \leq q \leq n, \\ 2\tilde{\xi}_{q-1}, & \text{όταν } q \text{ άρτιος και } 2 \leq q \leq n, \end{cases}$$

όπου  $\tilde{\xi}_{q-1}$  ένας γεννήτορας τού  $W_{q-1}(\mathbb{X}; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ .

Παρενθετικό σχόλιο: Ο  $R$  ως (ελεύθερος)  $R$ -μόδιος (βαθμίδας 1) έχει το  $\{1_R\}$  ως τη "συνήθη" βάση του. Εάν  $b \in R$  με  $R = Rb$ , τότε  $1_R \in Rb \Rightarrow \exists u \in R: 1_R = ub \Rightarrow b \in R^\times$ , όπου  $R^\times := \{r \in R \mid r \text{ αντιστρέψιμος}\}$ . Εξάλλου, εάν  $b \in R^\times$  και  $\lambda b = 0_R$  για κάποιον  $\lambda \in R$ , τότε κατ'ανάγκην  $\lambda = 0_R$ , οπότε το  $\{b\}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Κατά συνέπεια, κάθε βάση του  $R$ -μοδίου  $R$  είναι της μορφής  $\{b\}$ , όπου  $b \in R^\times$ . Επιπροσθέτως, εάν οι  $\{b\}, \{c\}$  είναι δυο βάσεις του  $R$ -μοδίου  $R$ , τότε έχουμε  $b = (bc^{-1})c$  και  $c = (cb^{-1})b$ , όπου οι συντελεστές των "αλλαγών βάσεων"  $bc^{-1}$  και  $cb^{-1}$  ανήκουν στο  $R^\times$ . Εν προκειμένω, για  $q$  άρτιο και  $2 \leq q \leq n$  ορίσαμε τον ομομορφισμό:  $R \cong W_q(\chi; R) = Rb_q \xrightarrow{d_q^{CW}} R_{c_{q-1}} = W_{q-1}(\chi; R) \cong R$  με  $b_q := H_q^{sing}(\tilde{\varphi}_q)(\tilde{\xi}_q)$ ,  $c_{q-1} := \tilde{\xi}_{q-1}$  και  $d_q^{CW}(b_q) = 2c_{q-1}$ . Θα δείξουμε ότι  $\exists \lambda_q \in R^\times$  με  $d_q^{CW} = 2\lambda_q \cdot Id_R$ . Προς τούτο θέτουμε  $\lambda_q := c_{q-1}b_q^{-1}$  και θεωρούμε τυχόν  $y \in W_q(\chi; R)$ . Τότε  $\exists r \in R: y = rb_q$ . Προφανώς,  $d_q^{CW}(y) = d_q^{CW}(rb_q) = r d_q^{CW}(b_q) = r(2c_{q-1}) = 2(rc_{q-1}) = 2(r(c_{q-1}b_q^{-1})b_q) = 2(r\lambda_q b_q) = 2\lambda_q(rb_q) = 2\lambda_q y$ .

Άρα για κάθε  $q \in \mathbb{Z}$  έχουμε  $d_q^{CW} = \begin{cases} 0, & \text{όταν } q \leq 0 \text{ ή } (q \text{ περιττός}, 1 \leq q \leq n) \text{ ή } q > n, \\ 2\lambda_q \cdot Id_R, & \text{όταν } q \text{ άρτιος και } 2 \leq q \leq n. \end{cases}$

Επειδή  $H_q^{CW}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n; R) := H_q(W_*(\chi; R)) := Ker(d_q^{CW}) / Im(d_{q+1}^{CW})$  λαμβάνουμε

$$H_q^{CW}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } q=0 \text{ ή } q=n = \text{περιττός}, \\ Coker(2\lambda_{q+1} \cdot Id_R), & \text{όταν } q \text{ περιττός και } 0 < q < n, \\ Ker(2\lambda_q \cdot Id_R), & \text{όταν } q \text{ άρτιος και } 0 < q < n, \\ \{0\}, & \text{όταν } q < 0 \text{ ή } q > n, \end{cases}$$

(με  $Ker(2\lambda_q \cdot Id_R) = t_2(R)$  και  $Coker(2\lambda_{q+1} \cdot Id_R) = R / Im(2\lambda_{q+1} Id_R) \cong R / 2R =: R_2$ )

απ' όπου έπεται το ητούμενο.  $\square$

4.3.8 Παραδείγματα: (i) Εάν  $R = \mathbb{Z}$ , τότε

$$H_q^{\text{Sing}}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n; \mathbb{Z}) \cong H_q^{\text{CW}}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } q=0 \text{ ή } q=n \text{ περιττός,} \\ \mathbb{Z}_2, & \text{όταν } q \text{ περιττός και } 0 < q < n, \\ \{0\}, & \text{εναντία περίπτωσηι.} \end{cases}$$

(ii) Εάν  $R = \mathbb{Z}_2$ , τότε

$$H_q^{\text{Sing}}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n; \mathbb{Z}_2) \cong H_q^{\text{CW}}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n; \mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{όταν } 0 \leq q \leq n, \\ \{0\}, & \text{όταν } q < 0 \text{ ή } q > n. \end{cases}$$

(iii) Εάν  $R = \mathbb{F} = \text{ένδ σώμα με } \text{char}(\mathbb{F}) = 0$ , τότε

$$H_q^{\text{Sing}}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n; \mathbb{F}) \cong H_q^{\text{CW}}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n; \mathbb{F}) \cong \begin{cases} \mathbb{F}, & \text{όταν } q=0 \text{ ή } q=n \text{ περιττός,} \\ \{0\}, & \text{εναντία περίπτωσηι.} \end{cases}$$

e Υπολογισμός κυτταρικών μοδίων ομολογίας των απειροδιάστατων προβολικών χώρων.

Οι αντίστοιχοι απειροδιάστατοι προβολικοί χώροι είναι, όπως έχουμε ήδη εξηγήσει στο 1.21.13(i), σελ. 112, ωςάυτως CW-χώροι:

$$\begin{cases} \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{\infty} = e^0 \cup e^1 \cup e^2 \cup \dots \\ \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{\infty} = e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup \dots \\ \mathbb{P}_{\mathbb{H}}^{\infty} = e^0 \cup e^4 \cup e^8 \cup \dots \end{cases}$$

Άμεση γενίκευση των θεωρημάτων 4.3.3 και 4.3.4 μας οδηγεί στο εξής:

4.3.9. Θεώρημα.

Για  $q \in \mathbb{Z}$  έχουμε

$$H_q^{\text{Sing}}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{\infty}; R) \stackrel{4.2.9}{\cong} H_q^{\text{CW}}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{\infty}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } q \geq 0 \text{ και } q \equiv 0 \pmod{2} \\ \{0\}, & \text{εναντία περίπτωσηι.} \end{cases}$$

και

$$H_q^{\text{Sing}}(\mathbb{P}_{\mathbb{H}}^{\infty}; R) \stackrel{4.2.9}{\cong} H_q^{\text{CW}}(\mathbb{P}_{\mathbb{H}}^{\infty}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } q \geq 0 \text{ και } q \equiv 0 \pmod{4} \\ \{0\}, & \text{εναντία περίπτωσηι.} \end{cases}$$

Και' αναλογίαν, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το  $W_*(\mathbb{R}; R)$  για το  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{\infty}$  εκτείνεται επ' άπειρον "προς τα αριστερά" με εκφραχές  $\cong R$  και χρησιμοποιώντας τα αντίστοιχα επιχειρήματα της απόδειξης του θεωρήματος 4.3.7 αποδεικνύεται το ακόλουθο:

4.3.10 Θεώρημα: Για  $q \in \mathbb{Z}$  έχουμε

$$H_q^{\text{sing}}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{\infty}; R) \cong_{4.2.9} H_q^{\text{GW}}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{\infty}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } q = 0, \\ R_2, & \text{όταν } q \text{ περιττός } > 0, \\ t_2(R), & \text{όταν } q \text{ άρτιος } > 0, \\ \{0\}, & \text{όταν } q < 0. \end{cases}$$

Ⓣ Υπολογισμός κυτταρικών μοδίων ομολογίας των γενικευμένων χώρων φακώ.

Οι γενικευμένοι χώροι φακώ  $\mathbb{L}_{2n-1}(p; q_1, \dots, q_n) := \mathbb{S}^{2n-1} / \mathbb{Z}_p$  ορίσθηκαν στο εδ. 1.14.5, σελ. 57. Βάσει των όσων προαναφέρθηκαν στα εδάφια 1.16.5, σελ. 64-65 και 1.21.5.(vi), σελ. 104-105, ο  $\mathbb{L}_{2n-1}(p; q_1, \dots, q_n)$  είναι GW-χώρος που διαθέτει μια κυτταρική διάσπαση  $\mathcal{X}$  περιέχουσα ακριβώς ένα κύτταρο σε κάθε διάσταση  $\leq 2n-1$ . Συγκεκριμένα, εκκινούμε από την ακόλουθη διάσπαση της  $\mathbb{S}^{2n-1}$  σε  $p(n+1)$  κύτταρα:

$$\begin{cases} e_{\nu}^{2j-2} := \{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{S}^{2n-1} \mid z_k = 0 \text{ για } k > j \text{ και } \arg(z_j) = \frac{2\pi\nu}{p} \}, \\ e_{\nu}^{2j-1} := \{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{S}^{2n-1} \mid z_k = 0 \text{ για } k > j \text{ και } \frac{2\pi\nu}{p} < \arg(z_j) < \frac{2\pi(\nu+1)}{p} \}, \\ \nu \in \{0, 1, \dots, p-1\}, j \in \{1, \dots, n\}, \end{cases}$$

Θεωρούμε ως απεικονίσεις  $\varphi_{e_{\nu}^{2j-2}}, \varphi_{e_{\nu}^{2j-1}}$  (όπως στη σελ. 105) και προσδίδουμε στην  $\mathbb{S}^{2n-1}$  τη δομή ενός GW-χώρου. Κατόπιν εφαρμογής της φυσικής συμπίεσης  $\eta: \mathbb{S}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{L}_{2n-1}(p; q_1, \dots, q_n)$  διαπιστώνουμε ότι τα  $e_{\nu}^{2j-2}$  (και αντίστοιχως, τα  $e_{\nu}^{2j-1}$ ) ταυτίζονται μεταξύ τους για κάθε  $\nu \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ ,

οπότε  $L_{2n-1}(p; q_1, \dots, q_n) = \eta(e_0^0) \cup \eta(e_0^1) \cup \dots \cup \eta(e_0^{2n-1})$  με τις  $\psi^\mu := \eta \circ \varphi_{e_0^\mu}$ ,  $\mu \in \{0, 1, \dots, 2n-1\}$  ως χαρακτηριστικές του απεικονίσεις.

4.3.11. Θεώρημα. Για  $q \in \mathbb{Z}$  έχουμε

$$H_q^{\text{Sing}}(L_{2n-1}(p; q_1, \dots, q_n); R) \cong_{4.2.9} H_q^{\text{CW}}(L_{2n-1}(p; q_1, \dots, q_n); R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } q=0 \text{ ή } q=2n-1, \\ R_p, & \text{όταν } q \text{ περιττός και } 0 < q < 2n-3, \\ t_p(R), & \text{όταν } q \text{ άρτος και } 0 < q < 2n-2, \\ \{0\}, & \text{εναντία περίπτωσης,} \end{cases}$$

όπου  $R_p := R/pR$ ,  $pR := \{pr \mid r \in R\}$ ,  $t_p(R) := \{r \in R \mid rp = 0_R\}$ .

Απόδειξη: Το ανωτέρω σύμπλοκο  $(W_*(X; R), d_*^{\text{CW}})$  είναι το:

$$\dots \rightarrow \begin{matrix} \{0\} \\ \parallel \\ W_{2n}(X; R) \end{matrix} \xrightarrow{d_{2n}^{\text{CW}}} \begin{matrix} R \\ \parallel \\ W_{2n-1}(X; R) \end{matrix} \xrightarrow{d_{2n-1}^{\text{CW}}} \begin{matrix} R \\ \parallel \\ W_{2n-2}(X; R) \end{matrix} \xrightarrow{d_{2n-2}^{\text{CW}}} \dots \xrightarrow{d_2^{\text{CW}}} \begin{matrix} R \\ \parallel \\ W_1(X; R) \end{matrix} \xrightarrow{d_1^{\text{CW}}} \begin{matrix} R \\ \parallel \\ W_0(X; R) \end{matrix} \rightarrow \{0\}$$

Χρησιμοποιώντας επιχειρηματολογία ανάλογη εκείνης της απόδειξης του Θεωρήματος 4.3.7 δείχνει κανείς ότι για κάθε  $q \in \mathbb{Z}$  ισχύει

$$d_q^{\text{CW}} = \begin{cases} 0, & \text{όταν } q \leq 0 \text{ ή } (q \text{ περιττός, } 1 \leq q < 2n-1) \text{ ή } q > 2n-1, \\ p\lambda_q \cdot \text{Id}_R, & \text{όταν } q \text{ άρτος και } 2 \leq q \leq 2n-2, (\lambda_q \in R^\times), \end{cases}$$

απ' όπου υπολογίζεται εύκολα ο  $H_q^{\text{CW}}(L_{2n-1}(p; q_1, \dots, q_n); R)$ . (Οι λεπτομέρειες αφήνονται ως άσκηση.)  $\square$

Και' αναλογίαν αποδεικνύεται το εξής θεώρημα για τον  $L_\infty(p; q_1, q_2, \dots)$ :  
(βλ. σελ. 60 και 112)

4.3.12. Θεώρημα: Για  $q \in \mathbb{Z}$  έχουμε

$$H_q^{\text{Sing}}(L_\infty(p; q_1, q_2, \dots); R) \cong_{4.2.9} H_q^{\text{CW}}(L_\infty(p; q_1, q_2, \dots); R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } q=0, \\ R_p, & \text{όταν } q \text{ περιττός } > 0, \\ t_p(R), & \text{όταν } q \text{ άρτος } > 0, \\ \{0\}, & \text{όταν } q < 0. \end{cases}$$



4.3.13. Σημείωση: Για τον προσδιορισμό των ομάδων ομολογίας διαφόρων τοπολογικών ομάδων (πρβλ. §1.13), κλασικών ομάδων Lie, πολυπεγμάτων του Stiefel κ.ά. μέσω (συνήθων ή γενικευμένων) κυτταρικών διασπάσεων βλ.

- C.E. Miller: *The topology of rotation groups*, Annals of Math. 57 (1953), 90-114.
- Yakota: *On the homology of classical Lie groups*, J. Inst. Polytech. Osaka City Un. 8 (1957), 93-120.
- H.V. Pittie: *The integral homology and cohomology rings of SO(n) and Spin(n)*, J. Pure Appl. Algebra 73 (1991), no. 2, 105-153.

g Υπολογισμός κυτταρικών μοθίων ομολογίας των (συνεκτικών, κλειστών) Προσανατολισμένων επιφανειών  $F_g$ ,  $g \geq 1$ .

Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό 1.11.12 (σελ. 38) για την  $F_g$ , παρουσιάζοντας την ως πηλικόχωρο  $E_{4g}/\mathcal{R}$  (με  $p: E_{4g} \rightarrow F_g$  τη φυσική επίρριψη), καθώς και την κυτταρική διάσπαση  $\mathcal{X}$  της  $F_g (\cong p(\partial E_{4g}) \cup_{p|_{\partial E_{4g}}} E_{4g})$  την ορισθείσα στη σελίδα 106. Η  $\mathcal{X}$  αποτελείται από:

- Ένα 0-κύτταρο:  $p(z_1) (= p(z_2) = \dots = p(z_{4g}))$
- $2g$  1-κύτταρα:  $\begin{cases} p(\overline{z_{4j-3} z_{4j-2}}) \setminus p(z_{4j-3}) \\ p(\overline{z_{4j-2} z_{4j-1}}) \setminus p(z_{4j-2}) \end{cases}, \quad 1 \leq j \leq g, \text{ και}$
- Ένα 2-κύτταρο:  $F_g \setminus p(\partial E_{4g}) (= p(\overset{\circ}{E}_{4g}))$ .

Αρχικώς θα υπολογίσουμε τις αβελιανές ομάδες  $H_q^{CW}(F_g; \mathbb{Z}) = H_q(W_*(\mathcal{X}; \mathbb{Z}))$ , για κάθε  $q \in \mathbb{Z}$ . Το  $W_*(\mathcal{X}; \mathbb{Z})$  είναι το αλυσωτό σύμπλοκο:

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \xrightarrow{d_3^{CW}} W_2(\mathcal{X}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{d_2^{CW}} W_1(\mathcal{X}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{d_1^{CW}} W_0(\mathcal{X}; \mathbb{Z}) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

$\mathbb{Z} \parallel 2$        $\mathbb{Z}^{2g} \parallel 2$        $\mathbb{Z} \parallel 2$

Προφανώς,  $d_q^{CW} = 0$  για  $q \leq 0$  και για  $q \geq 3$ . Επιπροσθέτως, στη μακριά ακριβή ακολουθία τής τοπολογικού γεύχους  $(F_g^{(1)}, F_g^{(0)})$ :

$$\dots \rightarrow H_1^{\text{sing}}(F_g^{(1)}, F_g^{(0)}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_1^{\text{sing}}} H_0^{\text{sing}}(F_g^{(0)}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{H_0^{\text{sing}}(j_0)} H_0^{\text{sing}}(F_g^{(1)}; \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

Ο ομομορφισμός  $H_0^{\text{sing}}(j_0)$  είναι ισομορφισμός (κατά το λήμμα 4.3.6, σελ. 251),  
 οπότε  $\partial_1^{\text{sing}} = 0 \xrightarrow[\text{ορσ. 4.2.2}]{=} d_1^{\text{CW}} = 0$ . Κατά συνέπεια, αρκεί να υπολογισθεί μόνον  
 ο συνοριακός τελεστής  $d_2^{\text{CW}}$ . Προς τούτο θα απαιτηθούν ορισμένα προπαρασκευαστικά  
 λήμματα.

4.3.14. Λήμμα. Έστω  $X$  ένας τοπολογικός χώρος. Εάν οι  $\alpha_1, \dots, \alpha_k: I \rightarrow X$

είναι δρόμοι εντός του  $X$  με  $\alpha_\nu(1) = \alpha_{\nu+1}(0)$ ,  $\forall \nu \in \{1, \dots, k-1\}$ , τότε

$$((\alpha_1 * \alpha_2) * \alpha_3) * \dots * \alpha_k \simeq \beta_k \text{ Σχ. 50, 1?}, \text{ όπου}$$

ο  $\beta_k: I \rightarrow X$  ορίζεται μέσω του (παραλλόλου) τύπου:

$$\beta_k(t) := \alpha_\nu \left( k \left( t - \frac{\nu-1}{k} \right) \right), \quad \forall t \in \left[ \frac{\nu-1}{k}, \frac{\nu}{k} \right],$$

$$\forall \nu \in \{1, \dots, k-1\}.$$

Θα αποδειχθεί επαγωγικώς μέσω του εξής λήμματος:

4.3.15. Λήμμα. Έστω  $X$  ένας τοπολογικός χώρος. Εάν οι  $\alpha, \alpha': I \rightarrow X$

είναι δυο δρόμοι εντός του  $X$  με  $\alpha(1) = \alpha'(0)$  και  $\xi \in (0, 1)$ , τότε για τον

δρόμο  $\alpha *_{\xi} \alpha'$  τον ορισμένο από τον τύπο

$$\alpha *_{\xi} \alpha' := \begin{cases} \alpha \left( \frac{1}{\xi} t \right), & \text{όταν } 0 \leq t \leq \xi, \\ \alpha' \left( \frac{1}{1-\xi} (t-\xi) \right), & \text{όταν } \xi \leq t \leq 1, \end{cases}$$

Έχουμε  $\alpha *_{\xi} \alpha' \simeq \alpha * \alpha'$  Σχ. 50, 1? (όπου  $\alpha * \alpha'$  όπως στον ορσ. 1.19.1, σελ. 83).

Απόδειξη: Έστω  $\gamma: I \rightarrow I$  ο δρόμος εντός του  $I$  ο ορισμένος από

$$\gamma(t) := \begin{cases} 2\xi t, & \text{όταν } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \xi + (2t-1)(1-\xi), & \text{όταν } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \quad \text{Τότε}$$

$(\alpha *_{\xi} \alpha') \circ \gamma = \alpha * \alpha'$ . Η ομοτοπία  $H: I \times I \rightarrow X$  η ορισμένη

από τον χώρο  $H(t,s) := (\alpha *_{\frac{s}{k}} \alpha')((1-s)t + s \gamma(t))$ ,  $\forall (t,s) \in I \times I$ ,  
είναι μια μορφοποίηση  $\text{Gx. } \{0,1\}$  από τον  $\alpha * \alpha'$  στον  $\alpha *_{\frac{s}{k}} \alpha'$  (πρβλ. ορσ. 1.17.6,  
σελ. 72).  $\square$

Απόδειξη λήμματος 4.3.14: Για  $k \leq 2$  ο ισχυρισμός είναι αληθής (για  $k=2$   
λόγω του λήμματος 4.3.13). Έστω ότι  $k \geq 3$  και ότι αυτός είναι αληθής και για  
τον  $k-1$ . Τότε

$$((\alpha_1 * \alpha_2) * \alpha_3) * \dots * \alpha_k \simeq \beta_{k-1} *_{\frac{k-1}{k}} \alpha_k \text{ Gx. } \{0,1\},$$

όπου

$$(\beta_{k-1} *_{\frac{k-1}{k}} \alpha_k)(t) = \begin{cases} \beta_{k-1} \left( \frac{k}{k-1} t \right), & \text{όταν } 0 \leq t \leq \frac{k-1}{k}, \\ \alpha_k \left( k \left( t - \frac{k-1}{k} \right) \right), & \text{όταν } \frac{k-1}{k} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$$\text{Όμως } \beta_{k-1} \left( \frac{k}{k-1} t \right) = \alpha_{\nu} \left( (k-1) \left( \frac{k}{k-1} t - \frac{\nu-1}{k-1} \right) \right) = \alpha_{\nu} (kt - (\nu-1))$$

όταν  $\frac{\nu-1}{k-1} \leq \frac{k}{k-1} t \leq \frac{\nu}{k-1}$ , οπότε ισχύει

$$\beta_{k-1} \left( \frac{k}{k-1} t \right) = \alpha_{\nu} \left( k \left( t - \frac{\nu-1}{k} \right) \right) \quad \text{για } \frac{\nu-1}{k} \leq t \leq \frac{\nu}{k},$$

απ' όπου έπεται ότι  $\beta_{k-1} *_{\frac{k-1}{k}} \alpha_k = \beta_k$ .  $\square$

Επανερχόμενοι στην  $F_g$  ορίζουμε τους δρόμους  $a_j, b_j, c_j, d_j : I \rightarrow \partial E_{4g}$   
 $1 \leq j \leq g$ , ως εξής:

$$\begin{cases} a_j := \sigma_{[z_{4j-3}, z_{4j-2}]} \circ \eta^{-1}, & b_j := \sigma_{[z_{4j-2}, z_{4j-1}]} \circ \eta^{-1}, \\ c_j := \sigma_{[z_{4j-1}, z_{4j}]} \circ \eta^{-1}, & d_j := \sigma_{[z_{4j}, z_{4j+1}]} \circ \eta^{-1}, \end{cases}$$

όπου  $\sigma_{[z_{\mu}, z_{\mu+1}]} : \Delta_1 \rightarrow \partial E_{4g}$  είναι το ιδιαίτον 1-μονόπλοκο (συσχετικά απεικόνιση)  
ενός του  $\partial E_{4g}$  που στέλνει το  $e_0$  να απεικονισθεί στο  $z_{\mu}$  και το  $e_1$  στο  $z_{\mu+1}$   
με  $\sigma_{[z_{\mu}, z_{\mu+1}]}(\Delta_1) = \overline{z_{\mu} z_{\mu+1}}$  (πρβλ. σελ. 92).

