ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ιδιάζουσα Θεωρία Ομολογίας

Στο κεφάλαιο 2 είχαμε ήδη προαναγγείλει την *ύπαρξη* θεωριών ομολογίας. Το παρόν κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στην παρουσίαση τού (εν πολλοίς κατασκευαστικού) ορισμού τής λεγομένης «ιδιάζουσας θεωρίας ομολογίας», στη λεπτομερή απόδειξη τού ότι αυτή πληροί τα πέντε αξιώματα των Eilenberg και Steenrod, καθώς και στη μελέτη περαιτέρω ιδιοτήτων και εφαρμογών της. Η εν λόγω θεωρία ομολογίας ορίζεται επί τής μεγίστης δυνατής (ομολογικώς) επιτρεπτής κατηγορίας, ήτοι εκείνης *όλων* των τοπολογικών ζευγών.

Παρότι, από ιστορική σκοπιά, έλαβε την οριστική, γεωμετρική μορφή εισαγωγής της πολύ αργότερα από εκείνην τής «μονοπλεκτικής θεωρίας ομολογίας», και συγκεκριμένα μέσω τού άρθρου τού

- S. Eilenberg: *Singular homology*, Ann. of Math. **45** (1944), 407-447,

(ο οποίος βελτίωσε αισθητά κάποιες αρχικές ιδέες τού S. Lefschetz των αρχών τής δεκαετίας τού 1930), η πρόταξή της κρίνεται ως παιδαγωγικώς ορθότερη, καθόσον ένα πλήθος τεχνικών αντιμετωπίσεως των προκυπτόντων προβλημάτων χρησιμοποιούν μόνον μέσα προερχόμενα από γνώσεις στοιχειωδών εννοιών και αποτελεσμάτων τής Ομολογικής Άλγεβρας.

§ 3.1 Το ιδιάζον αλυσωτό σύμπολοκο ενός τοπολογικού ζεύγους

Προτιθέμεθα αρχικώς να αντιστοιχίσουμε σε κάθε τοπολογικό ζεύγος ένα ειδικό *αλυσωτό σύμπλοκο* (βλ. [ΣΟΑ, 2.3.1, σελ. 92]), στον ορισμό τού οποίου υπεισέρχονται κατά τρόπο ουσιαστικό οι γεωμετρικές ιδιότητες των *θεμελιακών μονοπλόκων*.

3.1.1 Ορισμός. Έστω $q \in \mathbb{N}_0$. Στον $\mathbb{R}^{q+1}$ ορίζουμε τα διανύσματα:

$$e_0^q := \underbrace{(1,0,\dots,0)}_{q+1 \text{ συντεταγμένες}}, \quad e_1^q := \underbrace{(0,1,0,\dots,0)}_{q+1 \text{ συντεταγμένες}}, \quad \dots, \quad e_q^q := \underbrace{(0,0,\dots,0,1)}_{q+1 \text{ συντεταγμένες}}$$

και ονομάζουμε

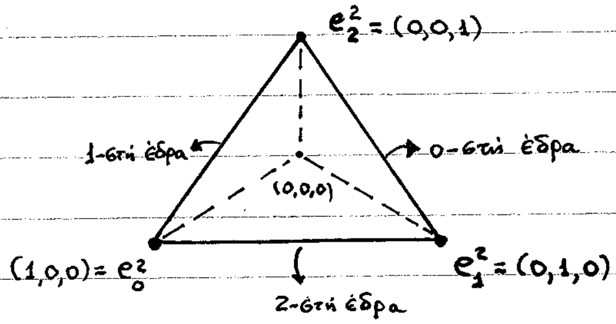
το

$$\boxed{\Delta_q := [e_0^q, e_1^q, \dots, e_q^q] = \left\{ \sum_{j=0}^{q} t_j e_j^q \;\middle|\; t_j \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ \forall j \in \{0,\dots,q\}, \text{ και } \sum_{j=0}^{q} t_j = 1 \right\}}$$

<u>θεμελιακό q-μονόπλοκο</u> (πρβλ. συμβολισμούς τού 1.20.11, σελ. 90).

Για οποιοδήποτε $i \in \{0,\dots,q\}$ το υποσύνολο $[e_0^q, e_1^q, \dots, \hat{e}_i^q, \dots, e_q^q]$ του Δ_q (όπου το σύμβολο $\hat{e}_i^q$ σημαίνει την παράλειψη του e_i^q) είναι <u>η i-οστή έδρα του Δ_q</u> (ήτοι η έδρα του Δ_q η αντικείμενη του e_i^q).

<u>Σχήμα (Δ_2 εντός του $\mathbb{R}^3$)</u>:



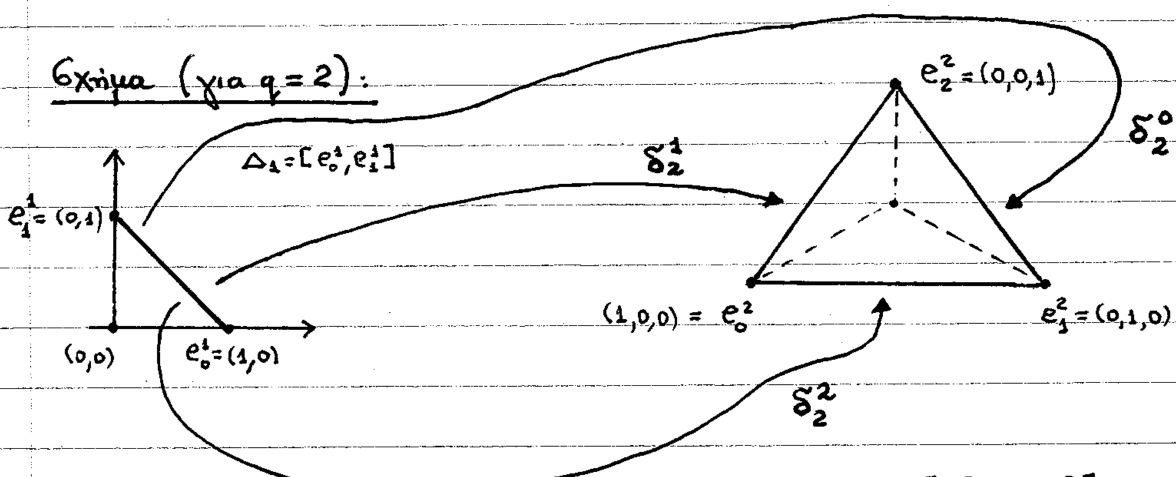
<u>3.1.2. Ορισμός.</u> Έστω $q \in \mathbb{N}$. Για κάθε $j \in \{0,1,\dots,q\}$ ορίζουμε τις απεικονίσεις $\delta_q^j : \Delta_{q-1} \to \Delta_q$ μέσω του τύπου