$\eta: \Delta_1 \xrightarrow{\cong} I$  ο ομοιομορφισμός  $\eta((1-t)e_0 + te_1) = t, \forall t \in I$ , και  $\eta^{-1}: I \xrightarrow{\cong} \Delta_1$  ο αντιστροφός του  $\eta^{-1}(t) := (1-t, t), \forall t \in I$ .

- Επειδή  $\partial E_{4g} \cong \mathbb{S}^1$  και  $H_1^{sing}(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ , η κάθε ομοολογία του 1-κυκλήματος

$$Z_1^{sing}(\partial E_{4g}) \ni u := \sum_{j=1}^g (\sigma_{[z_{4j-3}, z_{4j-2}]} + \sigma_{[z_{4j-2}, z_{4j-1}]} + \sigma_{[z_{4j-1}, z_{4j}]} + \sigma_{[z_{4j}, z_{4j+1}]})$$

καθορίζει έναν γεννήτορα της  $H_1^{sing}(\partial E_{4g}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ .

- Ορίζοντας τον δρόμο  $\varepsilon: I \rightarrow \partial E_{4g}$  μέσω του (παράλληλου) κύκλου:

$$\varepsilon(t) := \begin{cases} a_j \left( 4g \left( t - \frac{4j-3}{4g} \right) \right), & \text{όταν } t \in \left[ \frac{4j-3}{4g}, \frac{4j-2}{4g} \right], \\ b_j \left( 4g \left( t - \frac{4j-2}{4g} \right) \right), & \text{όταν } t \in \left[ \frac{4j-2}{4g}, \frac{4j-1}{4g} \right], \\ c_j \left( 4g \left( t - \frac{4j-1}{4g} \right) \right), & \text{όταν } t \in \left[ \frac{4j-1}{4g}, \frac{4j}{4g} \right], \\ d_j \left( 4g \left( t - \frac{4j}{4g} \right) \right), & \text{όταν } t \in \left[ \frac{4j}{4g}, \frac{4j+1}{4g} \right], \end{cases}$$

$1 \leq j \leq g$

Καταλήγουμε στο  $\varepsilon$  ξής:

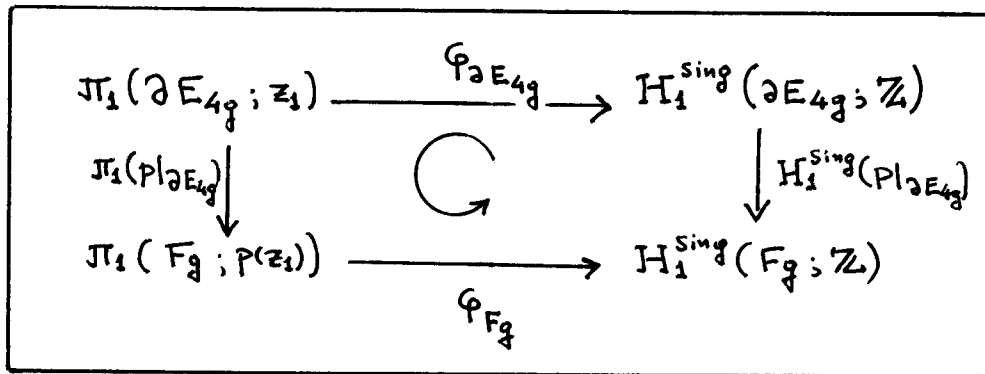
4.3.16. Λήμμα:  $H_1^{sing}(P|_{\partial E_{4g}}) = 0$ .

Απόδειξη: Έστω  $\varphi: \pi_1(\partial E_{4g}^m; z_1) \xrightarrow{\cong} H_1^{sing}(\partial E_{4g}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$   
 $\mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$  ο ισομορφισμός οφείδων ο ορισμένος από το θεώρημα 3.7.1 και το πρόσημα 3.7.2, σελ. 202-203.

Επειδή εκ κατασκευής,

$$\varepsilon \simeq (a_1 * b_1 * c_1 * d_1 * \dots * a_g * b_g * c_g * d_g) \in \chi. \{0, 1\} \quad (\text{πρ. λήμμα 4.3.14}),$$

Ισχύει η ισότητα  $\varphi_{\partial E_{4g}}([\varepsilon]) = u + B_1^{\text{sing}}(\partial E_{4g}; \mathbb{Z})$ . Από το μεταθετικό διάγραμμα



λαμβάνουμε

$$H_1^{\text{sing}}(p|_{\partial E_{4g}})(u + B_1^{\text{sing}}(\partial E_{4g}; \mathbb{Z})) = p(u) + B_1^{\text{sing}}(F_g; \mathbb{Z})$$

||

$$H_1^{\text{sing}}(p|_{\partial E_{4g}})(\varphi_{\partial E_{4g}}([\varepsilon])) = \varphi_{F_g}(\pi_1(p|_{\partial E_{4g}})([\varepsilon])) = \varphi_{F_g}([p \circ \varepsilon])$$

$$= \varphi_{F_g}([(p \circ a_1) * (p \circ b_1) * \dots * (p \circ c_g) * (p \circ d_g)]) \quad (1)$$

$$\text{Επειδή } \left\{ \begin{array}{l} (p \circ a_j)(t) = (p \circ b_j)(1-t) \\ (p \circ c_j)(t) = (p \circ d_j)(1-t) \end{array} \right\} \quad \forall t \in I \text{ και } \forall j \in \{1, \dots, g\}$$

(πρ. 1.11.12, σελ. 38)

έχουμε

$$p \circ b_j = \overline{p \circ a_j}, \quad p \circ d_j = \overline{p \circ c_j} \quad (\text{πρ. 1.19.4, σελ. 84})$$

$$\Rightarrow [p \circ b_j] = [p \circ a_j]^{-1}, [p \circ d_j] = [p \circ c_j]^{-1}, \quad \forall j \in \{1, \dots, g\} \quad (2),$$

$$\text{οι (1), (2) δίδουν } p(u) + B_1^{\text{sing}}(F_g; \mathbb{Z}) = \varphi_{F_g}([p \circ a_1] \cdot [p \circ b_1] \cdots [p \circ c_g] \cdot [p \circ d_g])$$

$$= 0_{H_1^{\text{sing}}(F_g; \mathbb{Z})} = B_1^{\text{sing}}(F_g; \mathbb{Z}) \Rightarrow p(u) \in B_1^{\text{sing}}(F_g; \mathbb{Z})$$

$$\xrightarrow{\hspace{10em}} H_1^{\text{sing}}(p|_{\partial E_{4g}}) = 0. \quad \square$$

$$\text{Lin}(\{u + B_1^{\text{sing}}(\partial E_{4g}; \mathbb{Z})\}) = H_1^{\text{sing}}(\partial E_{4g}; \mathbb{Z})$$

4.3.17. Λήμμα: Για  $q \in \mathbb{Z}$  έχουμε:

$$H_q^{\text{sing}}(F_g; \mathbb{Z}) \underset{4.2.9}{\cong} H_q^{\text{CW}}(F_g; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } q \in \{0, 2\}, \\ \mathbb{Z}^{2g}, & \text{όταν } q=1, \\ \{0\}, & \text{όταν } q \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2\}. \end{cases}$$

Απόδειξη: Εκ κατασκευής,  $F_g^{(1)} = p(\partial E_{4g})$ , οπότε

$$H_1^{\text{sing}}(F_g^{(1)}; \mathbb{Z}) = H_1^{\text{sing}}(p(\partial E_{4g}); \mathbb{Z}) = H_1^{\text{sing}}(p|\partial E_{4g})(H_1^{\text{sing}}(\partial E_{4g}; \mathbb{Z})) \underset{4.3.16}{=} \{0\}$$

και η σύνθεση

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & & \{0\} & & \mathbb{Z}^{2g} \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ H_2^{\text{sing}}(F_g^{(2)}, F_g^{(1)}; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\partial_2^{\text{sing}}} & H_1^{\text{sing}}(F_g^{(1)}; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{H_1^{\text{sing}}(j_1)} & H_1^{\text{sing}}(F_g^{(1)}, F_g^{(0)}; \mathbb{Z}) \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & d_2^{\text{CW}} & & \end{array}$$

είναι τετριμμένος ομομορφισμός. Άρα για το αλυσωτό σύμπλοκο  $W_*(\mathbb{X}; \mathbb{Z})$

$$\text{έχουμε } (d_q^{\text{CW}} = 0, \forall q \in \mathbb{Z}) \implies \left[ H_q^{\text{CW}}(F_g; \mathbb{Z}) := H_q(W_*(\mathbb{X}; \mathbb{Z})) \cong W_q(\mathbb{X}; \mathbb{Z}), \right. \\ \left. \text{για κάθε } q \in \mathbb{Z}. \right]$$

□

4.3.18. Θεώρημα: Για κάθε μεταθετικό δακτύλιο (με μοναδιαίο πολλαπλασιαστικό στοιχείο)  $R$  και κάθε  $q \in \mathbb{Z}$  έχουμε

$$H_q^{\text{sing}}(F_g; R) \underset{4.2.9}{\cong} H_q^{\text{CW}}(F_g; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } q \in \{0, 2\}, \\ R^{2g}, & \text{όταν } q=1, \\ \{0\}, & \text{όταν } q \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2\}. \end{cases}$$

Απόδειξη: Επειδή ο  $\mathbb{Z}$  είναι Π.Κ.Ι., η βραχεία ακριβής ακολουθία που εμφανίζεται στο καθολικό θεώρημα συνζευξετών 3.6.3 (σελ. 197, θέτοντας  $\mathbb{Z}$  όπου  $R$  και  $R$  όπου  $M$ ) είναι διασπασμένη, οπότε:

$$H_q^{\text{sing}}(F_g; R) \cong (H_q^{\text{sing}}(F_g; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R) \oplus \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{q-1}^{\text{sing}}(F_g; \mathbb{Z}), R), \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Επειδή η ομάδα  $H_{q-1}^{\text{sing}}(F_g; \mathbb{Z})$  είναι ελεύθερη (και, κατ'επέκταση, ισόπεδος  $\mathbb{Z}$ -μόδιος),  $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{q-1}^{\text{sing}}(F_g; \mathbb{Z}), R) \cong \{0\}, \forall q \in \mathbb{Z}$  (βλ. [ΣοΑ], 4.2.13, σελ. 203).

Αρκεί λοιπόν να εφαρμοσθεί το λήμμα 4.3.17. □

8

Υπολογισμός κυτταρικών μοδίων ομολογίας των (συνεκτικών, κλειστών) μη προσανατολισμένων επιφανειών  $N_g$ ,  $g \geq 2$ .

Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό 1.11.13 (σελ. 39) για την  $N_g$ , παρουσιάζοντας την ως πηλικόχωρο  $E_{2g}/\mathcal{G}$  (με  $p: E_{2g} \rightarrow N_g$  τη φυσική επίριψη) και την κυτταρική διάσπαση  $\mathcal{X}$  της  $N_g (\approx p(E_{2g}) \cup_{p|\partial E_{2g}} E_{2g})$  την ορισθείσα στη σελ. 104. Η  $\mathcal{X}$  αποτελείται από:

- ▶ Ένα 0-κύτταρο:  $p(z_1) (= p(z_2) = \dots = p(z_{2g}))$ .
- ▶  $g$  1-κύτταρα:  $p(\overline{z_{2j-1} z_{2j}}) \setminus p(z_{2j-1})$ ,  $1 \leq j \leq g$ .
- ▶ Ένα 2-κύτταρο:  $N_g \setminus p(\partial E_{2g}) (= p(\dot{E}_{2g}))$ .

Αρχικώς θα υπολογίσουμε τις αβελιανές ομάδες  $H_q^{CW}(N_g; \mathbb{Z}) = H_q(W_*(\mathcal{X}; \mathbb{Z}))$ , για κάθε  $q \in \mathbb{Z}$ . Το  $W_*(\mathcal{X}; \mathbb{Z})$  είναι το αλυσωτό σύμπλοκο:

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \xrightarrow{d_3^{CW}} W_2(\mathcal{X}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{d_2^{CW}} W_1(\mathcal{X}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{d_1^{CW}} W_0(\mathcal{X}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{d_0^{CW}} 0 \rightarrow \dots$$

Προφανώς,  $d_q^{CW} = 0$  για  $q \leq 0$  και για  $q \geq 3$ . Επιπροσθέτως, στη μακρά ακριβή ακολουθία του τοπολογικού χεύχους  $(N_g^{(1)}, N_g^{(0)})$ :

$$\dots \rightarrow H_1^{Sing}(N_g^{(1)}, N_g^{(0)}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_1^{Sing}} H_0^{Sing}(N_g^{(0)}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{H_0^{Sing}(j_0)} H_0^{Sing}(N_g^{(1)}; \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

ο ομομορφισμός  $H_0^{Sing}(j_0)$  είναι ισομορφισμός (κατά το λήμμα 4.3.6, σελ. 251), οπότε  $\partial_1^{Sing} = 0 \xrightarrow[\text{ορσ 4.2.2}]{=} d_1^{CW} = 0$ . Κατά συνέπεια, αρκεί να υπολογισθεί μόνον ο συνοριακός τελεστής  $d_2^{CW}$ . Προς τούτο, όπως και στην περίπτωση εξέτασής των  $F_g$ , ορίζουμε δρόμους  $a_j, b_j: I \rightarrow \partial E_{2g}$ ,  $1 \leq j \leq g$ , ως εξής:  $a_j := \sigma[z_{2j-1}, z_{2j}] \circ \eta^{-1}$ ,  $b_j := \sigma[z_{2j}, z_{2j+1}] \circ \eta^{-1}$ .

● Επειδή  $\partial E_{2g} \approx \mathbb{S}^1$  και  $H_1^{Sing}(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$ , η κλάση ομολογίας του 1-κυκλήματος  $w := \sum_{j=1}^g (\sigma[z_{2j-1}, z_{2j}] + \sigma[z_{2j}, z_{2j+1}])$

καθορίζει έναν γεννήτορα της  $H_1^{\text{sing}}(\partial E_{2g}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ .

- Ορίζοντας τον δρόμο  $\varepsilon: I \rightarrow \partial E_{2g}$  μέσω του (παραλλού) τύπου:

$$\varepsilon(t) := \begin{cases} a_j(2g(t - \frac{z_{j-1}}{2g})), & \text{όταν } t \in [\frac{z_{j-1}}{2g}, \frac{z_j}{2g}], \\ b_j(2g(t - \frac{z_j}{2g})), & \text{όταν } t \in [\frac{z_j}{2g}, \frac{z_{j+1}}{2g}], \\ & 1 \leq j \leq g \end{cases}$$

διαπιστώνουμε (κατ' αναλογία προς το λήμμα 4.3.16) ότι

$$\varphi_{\partial E_{2g}}([\varepsilon]) = w + B_1^{\text{sing}}(\partial E_{2g}; \mathbb{Z}),$$

$$\begin{array}{ccc} \text{όπου } \varphi_{\partial E_{2g}}: \pi_1(\partial E_{2g}; z_1) & \xrightarrow{\cong} & H_1^{\text{sing}}(\partial E_{2g}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \\ \cup & & \cup \\ [x] & \longmapsto & x \circ \gamma + B_1^{\text{sing}}(\partial E_{2g}; \mathbb{Z}) \end{array}$$

ο ισομορφισμός ομάδων ο οριζόμενος στα 3.7.1 και 3.7.2, σελ. 202-203.

Από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\partial E_{2g}; z_1) & \xrightarrow{\varphi_{\partial E_{2g}}} & H_1^{\text{sing}}(\partial E_{2g}; \mathbb{Z}) \\ \pi_1(p|_{\partial E_{2g}}) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow H_1^{\text{sing}}(p|_{\partial E_{2g}}) \\ \pi_1(N_g; p(z_1)) & \xrightarrow{\varphi_{N_g}} & H_1^{\text{sing}}(N_g; \mathbb{Z}) \end{array}$$

λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} H_1^{\text{sing}}(p|_{\partial E_{2g}})(w + B_1^{\text{sing}}(\partial E_{2g}; \mathbb{Z})) &= p(w) + B_1^{\text{sing}}(N_g; \mathbb{Z}) \\ &\parallel \\ H_1^{\text{sing}}(p|_{\partial E_{2g}})(\varphi_{\partial E_{2g}}([\varepsilon])) &= \varphi_{N_g}(\pi_1(p|_{\partial E_{2g}})([\varepsilon])) = \varphi_{N_g}([p \circ \varepsilon]) \\ &= \varphi_{N_g}([p \circ a_1] * [p \circ b_1] * \dots * [p \circ a_g] * [p \circ b_g]) \quad (1) \end{aligned}$$

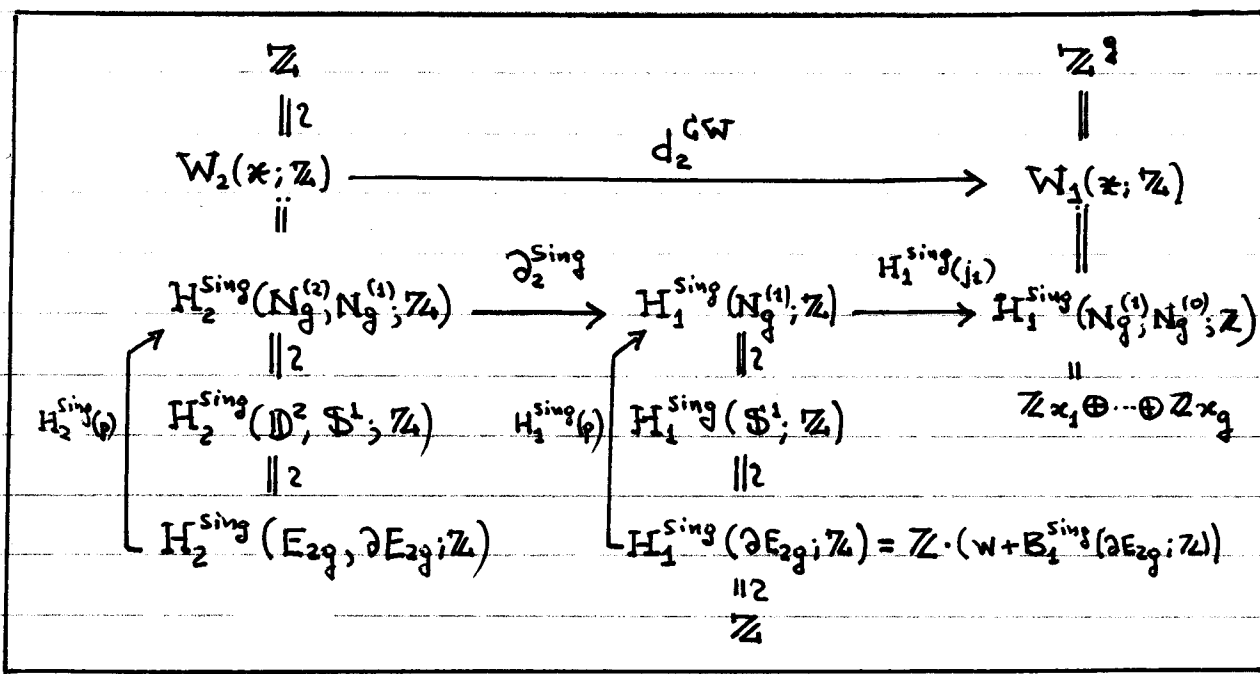
Επειδή  $(p \circ a_j)(t) = (p \circ b_j)$ ,  $\forall t \in I$  και  $\forall j \in \{1, \dots, g\}$  (βλ. 1.11.13, σελ. 39)

έχουμε  $[p \circ a_j] = [p \circ b_j]$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, g\}$  (2), οπότε



οι (1), (2) δίδουν  $p(w) + B_1^{sing}(N_g; \mathbb{Z}) = \varphi_{N_g}([p \circ a_1] \cdot [p \circ b_1] \cdots [p \circ a_g] \cdot [p \circ b_g])$   
 $= \varphi_{N_g} \left( \prod_{j=1}^g [p \circ a_j]^2 \right) = 2 \left( \sum_{j=1}^g p \circ \sigma_{[z_{2j-1}, z_{2j}]} \right) + B_1^{sing}(N_g; \mathbb{Z}).$  (\*)

Εξάλλου, εύκολα δείχνεται μέσω της παρατήρησης 4.2.11, σελ. 245, ότι το σύνολο  $\{x_j \mid 1 \leq j \leq g\}$ , όπου  $x_j := p \circ \sigma_{[z_{2j-1}, z_{2j}]} + B_1^{sing}(N_g; \mathbb{Z})$  αποτελεί βάση του  $W_1(x; \mathbb{Z}) := H_1(N_g^{(1)}, N_g^{(0)}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^g$ .  $\forall j \in \{1, \dots, g\}$ ,



Έστω  $\xi$  ο γεννήτορας της  $W_2(x; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ , για τον οποίο ισχύει

$\partial_2^{sing}(\xi) = H_1^{sing}(p|_{\partial E_{2g}})(w + B_1^{sing}(\partial E_{2g}; \mathbb{Z})).$  Προφανώς,

$d_2^{GW}(\xi) = H_1^{sing}(j_1)(\partial_2^{sing}(\xi)) = 2(x_1 + x_2 + \dots + x_g).$  (\*)

Θέτοντας  $y_1 := x_1, \dots, y_{g-1} := x_{g-1}, y_g := x_1 + x_2 + \dots + x_g,$

σχηματίζεται μια νέα βάση  $\{y_1, y_2, \dots, y_g\}$  του  $W_1(x; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^g$

με  $d_2^{GW}(\xi) = 2y_g.$

4.3.19. Λήμμα: Για  $q \in \mathbb{Z}$  έχουμε

$$H_q^{\text{sing}}(N_g; \mathbb{Z}) \underset{4.2.9}{\cong} H_q^{\text{CW}}(N_g; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } q=0, \\ \mathbb{Z}^{q-1} \oplus \mathbb{Z}_2, & \text{όταν } q=1, \\ \{0\}, & \text{όταν } q \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}. \end{cases}$$

Απόδειξη: Προφανώς,  $H_q^{\text{CW}}(N_g; \mathbb{Z}) \cong \{0\}$  για  $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2\}$ .

Εξάλλου,  $H_0^{\text{CW}}(N_g; \mathbb{Z}) := \text{Ker}(d_0^{\text{CW}}) / \text{Im}(d_1^{\text{CW}}) \cong \mathbb{Z} / \{0\} \cong \mathbb{Z}$ .

Έστω τώρα τυχόν στοιχείο  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_g x_g \in W_1(x; \mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=1}^g \mathbb{Z} x_i$

(όπου  $\lambda_1, \dots, \lambda_g \in \mathbb{Z}$ ). Προφανώς,

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_g x_g = (\lambda_1 - \lambda_g) y_1 + \dots + (\lambda_{g-1} - \lambda_g) y_{g-1} + \lambda_g y_g$$

και

$$(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_g x_g) \in \text{Im}(d_2^{\text{CW}}) \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{g-1} = \lambda_g \text{ και } \lambda_g \equiv 0 \pmod{2},$$

οπότε  $H_1^{\text{CW}}(N_g; \mathbb{Z}) := \text{Ker}(d_1^{\text{CW}}) / \text{Im}(d_2^{\text{CW}}) \cong \mathbb{Z}^g / \text{Im}(d_2^{\text{CW}}) \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2$ ,

με των  $\mathbb{Z}^{g-1}$  παραχόμενα από τα  $y_1, \dots, y_{g-1}$  και των  $\mathbb{Z}_2$  παραχόμενα από

το  $y_g$ . Τέλος,  $H_2^{\text{CW}}(N_g; \mathbb{Z}) := \text{Ker}(d_2^{\text{CW}}) / \text{Im}(d_3^{\text{CW}}) \cong \{0\} / \{0\} \cong \{0\}$ .  $\square$

Εάν  $\theta: \mathbb{Z}^n \ni \mu_1 y_1 + \dots + \mu_g y_g \mapsto (\mu_1, \dots, \mu_{g-1}, \mu_g) \in \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2$ , τότε  $\theta$  επί και  $\text{Ker}(\theta) = \text{Im}(d_2^{\text{CW}})$

Και? αναλογίαν προς το Θεώρημα 4.3.18 αποδεικνύεται (με τη βοήθεια του κλαδικού θεωρήματος συντελεστών) το ακόλουθο:

4.3.20. Θεώρημα: Για κάθε μεταθετικό δακτύλιο (με μοναδιαίο πολλαπλασιαστικό στοιχείο)  $R$  και κάθε  $q \in \mathbb{Z}$  έχουμε:

$$H_q^{\text{sing}}(N_g; R) \underset{4.2.9}{\cong} H_q^{\text{CW}}(N_g; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } q=0, \\ R^{q-1} \oplus (R/2R), & \text{όταν } q=1, \\ t_2(R), & \text{όταν } q=2, \\ \{0\}, & \text{όταν } q \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2\}, \end{cases}$$

όπου  $2R := \{2r \mid r \in R\}$ ,  $t_2(R) := \{r \in R \mid 2r = 0_R\}$ .

4.3.21. Παρατήρηση: Από τους υπολογισμούς της παραύρας ενότητας

διαπιστώνουμε ότι οι επιφάνειες  $\begin{cases} F_0 := S^2, F_1, F_2, \dots \\ N_1 := \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, N_2, N_3, \dots \end{cases}$

είναι ανά ζεύγη μη ομοτοπικώς ισοδύναμες (και, ως εκ τούτου, μη ομοιομορφικές), πρβ. Θεώρημα 1.11.15, σελ. 41.  $\square$

## § 4.4 Χαρακτηριστική Euler και αριθμός Lefschetz

Εάν ο  $R$  είναι μια π.κ.ι. (=περιοχή κυρίων ιδεωδών) και ο  $M$  ένας πεπερασμένος παραγόμενος  $R$ -μόδιος, τότε  $M = \text{fr}(M) \oplus \text{tors}(M)$ , όπου  $\text{tors}(M) := \{m \in M \mid \exists r \in R \setminus \{0_R\} : rm = 0_M\}$  ο υπομόδιος σπρέψως του  $M$  και  $\text{fr}(M) \cong M/\text{tors}(M)$  ένας ελεύθερος  $R$ -μόδιος (βλ. [ΣΟΑ] Πρόταση 1.7.2, σελ. 59). Ως βαθμίδα  $\text{rank}_R(M)$  ενός τέτοιου  $M$  ορίζουμε τη βαθμίδα  $\text{rank}_R(\text{fr}(M))$  του  $\text{fr}(M)$  (ήτοι τον (κοινό) πηληθικό αριθμό (όλων) των βάσεων του  $\text{fr}(M)$ ).

4.4.1. Λήμμα: Έστω  $R$  μια π.κ.ι. έστω  $M$  ένας πεπερασμένος παραγόμενος  $R$ -μόδιος. Εάν  $M = \sum_{j=1}^k Rm_j$ , τότε υφίσταται μια βραχεία ακριβής ακολουθία της μορφής

$$0 \rightarrow R^l \rightarrow R^k \rightarrow M \rightarrow 0$$

(που καλείται, ιδιαίτέρως, παράσταση του  $M$ ).

Απόδειξη: Έστω  $\{e_j \mid 1 \leq j \leq k\}$ ,  $e_j := (0_R, \dots, 1_R, 0_R, \dots, 0_R)$  η συνήθης βάση του  $R^k$ . Έστω  $f: R^k \rightarrow M$  ο επιμορφισμός  $R$ -μοδίων ο ορισμένος επί των στοιχείων της ανωτέρω βάσεως ως εξής:  $f(e_j) := m_j$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, k\}$  (και επί ολόκληρου του  $R^k$  μέσω γραμμικής επέκτασης, βλ. [ΣΟΑ], Θεώρημα 1.6.14, σελ. 45).

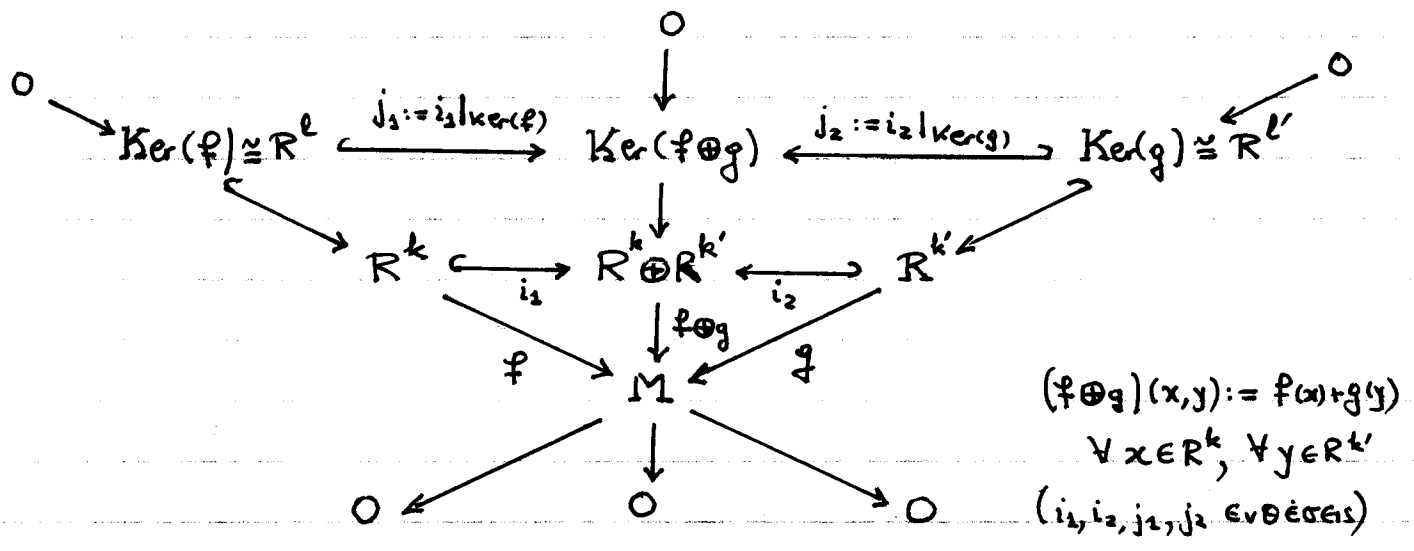
Ο πυρήνας  $\text{Ker}(f)$ , ως υπομόδιος του ελεύθερου, πεπερασμένου παραγόμενου  $R$ -μοδίου  $R^k$  είναι ελεύθερος, πεπερασμένος παραγόμενος  $R$ -μόδιος και, ως εκ τούτου,  $\text{Ker}(f) \cong R^l$  για κάποιο  $l \in \mathbb{N}_0$  με  $l \leq k$ . (βλ. [ΣΟΑ], Πρόταση 1.6.35, σελ. 57 και ορο. 1.6.6, σελ. 41). Η

$0 \rightarrow R^l \xrightarrow{i} R^k \xrightarrow{f} M \rightarrow 0$ , όπου  $i$  η φυσική ένθεση, είναι η ζητούμενη βραχεία ακριβής ακολουθία.  $\square$

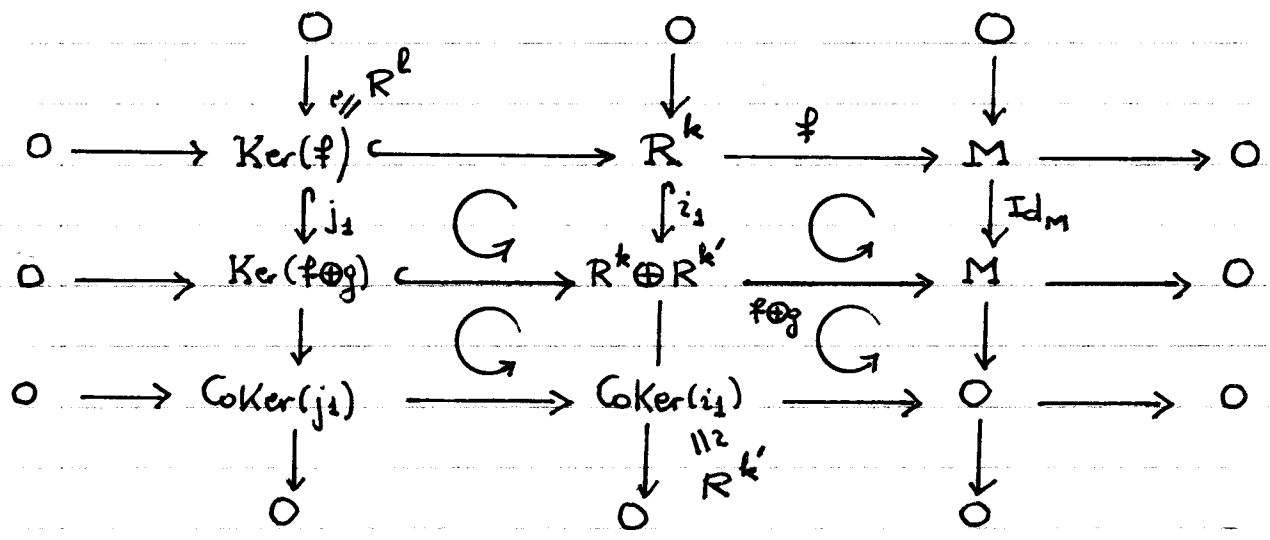
4.4.2. Λήμμα. Έστω  $R$  μια π.κ.ι. και έστω  $M$  ένας πεπερασμένος παραγόμενος  $R$ -μόδιος. Τότε η διαφορά  $k-l$  σε οιαδήποτε παράσταση  $0 \rightarrow R^l \rightarrow R^k \rightarrow M \rightarrow 0$  του  $M$  είναι σταθερή και μάλιστα ισχύει  $k-l = \text{rank}_R(M)$ .

Απόδειξη: • Βήμα 1<sup>ο</sup>: Ας υποθέσουμε ότι οι  
 $0 \rightarrow R^l \xrightarrow{c} R^k \xrightarrow{f} M \rightarrow 0$   
 $0 \rightarrow R^{l'} \xrightarrow{c'} R^{k'} \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$

είναι δυο τυχαίες παραστάσεις του  $M$ . Τότε υφίσταται προφανώς και μια τρίτη παράσταση του  $M$ :

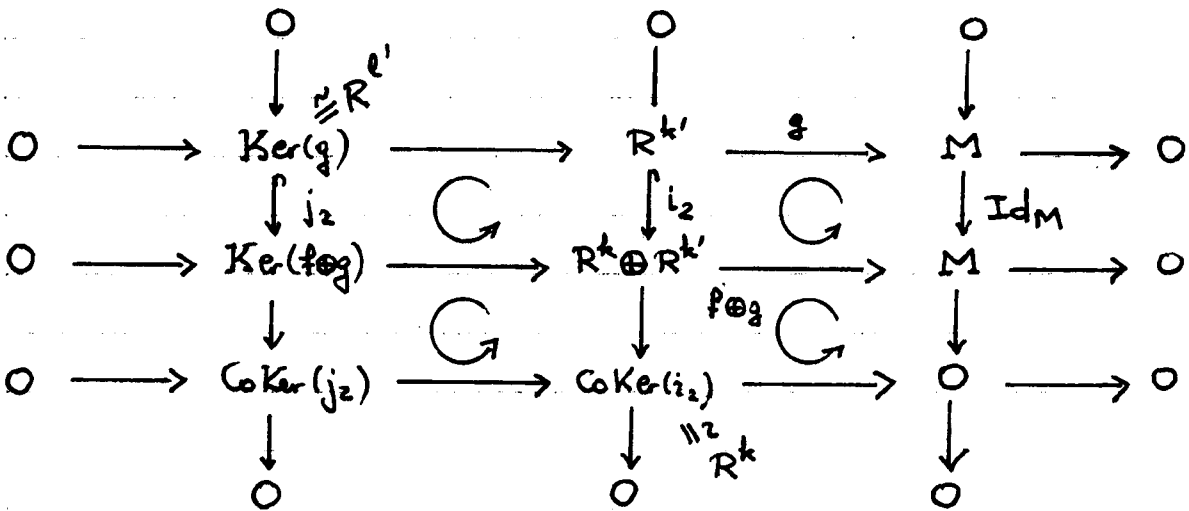


Θεωρούμε το μεταθετικό διάγραμμα (με τις τρεις στήλες των ακριβείων):



Επειδή οι δύο άνω γραμμές του είναι ακριβείς, και η τρίτη του γραμμή είναι ακριβής (κατά το λήμμα των 3x3, βλ. [ΣΟΑ], §9 φωνάδιω ακρίβειω, άσκηση 19(ii)). Άρα  $Coker(j_1) \cong Coker(i_1) \cong R^{k'}$ . Από την πρώτη στήλη (και την πρόταση 2.1.15 των [ΣΟΑ], σελ. 79) έπεται ότι  $Ker(f \oplus g) \cong Ker(f) \oplus Coker(j_1) \cong R^l \oplus R^{k'} \cong R^{l+k'}$ .

Καθ' αναλογία, από το μεταθετικό διάγραμμα (με ακριβείς σειρές):



Λαμβάνουμε  $\text{Ker}(f \circ g) \cong \text{Ker}(g) \oplus \text{Coker}(j_2) \cong R^{l'} \oplus R^k \cong R^{l'+k}$ .

Κατά συνέπεια,  $l'+k = l+k'$  (βλ. [ΣΟΑ], Θεώρημα 1.6.31, σελ. 55), απ' όπου έπεται ότι  $k-l = k'-l'$ .

• Βήμα 2<sup>ο</sup>: Έστω  $0 \xrightarrow{\cong} R^l \xrightarrow{i} R^k \xrightarrow{f} M \rightarrow 0$  τυχόνια παράσταση του  $M$ . Έστω  $\{e_1, \dots, e_l\}$  η "μοναδιαία" βάση του  $R^l$  και έστω  $\{e'_1, \dots, e'_k\}$  η αντίστοιχη βάση του  $R^k$ . Τότε  $\exists$  ΑΕΜατ  $(R)$  με  $i(e_t) = \sum_{s=1}^k a_{st} e'_s$ ,  $\forall t \in \{1, \dots, l\}$ .

Υστερα από την εκτέλεση στερεωμένου παύθους στοιχειωδών μετασχηματισμών του  $A$  είναι δυνατός ο προσδιορισμός μιας βάσεως  $\{\xi_1, \dots, \xi_l\}$  του  $R^l$  και μιας βάσεως  $\{\xi'_1, \dots, \xi'_k\}$  του  $R^k$  με  $i(\xi_t) = \begin{cases} d_t \xi'_t, & \text{για } 1 \leq t \leq l, \\ 0_R, & \text{για } l+1 \leq t \leq k, \end{cases}$  όπου  $d_t \in R \setminus R^\times$ ,  $\forall t \in \{1, \dots, l\}$  και  $d_j | d_{j+1} \forall j \in \{1, \dots, l-1\}$ .

οπότε

$$M \cong \text{Coker}(i) = R^k / i(R^l) \cong \bigoplus_{t=1}^l (R/d_t R) \oplus R^{k-l}$$

(βλ. T.W. Hungerford: "Algebra", GTM, Vol. 73, Springer-Verlag, 1974, prop. VII, 2.11, σελ. 339). Από το Θεώρημα 1.7.14 (iv) των [ΣΟΑ], σελ. 57,

έπεται ότι  $\text{tor}(M) \cong \bigoplus_{t=1}^l (R/d_t R)$ ,  $\text{fr}(M) \cong R^{k-l} \Rightarrow \text{rank}(M) = k-l$ .  $\square$

4.4.3. Λήμμα. Έστω  $R$  μια π.κ.ι. Εάν  $n$   
 $0 \rightarrow M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-2} \rightarrow \dots \xrightarrow{f_2} M_1 \xrightarrow{f_1} M_0 \rightarrow 0, n \geq 0,$   
 είναι μια ακριβής ακολουθία πεπερασμένης παραγομένων  $R$ -μωδίων, τότε  

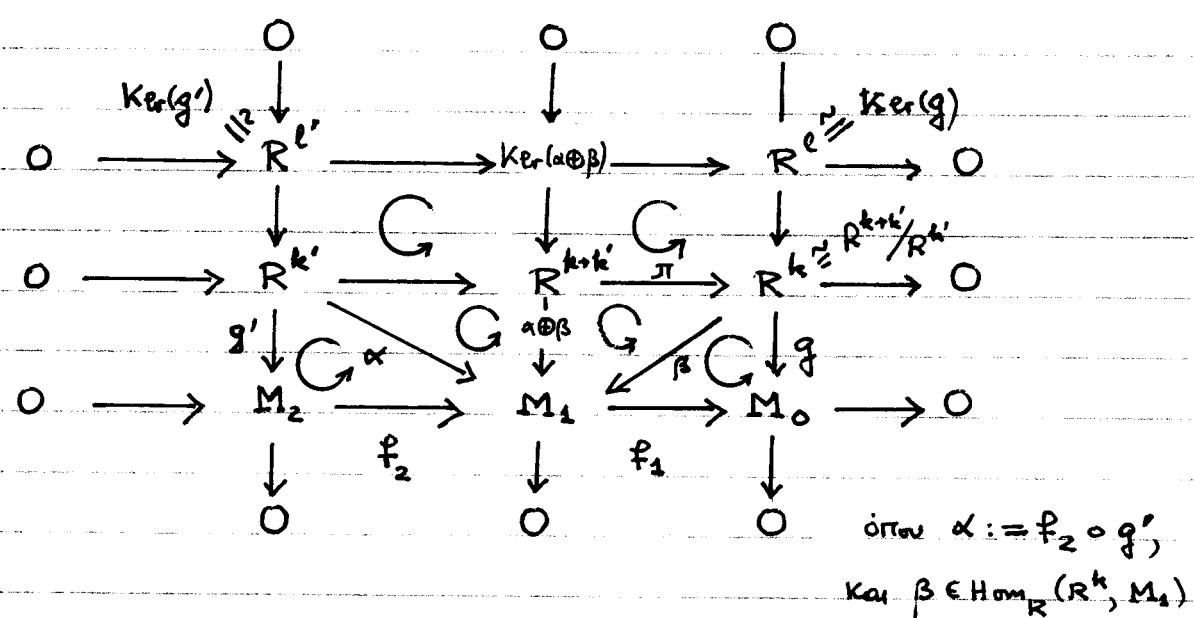
$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \text{rank}_R(M_j) = 0.$$

Απόδειξη: Για  $n \in \{0, 1\}$  αυτό είναι προφανές. Για  $n=2$  θεωρούμε

$$\begin{aligned} \text{παραστάσεις} \quad & 0 \rightarrow R^l \rightarrow R^k \xrightarrow{g} M_0 \rightarrow 0 \\ & 0 \rightarrow R^{l'} \rightarrow R^{k'} \xrightarrow{g'} M_2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

των  $M_0$  και  $M_2$ , αντιστοίχως. Τότε υφίσταται μια παράσταση του  $M_1$  της μορφής:  
 $0 \rightarrow R^{l+l'} \rightarrow R^{k+k'} \rightarrow M_1 \rightarrow 0.$

Πράγματι: ας θεωρήσουμε το μεταδετικό διάγραμμα:



ο μονομορφικός ορισμένος ομομορφισμός με  $\pi \circ \beta = \alpha \circ \beta$  (βλ. [ΣΟΑ], πρόταση 1.4.6, σελ. 18). Αυτό έχει τις τρεις του στήλες ακριβείς.

Επειδή οι δύο κάτω γραμμές του είναι ακριβείς, και η πρώτη του γραμμή είναι ωσαύτως ακριβής (βλ. [ΣΟΑ], 4<sup>ο</sup> φυλλάδιο αδεικίων, άσκηση 19, (ii)). Εξ άλλου, επειδή ο  $\text{Ker}(g) \cong R^l$  είναι ελεύθερος  $R$ -μωδός, έχουμε  $\text{Ker}(\alpha + \beta) \cong R^{l'} \oplus R^l \cong R^{l+l'}$  (βλ. [ΣΟΑ], πρόταση 2.1.15, σελ. 79). Και το λήμμα 4.4.2,

$$\begin{aligned} \text{rank}_R(M_1) &= (k+k') - (l+l') = (k-l) + (k'-l') \\ &= \text{rank}_R(M_0) + \text{rank}_R(M_2), \end{aligned}$$

οπότε ο ισχυρισμός είναι αληθής και για  $n=2$ .

Για  $n \geq 3$  εργαζόμαστε επαγωγικά: Διασπώμε την αρχική ακριβή ακολουθία σε δύο ακριβείς ακολουθίες

$$0 \rightarrow M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-2} \rightarrow \dots \xrightarrow{f_3} M_2 \xrightarrow{f_2} \text{Im}(f_2) \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{c} 0 \\ \downarrow = \text{Ker}(f_3) \\ \text{Im}(f_2) \\ \downarrow \\ M_1 \\ \downarrow f_1 \\ M_0 \\ \downarrow \\ 0 \end{array}$$

και εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση

για καθένα ΕΦ αυτών λαμβάνουμε:

$$\sum_{j=2}^n (-1)^j \text{rank}_R(M_j) - \text{rank}_R(\text{Im}(f_2)) = 0 \quad (1)$$

$$\text{και } \text{rank}_R(M_0) - \text{rank}_R(M_1) + \text{rank}_R(\text{Im}(f_2)) = 0 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \sum_{j=0}^n (-1)^j \text{rank}_R(M_j) = 0. \quad \square$$

4.4.4. Ορισμός. Έστω  $R$  μια Π.Κ.Ι και έστω  $C_\bullet$  ένα αλυσωτό σύμπλοκο πεπερασμένων παραχομένων  $R$ -μοδίων. Εάν υπάρχει ένας μη αρνητικός ακέραιος αριθμός  $k$ , τέτοιος ώστε να ισχύει  $C_q \cong \{0\}$  για κάθε  $q \in \mathbb{Z}$  με  $|q| \geq k$ , τότε το  $C_\bullet$  λέγεται πεπερασμένο αλυσωτό σύμπλοκο. Επιπροσθέτως, ορίζεται καθώς το εναλλάξον άθροισμα

$$\chi_R(C_\bullet) := \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q \text{rank}_R(C_q) \in \mathbb{Z}$$

το οποίο καλείται χαρακτηριστική Euler του  $C_\bullet$  (ως προς την  $R$ ).