$$\delta_q^j(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}) := \begin{cases} (0, x_0, x_1, \dots, x_{q-1}), & \text{όταν } j = 0, \\ (x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{q-1}), & \text{όταν } 1 \leq j \leq q-1, \\ (x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, 0), & \text{όταν } j = q. \end{cases}$$

Σημειωτέον ότι $\delta_q^j(e_i^{q-1}) = \begin{cases} e_i^q, & \text{για } i < j \\ e_{j+1}^q, & \text{για } i \geq j \end{cases}, \quad j \in \{0,1,\dots,q\}, \; i \in \{0,1,\dots,q-1\},$

και ότι $\mathrm{Im}(\delta_q^j) =$ η j-οστή έδρα του θεμελιακού q-μονοπλόκου Δ_q.

<u>Σχήμα (για $q = 2$)</u>:



$\Delta_2 = [e_0^2, e_1^2, e_2^2]$

3.1.3. Λήμμα Για $0 \leq k < j \leq q+1$ ισχύει η ακόλουθη ισότητα:

$$\delta^{j}_{q+1} \circ \delta^{k}_{q} = \delta^{k}_{q+1} \circ \delta^{j-1}_{q}.$$

Απόδειξη: Προφανώς, αφού για κάθε e_i^{q-1}, $i \in \{0,1,\dots,q-1\}$ έχουμε

$$e_i^{q-1} \xmapsto{\delta_q^k} \left\{ \begin{array}{l} e_i^q, \text{ όταν } 0 \leq i < k \\ e_{i+1}^q, \text{ όταν } k \leq i \leq q-1 \end{array} \right\} \xmapsto{\delta^j_{q+1}} \left\{ \begin{array}{l} e_i^{q+1}, \text{ όταν } 0 \leq i < k, \\ e_{i+1}^{q+1}, \text{ όταν } k \leq i < j-1, \\ e_{i+2}^{q+1}, \text{ όταν } j-1 \leq i \leq q-1, \end{array} \right.$$

και

$$e_i^{q-1} \xmapsto{\delta_q^{j-1}} \left\{ \begin{array}{l} e_i^q, \text{ όταν } 0 \leq i < j-1 \\ e_{i+1}^q, \text{ όταν } j-1 \leq i \leq q-1 \end{array} \right\} \xmapsto{\delta^k_{q+1}} \left\{ \begin{array}{l} e_i^{q+1}, \text{ όταν } 0 \leq i < k, \\ e_{i+1}^{q+1}, \text{ όταν } k \leq i < j-1 \\ e_{i+2}^{q+1}, \text{ όταν } j-1 \leq i \leq q-1, \end{array} \right.$$

οπότε

$$\left(\delta^j_{q+1} \circ \delta^k_q\right)(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}) = \left(\delta^j_{q+1} \circ \delta^k_q\right)\left(\sum_{i=0}^{q-1} x_i e_i^{q-1}\right) = \delta^j_{q+1}\left(\sum_{i=0}^{j-2} x_i e_i^q + \sum_{i=j-1}^{q-1} x_i e_{i+1}^q\right)$$

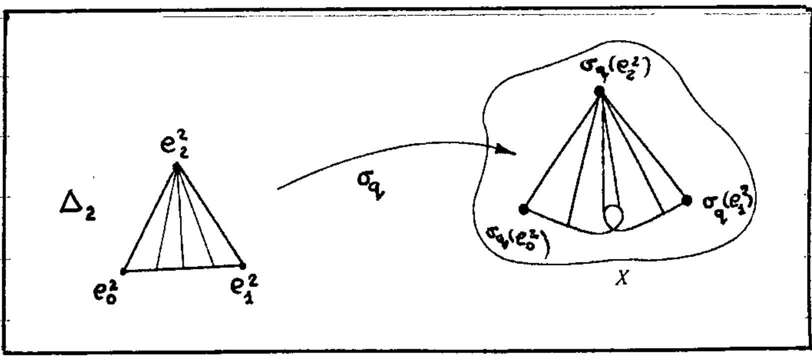
$$= \sum_{i=0}^{k-1} x_i e_i^{q+1} + \sum_{i=k}^{j-2} x_i e_{i+1}^{q+1} + \sum_{i=j-1}^{q-1} x_i e_{i+2}^{q+1} = \delta^k_{q+1}\left(\sum_{i=0}^{j-2} x_i e_i^q + \sum_{i=j-1}^{q-1} x_i e_{i+1}^q\right)$$

$$= \left(\delta^k_{q+1} \circ \delta^{j-1}_q\right)\left(\sum_{i=0}^{q-1} x_i e_i^{q-1}\right) = \left(\delta^k_{q+1} \circ \delta^{j-1}_q\right)(x_0, \dots, x_{q-1}), \ \forall (x_0, \dots, x_{q-1}) \in \Delta_{q-1}.$$

$\square$

3.1.4. Ορισμός. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και έστω $q \in \mathbb{N}_0$. Κάθε συνεχής απεικόνιση $\sigma_q : \Delta_q \to X$ καλείται ιδιάζον q-μονόπλοκο εντός του X.

Σχήμα (για $q=2$):



The moral of the story: Η συνέχεια είναι μια σχετικώς ασθενής συνθήκη, η οποία δεν αποκλείει την ύπαρξη "αυτοδιατομών" και άλλων "ιδιαζόντων" σημείων εντός της $Im(\sigma_q)$.