4.4.5. Λήμμα. Έστω  $R$  μια Π.Κ.Ι και έστω  $C_\bullet$  ένα πεπερασμένο αλυσωτό σύμπλοκο  $R$ -μοδίων (υπό την έννοια του ορισ. 4.4.4, δηλ. έστω ότι  $\exists k \in \mathbb{N}_0$ , ώστε να ισχύει  $C_q \cong \{0\}$  για κάθε  $q \in \mathbb{Z}$  με  $|q| \geq k$ ). Τότε κάθε μόδιος ομολογίας  $H_q(C_\bullet)$  του  $C_\bullet$  είναι πεπερασμένος παραχομένος,  $H_q(C_\bullet) \cong \{0\}$  για όλους τους  $q \in \mathbb{Z}$  με  $|q| \geq k$  και

$$\chi_R(C_\bullet) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q \text{rank}_R(H_q(C_\bullet)).$$

Απόδειξη: Επειδή ο  $R$  είναι Π.Κ.Ι., είναι και νατεριανός δακτύλιος. Άρα κάθε υπομόδιος ομοιόμορφα πεπερασμένου παραγωγμένου  $R$ -μόδιου είναι αγραμμού πεπερασμένου παραγωγμένου. Ιδιαίτερως, οι  $R$ -μόδοι  $H_q(\mathbf{C}_\bullet)$  είναι πεπερασμένου παραγωγμένου,  $\forall q \in \mathbb{Z}$ . Επίσης, όταν  $G_q \cong \{0\}$ , τότε  $H_q(\mathbf{C}_\bullet) \cong \{0\}$ . Αρκεί λοιπόν να δείξουμε την ισότητα για τη χαρακτηριστική Euler  $\chi_R(\mathbf{C}_\bullet)$ . (Δίχως βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $G_q \cong \{0\}$ , για όλους τους  $q < 0$ , για απλώς υπάρχει η δυνατότητα μετατοπίσεως των τιμών των δεικτών του θεωρουμένου συμπλόκου έως ότου αυτές να καταστούν θετικές.) Για κάθε  $q \in \mathbb{Z}$  έχουμε δυο βραχείες αλυσίδες ακολουθίες:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \longrightarrow Z_q(\mathbf{C}_\bullet) \longrightarrow G_q \longrightarrow B_{q-1}(\mathbf{C}_\bullet) \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow B_q(\mathbf{C}_\bullet) \longrightarrow Z_q(\mathbf{C}_\bullet) \longrightarrow H_q(\mathbf{C}_\bullet) \longrightarrow 0 \end{array} \right\}$$

Συνεπώς,  $\chi_R(\mathbf{C}_\bullet) := \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q \text{rank}_R(G_q)$

$$\stackrel{4.4.3}{=} \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q (\text{rank}_R(Z_q(\mathbf{C}_\bullet)) + \text{rank}_R(B_{q-1}(\mathbf{C}_\bullet)))$$

$$\stackrel{4.4.3}{=} \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q (\text{rank}_R(H_q(\mathbf{C}_\bullet)) + \text{rank}_R(B_q(\mathbf{C}_\bullet)) + \text{rank}_R(B_{q-1}(\mathbf{C}_\bullet)))$$

$$= \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q \text{rank}_R(H_q(\mathbf{C}_\bullet)). \quad \square$$

4.4.6. Ορισμός. Έστω  $R$  μια Π.Κ.Ι και έστω  $X$  ένας τοπολογικός χώρος, τέτοιος ώστε να ισχύει  $\text{rank}_R(H_q^{\text{sing}}(X; R)) < \infty$ ,  $\forall q \in \mathbb{N}_0$ . Τότε ο  $b_q(X; R) := \text{rank}_R(H_q^{\text{sing}}(X; R))$  καλείται  $q$ -οστός αριθμός Betti του  $X$  ως προς την  $R$ . Επιπροσθέτως, όταν το εναλλάξιμο άθροισμα αυτών των αριθμών (για κάθε  $q \in \mathbb{N}$ ) είναι πεπερασμένο, τότε ορίζεται η λεγόμενη χαρακτηριστική Euler του  $X$  ως προς την  $R$ :

$$\chi(X; R) := \sum_{q \in \mathbb{N}_0} (-1)^q b_q(X; R) \in \mathbb{Z}.$$



(Όταν  $R = \mathbb{Z}$ , τότε γράφουμε  $b_q(X)$  αντί του  $b_q(X; \mathbb{Z})$  και  $\chi(X)$  αντί του  $\chi(X; \mathbb{Z})$  και ομιλούμε για συνήθεις αριθμούς Betti και συνήθη χαρακτηριστική Euler του  $X$ , αντιστοίχως.)

4.4.7. Παράδειγμα. Για κάθε πεπερασμένο CW-χώρο  $(X, \mathcal{X})$  (υπό την έννοια του αρθ. 1.21.3, σελ. 101) ορίζονται τότε οι αριθμοί Betti  $b_q(X; R)$  όσον και η χαρακτηριστική Euler  $\chi(X; R)$  (βλ. 4.2.1, 4.2.2, 4.2.6 και 4.2.9) για οιαδήποτε π.κ.ι.  $R$ . Επιπροσθέτως, η  $\chi(X; R)$  είναι ανεξάρτητη της  $R$  όπως δείχνει το ακόλουθο θεώρημα:

4.4.8. Θεώρημα. Έστω  $(X, \mathcal{X})$  ένας πεπερασμένος CW-χώρος. Τότε για οιαδήποτε π.κ.ι.  $R$  έχουμε

$$\chi(X; R) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q \# \{e \in \mathcal{X} \mid \dim(e) = q\}$$

Απόδειξη: Προφανώς  $\chi(X; R) := \sum_{q \geq 0} (-1)^q \text{rank}_R(H_q^{\text{sing}}(X; R))$

$$\stackrel{\substack{4.2.9 \\ \text{σελ. 242}}}{=} \sum_{q \geq 0} (-1)^q \text{rank}_R(H_q^{\text{CW}}(X; R)) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q \text{rank}_R(H_q(W_0(\mathcal{X}; R)))$$

$$\stackrel{\substack{4.2.2, \text{σελ. 237} \\ (W_0(\mathcal{X}; R) \text{ πεπ. κλ. συμπ.})}}{=} \sum_{q \geq 0} (-1)^q \text{rank}_R(W_q(\mathcal{X}; R)) \quad (\text{βάσει του λήμματος 4.4.5})$$

$$\stackrel{\substack{4.2.1, \text{σελ. 236} \\ 4.2.2, \text{σελ. 237}}}{=} \sum_{q \geq 0} (-1)^q \text{rank}_R \left( R^{\chi_R(W_0(\mathcal{X}; R))(\{e \in \mathcal{X} \mid \dim(e) = q\})} \right)$$

$$= \sum_{q \geq 0} (-1)^q \# \{e \in \mathcal{X} \mid \dim(e) = q\}. \text{ Αυτό το εναλλακτικόν}$$

άθροισμα διαθέτει προφανώς πεπερασμένο πλήθος προσθετέου  $((X, \mathcal{X}) \text{ πεπερασμένος CW-χώρος} \iff \#(\mathcal{X}) < \infty)$ .  $\square$

4.4.9. Παράδειγμα: Ας υπολογίσουμε τους αριθμούς Betti  $b_q(X)$  και τη χαρακτηριστική Euler  $\chi(X)$  για όλους τους πεπερασμένους CW-χώρους  $X$  που συναντήσαμε στις ενότητες 1.21 και 4.3.

274

(i)  $X = \mathbb{S}^n$        $b_q(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } q \in \{0, n\} \\ 0, & \text{εν εναντία περίπτωσης} \end{cases}$

$\implies \chi(\mathbb{S}^n) = 1 + (-1)^n, \text{ όταν } n \geq 1,$

ενώ για  $n=0$        $b_q(\mathbb{S}^0) = \begin{cases} 2, & \text{όταν } q=0 \\ 0, & \text{όταν } q \neq 0 \end{cases} \implies \chi(\mathbb{S}^0) = 2.$

Εν κατακλείδι,

$$\chi(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} 2, & \text{όταν } 0 \leq n \text{ είναι άρτιος,} \\ 0, & \text{όταν } 0 \leq n \text{ είναι περιττός,} \end{cases} \quad \forall n \geq 0$$

(ii)  $X = \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n, \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}.$

$b_q(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n) = \begin{cases} 1, & q=0, \\ 1, & q=n = \text{περιττός,} \\ 0, & \text{εν εναντία περίπτωσης,} \end{cases}$

$b_q(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } q \in \{0, 2, \dots, 2n\}, \\ 0, & \text{εν εναντία περίπτωσης,} \end{cases}$

$b_q(\mathbb{P}_{\mathbb{H}}^n) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } q \in \{0, 4, 8, \dots, 4n\}, \\ 0, & \text{εν εναντία περίπτωσης,} \end{cases}$

$\implies \chi(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } 0 \leq n \text{ είναι άρτιος,} \\ 0, & \text{όταν } 0 \leq n \text{ είναι περιττός,} \end{cases}, \quad \chi(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n) = \chi(\mathbb{P}_{\mathbb{H}}^n) = n+1$

(iii)  $X = \mathbb{L}_{2n-1}(p; q_1, \dots, q_n).$        $b_q(\mathbb{L}_{2n-1}(p; q_1, \dots, q_n)) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } q \in \{0, 2n-1\}, \\ 0, & \text{εν εναντία περίπτωσης,} \end{cases}$

$\implies \chi(\mathbb{L}_{2n-1}(p; q_1, \dots, q_n)) = 0.$

(iv)  $X = F_g, g \geq 1.$        $b_q(F_g) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } q \in \{0, 2\}, \\ 2g, & \text{όταν } q=1, \\ 0, & \text{όταν } q \geq 3, \end{cases}$

$\implies \chi(F_g) = 2 - 2g.$

(v)  $X = N_g, g \geq 2.$        $b_q(N_g) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } q=0, \\ g-1, & \text{όταν } q=1, \\ 0, & \text{όταν } q \geq 2, \end{cases}$

$\implies \chi(N_g) = 2 - g.$

4.4.10. Παρατήρηση: Όταν δυο χώροι έχουν διαφορετικές χαρακτηριστικές Euler, τότε είναι κατ' ανάγκην ομοτοπικά μη ισοδύναμοι (και κατ' επέκταση μη ομοιομορφικοί). Ως εκ τούτου, η χαρακτηριστική Euler αποτελεί μια τοπολογική αναλλοίωτο, μέσω της οποίας κωδείς μπορεί να κάνει μια πρώτη, αδρή διάκριση μεταξύ ορισμένων τοπολογικών χώρων (όπως π.χ. μεταξύ δυο στεπεραβμένων CW-χώρων).

Επί παραδείγματι, εάν  $g, g' \in \mathbb{N}$  και  $g \neq g'$ , τότε

$$\chi(F_g) = 2 - 2g \neq 2 - 2g' = \chi(F_{g'}) \implies F_g \not\cong F_{g'}.$$

Κατ' αναλογία, εάν  $g, g' \in \mathbb{N}$ ,  $g, g' \geq 2$  και  $g \neq g'$ , τότε

$$\chi(N_g) = 2 - g \neq 2 - g' = \chi(N_{g'}) \implies N_g \not\cong N_{g'}.$$

Ποτέ, για  $g \in \mathbb{N}$ ,  $g \geq 2$ , έχουμε  $\chi(N_{2g}) = 2 - 2g = \chi(F_g)$ , παρότι  $N_{2g} \not\cong F_g$  (πρβλ. παρατήρηση 4.3.21, σελ. 266).

Για την απόδειξη τού ότι  $N_{2g} \not\cong F_g$  είμαστε υποχρεωμένοι να καταφύγουμε π.χ. στη σύγκριση των πρώτων αριθμών

Betti:  $b_1(N_{2g}) = 2g - 1 \neq 2g = b_1(F_g)$ .

Κατ' αναλογία,  $\chi(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n) = n + 1 = \chi(\mathbb{P}_{\mathbb{H}}^n)$ , αλλά  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \not\cong \mathbb{P}_{\mathbb{H}}^n$ .

4.4.11. Παρατήρηση: Εάν ο  $X$  είναι ένα τοπολογικό πολύεδρο, δηλ.  $|K| \xrightarrow{\cong} X$  όπου  $K$  ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα (βλ. ορσ. 1.20.20, σελ. 93), τότε ο  $X$  φέρει τη δομή ενός στεπεραβμένου CW-χώρου (βλ. 1.21.5 (ii), σελ. 101-102) με την οικογένεια  $\mathcal{X} = \{h(\sigma) \mid \sigma \in K\}$  ως κυτταρική διάσπασή του. Κατά συνέπεια, το θεώρημα 4.4.8 μας παρέχει τη χαρακτηριστική Euler τού  $X$ :

$$\chi(|K|) = \chi(X) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q \# \{ \sigma \in K \mid \dim(\sigma) = q \}.$$

Όταν  $X \cong \mathbb{D}^2$ , τότε ο ανωτέρω τύπος μας δίνει το περιώνυμο "θεώρημα τού Euler περί πολυέδρων":

4.4.12 Θεώρημα Ευκλείδη: Έστω  $X$  ένας τοπολογικός χώρος ομοιομορφικός της σφαίρας  $\mathbb{S}^2$  και έστω  $(K, h)$  ένας τριγωνισμός του. Τότε

$$\chi(X) = \chi(|K|) = \kappa - \alpha + \varepsilon = 2,$$

όπου  $\kappa$  ο αριθμός των κορυφών του (0-μονοπλάκων),  $\alpha$  ο αριθμός των ακμών του (1-μονοπλάκων) και  $\varepsilon$  ο αριθμός των εδρών του (2-μονοπλάκων). [Παλαιός θρησκευτικός μνημονικός κανόνας: "Κωνσταντίνος και Ελένη, άχιοι και οι δύο,"  $\kappa + \varepsilon = \alpha + 2$ .]

Απόδειξη: Αρκεί να αποζητηθούν τα δύο μέλη της ισότητας της αναφερομένης στην παρατήρηση 4.4.11, θέτοντας στο δεξιό μέλος  $\chi(X) = 2$  (βλ. 4.4.9 (i), σελ. 274).  $\square$

4.4.13. Ορισμός. Έστω  $X$  ένας τοπολογικός χώρος ομοιομορφικός της σφαίρας  $\mathbb{S}^2$  και έστω  $(K, h)$  ένας τριγωνισμός του. Ο  $|K|$  (αλλά και ο ίδιος  $\sigma X$ ) καλείται τοπολογικώς κανονικό πολύεδρο όταν έχει τις εξής ιδιότητες:

- (i) Όλες οι έδρες του διαθέτουν το ίδιο πλήθος ακμών
- (ii) Από κάθε κορυφή του διέρχεται το ίδιο πλήθος εδρών (και, ως εκ τούτου, και το ίδιο πλήθος ακμών).

4.4.14. Θεώρημα: Τα τοπολογικώς κανονικά πολύεδρα με πλήθος κορυφών  $\kappa$ , με πλήθος ακμών  $\alpha$  και με πλήθος εδρών  $\varepsilon$ , υποχρεούνται να ανήκουν στην κλάση των τοπολογικών πολυέδρων με τα εξής  $\kappa$ ,  $\alpha$  και  $\varepsilon$ :

$\kappa$	4	6	8	12	20
$\alpha$	6	12	12	30	30
$\varepsilon$	4	8	6	20	12

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω  $|K|$  ένα τοπολογικός κανονικό πολύεδρο. Κατά το θεώρημα 4.4.12 έχουμε

$$\kappa + \varepsilon = \alpha + 2. \quad (1)$$

Υποθέτουμε ότι  $n$  είναι ο αριθμός των ακμών καθεμιάς έδρας του  $|K|$  και ότι  $m$  είναι το πλήθος των εδρών του  $|K|$  που διέρχονται από καθεμιά κορυφή του. Επειδή κάθε ακμή περιέχεται σε ακριβώς δύο έδρες, έχουμε

$$n\varepsilon = 2\alpha \quad (2)$$

Εξάλλου, αφού κάθε ακμή περιέχει ακριβώς δύο κορυφές, ισχύει και η ισότητα

$$m\kappa = 2\alpha \quad (3)$$

Επομένως, οι (1), (2) και (3) μάς δίνουν τη σχέση

$$2 = \kappa - \alpha + \varepsilon = \frac{2\alpha}{m} - \alpha + \frac{2\alpha}{n} = \alpha \left( \frac{2}{m} - 1 + \frac{2}{n} \right) \implies \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \quad (4)$$

Στη συνέχεια θα προβούμε σε διαχωρισμό περιπτώσεων, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις προφανείς περιοριστικές συνθήκες

$$\alpha \geq 3, \quad n \geq 3, \quad m \geq 3.$$

**Πρώτη περίπτωση:**  $n = 3$  (τα πολύγωνα είναι τρίγωνα).

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{m} - \frac{1}{6} > 0 \implies \frac{2}{3} > \frac{1}{m} > \frac{1}{6} \implies \frac{3}{2} < m < 6.$$

Επομένως,  $m \in \{3, 4, 5\}$ , οπότε βάσει τής (4) παίρνουμε

$$(\alpha, n, m) \in \{(6, 3, 3), (12, 3, 4), (30, 3, 5)\} \implies (\kappa, \alpha, \varepsilon) \in \{(4, 6, 4), (6, 12, 8), (12, 30, 20)\}.$$

**Δεύτερη περίπτωση:**  $n = 4$  (τα πολύγωνα είναι τετράγωνα).

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{m} - \frac{1}{4} > 0 \implies \frac{3}{4} > \frac{1}{m} > \frac{1}{4} \implies \frac{4}{3} < m < 4,$$

που σημαίνει κατ' ανάγκην, ότι  $m = 3$  και  $(\kappa, \alpha, \varepsilon) = (8, 12, 6)$ .

**Τρίτη περίπτωση:**  $n = 5$  (τα πολύγωνα είναι πεντάγωνα).

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{m} - \frac{3}{10} > 0 \implies \frac{4}{5} > \frac{1}{m} > \frac{3}{10} \implies \frac{5}{4} < m < \frac{10}{3},$$

που σημαίνει κατ' ανάγκην, ότι  $m = 3$  και  $(\kappa, \alpha, \varepsilon) = (20, 30, 12)$ .

**Τέταρτη περίπτωση:**  $n \geq 6$ . Η ανισοσύνη αυτή είναι αδύνατη, διότι

$$0 < \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{m} - \frac{1}{3} \implies \frac{1}{m} > \frac{1}{3} \implies m < 3,$$

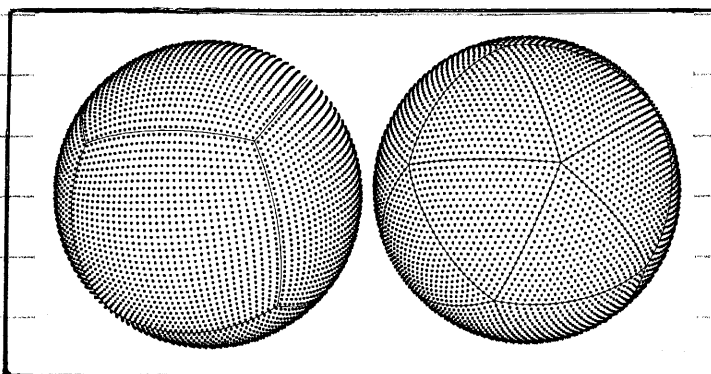
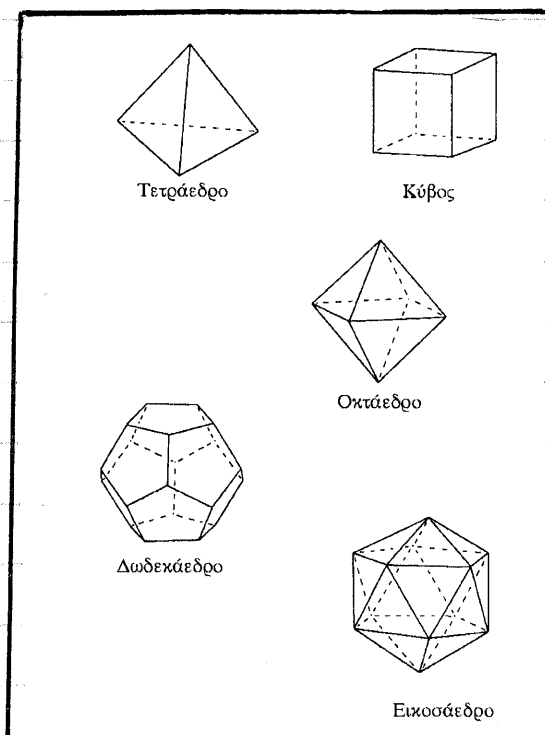
πράγμα που δεν μπορεί να συμβεί. □

4.4.15. Παρατήρηση: Από το θεώρημα 4.4.14 συμπεραίνουμε ότι είναι δυνατόν να λάβουμε ως εκπροσώπους των "επιτρεπών" κλάσεων ομοιομορφίας των κανονικών  $|K|$  τα κλασικά "κανονικά πολύεδρα", ήτοι τα "πλατωνικά στερεά".

που εικονογραφούνται στο παράλληλο  
 σχήμα. (Ο "Τίμαιος Ξαναχτυπά"!)

Για μια καλύτερη επώπτευση της  
 τριγωνισμένης σφαίρας  $X \approx \mathbb{S}^2$   
 μέσω του κανονικού τετραέδρου  
 και του κανονικού οκταέδρου,  
 βλ. τα σχήματα που παρετέθησαν  
 στο 1.20.22, σελ. 94.

Τέλος, παρατίθενται δύο  
 "refinement schemes",  
 δημιουργηθέντα μέσω ακτινικής  
 προβολής του κύβου (= δυϊκού του  
 οκταέδρου) και του (κανονικού) εικοσαέδρου.



4.4.16. Θεώρημα. Έστω  $(X, A, B)$  μια εκτετατική τοπολογική τριά-  
 δα για την ιδιόμορφη  $R$ -θεωρία ομολογίας  $(H_*^{sing}, \partial_*^{sing})$  υπό την  
 έγκλη του ορισ. 2.6.1, σελ. 139-140. (Τούτο συμβαίνει π.χ. όταν  
 $X = A \cup B$ .) Εάν ο  $R$  είναι π.κ.ι και οι χαρακτηριστικές Euler  $\chi(A; R), \chi(B; R)$   
 των  $A$  και  $B$  ορίζονται, τότε ορίζονται και οι  $\chi(X; R)$  και  $\chi(A \cap B; R)$   
 και ισχύει η ισότητα:

$$\chi(A; R) + \chi(B; R) = \chi(X; R) + \chi(A \cap B; R).$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνήθη ακριβή ακολουθία των Mayer και Vietoris (2.6.4 (i), σελ. 142) για την τριάδα  $(X, A, B)$ :

$$\dots \longrightarrow H_q^{\text{sing}}(A \cap B; R) \longrightarrow H_q^{\text{sing}}(A; R) \oplus H_q^{\text{sing}}(B; R) \longrightarrow H_q^{\text{sing}}(X; R) \longrightarrow \dots$$

ως τη μακρά ακριβή ακολουθία ομολογίας που επαχεται από τη βραχεία ακριβή ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων

$$0 \longrightarrow S_*(A; R) \cap S_*(B; R) \longrightarrow S_*(A; R) \oplus S_*(B; R)$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ S_*(A; R) + S_*(B; R) \quad (*) \\ \downarrow \\ 0 \end{array}$$

Προβλ. [ΣοΑ], 2.3.11, σελ. 97,  
2.3.16, σελ. 102-104,  
λαμβάνομένου υπ' όψιν ότι  
 $H_q(S_*(A; R) + S_*(B; R)) \cong H_q^{\text{sing}}(X; R)$   
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{S^{\text{sc}}(X; R)} \quad \uparrow \quad \begin{array}{l} 3.5.20 \\ 3.5.21 \\ \text{σελ. 192-195} \end{array}$   
 όπου  $\mathcal{W} = \{A, B\}$ ,  
για κάθε  $q \in \mathbb{Z}$ .

Προφανώς,  $\chi_R(S_*(A; R) \cap S_*(B; R)) - \chi_R(S_*(A; R) \oplus S_*(B; R))$   
 $+ \chi_R(S_*(A; R) + S_*(B; R)) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q (\text{rank}_R(S_q(A; R) \cap S_q(B; R))$   
 $- \text{rank}_R(S_q(A; R) \oplus S_q(B; R)) + \text{rank}_R(S_q(A; R) + S_q(B; R)))$   
 $= 0$  (διότι το άθροισμα των όρων των ευρισκομένων εντός των παρενθέσεων είναι  $= 0$  για κάθε  $q$ , λόγω της ακριβείας της  $(*)$  και του λήμματος 4.4.3 για  $n=2$ ).

Κατά το λήμμα 4.4.5,  $\chi_R(S_*(A; R) \cap S_*(B; R)) - \chi_R(S_*(A; R) \oplus S_*(B; R))$   
 $+ \chi_R(S_*(A; R) + S_*(B; R))$   
 $= \sum_{q \geq 0} (-1)^q (\text{rank}_R(H_q^{\text{sing}}(A \cap B; R)) - \text{rank}_R(H_q^{\text{sing}}(A; R) \oplus H_q^{\text{sing}}(B; R)) + \text{rank}_R(H_q^{\text{sing}}(X; R))) \quad (2)$

Επειδή τα πρώτα μέλη των ισοτήτων (1) και (2) είναι ίσα, θα είναι ίσα και τα δεύτερα μέλη τους (ήτοι το δεύτερο μέλος ισούται με 0). Συνεπώς,

$$\chi(A \cap B; R) - (\chi(A; R) + \chi(B; R)) + \chi(X; R) = 0. \quad \square$$

4.4.17. Άσκηση: (i) Εάν οι  $F$  και  $F'$  είναι δυο συνεκτικές, κλειστές επιφάνειες και  $F \# F'$  το συνεκτικό άθροισμά τους (βλ. 1.119, σελ. 36) να αποδειχθεί μέσω του θεωρήματος 4.4.16 ότι ισχύει η ισότητα

$$\chi(F \# F') = \chi(F) + \chi(F') - 2.$$

(ii) Να αποδειχθούν εκ νέου οι τύποι  $\chi(F_g) = 2 - 2g$ ,  $g \geq 1$  και  $\chi(N_g) = 2 - g$ ,  $g \geq 2$  (βλ. 4.4.9 (iv) και (v), σελ. 274) κάνοντας χρήση του (i) σε συνδυασμό με το ότι

•  $\chi(F_0) = \chi(S^2) = 2$ ,  $\chi(F_1) = \chi(T^2) = 0$  και  $F_g \approx F_1 \# F_{g-1}$  για κάθε  $g \geq 2$  (βλ. 1.11.14, σελ. 40) ή -εναλλακτικώς- με το ότι

$$F_g \approx \underbrace{T^2 \# T^2 \# \dots \# T^2}_{g\text{-φορές}}, \text{ για κάθε } g \geq 1, \text{ και}$$

•  $\chi(N_1) = \chi(P_{\mathbb{R}}^2) = 1$  και  $N_g \approx N_1 \# N_{g-1}$ , για κάθε  $g \geq 2$  (βλ. 1.11.14 (ii), σελ. 40) ή -εναλλακτικώς- με το ότι

$$N_g \approx \underbrace{P_{\mathbb{R}}^2 \# P_{\mathbb{R}}^2 \# \dots \# P_{\mathbb{R}}^2}_{g\text{-φορές}}, \text{ για κάθε } g \geq 1.$$

4.4.18. Θεώρημα: Έστω ότι οι  $X, Y$  είναι δυο τοπολογικοί χώροι. Εάν ο  $R$  είναι μια Π.Κ.Ι. και οι χαρακτηριστικές Euler  $\chi(X; R)$ ,  $\chi(Y; R)$  ορίζονται, τότε ορίζεται και η  $\chi(X \times Y; R)$  και μάλιστα ισχύουν οι ισότητες:

$$\chi(X \times Y; R) = \chi(X; R) \cdot \chi(Y; R)$$

και

$$b_q(X \times Y; R) = \sum_{r+s=q} b_r(X; R) b_s(Y; R)$$



Απόδειξη: Έπεται άμεσα από το τοπολογικό θεώρημα 3.6.9 του Künneth στη μορφή που παρουσιάζεται στη σημείωση 3.6.10(ι) στη σελίδα 200. (Στην ειδική περίπτωση όπου οι  $X, Y$  είναι πεπερασμένοι CW-χώροι, η απόδειξη έπεται άμεσα, χωρίς το θεώρημα Künneth, από την πρ. 1.21.19, σ.114.)

4.4.19. Ορισμός: Έστω  $R$  μια Π.Κ.Ι. και έστω  $(X, A)$  ένα τοπολογικό ζεύγος, τέτοιο ώστε να ισχύει  $\text{rank}_R (H_q^{\text{sing}}(X, A; R)) < \infty, \forall q \in \mathbb{N}_0$ . Τότε ο  $b_q(X, A; R) := \text{rank}_R (H_q^{\text{sing}}(X, A; R))$  καλείται  $q$ -οστός αριθμός Betti του  $(X, A)$ . Επιπροσθέτως, όταν το εναλλάξον άθροισμα αυτών των αριθμών (για κάθε  $q \in \mathbb{N}_0$ ) είναι πεπερασμένο, τότε ορίζεται η λεγόμενη χαρακτηριστική Euler του  $(X, A)$  ως προς την  $R$ :

$$\chi(X, A; R) := \sum_{q \geq 0} (-1)^q b_q(X, A; R) \in \mathbb{Z}$$

(Όταν  $R = \mathbb{Z}$ , τότε γράφουμε  $b_q(X, A)$  αντί του  $b_q(X, A; \mathbb{Z})$  και  $\chi(X, A)$  αντί του  $\chi(X, A; \mathbb{Z})$  και ομιλούμε για συνήθεις αριθμούς Betti και συνήθη χαρακτηριστική Euler για το  $(X, A)$ .)

4.4.20. Θεώρημα. Έστω  $(X, A)$  ένα τοπολογικό ζεύγος. Εάν ο  $R$  είναι μια Π.Κ.Ι. και οι χαρακτηριστικές Euler  $\chi(X; R), \chi(A; R)$  των  $X$  και  $A$  (ως προς την  $R$ ) ορίζονται, τότε ορίζεται και η  $\chi(X, A; R)$  και ισχύει η ισότητα:

$$\chi(X, A; R) = \chi(X; R) - \chi(A; R)$$

Απόδειξη: Η φαικρά ακριβής ακολουθία ομολογίας του τοπ. ζεύγους  $(X, A)$

$$\dots \rightarrow H_q^{\text{sing}}(A; R) \rightarrow H_q^{\text{sing}}(X; R) \rightarrow H_q^{\text{sing}}(X, A; R) \rightarrow H_{q-1}^{\text{sing}}(A; R) \rightarrow \dots$$

Επάχεται από τη βραχεία ακριβή ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων

$$0 \rightarrow S_0(A; R) \rightarrow S_0(X; R) \rightarrow S_0(X, A; R) \rightarrow 0 \quad (\text{βλ. θεώρημα 3.2.5, σελ. 169}).$$

Εάν  $H_q^{\text{sing}}(X; R)$  (και αντ.,  $H_{q-1}^{\text{sing}}(A; R)$ ) είναι πεπ. παρ. και  $\cong \{0\}$  για  $q \geq k_1$  (και αντ. για  $q \geq k_2$ ), τότε η  $H_q^{\text{sing}}(X, A; R)$  είναι κομ' ανάγκην πεπ. παρ. και  $\cong \{0\}$  για  $q \geq \max\{k_1, k_2\}$ . Επιπροσθέτως, όπως βσω απόδειξη του 4.4.16,  $\chi_R(S_0(A; R)) - \chi_R(S_0(X; R)) + \chi_R(S_0(X, A; R)) = 0 = \chi(A; R) - \chi(X; R) + \chi(X, A; R)$ .  $\square$

Εν συνεχεία, θα παραθέσουμε το "θεώρημα σταθερών σημείων" του Lefschetz. Θα προηγηθούν ορισμένα προπαρασκευαστικά λήμματα και ο ορισμός του "αριθμού Lefschetz".

4.4.21. Ορισμός: Έστω  $R$  μια Π.Κ.Σ. και έστω  $f: M \rightarrow M$  ένας ενδομορφισμός ενός π.π.  $R$ -μοδίου  $M$ . Επιλέγουμε μια βάση  $\{\xi_1, \dots, \xi_r\}$  του  $\mathcal{F}_R(M) = M / \text{tor}(M)$ , όπου  $r = \text{rank}_R(M)$ , και υποθέτουμε ότι ο  $A = (a_{ij})$  είναι ο  $(r \times r)$ -πίνακας (με εγγραφές ειλημμένες από τον  $R$ ), ο οποίος αντιστοιχεί (ως προς την εν λόγω βάση) στον επαχόμενο ενδομορφισμό  $\bar{f}: \mathcal{F}_R(M) \rightarrow \mathcal{F}_R(M)$  του ελεύθερου  $R$ -μοδίου  $\mathcal{F}_R(M)$ , δηλ.

$$\begin{matrix} \cong & \cong \\ R^r & R^r \end{matrix} \quad \bar{f}(\xi_i) = \sum_{j=1}^r a_{ij} \xi_j, \forall i=1, \dots, r.$$

Ορίζουμε ως ίχνος του  $A$  το  $\text{tr}_R(A) := \sum_{i=1}^r a_{ii} \in R$ , ήτοι το άθροισμα των εγγραφών της διαγωνίου του.

Επίσης, ορίζουμε ως ίχνος του  $f$  το  $\text{tr}_R(f) := \text{tr}_R(A)$ . Λόγω των ιδιοτήτων των ίχνων πινάκων (που μας είναι γνωστές από τη Γραμμική Άλγεβρα) ο ορισμός αυτός είναι ανεξάρτητος της επιλογής της βάσεως  $\{\xi_1, \dots, \xi_r\}$  (Εάν η  $\{\xi'_1, \dots, \xi'_r\}$  είναι μια άλλη βάση του  $\mathcal{F}_R(M)$  και  $A'$  ο αντιστοιχός πίνακας, τότε

$$\text{tr}_R(A) = \text{tr}_R(A').$$

4.4.22. Λήμμα: Έστω  $R$  μια Π.Κ.Σ. Τα ίχνη ενδομορφισμών πεπερασμένα παραγομένων  $R$ -μοδίων έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Ιδιότητα της συνθέσεως: Εάν οι  $f: M \rightarrow N$  και  $g: N \rightarrow M$  είναι ομομορφισμοί μεταξύ δυο πεπερασμένα παραγομένων  $R$ -μοδίων  $M, N$ , τότε

$$\text{tr}_R(g \circ f) = \text{tr}_R(f \circ g).$$

Ιδιαίτερως, για οιονδήποτε ενδομορφισμό  $f: M \rightarrow M$  και οιονδήποτε αυτομορφισμό  $g: M \rightarrow M$  ενός πεπερασμένα παραγομένου  $R$ -μοδίου  $M$  ισχύει η ιδιότητα:

$$\text{tr}_R(g \circ f \circ g^{-1}) = \text{tr}_R(f).$$

(ii) Προσθετική ιδιότητα:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Έστω} & 0 & \longrightarrow & M_2 & \xrightarrow{i} & M_1 & \xrightarrow{p} & M_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow f_2 & \circlearrowleft & \downarrow f_1 & \circlearrowleft & \downarrow f_0 & & \\ & 0 & \longrightarrow & M_2 & \xrightarrow{i} & M_1 & \xrightarrow{p} & M_0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ενός μεταθετικού διαγράμματος πεπερασμένως παραγομένων  $R$ -μοδίων και ομομορφισμών  $R$ -μοδίων με ακριβείς γραμμές. Τότε

$$\boxed{\operatorname{tr}_R(f_0) - \operatorname{tr}_R(f_1) + \operatorname{tr}_R(f_2) = 0}$$

(iii) Γραμμικότητα: Εάν οι  $f, g: M \rightarrow M$  είναι ενδομορφισμοί ενός πεπερασμένως παραγομένου  $R$ -μοδίου  $M$ , τότε

$$\boxed{\operatorname{tr}_R(\lambda f + \mu g) = \lambda \operatorname{tr}_R(f) + \mu \operatorname{tr}_R(g), \forall \lambda, \mu \in R}$$

(iv) Σύνδεση ίχνους και βαθμίδας: Για κάθε πεπερασμένως παραγόμενο  $R$ -μόδιο ισχύει η ισότητα:

$$\boxed{\operatorname{tr}_R(\operatorname{Id}_M) = \operatorname{rank}_R(M) \cdot 1_R}$$

Απόδειξη: (i) Τούτο έπεται από την ιδιότητα των ίχνων δυο πινάκων  $A \in \operatorname{Mat}_{r \times r}(R)$  και  $B \in \operatorname{Mat}_{r \times r}(R)$ :  $\operatorname{tr}_R(AB) = \operatorname{tr}_R(BA)$ .

(ii) Η απόδειξη θα γίνει σε τρία βήματα:

1<sup>ο</sup> Βήμα: Ο ισχυρισμός είναι αληθής όταν οι  $M_0, M_1, M_2$  είναι εκλεύθεροι.

Πράγματι εάν  $r_j := \operatorname{rank}_R(M_j), \forall j \in \{0, 1, 2\}$  και εάν επιλέξουμε μια βάση  $\{x_1, x_2, \dots, x_{r_2}\}$  του  $M_2$ , τότε αυτή μπορεί να επεκταθεί σε μια βάση  $\{i(x_1), \dots, i(x_{r_2}), x_{r_2+1}, \dots, x_{r_1}\}$  του  $M_1$ . Ταυτίζοντας τον  $M_0$  με τον πηλικομόδιο  $M_1/M_2$  (βλ. [ΣΟΑ], 4<sup>ο</sup> φυλλάδιο ασκήσεων, σελ. 4 (ii)) είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι η  $\{x_{r_2+1} + M_2, \dots, x_{r_1} + M_2\}$  είναι μια βάση του  $M_0$ . Επομένως, ο πίνακας  $A_1$  του  $f_1$  ως προς τη βάση  $\{i(x_1), \dots, i(x_{r_2}), x_{r_2+1}, \dots, x_{r_1}\}$  γράφεται υπό τη μορφή

$$A_1 = \left( \begin{array}{c|c} A_2 & * \\ \hline 0 & A_0 \end{array} \right),$$

όπου  $A_2$  ο πίνακας του  $f_1|_{i(M_2)}$  ως προς τη βάση  $\{i(x_1), \dots, i(x_{r_2})\}$  και ο  $A_0$  ο πίνακας του  $f_0$  ως προς τη βάση  $\{x_{r_2+1} + M_2, \dots, x_{r_1} + M_2\}$ ,

οπότε 
$$\text{tr}_R(A_1) = \text{tr}_R(A_0) + \text{tr}_R(A_2) \Rightarrow \text{tr}_R(f_1) = \text{tr}_R(f_0) + \text{tr}_R(f_1|_{i(M_2)})$$

$$\parallel$$

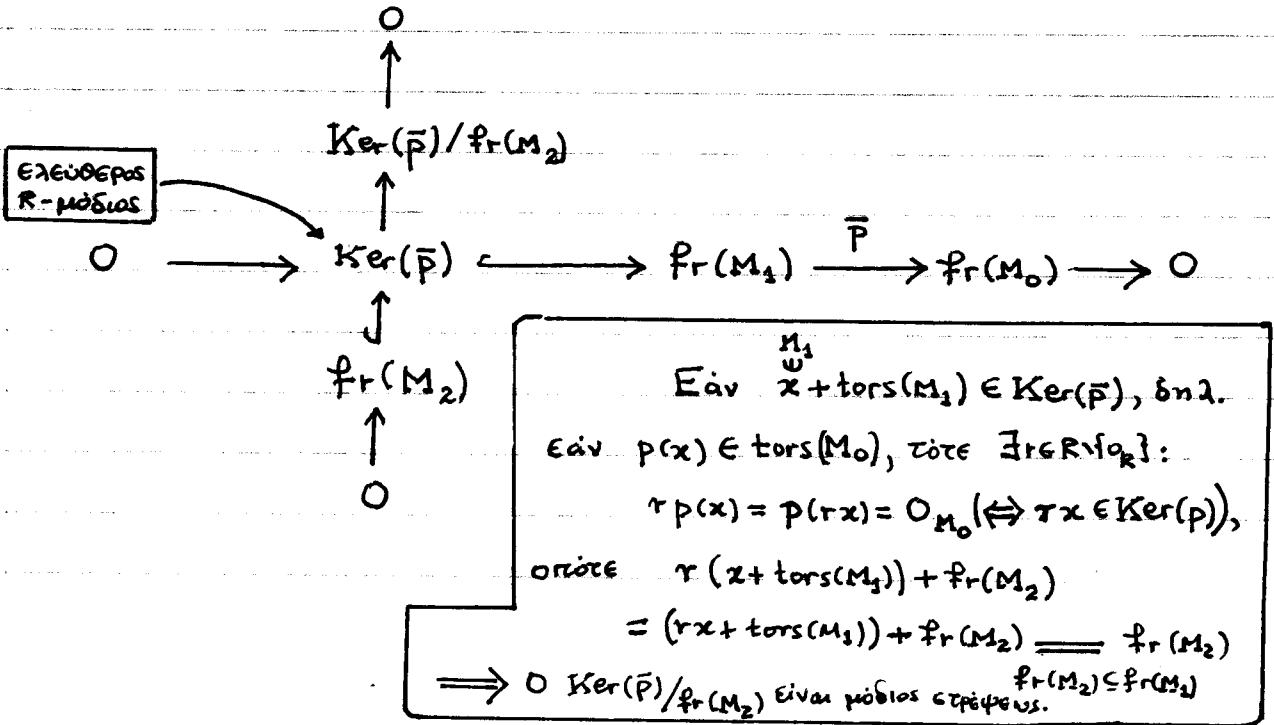
$$\text{tr}_R(f_2).$$

2<sup>ο</sup> Βήμα: Όταν οι  $M_1, M_2$  είναι ελεύθεροι και ο  $M_0$  μόνιος σπρέψους (δηλαδή  $M_0 = \text{tors}(M_0)$ ), τότε  $\text{tr}_R(f_1) = \text{tr}_R(f_2)$ . Πράγματι σύμφωνα με ένα γνωστό αλγεβρικό θεώρημα (βλ. π.χ. D.S. Dummit, R.M. Foote: "Abstract Algebra", 3rd edition, John Wiley & Sons, Inc., 2004, Ch.12, §1, Thm. 4, σελ. 460) υπάρχει μια βάση  $\{x_1, \dots, x_{r_1}\}$  του  $M_1$  καθώς και  $d_1, \dots, d_{r_2} \in R \setminus \{0_R\}$  με  $d_j | d_{j+1}, \forall j \in \{1, \dots, r_2 - 1\}$ , ούτως ώστε η  $\{d_1 x_1, \dots, d_{r_2} x_{r_2}\}$  να είναι μια βάση του  $M_2$ , οπότε για τον πίνακα  $A$  του  $f_1$  ως προς την βάση  $\{x_1, \dots, x_{r_1}\}$  έχουμε  $A = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{r_2} & 0 \dots 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{tr}_R(f_1) = \sum_{j=1}^{r_2} d_j = \text{tr}_R(f_2)$ .

3<sup>ο</sup> Βήμα: Για ομοιομορφισμούς πεπερασμένως παραχόμενους  $R$ -μόνιους  $M_0, M_1, M_2$  θεωρούμε τους επαχόμενους ομομορφισμούς

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{i}: M_2/\text{tors}(M_2) & \rightarrow & M_1/\text{tors}(M_1) & , & \bar{p}: M_1/\text{tors}(M_1) & \rightarrow & M_0/\text{tors}(M_0) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ f_r(M_2) & & f_r(M_1) & & f_r(M_1) & & f_r(M_0) \end{array}$$

Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι ο  $\bar{i}$  είναι μονομορφισμός, ο  $\bar{p}$  επιμορφισμός και ότι ισχύει ο εκκασιγμός  $\text{Im}(\bar{i}) \subseteq \text{Ker}(\bar{p})$ . Εν συνεχεία θεωρούμε τις εξής βραχείες ακριβείς ακολουθίες:



Εφαρμόζοντας ότι αποδείχθη στο 1<sup>ο</sup> βήμα για το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(\bar{f}) & \hookrightarrow & f_r(M_1) & \longrightarrow & f_r(M_0) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \bar{f}_1|_{\text{Ker}(\bar{f})} & \circlearrowleft & \downarrow \bar{f}_1 & \circlearrowleft & \downarrow \bar{f}_0 \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(\bar{f}) & \hookrightarrow & f_r(M_1) & \longrightarrow & f_r(M_0) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

λαμβάνουμε  $\text{tr}_R(f_1) = \text{tr}_R(f_0) + \text{tr}_R(\bar{f}_1|_{\text{Ker}(\bar{f})})$  (1)

Καθώς και τούτου, εφαρμόζοντας ότι αποδείχθη στο 2<sup>ο</sup> βήμα για το

διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & f_r(M_2) & \hookrightarrow & \text{Ker}(\bar{f}) & \longrightarrow & \text{Ker}(\bar{f})/f_r(M_2) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \bar{f}_2 & \circlearrowleft & \downarrow \bar{f}_2|_{\text{Ker}(\bar{f})} & \circlearrowleft & \downarrow (\bar{f}_2|_{\text{Ker}(\bar{f})})_{\text{πιν.}} \\
 0 & \longrightarrow & f_r(M_2) & \hookrightarrow & \text{Ker}(\bar{f}) & \longrightarrow & \text{Ker}(\bar{f})/f_r(M_2) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

λαμβάνουμε  $\text{tr}_R(f_2) = \text{tr}_R(\bar{f}_2|_{\text{Ker}(\bar{f})})$  (2)

Από τις (1) και (2) έπεται τελικώς ότι  $\text{tr}_R(f_1) = \text{tr}_R(f_0) + \text{tr}_R(f_2)$ .