<u>3.1.5. Ορισμός.</u> Εάν ο R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο πολλαπλασιαστικό στοιχείο, ο X ένας τοπολογικός χώρος και $q \in \mathbb{N}_0$, τότε συμβολίζομε ως $\gamma_q(X)$ το σύνολο όλων των ιδιαζόντων q-μονοπλόκων τού X. Εν συνεχεία, για κάθε $q \in \mathbb{Z}$ ορίζομε τον R-μόδιο:

$$\boxed{S_q(X;R) := \begin{cases} Fr_R(\gamma_q(X)), & \text{όταν } q \in \mathbb{N}_0, \\ \{0\}, & \text{όταν } q \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0, \end{cases}}$$

όπου $Fr_R(\gamma_q(X))$ ο ελεύθερος R-μόδιος επί τού $\gamma_q(X)$ (βλ. [ΣΟΑ], ορισμό 1.6.1, σελ. 38 και Θεώρημα 1.6.5, σελ. 40-41). Κάθε στοιχείο τού $S_q(X;R)$ καλείται <u>q-αλυσίδα εντός τού X με συντελεστές ειλημμένους από τον R</u> (και ο $S_q(X;R)$ <u>μόδιος τών q-αλυσίδων εντός τού X με συντελεστές ειλημμένους από τον R</u>). Σημειωτέον ότι για κάθε $q \in \mathbb{N}_0$ κάθε q-αλυσίδα $s \in S_q(X;R)$ γράφεται μονοσημάντως ως γραμμικός συνδυασμός $s = \sum_{j=1}^{k} r_j \sigma_j$ με $k \in \mathbb{N}$, $r_j \in R$ και $\sigma_j \in \gamma_q(X)$, $\forall j \in \{1,\dots,k\}$. (Βλ. [ΣΟΑ], Θεώρημα 1.6.10, σελ. 42-43.)

Τέλος, για κάθε $q \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τον ομομορφισμό R-μοδίων

$$d_q^{\rm sing} \equiv d_{X,q}^{\rm sing} : S_q(X;R) \longrightarrow S_{q-1}(X;R)$$

μέσω τού τύπου

$$\boxed{d_q^{\rm sing}(\sigma_q) := \sum_{i=0}^{q} (-1)^i (\sigma_q \circ \delta_q^i)}$$

$$\begin{tikzcd} \Delta_q \arrow[r, "\sigma_q"] & X \\ \Delta_{q-1} \arrow[u, "\delta_q^i"] \arrow[ur, "\sigma_q \circ \delta_q^i"'] & \end{tikzcd}$$

επί των γεννητόρων $\sigma_q \in \gamma_q(X)$ τού $S_q(X;R)$ και μέσω γραμμικής επεκτάσεως (επί ολοκλήρου τού $S_q(X;R)$) όταν $q \geq 1$ (πρβλ. [ΣΟΑ], Θεώρημα 1.6.14, σελ. 45) ενώ θέτουμε $d_q^{\rm sing} :=$ ο τετριμμένος ομομορφισμός όταν $q \leq 0$.

<u>3.1.6. Πρόταση:</u> Η ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\cdots \xrightarrow{d_{q+1}^{\rm sing}} S_q(X;R) \xrightarrow{d_q^{\rm sing}} S_{q-1}(X;R) \xrightarrow{d_{q-1}^{\rm sing}} S_{q-2}(X;R) \longrightarrow \cdots$$

αποτελεί αλυσωτό σύμπλοκο (βλ. [ΣΟΑ], ορσ. 2.31, σελ. 92).

<u>Απόδειξη:</u> Προς τούτο αρκεί να δειχθεί ότι $\left(d_{q-1}^{\rm sing} \circ d_q^{\rm sing}\right)\Big|_{\gamma_q(X)} = 0$ για κάθε $q \geq 1$. Για τυχόν $\sigma_q \in \gamma_q(X)$ και $q \geq 1$ έχουμε

$$d^{sing}_{q-1}\left(d^{sing}_{q}(\sigma_q)\right) = d^{sing}_{q-1}\left(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i(\sigma_q\circ\delta^i_q)\right) = \sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^{i+j}(\sigma_q\circ\delta^i_q\circ\delta^j_{q-1})$$

$$= \sum_{0\leqslant j<i\leqslant q}(-1)^{i+j}(\sigma_q\circ\delta^i_q\circ\delta^j_{q-1}) + \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant q-1}(-1)^{i+j}(\sigma_q\circ\delta^i_q\circ\delta^j_{q-1})$$

$$= \sum_{0\leqslant j<i\leqslant q}(-1)^{i+j}(\sigma_q\circ\delta^j_q\circ\delta^{i-1}_{q-1}) + \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant q-1}(-1)^{i+j}(\sigma_q\circ\delta^i_q\circ\delta^j_{q-1})$$

(Εφαρμογή του λήμματος 3.1.3 για το πρώτο άθροισμα με $k=j$ και i αντί του j)

$$= -\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant q-1}(-1)^{i+j}(\sigma_q\circ\delta^i_q\circ\delta^j_{q-1}) + \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant q-1}(-1)^{i+j}(\sigma_q\circ\delta^i_q\circ\delta^j_{q-1}) = 0$$

(Εδώ στο πρώτο άθροισμα θέτουμε i αντί του j και $j+1$ αντί του i). □

<u>3.1.7. Ορισμός.</u> Εάν η $f\colon X\to Y$ είναι μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ δυο τοπολογικών χώρων X, Y και $q\in\mathbb{Z}$, τότε ορίζουμε έναν ομομορφισμό R-μοδίων $S_q(f)\colon S_q(X;R)\longrightarrow S_q(Y;R)$ μέσω του τύπου $\boxed{S_q(f)(\sigma_q) := f\circ\sigma_q}$ επί των γεννητόρων $\sigma_q\in\gamma^e_q(X)$ του $S_q(X;R)$ και μέσω γραμμικής επεκτάσεως (επί ολοκλήρου του $S_q(X;R)$) όταν $q\geqslant 0$ (βλ. [ΣΟΑ], θεώρημα 1.6.14, σελ. 45), ενώ θέτουμε $S_q(f) :=$ ο τετριμμένος ομομορφισμός για $q<0$.