(iii), (iv): Τούτα έπονται άμεσα από τον ορισμό του ίχνους.  $\square$

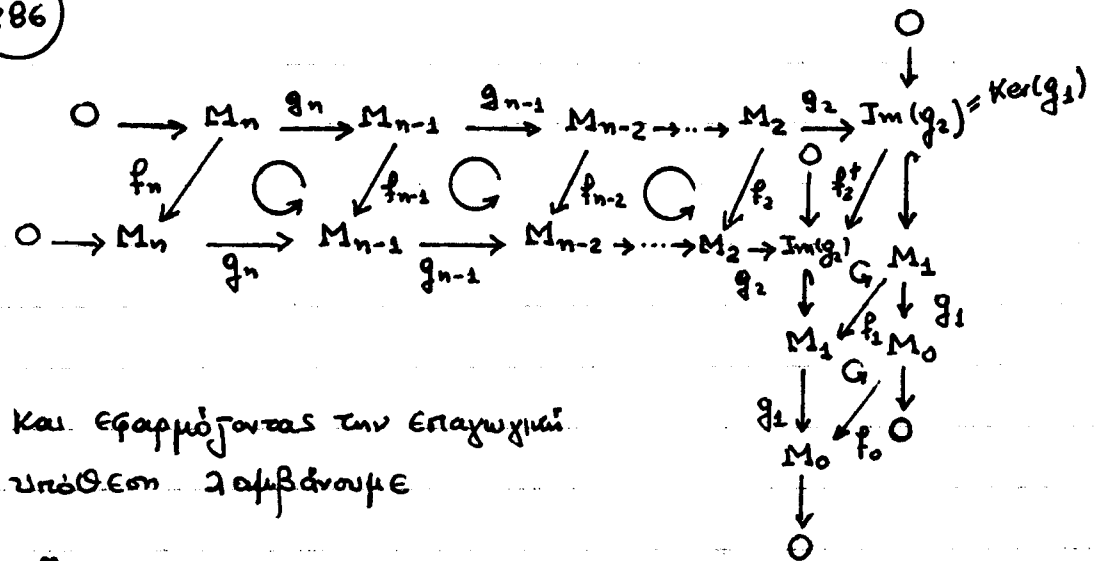
4.4.23. Λήμμα. Έστω R μια Π.Κ.Ι. Εάν το

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 0 & \longrightarrow & M_n & \xrightarrow{g_n} & M_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & M_{n-2} & \longrightarrow & \dots & \xrightarrow{g_2} & M_1 & \xrightarrow{g_1} & M_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f_n & \circlearrowleft & \downarrow f_{n-1} & \circlearrowleft & \downarrow f_{n-2} & \circlearrowleft & & \downarrow f_1 & \circlearrowleft & \downarrow f_0 & \\
 0 & \longrightarrow & M_n & \xrightarrow{g_n} & M_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & M_{n-2} & \longrightarrow & \dots & \xrightarrow{g_2} & M_1 & \xrightarrow{g_1} & M_0 \longrightarrow 0
 \end{array} \quad (n \geq 0)$$

είναι ένα μεταθετικό διάγραμμα πεπερασμένων παραγόμενων R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων με ακριβείς γραμμές, τότε

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \text{tr}_R(f_j) = 0$$

Απόδειξη: Για  $n \in \{0, 1\}$  αυτό είναι προφανές. Για  $n=3$  είναι αληθές επί τη βάση του 4.4.22 (ii). Για  $n \geq 3$  εργαζόμαστε επαγωγικώς. Διασπώντας τις αρχικές ακριβείς ακολουθίες:



και εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση λαμβάνουμε

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=2}^n (-1)^j \operatorname{tr}_R(f_j) - \operatorname{tr}_R(f_2^+) &= 0 \\ \operatorname{tr}_R(f_0) - \operatorname{tr}_R(f_1) + \operatorname{tr}_R(f_2^+) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum_{j=0}^n (-1)^j \operatorname{tr}_R(f_j) = 0. \quad \square$$

4.4.24. Σημείωση: Λόγω τής ιδιότητας 4.4.22 (iv) το λήμμα 4.4.23 αποτελεί γενίκευση τού λήμματος 4.4.3 (έστω κι αν για βραχείες περιόδους αποδείξεις που δώσαμε παραλείγαν ελαφρές διαφορές).

4.4.25. Ορισμός: Έστω  $R$  μια Π.Κ.Ι. και έστω  $C$  ένα πεπερασμένο αλ.σύνπλοκο  $R$ -μοδίου και ομομορφισμών  $R$ -μοδίων. Ως στοιχείο Lefschetz  $\Lambda_R(f_0)$  ενός αλυσωτού μετασχηματισμού  $f_0: C \rightarrow C$ , ορίζουμε το

$$\Lambda_R(f_0) := \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q \operatorname{tr}_R(f_q) \in R.$$

(Όταν  $R = \mathbb{Z}$ , τότε το  $\Lambda(f_0) := \Lambda_{\mathbb{Z}}(f_0)$  ονομάζεται, ιδιαιτέρως, αριθμός Lefschetz τού  $f_0$ .)

4.4.26. Λήμμα: Το  $\Lambda_R(f_0)$  έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Ιδιότητα τής συνθέσεως: Εάν οι  $f_0: C_0 \rightarrow D_0$  και  $g_0: D_0 \rightarrow C_0$  είναι αλυσωτοί μετασχηματισμοί μεταξύ δυο πεπερασμένων αλυσωτών συμπλόκων  $C_0$  και  $D_0$ , τότε  $\Lambda_R(g_0 \circ f_0) = \Lambda_R(f_0 \circ g_0)$ .

(ii) Γραμμικότητα: Εάν οι  $f_0, g_0: C_0 \rightarrow C_0$  είναι αλυσωτοί μετασχηματισμοί από ένα πεπερασμένο αλυσωτό σύνπλοκο  $C_0$  στον εαυτό του, τότε  $\Lambda_R(\lambda f_0 + \mu g_0) = \lambda \Lambda_R(f_0) + \mu \Lambda_R(g_0), \forall \lambda, \mu \in R.$

(iii) Σύνδεση στοιχείου Lefschetz και αριθμοί Euler αλ. συμπλοκών.

Για κάθε πεπερασμένο αλυσωτό σύμπλοκο  $C_*$  ισχύει η ισότητα

$$\Lambda_{\mathbb{R}}(\text{Id}_* : C_* \rightarrow C_*) = \chi_{\mathbb{R}}(C_*) \cdot 1_{\mathbb{R}}.$$

(iv) Ιδιότητα του "ομοτοπικώς αναλλοιώτου": Εάν οι  $f_*, g_* : C_* \rightarrow C_*$

είναι δυο αλυσωτοί μετασχηματισμοί από ένα πεπερασμένο αλυσωτό σύμπλοκο  $C_*$  στον εαυτό του και εάν  $f_* \simeq g_*$  (δηλ. οι  $f_*, g_*$  είναι αλυσωτοί ομότοποι, βλ. [ΣΟΑ] σφρ. 2.4.1, σελ. 108), τότε

$$\Lambda_{\mathbb{R}}(f_*) = \Lambda_{\mathbb{R}}(g_*).$$

(v) Τύπος του Hopf: Εάν ο  $f_* : C_* \rightarrow C_*$  είναι ένας αλυσωτός μετασχηματισμός από ένα πεπερασμένο αλυσωτό σύμπλοκο  $C_*$  στον εαυτό του, τότε

$$\Lambda_{\mathbb{R}}(f_*) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q \text{tr}_{\mathbb{R}}(H_q(f_*)).$$

Απόδειξη: Τα (i), (ii) και (iii) έπονται εμένα από το λήμμα 4.4.22.

$$(iv) \quad f_* \simeq g_* \iff \left[ \begin{array}{l} \exists \text{ ακολουθία ομομορφισμών } \mathbb{R}\text{-μοδίων } (h_q : M_q \rightarrow M_{q+1})_{q \in \mathbb{Z}} \\ \text{για την οποία ισχύει: } f_q - g_q = d_{q+1} \circ h_q + h_{q-1} \circ d_q, \forall q \in \mathbb{Z}, \\ \text{όπου } (d_q : M_q \rightarrow M_{q-1})_{q \in \mathbb{Z}} \text{ η ακολουθία των συνοριακών τελεστών.} \end{array} \right]$$

Προφανώς,  $\Lambda_{\mathbb{R}}(f_*) - \Lambda_{\mathbb{R}}(g_*) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q \text{tr}_{\mathbb{R}}(f_q - g_q)$

$$= \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q \text{tr}_{\mathbb{R}}(d_{q+1} \circ h_q + h_{q-1} \circ d_q) \stackrel{4.4.22(iii)}{=} \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q (\text{tr}_{\mathbb{R}}(d_{q+1} \circ h_q) + \text{tr}_{\mathbb{R}}(h_{q-1} \circ d_q))$$

$$\stackrel{4.4.22(i)}{=} \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q ((\text{tr}_{\mathbb{R}}(d_{q+1} \circ h_q) + \text{tr}_{\mathbb{R}}(d_q \circ h_{q-1})))$$

$$\stackrel{\text{αναβίβαση δεικτών}}{=} \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q \text{tr}_{\mathbb{R}}(d_{q+1} \circ h_q) - \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q \text{tr}_{\mathbb{R}}(d_{q+1} \circ h_q) = 0.$$

(v) Αρκεί κανείς να επαναλάβει τα επιχειρήματα της απόδειξης του λήμματος 4.4.5, σε συνδυασμό με λήμμα 4.4.23.  $\square$

4.4.27. Ορισμός: Έστω  $(X, \mathcal{X})$  ένας πεπερασμένος  $\mathbb{C}\mathbb{W}$ -χώρος και έστω  $f: X \rightarrow X$  μια κυτταρική απεικόνιση (υπό την έννοια του ορισ. 1.21.14, σελ. 113) από τον  $X$  στον εαυτό του. Ο ακέραιος αριθμός

$$\Lambda(f) := \sum_{q \geq 0} (-1)^q \operatorname{tr}_{\mathbb{Z}} (W_q(f): W_q(X; \mathbb{Z}) \rightarrow W_q(X; \mathbb{Z}))$$

ονομάζεται αριθμός Lefschetz της  $f$ .

ο επαχόμενος ομομορφισμός

4.4.28. Πρόταση: Ο αριθμός  $\Lambda(f)$  έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Ιδιότητα της σύνθεσης: Εάν οι  $X, Y$  είναι δύο πεπερασμένοι  $\mathbb{C}\mathbb{W}$ -χώροι και οι  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$  δυο κυτταρικές απεικονίσεις μεταξύ αυτών, τότε

$$\Lambda(g \circ f) = \Lambda(f \circ g)$$

(ii) Συνδεση αριθμού Lefschetz και χαρακτηριστικός Euler: Για κάθε πεπερασμένο  $\mathbb{C}\mathbb{W}$ -χώρο  $X$  ισχύει η ιδότητα:

$$\Lambda(\operatorname{Id}_X: X \rightarrow X) = \chi(X)$$

(iii) Η ιδιότητα της "ομοτοπικώς αναλλαιώτου": Εάν οι  $f, g: X \rightarrow X$  είναι δυο κυτταρικές απεικονίσεις από έναν πεπερασμένο  $\mathbb{C}\mathbb{W}$ -χώρο  $X$  στον εαυτό του, οι οποίες είναι ομοτόπες (υπό την έννοια του ορισ. 1.17.1, σελ. 69), τότε

$$\Lambda(f) = \Lambda(g)$$

(iv) Τύπος του Hopf: Εάν ο  $R$  είναι μια Π.Κ.Ι και η  $f: X \rightarrow X$  μια κυτταρική απεικόνιση από έναν πεπερασμένο  $\mathbb{C}\mathbb{W}$ -χώρο  $X$  στον εαυτό του, τότε

$$\Lambda(f) \cdot 1_R = \sum_{q \geq 0} (-1)^q \operatorname{tr}_R (H_q^{\mathbb{C}\mathbb{W}}(f): H_q^{\mathbb{C}\mathbb{W}}(X; R) \rightarrow H_q^{\mathbb{C}\mathbb{W}}(X; R))$$

Απόδειξη: Έπεται άμεσα από το λήμμα 4.4.26.  $\square$

4.4.29. Σημείωση: Εάν ο  $X$  είναι ένας πεπερασμένος  $\mathbb{C}\mathbb{W}$ -χώρος



και η  $f: X \rightarrow X$  οιαδήποτε συνεχής απεικόνιση, τότε μπορεί να ορισθεί και πάλι αριθμός Lefschetz  $\Lambda(f)$  της  $f$  θέτοντας  $\Lambda(f) := \Lambda(g)$ , όπου  $g: X \rightarrow X$  μια κυτταρική απεικόνιση με  $f \simeq g$ . Η ύπαρξη τέτοιων  $g$  διασφαλίζεται μέσω τής ακόλουθου θεωρήματος (για  $A=B=\phi$ ):

**4.4.30. Θεώρημα τής κυτταρικής προσεγγίσεως:** Έστω  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  τυχούσα συνεχής απεικόνιση μεταξύ CW-ζευγών, τέτοια ώστε η  $f|_A: A \rightarrow B$  να είναι μια κυτταρική απεικόνιση. Τότε υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση  $g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  τοπολογικών ζευγών με την  $g: X \rightarrow Y$  κυτταρική, για την οποία ισχύει

$$f \simeq g \text{ (GX.A)} \quad (\text{πρβλ. 1.17.6, σελ. 72}).$$

Απόδειξη: Βλ. A.T. Lundell & S. Weingram: "The Topology of CW Complexes", Van Nostrand, 1969, Thm. II.8.5, σελ. 72-75.  $\square$

**4.4.31. Θεώρημα σταθερών σημείων τού Lefschetz:** Έστω  $X$  ένας πεπερασμένος CW-χώρος και έστω  $f: X \rightarrow X$  μια συνεχής απεικόνιση. Εάν  $\Lambda(f) \neq 0$ , τότε  $\text{Fix}(f) \neq \phi$ , όπου  $\text{Fix}(f) := \{x \in X \mid f(x) = x\}$ .

Για τη σκιαγράφηση τής αποδείξεως τού 4.4.31 θα επικαλεστούμε τα 4.4.32 και 4.4.34.

**4.4.32. Λήμμα:** Έστω  $X$  ένας πεπερασμένος CW-χώρος. Τότε υπάρχει κάποιο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα  $K \subseteq \mathbb{R}^{\dim(X)}$ , μια ένθεση  $i: X \hookrightarrow |K|$ , καθώς και μια απεικόνιση συμπίεσης  $r: |K| \rightarrow X$  (με  $r \circ i = \text{Id}_X$ , βλ. ορσ. 1.17.10, σελ. 73). Ως εκ τούτου, ο  $X$  αποτελεί σύμπτυξη τού  $|K|$ .

Απόδειξη: Βλ. A. Hatcher: "Algebraic Topology", Cambridge University Press, 2001, Corollary A.10, σελ. 527-528.  $\square$

4.4.33. Ορισμός: Έστω  $K$  ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα (βλ. 1.20.18, σελ. 93).

Η βαρυκεντρική υποδιαίρεση  $\text{bar}(K)$  ορίζεται ως εξής: Ξεκινούμε με την εισαχική επιπρόσθετη κορυφή στο  $K$  στα βαρύκεντρα των μονοπλόκων του. Καθώς του, εργαζόμενοι κατά σειράν αύξουσας διαστάσεως, κόβουμε κάθε μονόπλοκο του  $K$  σε μικρότερα θεωρώντας τους κώνους που έχουν απαρχή τους την επιπρόσθετη κορυφή στο βαρύκεντρό του. (Οι βάσεις αυτών των κώνων είναι τα μονόπλοκα μικρότερης διαστάσεως που απεκτήθησαν στα προηγούμενα βήματα αυτής της διαδικασίας και εμπεριέχονται στις πλευρές του.)

Το  $\text{bar}(K)$  είναι ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα και  $|\text{bar}(K)| = |K|$ .

Η  $j$ -οστή βαρυκεντρική υποδιαίρεση  $\text{bar}^{(j)}(K)$  του  $K$  ορίζεται (επαγωγικώς) για κάθε  $j \in \mathbb{N}_0$  ως εξής:

$$\text{bar}^{(j)}(K) := \begin{cases} K, & \text{όταν } j=0 \\ \text{bar}(K), & \text{όταν } j=1 \\ \text{bar}(\text{bar}^{(j-1)}(K)), & \text{όταν } j \geq 2. \end{cases}$$

4.4.34. Θεώρημα της μονοπλεκτικής προσεγγίσεως: Εάν τα  $|K|$  και  $|L|$  είναι δυο τοπολογικά πολυέδρα (με τριγωνισμούς  $K$  και  $L$ ) και  $f: |K| \rightarrow |L|$  μια συνεχής απεικόνιση, τότε υπάρχει  $j \in \mathbb{N}_0$  και μια μονοπλεκτική απεικόνιση  $\varphi: \text{bar}^{(j)}(K) \rightarrow L$  (υπό την έννοια του ορισ. 1.20.24, σελ. 97), ούτως ώστε η επαγομένη συνεχής απεικόνιση  $|\varphi|: |\text{bar}^{(j)}(K)| = |K| \rightarrow |L|$  (βλ. 1.20.25, σελ. 97) να είναι ομοτοπική της  $f$ .

Η απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.34 οφείλεται στον J.W. Alexander ("Combinatorial Analysis Situs", Transactions of A.M.S. 28 (1926), 301-329).  
 Πρβλ. F.H. Groom: "Basic Concepts of Algebraic Topology", UTM, Springer-Verlag, 1978, Τμήμ. 3.6., σελ. 49. (Το 4.4.30 αποτελεί γενίκευση του 4.4.34.)

Σκιαγράφηση απόδειξης του Θεωρήματος 4.4.31:

- 1<sup>ο</sup> Βήμα: Θεωρούμε τις  $i: X \hookrightarrow |K|$  και  $r: |K| \rightarrow X$  όπως στο λήμμα 4.4.32, καθώς και τη σύνθεση  $\tilde{f} := i \circ f \circ r: |K| \rightarrow |K|$ . Θα αποδείξουμε τα εξής:

(i)  $\Lambda(\tilde{f}) = \Lambda(f)$ , (ii)  $\text{Fix}(\tilde{f}) = \text{Fix}(f)$ .

Απόδ. του (i): Για κάθε ακέραιο  $q \geq 0$  η  $H_q^{GW}(\tilde{f}): H_q^{GW}(|K|; \mathbb{Z}) \rightarrow H_q^{GW}(|K|; \mathbb{Z})$

έχει ιχνο  $\text{tr}_{\mathbb{Z}}(H_q^{GW}(\tilde{f})) = \text{tr}_{\mathbb{Z}}(H_q^{GW}(i \circ f \circ r))$

$$= \text{tr}_{\mathbb{Z}}(H_q^{GW}(i) \circ H_q^{GW}(f) \circ H_q^{GW}(r)) \stackrel{4.4.22(i)}{=} \text{tr}_{\mathbb{Z}}(\underbrace{H_q^{GW}(i) \circ H_q^{GW}(r)}_{H_q^{GW}(i \circ r)} \circ H_q^{GW}(f))$$

$$= \text{tr}_{\mathbb{Z}}(H_q^{GW}(\text{Id}_X) \circ H_q^{GW}(f)) = \text{tr}_{\mathbb{Z}}(H_q^{GW}(f))$$

$\implies \Lambda(\tilde{f}) = \Lambda(f)$ .  
4.4.28. (iv)

Απόδ. του (ii): Εάν  $x \in \text{Fix}(f)$ , τότε  $\tilde{f}(x) = i(f(r(x))) = i(f(x)) = x$ .

Και αντιστρόφως: εάν  $y \in \text{Fix}(\tilde{f})$ , τότε  $\tilde{f}(y) = i(f(r(y))) = y \implies y \in X \implies r(y) = y \implies f(y) = y \in X$ . Συνεπώς,  $\text{Fix}(\tilde{f}) = \text{Fix}(f)$ .

- 2<sup>ο</sup> Βήμα: Βάσει των όσων προαναφέρθηκαν στο 1<sup>ο</sup> βήμα, αρκεί το 4.4.31 να αποδειχθεί για ένα τοπολογικό πολύεδρο  $X = |K|$ . Ας υποθέσουμε ότι η  $f: |K| \rightarrow |K|$  μια κυκταρική απεικόνιση (πρβλ. 4.4.30) με  $\Lambda(f) \neq 0$  και  $\text{Fix}(f) = \emptyset$ .

Επειδή το  $|K|$  είναι συμπαγές υποσύνολο ενός ευκλείδειου χώρου και η απεικόνιση  $|K| \ni x \mapsto \|f(x) - x\| \in \mathbb{R}_{>0}$  συνεχής (όπου  $\|\cdot\|$  η σάδομη του εν λόγω ευκλείδειου χώρου), η  $\psi$  λαμβάνει ελάχιστο εντός του  $|K|$  (βλ. Πρόταση 1.8.8, σελ. 15). Άρα  $\exists \epsilon > 0: \|f(x) - x\| \geq \epsilon$ .

Ανακαθιστώντας, εν ανάγκη, το  $K$  με κάποια (αρκούντως μεγάλη) βαρυσκεντρική υποδιαίρεσή του, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\max\{\text{diam}(s) \mid s \in K\} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Κατά το Θεώρημα 4.4.34 της μονοτρεκτικής προσεγγίσεως  $\exists j \in \mathbb{N}_0$  και μια μονοτρεκτική απεικόνιση  $\varphi: \text{bar}^{(j)}(K) \rightarrow \mathbb{I}$  με  $|\varphi| \cong f$ .

και μάλιστα κατά τέτοιο τρόπο, ώστε για κάθε  $x \in |K|$  τα  $f(x), |f|(x)$  να ανήκουν σε ένα κοινό μονόπλακο του  $K$ . Άρα  $\|f(x) - |f|(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall x \in |K|$ ,

Εάν υπήρχε κάποιο μονόπλακο  $\delta$  του  $K$ , τέτοιο ώστε να περιέχει ένα στοιχείο  $x$  και την εικόνα του  $|f|(x)$  μέσω της  $|f|$ , τότε θα καταλήγαμε σε άτοπο, καθώς

$$\varepsilon \leq \|f(x) - x\| \leq \|f(x) - |f|(x)\| + \||f|(x) - x\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Κατά συνέπεια,  $(*) \quad f(\delta) \cap \delta = \emptyset$  για κάθε μονόπλακο  $\delta$  του  $K$ .

Εν συνεχεία, η  $f$  μπορεί να θεωρηθεί ως μια κυτταρική απεικόνιση (όχι κατ'ανάγκην μονοπλεκτική)  $f: \text{bar}^{(j)}(K) \rightarrow \text{bar}^{(j)}(K)$ .

$(*) \Rightarrow$  ο ενδομορφισμός  $W_q(|f|): W_q(\mathbb{X}; \mathbb{Z}) \rightarrow W_q(\mathbb{X}; \mathbb{Z}), q \geq 0$ ,

(με  $\mathbb{X} := \{|\delta^0| \mid \delta \in \text{bar}^{(j)}(K)\}$ ) διαθέτει πάντα τις μορφές

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ * & \dots & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{οπότε} \quad \left. \begin{array}{l} \text{tr}_{\mathbb{Z}}(W_q(|f|)) = 0 \\ \forall q \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{q \geq 0} (-1)^q \text{tr}_{\mathbb{Z}}(W_q(|f|)) = \Delta(|f|) \stackrel{4.4.28 \text{ (iii)}}{=} \Delta(f). \text{ Άτοπο!}$$

Άρα  $\Delta(f) \neq 0 \Rightarrow \text{Fix}(f) \neq \emptyset. \quad \square$

4.4.35. Σημείωση: Το θεώρημα 4.4.31 έχει πολλές σημαντικές εφαρμογές (και ποικίλες γενικεύσεις), όχι μόνον στην Αλγεβρική και στη Διαφορική Τοπολογία, αλλά και σε άλλους κλάδους των Μαθηματικών. Απεδείχθη από τον S. Lefschetz στα ακόλουθα άρθρα:

- *Intersections and transformations of complexes and manifolds*, Transactions of the Amer. Math. Soc. **28** (1926), 1-49.
- *Manifolds with boundary and their transformations*, Transactions of the Amer. Math. Soc. **29** (1927), 429-462.