<u>3.1.8 Λήμμα:</u> Εάν η $f\colon X\to Y$ είναι μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ δυο τοπολογικών χώρων X, Y, τότε για κάθε $q\in\mathbb{Z}$ ισχύει η ισότητα:

$$\boxed{d^{sing}_{Y,q}\circ S_q(f) = S_{q-1}(f)\circ d^{sing}_{X,q}}$$

<u>Απόδειξη:</u> Αρκεί να δειχθεί η ισότητα για $q\geqslant 1$ και μόνον για τα στοιχεία του $\gamma^e_q(X)$. Για τυχόν $\sigma_q\in\gamma^e_q(X)$ έχουμε

$$d^{sing}_{Y,q}\left(S_q(f)(\sigma_q)\right) = d^{sing}_{Y,q}(f\circ\sigma_q) = \sum_{i=0}^{q}(-1)^i(f\circ\sigma_q\circ\delta^i_q)$$

$$= f\circ\left(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i(\sigma_q\circ\delta^i_q)\right) = S_{q-1}(f)\left(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i(\sigma_q\circ\delta^i_q)\right) = \left(S_{q-1}(f)\circ d^{sing}_{X,q}\right)(\sigma_q).$$

□

3.1.9. Λήμμα. Έστω ότι οι X, Y, Z είναι τοπολογικοί χώροι.
(i) Για κάθε $q \in \mathbb{Z}$ ισχύει η ισότητα: $S_q(Id_X) = Id_{S_q(X)}$.
(ii) Εάν οι $f: X \to Y$ και $g: Y \to Z$ είναι δυο συνεχείς απεικονίσεις, τότε: $S_q(g \circ f) = S_q(g) \circ S_q(f)$, $\forall q \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη: (i) Για κάθε $q \geq 0$ και κάθε $\sigma_q \in \gamma_q^e(X)$ έχουμε
$$S_q(Id_X)(\sigma_q) = Id_X \circ \sigma_q = \sigma_q = Id_{S_q(X)}(\sigma_q), \text{ οπότε}$$
$$S_q(Id_X) = Id_{S_q(X)}, \ \forall q \geq 0.$$ Όταν $q < 0$ τούτο είναι προφανές.
(ii) Για κάθε $q \geq 0$ και κάθε $\sigma_q \in \gamma_q^e(X)$ έχουμε
$$S_q(g \circ f)(\sigma_q) = (g \circ f) \circ \sigma_q = g \circ (f \circ \sigma_q) = g \circ (S_q(f)(\sigma_q))$$
$$= (S_q(g) \circ S_q(f))(\sigma_q), \text{ οπότε } S_q(g \circ f) = S_q(g) \circ S_q(f), \ \forall q \geq 0.$$
Όταν $q < 0$ τούτο είναι προφανές. □

3.1.10. Ορισμός. Έστω (X, A) ένα τοπολογικό ζεύγος. Τότε $\gamma_q^e(A) \subseteq \gamma_q^e(X)$ και $S_q(A;R) \subseteq S_q(X;R)$, $\forall q \in \mathbb{Z}$, οπότε το αλυσωτό σύμπλοκο $(S_\bullet(A;R), d_\bullet^{sing}|_{S_\bullet(A;R)})$ είναι υποσύμπλοκο τού $(S_\bullet(X;R), d_\bullet^{sing})$ (βλ. 3.1.6., σελ. 162, και [ΣΟΑ], ορσ. 2.3.12, σελ. 101). Ως εκ τούτου, ορίζεται το πηλικοσύμπλοκο
$$\boxed{(S_\bullet(X,A;R) := S_\bullet(X;R)/S_\bullet(A;R), \ \bar{d}_\bullet^{sing})}$$
όπου το διαφορικό $\bar{d}^{sing}_{X;q} = \bar{d}_q^{sing}$, $q \in \mathbb{Z}$, είναι ο μονοσημάντως ορισμένος ομομορφισμός R-μοδίων που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
S_q(X;R) \arrow[r, "d_q^{sing}"] \arrow[d, "\text{φυσικός επιμορφισμός}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & S_{q-1}(X;R) \arrow[d, "\text{φυσικός επιμορφισμός}"] \\
S_q(X,A;R) \arrow[r, "\bar{d}_q^{sing}"'] & S_{q-1}(X,A;R)
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό.

Το εν λόγω πηλικοσύμπλοκο καλείται <u>(σχετικό) ιδιάζον αλυσωτό σύμπλοκο τού τοπολογικού ζεύγους (X, A) με συντελεστές ειλημμένους από τον R.</u>

<u>3.1.11. Ορισμός.</u> Εάν η $f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ είναι μια συνεχής απεικόνιση τοπολογικών ζευγών (βλ. ορσ. 1.18.2, σελ. 79) και $q\in\mathbb{Z}$, τότε ορίζουμε έναν ομομορφισμό R-modules

$$S_q(\bar{f}): S_q(X,A;R)\longrightarrow S_q(Y,B;R)$$

μέσω τού τύπου

$$\boxed{S_q(\bar{f})(\sigma_q+S_q(A;R)):=(f\circ\sigma_q)+S_q(B;R)}$$

επί των γεννητόρων $\{\sigma_q+S_q(A;R)\,|\,\sigma_q\in\Upsilon_q^e(X;R)\}$ τού $S_q(X,A;R)$ και μέσω γραμμικής επεκτάσεως (επί ολοκλήρου τού $S_q(X,A;R)$) όταν $q\geq 0$ (βλ. [ΣΟΑ], Θεώρημα 1.6.14, σελ. 45), ενώ θέτουμε $S_q(\bar{f}):=$ ο τετριμμένος ομομορφισμός για $q<0$.