Οι αρχικές αποδείξεις απλοποιήθηκαν από τον H. Hopf στο άρθρο:

- *A new proof of Lefschetz formula of invariant points*, Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A., **14** (1928), 149-153.

4.4.36. Πρόταση: Έστω  $X$  ένας δρομοσυνεκτικός πεπερασμένος CW-χώρος, για τον οποίον η ομάδα  $H_q^{CW}(X; \mathbb{Z})$  είναι πεπερασμένη για κάθε  $q > 0$ . Τότε κάθε συνεχής απεικόνιση  $f: X \rightarrow X$  διαθέτει (τουλάχιστον ένα) σταθερό σημείο.

Απόδειξη: Επειδή  $\text{rank}(H_q^{CW}(X; \mathbb{Z})) = 0$ ,  $\forall q > 0$ , τότε  $H_q^{CW}(f) = 0$ ,  $\forall q > 0$ , όπου  $\overline{H_q^{CW}(f)}$  ο ομομορφισμός ο επαχθόμενος από τον  $H_q^{CW}(f): H_q^{CW}(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_q^{CW}(X; \mathbb{Z})$  επί της ελεύθερης ομάδας  $\text{fr}(H_q^{CW}(X; \mathbb{Z}))$ . Επειδή ο  $X$  είναι δρομοσυνεκτικός,  $H_0^{CW}(X; \mathbb{Z}) \cong H_0^{\text{sing}}(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  και  $H_0^{CW}(f) = \text{Id}_{\mathbb{Z}}$  (πρβλ. 4.3.6, σελ. 251). Άρα

$$\text{tr}_{\mathbb{Z}}(H_q^{CW}(f)) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } q > 0, \\ 1, & \text{όταν } q = 0, \end{cases} \quad \text{οπότε}$$

$$\Lambda(f) \stackrel{4.4.28 \text{ (iv)}}{=} \sum_{q \geq 0} (-1)^q \text{tr}_{\mathbb{Z}}(H_q^{CW}(f)) = 1 \neq 0 \stackrel{4.4.31}{\implies} \text{Fix}(f) \neq \emptyset. \quad \square$$

4.4.37. Παράδειγμα: Λόγω του Θεωρήματος 4.3.4, σελ. 252, όταν ο  $n$  είναι άρτιος, τότε κάθε συνεχής απεικόνιση  $f: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  διαθέτει (τουλάχιστον ένα) σταθερό σημείο.

4.4.38. Πρόταση: Έστω  $X$  ένας δρομοσυνεκτικός, συστατικός, πεπερασμένος CW-χώρος, τότε για κάθε συνεχή απεικόνιση  $f: X \rightarrow X$  έχουμε  $\text{Fix}(X) \neq \emptyset$ .

Απόδειξη: Άμεση από το 4.4.36, καθώς  $H_q^{CW}(X; \mathbb{Z}) \cong H_q^{\text{sing}}(X; \mathbb{Z}) \cong \{0\}$ ,  $\forall q > 0$ .  $\square$

4.4.39. Πρόταση: Για οιαδήποτε συνεχή απεικόνιση  $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ , όπου  $n \geq 1$ , έχουμε

$$\Lambda(f) = 1 + (-1)^n \deg(f)$$

Απόδειξη: Επειδή  $H_q^{CW}(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z}) \stackrel{4.3.1}{\cong} \begin{cases} \{0\}, & \text{όταν } q \in \mathbb{Z} \setminus \{0, n\}, \\ \mathbb{Z}, & \text{όταν } q \in \{0, n\}, \end{cases}$

έχουμε

$$\operatorname{tr}_{\mathbb{Z}} (H_q^{GW}(\varphi)) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } q \in \mathbb{Z} \setminus \{0, n\}, \\ 1, & \text{όταν } q = 0, \\ \deg(\varphi), & \text{όταν } q = n \text{ (βλ. 3.7.4, σελ. 203)} \end{cases}$$

οπότε  $\Delta(\varphi) \stackrel{4.4.28(\text{iv})}{=} 1 + (-1)^n \deg(\varphi). \quad \square$

**4.4.40. Πρόταση** (= Πρόταση 3.7.9, σελ. 205) για  $n \geq 1$  Εάν  $n \geq 1$ , τότε η αντιστοίχια απεικόνιση  $\alpha: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ ,  $\alpha(x_0, x_1, \dots, x_n) := (-x_0, -x_1, \dots, -x_n)$ , έχει βαθμό  $(-1)^{n+1}$ .

Απόδειξη: Προφανώς,  $\operatorname{Fix}(\alpha) = \emptyset \stackrel{4.4.31}{\implies} \Delta(\alpha) = 0 \stackrel{4.4.39}{=} 1 + (-1)^n \deg(\alpha)$

$$\implies \deg(\alpha) = (-1)^{n+1}. \quad \square$$

**4.4.41. Παρατηρήσεις:** (i) Το αντίστροφο της συνεπαγωγής " $\Delta(\varphi) \neq 0 \implies \operatorname{Fix}(\varphi) \neq \emptyset$ " του Θεωρήματος 4.4.31 δεν είναι εν γένει αληθές. Επί παραδείγματι, για  $X = \mathbb{S}^1$  έχουμε  $\Delta(\operatorname{Id}_{\mathbb{S}^1}) = \Delta(\alpha) = 0$ , αλλά  $\operatorname{Fix}(\operatorname{Id}_{\mathbb{S}^1}) = \mathbb{S}^1 \neq \emptyset = \operatorname{Fix}(\alpha)$ .  
↑  
αντιστοίχια

(ii) Επειδή η μπάλα  $\mathbb{D}^n$  είναι δρομοσυνεκτική, συστατική και μπορεί να θεωρηθεί ως πεπερασμένος GW-χώρος (καθότι  $\mathbb{D}^n \cong \Delta_n$ ), το Θεώρημα 2.4.13 σταθερού σημείου τού Brouwer (σελ. 135-136) είναι άμεση απόρροια τού Προτάματος 4.4.38.

**4.4.42. Πρόταση:** Ένας δρομοσυνεκτικός, πεπερασμένος GW-χώρος  $X$ , ο οποίος είναι ταλοχρόνως και τοπολογική ομάδα (υπό την έννοια τού ορθ. 1.13.1, σελ. 44) έχει χαρακτηριστική Euler  $\chi(X) = 0$ .

Απόδειξη: Έστω  $1_X$  το μοναδιαίο στοιχείο τού  $X$  (θεωρούμενου ως ομάδα).

Εάν  $x_0 \in X \setminus \{1_X\}$ , τότε η απεικόνιση  $f: X \rightarrow X$ ,  $f(x) := x_0 x$ ,  $\forall x \in X$ , δεν διαθέτει σταθερά σημεία και είναι ομότοπη της  $\text{Id}_X$ . (Επί παραδείγματι, η  $x \mapsto \beta(t)x$  καθορίζει μια ομοτοπία  $f \simeq \text{Id}_X$  όταν ο  $\beta: I \rightarrow X$  είναι ένας δρόμος εντός του  $X$  με  $\beta(0) = x_0$  και  $\beta(1) = 1_X$ .)

Επομένως,  $0 \stackrel{\uparrow}{=} \Lambda(f) = \Lambda(\text{Id}_X) \stackrel{\uparrow}{=} \chi(X)$ .  $\square$

4.4.31      4.4.29      κεντρικί      4.4.28(ii)

4.4.43. Παράδειγμα: Λόγω των 4.4.39 και 4.4.9 (iv), (v), σελ. 274, οι μόνες (δρομ)συνεκτικές, κλειστές επιφάνειες που είναι υποψήφιες για να φέρουν τη δομή τοπολογικής ομάδας, είναι ο τόπος  $F_1 = \mathbb{F}^2$  και η φιάλη του Klein  $N_2$ . Ο  $\mathbb{F}^2$  είναι τοπολογική ομάδα (βλ. 1.13.2(iii), σελ. 44, και 3.7.16(ii), σελ. 209). Αντιθέτως, επειδή η  $\pi_1(N_2)$  δεν είναι αβελιανή, η  $N_2$  δεν μπορεί να είναι τοπολογική ομάδα (βλ. G. E. Bredon: "Topology and Geometry, Springer-Verlag, σελ. 138, problem 3.)

4.4.44. Παράδειγμα: Λόγω των 4.4.39 και 4.4.9 (i), σελ. 274, οι σφαίρες  $S^n$ , όπου  $n$  άρτιος  $\geq 2$ , δεν φέρουν τη δομή τοπολογικής ομάδας. (Η  $S^0$  μπορεί να ιδωθεί ως διακριτή τοπολογική ομάδα.) Σημειωτέον ότι από την επίλυση του 5ου προβλήματος του Hilbert για συμπαγείς ομάδες εκ μέρους των A. Gleason, D. Montgomery και I. Zippin (Annals of Math. 56 (1952), 193-241) έπεται ότι κάθε τοπικά ευκλείδεια συμπαγής ομάδα είναι συμπαγής ομάδα Lie. Εξ αυτού του θεωρήματος συνάγεται ότι οι μόνες σφαίρες περιττής διαστάσεως, οι οποίες φέρουν τη δομή τοπολογικής ομάδας, είναι οι (γνωστές μας από το 1.13.1 (i), (iv), σελ. 44-45) σφαίρες  $S^1$  και  $S^3$ . (βλ. K.H. Hofmann & S.A. Morris: The Structure of Compact Groups, Studies in Math., Vol. 25, de Gruyter, 1998, Corollary 9.59, σελ. 486.)

Γεωγωνίσουμε παραθέτοντας το ακόλουθο:

4.4.45. Τύπος σταθερίων σημείων του Lefschetz: Έστω  $g: X \rightarrow X$  μια συνεχής απεικόνιση από ένα συνεκτικό, κλειστό, λείο πολλαπλότυπο  $X$  στον εαυτό του. Τότε  $g \simeq f$  ( $f: X \rightarrow X$  λεία) με  $\#(\text{Fix}(f)) < \infty$  και  $\det(\text{Id}_X - T_x f: T_x X \rightarrow T_x X) \neq 0, \forall x \in X$  (όπου  $T_x X$  ο εφαπτόμενος χώρος του  $X$  και  $T_x f$  το διαφορικό της  $f$  στο  $x$ )

και

$$\Lambda(g) = \Lambda(f) = \sum_{x \in \text{Fix}(f)} \frac{\det(\text{Id}_X - T_x f)}{|\det(\text{Id}_X - T_x f)|}$$

Για την απόδειξη και περαιτέρω ενδιαφέρουσες γενικεύσεις βλ. R.F. Brown: The Lefschetz Fixed Point Theorem, Scott, Foresman & Co., Glenview, 1971.

## § 4.5 Μονοπλεκτική θεωρία ομολογίας

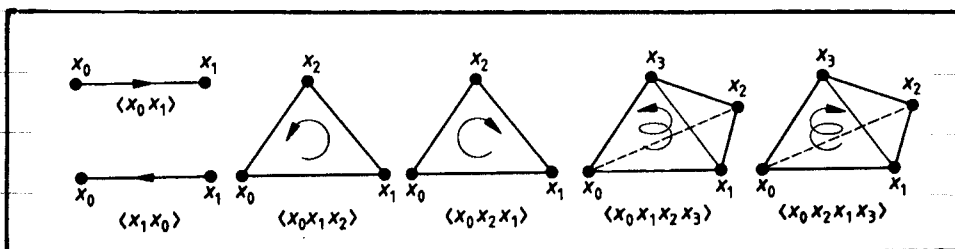
Το κεφάλαιο 4 θα κλείσει με τον ορισμό της (πλέον κλασικής, από ιστορική σκοπιά) μονοπλεκτικής θεωρίας ομολογίας.

4.5.1 Ορισμός: (i) Έστω  $\Delta = \Delta_q = [x_0, \dots, x_q]$  ένα  $q$ -μονόπλοκο (εντός ενός ευκλειδείου χώρου). Υπάρχουν  $(q+1)!$  τρόποι διατάξεως των  $q+1$  κορυφών του  $\Delta$ . Δυο διατάξεις των κορυφών αυτών καλούνται ισοδύναμες όταν η μία προκύπτει από την άλλη ύστερα από μια περιττή μετάταξη των (υπο)δεικτών. Ένας προσανατολισμός του  $\Delta = \Delta_q$  είναι μια κλάση ισοδύναμων διατάξεων των κορυφών του. Ένα προσανατολισμένο μονόπλοκο είναι ένα μονόπλοκο εφοδιασμένο με κάποιον προεπιλεγμένο προσανατολισμό.

(ii) Εάν το  $\Delta = \Delta_q$  είναι ένα προσανατολισμένο μονόπλοκο, τότε το συμβολίζουμε ως  $\Delta_q = \langle x_0, \dots, x_q \rangle$  όταν  $\text{vert}(\Delta_q) = \{x_0, \dots, x_q\}$  και όταν η διάταξη  $x_0, \dots, x_q$  ανήκει στον προκαθορισμένο προσανατολισμό.

(iii) Ένα 0-μονόπλοκο  $\sigma_0$  είναι ένα στοιχείο  $x$  ενός ευκλειδείου χώρου· διαθέτει έναν και μόνον προσανατολισμό και (χρ' αυτών τον λόγο) θα γράψουμε  $x$  αντί του  $\langle x \rangle$ . Για  $q > 0$  κάθε  $q$ -μονόπλοκο διαθέτει ακριβώς δύο προσανατολισμούς. Εάν το  $\Delta_q = \langle x_0, \dots, x_q \rangle$  είναι ένα προσανατολισμένο  $q$ -μονόπλοκο, τότε το  $\Delta_q^{-1} = \langle x_1, x_0, x_2, \dots, x_q \rangle$  λέγεται το αντιθέτως προς το  $\Delta_q$  προσανατολισμένο  $q$ -μονόπλοκο.

Ένα προσανατολισμένο 1-μονόπλοκο είναι ένα "κατευθυνόμενο" ευθύγραμμο τμήμα. Ένα προσανατολισμένο 2-μονόπλοκο είναι τρίγωνο εφοδιασμένο με την ωρολογιακή ή αντεωρολογιακή φορά. Οι προσανατολισμοί ενός 3-μονοπλόκου καθορίζονται από τον "κανόνα της κοχλιώσεως".

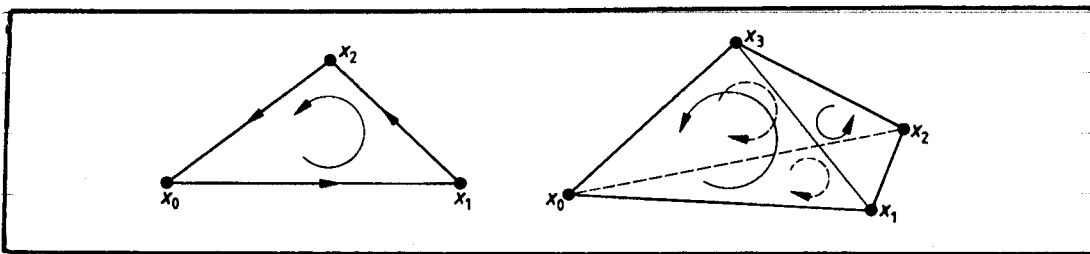




4.5.2. Ορισμός: Εάν το  $\Delta_q$  είναι ένα  $q$ -μονόπλευρο,  $q > 0$ , το  $\Delta_{q-1} \leftarrow \Delta_q$  μια  $(q-1)$ -διάστατη πλευρά του  $\Delta_q$  και το  $x_0 \in \Delta_q$  η κορυφή που δεν ανήκει στο  $\Delta_{q-1}$ , τότε ένας προσανατολισμός του  $\Delta_q$  επαγχεί έναν προσανατολισμό του  $\Delta_{q-1}$ :

Ορίσουμε, για μια δοθείσα διάταξη  $x_0, x_1, \dots, x_q$  των κορυφών του  $\Delta_q$  (σημν οποία συναντούμε το  $x_0$  στην πρώτη θέση), δηλ. για το  $\Delta_q = \langle x_0, x_1, \dots, x_q \rangle$ , τον επαγόμενο προσανατολισμό επί του  $\Delta_{q-1}$  ως εξής:  $\Delta_{q-1} = \langle x_1, \dots, x_q \rangle$ .

Μια περιττή μετάταξη των δεικτών των κορυφών  $x_0, x_1, \dots, x_q$ , η οποία δεν μετακινεί το  $x_0$  από την πρώτη θέση, επαγχεί μια περιττή μετάταξη των δεικτών των κορυφών  $x_1, \dots, x_q$ . Ως εκ τούτου, ο ανωτέρω προσανατολισμός του  $\Delta_{q-1}$  είναι μονοσήμαντως ορισμένος. Τα κατωτέρω σχήματα αποσαφηνίζουν τους επαγόμενους προσανατολισμούς επί των πλευρών των μονόπλευρων στις περιπτώσεις όπου  $q=2$  και  $q=3$ , αντιστοίχως.



4.5.3. Λήμμα: Εάν το  $\Delta_q = \langle x_0, \dots, x_q \rangle$ ,  $q \geq 2$ , είναι ένα προσανατολισμένο  $q$ -μονόπλευρο, τότε το πλευρικό του  $(q-1)$ -μονόπλευρο  $\Delta_{q-1}^i$  που αντίκειται στην κορυφή  $x_i$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, q\}$ , εφοδιασμένο με τον επαγόμενο προσανατολισμό, ισούται με το  $\langle x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_q \rangle^{(-1)^i}$ .

Απόδειξη: Κατόπιν  $i$  εναλλαγών έπεται ότι  $\Delta_{q-1}^i = \langle x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_q \rangle^{(-1)^i}$ .  $\square$

4.5.4. Ορισμός: Έστω  $R$  ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονοδιαίο πολλαπλασιαστικό στοιχείο και έστω  $K$  ένα μονοπλευρικό

σύμπλοκα (υπό την έννοια του οπρ. 1.20.18, σελ. 93). Τότε για κάθε  $q \in \mathbb{Z}$  ορίζουμε τον  $R$ -μόδιο  $C_q(K; R)$  ως ακολούθως:

(i) Για  $q < 0$  και  $q > \dim(K)$  θέτουμε  $C_q(K; R) := \{0\}$ .

(ii)  $C_0(K; R) := F_R(\text{Invert}(s) \mid s \in K)$  (= ο ελεύθερος  $R$ -μόδιος ο παραγόμενος από το σύνολο των κορυφών του  $K$ ).

(iii) Για  $0 < q \leq \dim(K)$  θέτουμε

$$C_q(K; R) := \bigoplus \left\{ R \Delta_q / R(\Delta_{q+\Delta_{q-1}}) \mid \Delta_q \text{ προσανατολισμένο } q\text{-μονόπλοκο του } K \right\}.$$

Κάθε στοιχείο του  $C_q(K; R)$  καλείται μονοπλεκτική  $q$ -αλυσίδα με συντελεστές ειλημμένους από τον  $R$  (και ο  $C_q(K; R)$  μόδιος των μονοπλεκτικών  $q$ -αλυσίδων του  $K$  με συντελεστές ειλημμένους από τον  $R$ .) Εν συνεχεία, για κάθε  $q \in \mathbb{Z}$  ορίζουμε τον ομομορφισμό  $R$ -μοδίων

$$d_q^{\text{simp}} = d_{K,q}^{\text{simp}} : C_q(K; R) \longrightarrow C_{q-1}(K; R) \quad \text{θέτοντας}$$

$$d_q^{\text{simp}} := 0, \text{ για } q \leq 0, \text{ και για } q > 0,$$

$$d_q^{\text{simp}}(\langle x_0, \dots, x_q \rangle) := \sum_{i=0}^q (-1)^i \langle x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_q \rangle$$

επί των γεννητόρων (προσανατολισμένων  $q$ -μονοπλόκων)  $\langle x_0, \dots, x_q \rangle$  του  $C_q(K; R)$  και μέσω γραμμικής επέκτασης (επί ολοκλήρου του  $C_q(K; R)$ ), πρβλ. [ΣΟΑ], 1.6.14, σελ. 45.

**4.5.5. Πρόταση:** Η ακολουθία  $R$ -μοδίων και ομομορφισμών  $R$ -μοδίων

$$\dots \xrightarrow{d_{q+1}^{\text{simp}}} C_q(K; R) \xrightarrow{d_q^{\text{simp}}} C_{q-1}(K; R) \xrightarrow{d_{q-1}^{\text{simp}}} C_{q-2}(K; R) \xrightarrow{d_{q-2}^{\text{simp}}} \dots$$

αποτελεί αλυσωτό σύμπλοκο.

Απόδειξη: Προς τούτο αρκεί να δείχθει ότι  $(d_{q-1}^{\text{simp}} \circ d_q^{\text{simp}})(\Delta_q) = 0$  για κάθε  $q \geq 1$  και για κάθε προσανατολισμένο  $q$ -μονόπλοκο  $\Delta_q = \langle x_0, \dots, x_q \rangle \in C_q(K; R)$ . Για  $q \geq 1$  και ένα τέτοιο  $\Delta_q$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
 (d_{q-1}^{\text{simp}} \circ d_q^{\text{simp}})(\Delta_q) &= d_{q-1}^{\text{simp}} \left( \sum_{i=0}^q (-1)^i \langle x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_q \rangle \right) \\
 &= \sum_{i=0}^q (-1)^i d_{q-1}^{\text{simp}} (\langle x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_q \rangle) \\
 &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \left( \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \langle \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots \rangle + \sum_{j=i+1}^q (-1)^{j-1} \langle \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots \rangle \right) \\
 &= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} \langle \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots \rangle + \sum_{j > i} (-1)^{i+j-1} \langle \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots \rangle = 0. \quad \square
 \end{aligned}$$

4.5.6. Ορισμός: Εάν η  $\varphi: K \rightarrow L$  είναι μια μονοπλεκτική απεικόνιση (υπό την έννοια του ορισ. 1.20.24, σελ. 97) μεταξύ δυο μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων, τότε για κάθε  $q \in \mathbb{Z}$  ορίζουμε έναν ομομορφισμό  $\mathbb{R}$ -μοδίων  $C_q(\varphi): C_q(K; \mathbb{R}) \rightarrow C_q(L; \mathbb{R})$  ως ακολούθως:

(i) Για  $q < 0$  και  $q > \dim(K)$ ,  $C_q(\varphi) = 0$ .

(ii) Για  $0 \leq q \leq \dim(K)$  και  $\Delta_q = \langle x_0, \dots, x_q \rangle$  οιοδήποτε προσανατολισμένο  $q$ -μονόπλοκο του  $K$ , θέτουμε

$$C_q(\varphi)(\Delta_q) := \begin{cases} \langle \varphi(x_0), \dots, \varphi(x_q) \rangle, & \text{όταν } \varphi(x_i) \neq \varphi(x_j), \text{ για } i \neq j, \\ 0 & \text{, εναντίως περίπτωσης} \end{cases}$$

(σε "επίπεδο αντιπροσώπων κλάσεων ισοδυναμίας")

και επεκτείνουμε την  $C_q(\varphi)$  γραμμικώς επί ολοκληρώου του  $C_q(K; \mathbb{R})$ .