<u>3.1.12. Λήμμα:</u> Εάν η $f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ είναι μια συνεχής απεικόνιση τοπολογικών ζευγών, τότε για κάθε $q\in\mathbb{Z}$ ισχύει η ισότητα:

$$\boxed{\bar{d}^{\,sing}_{Y,q}\circ S_q(\bar{f})=S_{q-1}(\bar{f})\circ\bar{d}^{\,sing}_{X,q}}\,.$$

<u>Απόδειξη:</u> Αρκεί να αποδειχθεί η ισότητα για $q\geq 0$ και μόνον για τα στοιχεία $\sigma_q+S_q(A;R)$, $\sigma_q\in\Upsilon_q^e(X;R)$. Για ένα τέτοιου είδους στοιχείο έχουμε

$$\bar{d}^{\,sing}_{Y,q}\left(S_q(\bar{f})(\sigma_q+S_q(A;R))\right)=\bar{d}^{\,sing}_{Y,q}\left((f\circ\sigma_q)+S_q(B;R)\right)$$

$$=\left[\sum_{i=0}^{q}(-1)^i(f\circ\sigma_q\circ\delta_q^i)\right]+S_q(B;R)=\left[f\circ\left(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i(\sigma_q\circ\delta_q^i)\right)\right]+S_q(B;R)$$

$$=S_{q-1}(\bar{f})\left(\left(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i(\sigma_q\circ\delta_q^i)\right)+S_q(A;R)\right)=\left(S_{q-1}(\bar{f})\circ\bar{d}^{\,sing}_{X,q}\right)(\sigma_q+S_q(A;R)).$$

□

<u>3.1.13. Πόρισμα.</u> Εάν η $f:X\to Y$ (και αντιστοίχως, η $f:(X,A)\to(Y,B)$) είναι μια συνεχής απεικόνιση τοπολογικών χώρων (και αντιστοίχως, τοπολογικών ζευγών), τότε η $S_\bullet(f):S_\bullet(X;R)\to S_\bullet(Y;R)$ (και αντιστοίχως, η $S_\bullet(\bar{f}):S_\bullet(X,A;R)\to S_\bullet(Y,B;R)$) αποτελεί αλυσωτό μετασχηματισμό. (Βλ [ΣΟΑ], ορσ. 2.3.19, σελ. 105.)

<u>Απόδειξη:</u> Έπεται άμεσα από τα λήμματα 3.1.8 και 3.1.12. □

3.1.14. Λήμμα: Έστω ότι τα (X,A), (Y,B), (Z,C) είναι τοπολογικά ζεύγη. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $S_q(\overline{Id}_{(X,A)}) = Id_{S_q(X,A;R)}$, $\forall q \in \mathbb{Z}$.

(ii) Εάν οι $f:(X,A) \to (Y,B)$ και $g:(Y,B) \to (Z,C)$ είναι συνεχείς απ. τ.ζ., τότε $S_q(\overline{g \circ f}) = S_q(\bar{g}) \circ S_q(\bar{f})$, $\forall q \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη: (i) Για κάθε $q \geq 0$ και κάθε $\sigma_q \in \gamma_q^e(X)$ έχουμε

$$S_q(\overline{Id}_{(X,A)})(\sigma_q + S(A;R)) = \underbrace{Id \circ \sigma_q}_{\sigma_q} + S(A;R) = Id_{S_q(X,A;R)}(\sigma_q + S(A;R)),$$

ενώ για $q<0$ ο ισχυρισμός είναι προφανώς αληθής.

(ii) Για κάθε $q \geq 0$ και κάθε $\sigma_q \in \gamma_q^e(X)$ έχουμε

$$S_q(\overline{g \circ f})(\sigma_q + S_q(A;R)) = (g \circ f) \circ \sigma_q + S_q(C;R) = g \circ (f \circ \sigma_q) + S_q(C;R)$$
$$= S_q(\bar{g})(f \circ \sigma_q + S_q(B;R)) = (S_q(\bar{g}) \circ S_q(\bar{f}))(\sigma_q + S_q(A;R)),$$

ενώ για $q<0$ ο ισχυρισμός είναι προφανώς αληθής. □

3.1.15. Πόρισμα. Έστω $Com^{\kappa\lambda}(Mod_R)$ η κατηγορία των αλυσωτών συμπλόκων (R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, βλ. [ΣΟΑ], 6.1.6 (v)). Τότε ο $S_\bullet : Top \rightsquigarrow Com^{\kappa\lambda}(Mod_R)$ (και αντιστοίχως, ο $S_\bullet : Top^{(2)} \rightsquigarrow Com^{\kappa\lambda}(Mod_R)$) με

$$Ob(Top) \ni X \longmapsto S_\bullet(X;R) \in Ob(Com^{\kappa\lambda}(Mod_R)) \text{ και}$$
$$f \in Mor_{Top}(X,Y) \longmapsto S_\bullet(f) \in Mor_{Com^{\kappa\lambda}(Mod_R)}(S_\bullet(X;R), S_\bullet(Y;R))$$

(και αντιστοίχως, με

$$Ob(Top^{(2)}) \ni (X,A) \longmapsto S_\bullet(X,A;R) \in Ob(Com^{\kappa\lambda}(Mod_R)) \text{ και}$$
$$\bar{f} \in Mor_{Top^{(2)}}((X,A),(Y,B)) \longmapsto S_\bullet(\bar{f}) \in Mor_{Com^{\kappa\lambda}(Mod_R)}(S_\bullet(X,A;R), S_\bullet(Y,B;R)))$$

είναι ένας συναλλοίωτος συναρτητής. (Βλ. [ΣΟΑ], ορσ. 6.2.1).

Απόδειξη: Άμεση απόρροια των λημμάτων 3.1.9 και 3.1.14. □

§ 3.2 Ιδιάζοντες μόδιοι ομολογίας

3.2.1. Ορισμός. Έστω X τυχών τοπολογικός χώρος και έστω $q \in \mathbb{Z}$.
Ως *q-οστό ιδιάζοντα μόδιο ομολογίας* $H_q^{sing}(X;R)$ *τού X με συντελεστές ειλημμένους από τον R* ορίζουμε τον R-μόδιο

$$\boxed{H_q^{sing}(X;R) := H_q(S_\bullet(X;R))},$$

ήτοι τον q-οστό μόδιο ομολογίας τού αλυσωτού συμπλόκου $(S_\bullet(X;R), d_\bullet^{sing})$ (βλ. πρόταση 3.1.6, σελ. 162, και [ΣΟΑ] ορσ. 2.3.2, σελ. 92).
Εξ ορισμού, $H_q^{sing}(X;R) := Z_q^{sing}(X;R) / B_q^{sing}(X;R)$,
όπου

$$\boxed{Z_q^{sing}(X;R) := Z_q(S_\bullet(X;R)) := \mathrm{Ker}(d_q^{sing})}$$

ο R-μόδιος των *ιδιαζόντων q-οστών κυκλημάτων τού X* και

$$\boxed{B_q^{sing}(X;R) := B_q(S_\bullet(X;R)) := \mathrm{Im}(d_{q+1}^{sing})}$$

ο R-μόδιος των *ιδιαζόντων q-οστών συνόρων τού X.*

3.2.2. Ορισμός. Έστω (X,A) τυχόν τοπολογικό ζεύγος και έστω $q \in \mathbb{Z}$.
Ως *q-οστό (σχετικό) ιδιάζοντα μόδιο ομολογίας* $H_q^{sing}(X,A;R)$ *τού (X,A) με συντελεστές ειλημμένους από τον R* ορίζουμε τον R-μόδιο

$$\boxed{H_q^{sing}(X,A;R) := H_q(S_\bullet(X,A;R))}$$

ήτοι τον q-οστό μόδιο ομολογίας τού αλυσωτού συμπλόκου $(S_\bullet(X,A;R), \bar{d}_\bullet^{sing})$ (βλ. ορσ. 3.1.10, σελ. 164, και [ΣΟΑ] ορσ. 2.3.2, σελ. 92).
Εξ ορισμού, $H_q^{sing}(X,A;R) := Z^{sing}(X,A;R) / B_q^{sing}(X,A;R)$,
όπου

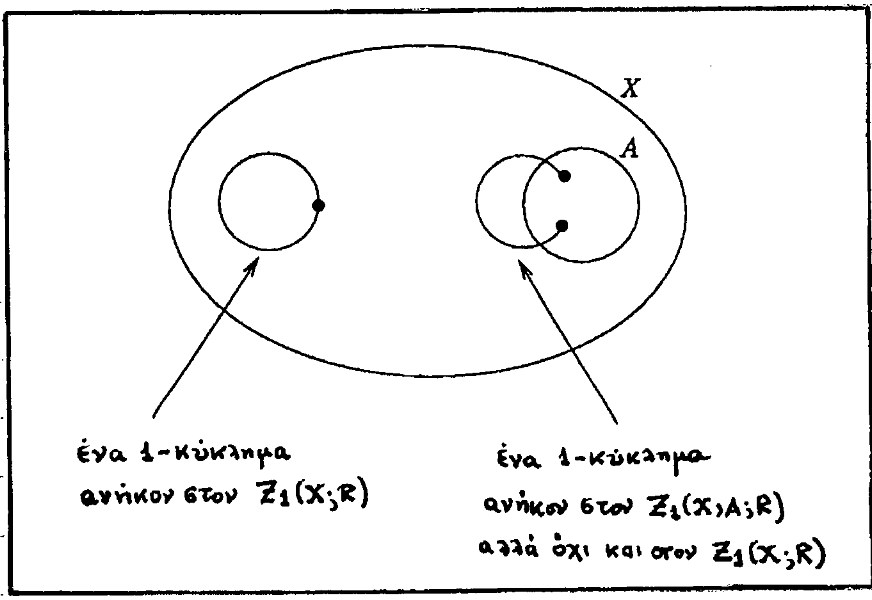
$$\boxed{Z_q^{sing}(X,A;R) := Z_q(S_\bullet(X,A;R)) := \mathrm{Ker}(\bar{d}_q^{sing})}$$

ο R-μόδιος των *(σχετικών) ιδιαζόντων q-οστών κυκλημάτων τού (X,A)* και

$$\boxed{B_q^{sing}(X,A;R) := B_q(S_\bullet(X,A;R)) := \mathrm{Im}(\bar{d}_{q+1}^{sing})}$$

ο R-μόδιος των *(σχετικών) ιδιαζόντων q-οστών συνόρων τού (X,A).*

Το κάτωθι σχήμα υποδεικνύει το πώς κανείς οφείλει να αντιλαμβάνεται τη διαφορά μεταξύ τής ιδιάζουσας ομολογίας τού X και τής ιδιάζουσας ομολογίας τού (X,A) (τής "σχετικής προς έναν $A \neq \phi$"):



3.2.3. Σημείωση: Εάν η $f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ είναι μια συνεχής απεικόνιση τοπολογικών ζευγών, τότε μέσω τού αλυσωτού μετασχηματισμού $S_\bullet(\bar{f}): S_\bullet(X,A;R)\longrightarrow S_\bullet(Y,B;R)$ (βλ. πόρισμα 3.1.13) επάγεται ένας μονοσημάντως ορισμένος ομομορφισμός R-μοδίων

$$\boxed{H_q^{sing}(f) := H_q(S_\bullet(\bar{f})): H_q^{sing}(X,A;R)\longrightarrow H_q^{sing}(Y,B;R)}$$

που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
Z_q^{sing}(X,A;R)=Z_q(S_\bullet(X,A;R)) \arrow[rr, "S_q(\bar{f})|_{Z_q(S_\bullet(X,A;R))}"] \arrow[d, "\substack{\text{φυσική}\\ \text{επίρριψη}}"'] & & Z_q(S_\bullet(Y,B;R))=:Z_q^{sing}(Y,B;R) \arrow[d, "\substack{\text{φυσική}\\ \text{επίρριψη}}"] \\
H_q^{sing}(X,A;R) \arrow[rr, "H_q^{sing}(f)"'] \arrow[urr, phantom, "\circlearrowright"] & & H_q^{sing}(Y,B;R)
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό για κάθε $q\in\mathbb{Z}$. (βλ. [ΣΟΑ], πρόταση 2.3.6, σελ. 94-95).