4.5.7. Λήμμα: Εάν η  $\varphi: K \rightarrow L$  είναι μια μονοπλεκτική απεικόνιση μεταξύ δυο μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων  $K$  και  $L$ , τότε για κάθε  $q \in \mathbb{Z}$  ισχύει η ισότητα

$$d_{L,q}^{\text{simp}} \circ C_q(\varphi) = C_{q-1}(\varphi) \circ d_{K,q}^{\text{simp}}.$$

Απόδειξη: Αρκεί να δείχθει η ισότητα για  $q \geq 1$  και μόνον για τα προσανατολισμένα  $q$ -μονοπάκια  $\langle x_0, \dots, x_q \rangle \in C_q(K; R)$ .

Εάν οι κορυφές  $\varphi(x_0), \dots, \varphi(x_q)$  είναι διακεκριμένες ή εάν τουλάχιστον τρεις εφ αυτών ταυτίζονται, τότε η ισότητα είναι αληθής εφ ορισμού. Στην περίπτωση κατά την οποία μόνον δύο εφ αυτών ταυτίζονται, τότε μπορούμε δίχως βλάβη της γενικότητας (δηλαδή, εν ανάγκη, ύστερα από αναδιάταξη δείκτων) να υποθέσουμε ότι

$$\varphi(x_0) = \varphi(x_1). \text{ Τότε } C_q(\varphi)(\langle x_0, \dots, x_q \rangle) = 0 \Rightarrow d_{i,q}^{\text{simp}}(C_q(\varphi)\langle x_0, \dots, x_q \rangle) = 0$$

και

$$d_q^{\text{simp}}(\langle x_0, \dots, x_q \rangle) = \langle x_1, x_2, \dots, x_q \rangle - \langle x_0, x_2, \dots, x_q \rangle + \sum_{i=2}^q (-1)^i \langle x_0, x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_q \rangle.$$

Οι εικόνες των δύο πρώτων μονοπατίων μέσω της  $C_{q-1}(\varphi)$  είναι ίσες, ενώ η εικόνα καθενός των μονοπατίων του αθροίσματος μέσω της  $C_{q-1}(\varphi)$  είναι μηδέν. Συνεπώς,  $C_{q-1}(\varphi)(d_q^{\text{simp}}(\langle x_0, \dots, x_q \rangle)) = 0$ .  $\square$

4.5.8. Λήμμα: Εάν τα  $K, L, P$  είναι τρία μονοπαλεκτικά συμπλέγματα, τότε ισχύουν τα εφής:

(i)  $C_q(\text{Id}_K) = \text{Id}_{C_q(K)}, \forall q \in \mathbb{Z}$ .

(ii) Εάν οι  $\varphi: K \rightarrow L, \psi: L \rightarrow P$  είναι δύο μονοπαλεκτικές απεικονίσεις, τότε  $C_q(\psi \circ \varphi) = C_q(\psi) \circ C_q(\varphi), \forall q \in \mathbb{Z}$ .

Απόδειξη: Αφήνεται ως άσκηση.  $\square$

4.5.9. Ορισμός: Έστω  $K' \subseteq K$  ένα υποσυμπλέγμα ενός μονοπαλεκτικού συμπλέγματος (υπό την έννοια του ορισ. 1.20.26, σελ. 98). Το ανυσωτό σύμπλοκο  $(C_*(K'; R), d_*^{\text{simp}}|_{C_*(K'; R)})$  δίνει υποσύμπλοκο του  $(C_*(K; R), d_*^{\text{simp}})$  (βλ. 4.5.7 και [ΣΣΟΑ], ορισ. 2.3.12, σελ. 101). Ως εκ τούτου, ορίζεται το πηλικοσύμπλοκο

$$(C_*(K, K'; R) := C_*(K; R) / C_*(K'; R), \bar{d}_*^{\text{simp}})$$

όπου ο συνοριακός τελεστής  $\bar{d}_{K, K', q}^{\text{simp}} = \bar{d}_q^{\text{simp}}$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ , είναι ο μονοσημάντως ορισμένος ομομορφισμός  $\mathbb{R}$ -μοδίων που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} C_q(K; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\bar{d}_q^{\text{simp}}} & C_{q-1}(K; \mathbb{R}) \\ \text{φυσικός} \downarrow & \text{C} & \downarrow \text{φυσικός} \\ C_q(K, K'; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\bar{d}_q^{\text{simp}}} & C_{q-1}(K, K'; \mathbb{R}) \end{array}$$

φυσικός ομομορφισμός

μεταθετικό. Το  $\mathbb{R}$ -πλοκυσώμπλοκο  $C_q(K, K'; \mathbb{R})$  καλείται δυναμικό μονοπλευκτικό αλυσωτό σύμπλοκο του ζεύγους  $(K, K')$  με τους συντελεστές ελημμένους από τον  $\mathbb{R}$ .

4.5.10. Ορισμός: Έστω  $K' \subseteq K$  ένα υποσύμπλοκο ενός μονοπλευκτικού συμπλέγματος  $K$  και έστω  $L' \subseteq L$  ένα υποσύμπλοκο ενός μονοπλευκτικού συμπλέγματος  $L$ . Εάν η  $\varphi: K \rightarrow L$  είναι μια μονοπλευκτική απεικόνιση και  $\varphi(K') \subseteq L'$ , τότε για κάθε  $q \in \mathbb{Z}$  ορίζουμε έναν ομομορφισμό  $\mathbb{R}$ -μοδίων

$$C_q(\bar{\varphi}): C_q(K, K'; \mathbb{R}) \longrightarrow C_q(L, L'; \mathbb{R})$$

μέσω του τύπου

$$C_q(\bar{\varphi})(\delta_q + C_q(K'; \mathbb{R})) := \varphi(\delta_q) + C_q(L'; \mathbb{R})$$

Επί των γεννητόρων  $\delta_q$  του  $C_q(K; \mathbb{R})$  και μέσω γραμμικής επέκτασής (επί ολοκληρώ του  $C_q(K; \mathbb{R})$ ) όταν  $q \geq 0$ , ενώ θέτουμε  $C_q(\bar{\varphi}) := 0$ , για  $q < 0$ .

4.5.11. Λήμμα: Εάν το  $K'$  (και αντιστοίχως,  $L'$ ) είναι ένα υποσύμπλοκο ενός μονοπλευκτικού συμπλέγματος  $K$  (και αντ.,  $L$ ) και  $\varphi: K \rightarrow L$  μια μονοπλευκτική απεικόνιση με  $\varphi(K') \subseteq L'$ , τότε για κάθε  $q \in \mathbb{Z}$  ισχύει η ισότητα:

$$\bar{d}_{L, L', q}^{\text{simp}} \circ C_q(\bar{\varphi}) = C_{q-1}(\bar{\varphi}) \circ \bar{d}_{K, K', q}^{\text{simp}}$$

Απόδειξη: Αφήνεται ως άσκηση.  $\square$

4.5.12. Πρόταση: Έστω ότι τα  $K, L$  είναι δυο μονοπλεκτικά συμπλέγματα και ότι η  $\varphi: K \rightarrow L$  είναι μια μονοπλεκτική απεικόνιση. Τότε ισχύουν τα εξής:

- (i) Η  $G_*(\varphi): G_*(K; R) \rightarrow G_*(L; R)$  αποτελεί αλυσωτό μετασχηματισμό (βλ. [ΣΟΑ], ορισ. 2.3.19, σελ. 105).
- (ii) Εάν το  $K'$  (και αντιστοίχως, το  $L'$ ) είναι ένα υποσύμπλεγμα του  $K$  (και αντιστοίχως, του  $L$ ) και  $\varphi(K') \subseteq L'$ , τότε η  $G_*(\overline{\varphi}): G_*(K, K'; R) \rightarrow G_*(L, L'; R)$  αποτελεί ως αλυσωτό μετασχηματισμό.

Απόδειξη: Έπεται άμεσα από τα λήμματα 4.5.7 και 4.5.11.  $\square$

4.5.13. Λήμμα: Εάν τα  $K', L'$  και  $P'$  είναι υποσύμπλεγματα των μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων  $K, L$  και  $P$ , αντιστοίχως, τότε ισχύουν τα εξής:

- (i)  $G_q(\text{Id}_{K, K'}) = \text{Id}_{G_q(K, K'; R)}, \forall q \in \mathbb{Z}$ .
- (ii) Εάν οι  $\varphi: K \rightarrow L, \psi: L \rightarrow P$  είναι μονοπλεκτικές απεικονίσεις με  $\varphi(K') \subseteq L'$  και  $\psi(L') \subseteq P'$ , τότε
- $$G_q(\overline{\psi \circ \varphi}) = G_q(\overline{\psi}) \circ G_q(\overline{\varphi}), \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Απόδειξη: Αφήνεται ως άσκηση.  $\square$

4.5.14. Πρόταση: Έστω  $\text{Com}^{\alpha, \lambda}(\text{Mod}_R)$  η κατηγορία των αλυσωτών συμπλόκων  $R$ -μοδίων και ομομορφισμών  $R$ -μοδίων (βλ. [ΣΟΑ], 6.1.6(v)). Έστω  $\text{SComp}$  η κατηγορία των μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων (βλ. 1.20.25 (iii), σελ. 97) και έστω  $\text{SComp}^{(2)}$  η κατηγορία ζευγών τέτοιων συμπλεγμάτων (με αντικείμενα της ζεύξης  $(K, K')$ , όπου  $K'$  υποσύμπλεγμα του  $K$ ). Τότε ο  $G_*: \text{SComp} \rightsquigarrow \text{Com}^{\alpha, \lambda}(\text{Mod}_R)$  (και αντιστοίχως, ο  $G_*: \text{SComp}^{(2)} \rightsquigarrow \text{Com}^{\alpha, \lambda}(\text{Mod}_R)$ ) με

$$\text{Ob}(\text{SComp}) \ni K \mapsto G_*(K; R) \in \text{Ob}(\text{Com}^{\alpha, \lambda}(\text{Mod}_R))$$

$$\varphi \in \text{Mor}_{\text{SComp}}(K, L) \mapsto G_*(\overline{\varphi}) \in \text{Mor}_{\text{Com}^{\alpha, \lambda}(\text{Mod}_R)}(G_*(K; R), G_*(L; R))$$

(και αντιστοίχως, με  
 $\text{Ob}(S\text{Comp}^{(2)}) \ni (K, K') \mapsto C_*(K, K'; R) \in \text{Ob}(C\text{om}^{(2)}(\text{Mod}_R))$   
 $\varphi \in \text{Mor}_{S\text{Comp}^{(2)}}((K, K'), (L, L')) \mapsto C_*(\bar{\varphi}) \in \text{Mor}_{C\text{om}^{(2)}(\text{Mod}_R)}(C_*(K, K'; R), C_*(L, L'; R))$ )  
 είναι ένας συναρροίωτος συνάρτησις (βλ. [ΣΟΑ] ορσ. 6.2.1).

Απόδειξη: Άμεση απόρροια των λημμάτων 4.5.8 και 4.5.13.  $\square$

4.5.15. Ορισμός: Έστω  $X$  ένας τριγωνισμός τοπολογικός χώρος (= τοπολογικό πεδύεδρο) και έστω  $|K| \xrightarrow{\cong} X$  ένας τριγωνισμός του (βλ. 1.20.20, σελ. 93). Ως  $q$ -οστό μονοπλεκτικό μέδιο ομολογίας  $H_q^{\text{Simp}}(X; R)$  του  $X$  με συντελεστές ειλημμένους από τον  $R$  ορίζουμε τον  $R$ -μέδιο

$$H_q^{\text{Simp}}(X; R) := H_q(C_*(K; R)) \quad (q \in \mathbb{Z})$$

ήτοι τον  $q$ -οστό μέδιο ομολογίας του αλυσωτού συμπλόκου  $(C_*(K; R), d_*^{\text{Simp}})$  (βλ. πρόταση 4.5.5, σελ. 298, και [ΣΟΑ] ορσ. 2.3.2, σελ. 92).

Εξ ορισμού,  $H_q^{\text{Simp}}(X; R) := Z_q^{\text{Simp}}(X; R) / B_q^{\text{Simp}}(X; R)$ , όπου

$$Z_q^{\text{Simp}}(X; R) := Z_q(C_*(K; R)) := \text{Ker}(d_q^{\text{Simp}})$$

ο  $R$ -μέδιος των μονοπλεκτικών  $q$ -οστών κυκλημάτων του  $X$  και

$$B_q^{\text{Simp}}(X; R) := B_q(C_*(K; R)) := \text{Im}(d_{q+1}^{\text{Simp}})$$

ο  $R$ -μέδιος των μονοπλεκτικών  $q$ -οστών συνόρων του  $X$ .

4.5.16. Ορισμός. Εάν  $(X, A) \in \text{Ob}(\text{Top}_{\text{pol}}^{(2)})$  (βλ. 1.20.26, σελ. 98 και 2.1.3 (iii), σελ. 119) και  $(K, K') \in \text{Ob}(S\text{Comp}^{(2)})$  με  $|K| \cong X$  και  $|K'| \cong A$ , τότε ορίζουμε κατ' αναλογία ως  $q$ -οστό (σχεακό) μονοπλεκτικό μέδιο ομολογίας  $H_q^{\text{Simp}}(X, A; R)$  του  $(X, A)$  με συντελεστές ειλημμένους από τον  $R$  τον  $R$ -μέδιο

$$H_q^{\text{Simp}}(X, A; R) := H_q(C_*(K, K'; R)) \quad (q \in \mathbb{Z})$$

ήτοι τον  $q$ -οστό μέδιο ομολογίας του αλυσωτού συμπλόκου  $(C_*(K, K'; R), d_*^{\text{Simp}})$ .

4.5.17. Σημείωση: Εάν  $\varphi \in \text{Mor}_{\text{SComp}^{(2)}}((K, K'), (L, L'))$  και  $|\varphi| \in \text{Mor}_{\text{Top}_{\text{pol}}^{(2)}}(\underbrace{(|K|, |K'|)}_{\cong \tilde{X}}, \underbrace{(|L|, |L'|)}_{\cong \tilde{Y}})$  όπως στο 1.20.27, σελ. 98,

τότε μέσω του ανωτέρω μετασχηματισμού

$$C_*(\bar{\varphi}) : C_*(K, K'; R) \rightarrow C_*(L, L'; R)$$

επάχεται ένας μονοσήμαντος ορισμένος ομομορφισμός  $R$ -μοδίων

$$H_q^{\text{Simp}}(|\varphi|) := H_q(C_*(\bar{\varphi})) : H_q^{\text{Simp}}(X, A; R) \rightarrow H_q^{\text{Simp}}(Y, B; R)$$

για κάθε  $q \in \mathbb{Z}$ , ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} Z_q^{\text{Simp}}(X, A; R) := Z_q(C_*(K, K'; R)) & \xrightarrow{C_q(\bar{\varphi})|_{Z_q^{\text{Simp}}(X, A; R)}} & Z_q^{\text{Simp}}(Y, B; R) \\ \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \\ H_q^{\text{Simp}}(X, A; R) & \xrightarrow{H_q^{\text{Simp}}(|\varphi|)} & H_q^{\text{Simp}}(Y, B; R) \end{array}$$

μεταθετικό (βλ. [ΣΟΑ], πρόταση 2.3.6, σελ. 94-95).

4.5.18. Θεώρημα: Εάν  $(X, A) \in \text{Ob}(\text{Top}_{\text{pol}}^{(2)})$  και  $(K, K') \in \text{Ob}(\text{SComp}^{(2)})$  με  $X \cong |K|$  και  $A \cong |K'|$ , και εάν οι  $i : K' \hookrightarrow K$ ,  $j : K \hookrightarrow (K, K')$  είναι οι συνήθεις ενθέσεις, τότε υφίσταται μια μακρά ακριβής ακολουθία

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_{q+1}^{\text{Simp}}(X, A)} & H_q^{\text{Simp}}(A; R) & \xrightarrow{H_q^{\text{Simp}}(i)} & H_q^{\text{Simp}}(X; R) & \xrightarrow{H_q^{\text{Simp}}(j)} & \dots \\ & & \searrow & & \swarrow & & \\ & & H_q^{\text{Simp}}(X, A; R) & \xrightarrow{\partial_q^{\text{Simp}}} & H_{q-1}^{\text{Simp}}(A; R) & \xrightarrow{H_{q-1}^{\text{Simp}}(i)} & \dots \end{array}$$

Απόδειξη: Αρκεί κανείς να θεωρήσει τη μακρά ακριβή ακολουθία την επαγομένη μέσω της βραχείας ακριβούς ακολουθίας ανωτέρων συμπλόκων

$$0 \rightarrow C_*(A; R) \xrightarrow{C_*(i)} C_*(X; R) \xrightarrow{C_*(j)} C_*(X, A; R) \rightarrow 0$$

(βλ. [ΣΟΑ], Θεώρημα 2.3.11, σελ. 97-100) και να θέσει

$$\partial_q^{\text{Simp}}(X, A) := \partial_q(C_*(X, A; R)) = \text{ο συνδετικός ομομορφισμός τις εν λόγω μακράς ακριβούς ακολουθίας. } \square$$



4.5.19. Σημείωση:

Μέσω των συναλλοίωτων συναρτητών

$$\begin{array}{ccc}
 S \text{Comp}^{(2)} & \xrightarrow{\quad} & \text{Top}_{\text{pol.}}^{(2)} & \xrightarrow{\quad} & \text{Mod}_R \\
 \downarrow c & & \text{(1.20.27, σελ. 98)} & & \nearrow \\
 \text{Com}^{\alpha\lambda}(\text{Mod}_R) & & & & H_q(-)
 \end{array}$$

Κατασκευάζεται ο συναλλοίωτος συναρτητής

$$H_0^{\text{Simp}} : \text{Top}_{\text{pol.}}^{(2)} \xrightarrow{\quad} \mathbb{Z}\text{-Mod}$$

4.5.20. Πρόταση: Έστω  $\Psi$  ο συναρτητής ο συναρτητής, ο οποίος αντιστοιχεί σε κάθε  $(X, A) \in \text{Ob}(\text{Top}_{\text{pol.}}^{(2)})$  τον  $A (= (A, \phi))$ . Τότε μέσω των συναρτητικών τελεστών  $\partial_q^{\text{Simp}}(X, A)$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ , της μακράς ακριβούς ακολουθίας του θεωρήματος 4.5.18 ορίζεται ένας φυσικός μετασχηματισμός

$$\partial_0^{\text{Simp}} : H_0^{\text{Simp}} \rightarrow H_0^{\text{Simp}} \circ \Psi$$

Απόδειξη: Αφήνεται ως άσκηση.  $\square$ 

4.5.21. Θεώρημα: Το ζεύγος  $(H_0^{\text{Simp}}, \partial_0^{\text{Simp}})$  το εισαχθέν στα 4.5.19 και 4.5.20 αποτελεί μια  $R$ -θεωρία ομολογίας επί της (ομολογικώς επιτρεπτής) κατηγορίας  $\text{Top}_{\text{pol.}}^{(2)}$  (υπό την έννοια του ορισμού 2.1.6, σελ. 119-121).

Απόδειξη: Το  $(H_0^{\text{Simp}}, \partial_0^{\text{Simp}})$  πληροί το αξίωμα  $(A1)$  επί τη βάση του θεωρήματος 4.5.18. Για την απόδειξη του ότι πληροί και τα άλλα απαιτούμενα αξιώματα βλ. π.χ. J.R. Munkres: "Elements of Algebraic Topology", Addison-Wesley, 1984, Ch. 3, Thm. 27.1, σελ. 151-153.  $\square$

4.5.22. Ορισμός: Έστω  $K$  ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα. Μια διάταξη " $<$ " επί του  $K$  είναι μια μερική διάταξη των κορυφών του  $K$ , τέτοια ώστε οι κορυφές καθενός μονοπλόκου του  $K$  να είναι ολικώς (= γραμμικώς) διατεταγμένες ως προς αυτήν. (Για δοθέν  $K$  υπάρχουν πάντοτε τέτοιες " $<$ ".)

4.5.23. Ορισμός: Έστω " $<$ " μια διάταξη επί ενός μονοπλεκτικού συμπλέγματος  $K$ . Διατάσσοντας τις κορυφές  $x_0, \dots, x_q$  (ως προς την " $<$ ", με  $x_0 < x_1 < \dots < x_q$ ) καθενός  $q$ -μονοπλόκου  $\Delta_q$  του  $K$  επιτυγχάνεται ο προσανατολισμός όλων των μονοπλόκων του  $K$ . Ορίζουμε έναν ομομορφισμό  $R$ -μοδίων  $C_q^<: C_q(K; R) \rightarrow S_q(|K|; R)$  μέσω του τύπου  $\Delta_q = \langle x_0, x_1, \dots, x_q \rangle \mapsto ([x_0, x_1, \dots, x_q]: \Delta_q \rightarrow |K|)$  και μέσω γραμμικής επέκτασης. (Εν προκειμένω, η  $[x_0, \dots, x_q]$  είναι η γραμμική απεικόνιση που στέλνει τα  $e_i$  στα  $x_i$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, q\}$ , και είναι μονοσημάντως ορισμένη λόγω της θεώρησης της διάταξης " $<$ ".)

4.5.24. Θεώρημα: Έστω " $<$ " μια διάταξη επί ενός μον. συμπ.  $K$ .

(i) Οι επαχόμενοι ομομορφισμοί  $R$ -μοδίων

$$\begin{array}{ccc} H_q(C_q^<) : H_q(C_q(K; R)) & \rightarrow & H_q(S_q(|K|; R)) \\ & \Downarrow \text{!!} & \Downarrow \text{!!} \\ H_q^{\text{simp}}(|K|; R) & & H_q^{\text{sing}}(|K|; R) \end{array}$$

είναι ισομορφισμοί (και ανεξάρτητοι της επιλογής της " $<$ "),  $\forall q \in \mathbb{Z}$ .

(ii) Εάν το  $K'$  είναι ένα υποσύμπλεγμα του  $K$ , τότε οι ομομορφισμοί  $R$ -μοδίων  $H_q(C_q^<): H_q^{\text{simp}}(|K|, |K'|; R) \rightarrow H_q^{\text{sing}}(|K|, |K'|; R)$  είναι πωσάτως ισομορφισμοί (και ανεξάρτητοι της " $<$ "),  $\forall q \in \mathbb{Z}$ .

Απόδειξη: Βλ. J.R. Munkres ό.π., §34, σελ. 190-195.  $\square$

Βάσει των 4.5.24 και 4.2.10, σελ. 244, καταλήγουμε εύκολα στο:

4.5.26. Πρόταση: Η μονοπλεκτική θεωρία ομολογίας είναι ισοδύναμη με τον περιορισμό τόσο της ιδιότητας όσο και της κυτταρικής θεωρίας ομολογίας επί της (ομολογικώς επιτρεπτής) κατηγορίας  $\text{Top}_{\text{pol}}^{(2)}$ . (Η εν λόγω ισοδυναμία διατηρείται ακόμη και εάν υποθέσουμε ότι οι συντελεστές λαμβάνονται από οιοδήποτε  $R$ -μόδιο  $M$ .)