3.2.4. Παρατήρηση: Όταν $A=\phi$, τότε $S_\bullet(X,A;R)=S_\bullet(X,\phi;R) = S_\bullet(X;R)$,

οπότε έχουμε $H_q^{sing}(X,\phi;R)=H_q^{sing}(X;R)$, $\forall q\in\mathbb{Z}$.

3.2.5. Θεώρημα Εάν το (X,A) είναι οιοδήποτε τοπολογικό ζεύγος και οι $i: A \hookrightarrow X$ και $j: X=(X,\phi)\hookrightarrow(X,A)$ οι συνήθεις ενθέσεις, τότε υφίσταται μια μακρά ακριβής ακολουθία

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{q+1}^{sing}(X,A)} H_q^{sing}(A;R) \xrightarrow{H_q^{sing}(i)} H_q^{sing}(X;R) \xrightarrow{H_q^{sing}(j)} H_q^{sing}(X,A;R)$$
$$\xrightarrow{\partial_q^{sing}(X,A)} H_{q-1}^{sing}(A;R) \xrightarrow{H_{q-1}^{sing}(i)} H_{q-1}^{sing}(X;R) \xrightarrow{H_{q-1}^{sing}(j)} H_{q-1}^{sing}(X,A;R) \longrightarrow \cdots$$

Απόδειξη: Αρκεί κανείς να θεωρήσει τη μακρά ακριβή ακολουθία την επαγομένη μέσω τής βραχείας ακριβούς ακολουθίας αλυσωτών συμπλόκων

$$0 \longrightarrow S_\bullet(A;R) \xrightarrow{S.(i)} S_\bullet(X;R) \xrightarrow{S.(j)} S_\bullet(X,A;R) \longrightarrow 0$$

(βλ. [ΣΟΑ], Θεώρημα 2.3.11, σελ. 97-100) και να θέσει

$$\partial_q^{sing}(X,A) := \partial_q(S_\bullet(X,A)) \left(\begin{array}{l} := \text{ο συνδετικός ομομορφισμός τής} \\ \text{εν λόγω μακράς ακριβούς ακολουθίας} \end{array}\right).$$

$\square$

3.2.6. Σημείωση: Η σύνθεση των συναλλοιώτων συναρτητών

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Top}^{(2)} \arrow[r, squiggly, "S_\bullet"] \arrow[rr, squiggly, bend right, "H_q^{sing}(-)"'] & \mathrm{Com}^{\alpha\lambda}(\mathrm{Mod}_R) \arrow[r, squiggly, "H_q(-)"] & \mathrm{Mod}_R \end{tikzcd}$$

που ορίσθηκαν στο πόρισμα 3.1.15, σελ. 166, και στα [ΣΟΑ], 6.2.3.(vii), αντιστοίχως, είναι ένας συναλλοίωτος συναρτητής, με τη βοήθεια τού οποίου κατασκευάζεται ο συναλλοίωτος συναρτητής

$$\boxed{H_\bullet^{sing}: \mathrm{Top}^{(2)} \rightsquigarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathrm{Mod}} \quad \left((X,A) \longmapsto (H_q^{sing}(X,A;R))_{q\in\mathbb{Z}}\right).$$

3.2.7. Πρόταση: Έστω $\Psi: \mathrm{Top}^{(2)} \rightsquigarrow \mathrm{Top}^{(2)}$ ο συναρτητής, ο οποίος αντιστοιχεί σε κάθε τοπολογικό ζεύγος (X,A) τον $A=(A,\phi)$. Τότε μέσω των συνοριακών τελεστών $\partial_q^{sing}(X,A)$, $q\in\mathbb{Z}$, τής μακράς ακριβούς ακολουθίας τού Θεωρήματος 3.2.5 ορίζεται ένας φυσικός μετασχηματισμός

$$\boxed{\partial_\bullet^{sing}: H_\bullet^{sing} \longrightarrow H_{\bullet-1}^{sing} \circ \Psi}.$$

<u>Απόδειξη:</u> Ο $\partial_\bullet^{sing}$ ορίζεται να αντιστοιχεί σε κάθε $(X,A)\in Ob(\mathbf{Top}^{(2)})$ και σε κάθε $q\in\mathbb{Z}$ τον συνοριακό τελεστή

$$\partial_q^{sing}(X,A): H_q^{sing}(X,A;R)\longrightarrow H_{q-1}^{sing}(A;R)$$

τον καθορισθέντα μέσω τού Θεωρήματος 3.2.5. Εάν θεωρήσουμε μια $f\in Mor_{\mathbf{Top}^{(2)}}((X,A),(Y,B))$, τότε χρησιμοποιώντας τό μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_\bullet(A;R) \arrow[r] \arrow[d, "S_\bullet(f|_A)"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & S_\bullet(X;R) \arrow[r] \arrow[d, "S_\bullet(f)"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & S_\bullet(X,A;R) \arrow[r] \arrow[d, "S_\bullet(\bar{f})"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_\bullet(B;R) \arrow[r] & S_\bullet(Y;R) \arrow[r] & S_\bullet(Y,B;R) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

και την άσκηση 25 τού 4ου φυλλαδίου προτεινομένων ασκήσεων των [ΣΟΑ] αποδεικνύουμε τη μεταθετικότητα τού διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
H_q^{sing}(X,A;R) \arrow[r, "\partial_q^{sing}(X,A)"] \arrow[d, "H_q^{sing}(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_{q-1}^{sing}(A;R) \arrow[d, "H_{q-1}^{sing}(f|A)"] \\
H_q^{sing}(Y,B;R) \arrow[r, "\partial_q^{sing}(Y,B)"'] & H_{q-1}^{sing}(B;R)
\end{tikzcd}$$

για κάθε $q\in\mathbb{Z}$, απ' όπου έπεται ότι ο $\partial_\bullet^{sing}$ είναι όντως φυσικός μετασχηματισμός. $\square$

3.2.8. Θεώρημα. Το ζεύγος $(H_\bullet^{sing},\partial_\bullet^{sing})$ το εισαχθέν στα 3.2.6 και 3.2.7 αποτελεί μια R-θεωρία ομολογίας επί τής κατηγορίας $\mathbf{Top}^{(2)}$ όλων των τοπολογικών ζευγών (υπό την έννοια τού ορισμού 2.1.6, σελ. 119-121).

<u>Απόδειξη:</u> Το ζεύγος $(H_\bullet^{sing},\partial_\bullet^{sing})$ πληροί το αξίωμα (A1) τής ακριβείας επί τη βάσει τού Θεωρήματος 3.2.5. Το ότι πληροί και τα λοιπά αξιώματα αποδεικνύεται στα Θεωρήματα 3.3.1, 3.3.2, 3.4.7 και 3.5.21 των τριών επομένων ενοτήτων. $\square$

§ 3.3 Τα αξιώματα τής διαστάσεως και τού αθροίσματος

3.3.1. Θεώρημα. Για τον μονοσημειακό χώρο $\{pt\}$ ισχύει

$$H_q^{sing}(\{pt\};R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } q=0, \\ 0, & \text{όταν } q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \end{cases}$$

οπότε το ζεύγος $(H_\cdot^{sing}, \partial_\cdot^{sing})$ πληροί το αξίωμα τής διαστάσεως (A4).

Απόδειξη: Αρκεί ο ανωτέρω ισομορφισμός να αποδειχθεί για $q \geq 0$. Επειδή για κάθε $q \geq 0$ υπάρχει ακριβώς μία συνεχής απεικόνιση $\tau_q : \Delta_q \longrightarrow \{pt\}$ (που απεικονίζει κάθε στοιχείο τού Δ_q στο $\{pt\}$) έχουμε $S_q(\{pt\};R) = \{r \cdot \tau_q \mid r \in R\} = R \cdot \{\tau_q\} \cong R$. Επομένως η d_q^{sing} θα απεικονίζει τον γεννήτορα $\{\tau_q\}$ τής $S_q(\{pt\};R)$ στο

$$d_q^{sing}(\tau_q) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \underbrace{(\tau_q \circ \delta_q^i)}_{\tau_{q-1}} = \begin{cases} \tau_{q-1}, & \text{όταν ο } q \text{ είναι άρτιος,} \\ \{0\}, & \text{όταν ο } q \text{ είναι περιττός.} \end{cases}$$

Τούτο σημαίνει ότι

$$Z_q^{sing}(\{pt\};R) := Ker(d_q^{sing}) = \begin{cases} S_q(\{pt\};R) \cong R, & \text{όταν } q=0 \text{ ή } q \text{ περιττός} > 0, \\ \{0\}, & \text{όταν ο } q \text{ είναι άρτιος} > 0, \end{cases}$$

$$B_q^{sing}(\{pt\};R) := Im(d_{q+1}^{sing}) = \begin{cases} S_q(\{pt\};R) \cong R, & \text{όταν ο } q \text{ είναι περιττός} > 0, \\ \{0\}, & \text{όταν ο } q \text{ είναι άρτιος} \geq 0. \end{cases}$$

Ως εκ τούτου, ο αρχικός ισχυρισμός για τον R-μόδιο $H_q^{sing}(\{pt\};R) = Z_q^{sing}(\{pt\};R) / B_q^{sing}(\{pt\};R)$ είναι αληθής. □

3.3.2. Θεώρημα. Έστω $(X_j, A_j)_{j \in J}$ μια οικογένεια τοπολογικών ζευγών και έστω $i_j : (X_j, A_j) \hookrightarrow (X, A)$ η ένθεση τοπολογικών ζευγών όταν $X := \sum_{j \in J} X_j$, $A := \sum_{j \in J} A_j$, $\forall j \in J$. Τότε ο ομομορφισμός R-μοδίων $\bigoplus_{j \in J} H_q^{sing}(i_j) : \bigoplus_{j \in J} H_q^{sing}(X_j, A_j; R) \longrightarrow H_q^{sing}(X, A; R)$ είναι ισομορφισμός $\forall q \in \mathbb{Z}$, οπότε το ζεύγος $(H_\cdot^{sing}, \partial_\cdot^{sing})$ πληροί το αξίωμα (A5) τού αθροίσματος.

<u>Απόδειξη:</u> Αρκεί να αποδειχθεί ότι ο $\bigoplus_{j\in J} H_q^{sing}(i_j)$ είναι ισομορφισμός για κάθε $q \geq 0$. Έστω τυχόν $q \geq 0$. Για κάθε $j \in J$ ο R-μόδιος $S_q(X_j;R)$ είναι υπομόδιος τού $S_q(X;R)$. Έστω $\sigma_q : \Delta_q \to X$ τυχόν ιδιάζον μονόπλοκο. Επειδή το Δ_q είναι δρομοσυνεκτικό, η εικόνα $\sigma_q(\Delta_q)$ τού Δ_q μέσω τής συνεχούς απεικονίσεως σ_q οφείλει να είναι δρομοσυνεκτική (βλ. πρόταση 1.9.22, σελ. 21). Κατά συνέπειαν, υπάρχει ένας και μόνον δείκτης $j \in J$ με $\sigma_q(\Delta_q) \subseteq X_j$ (διότι για κάθε $j_1, j_2 \in J$ με $j_1 \neq j_2$ έχουμε $X_{j_1} \cap X_{j_2} = \emptyset$). Τούτο σημαίνει ότι $S_q(X;R) = \bigoplus_{j\in J} S_q(X_j;R)$ (βλ. [ΣΟΑ], πρόταση 1.5.19, σελ. 35).
Κατ' αναλογίαν, $S_q(A;R) = \bigoplus_{j\in J} S_q(A_j;R)$.
Ως εκ τούτου,

$$S_\bullet(X,A;R) = S_\bullet(X;R)/S_\bullet(A;R) \cong \bigoplus_{j\in J}\left(S_\bullet(X_j;R)/S_\bullet(A_j;R)\right) = \bigoplus_{j\in J} S_\bullet(X_j,A_j;R)$$

βλ. άσκηση 8 τού 2ου φυλλαδίου προτεινομένων ασκήσεων του [ΣΟΑ]

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{j\in J} H_q(S_\bullet(X_j,A_j;R)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[dd, equal] & H_q\left(\bigoplus_{j\in J} S_\bullet(X_j,A_j;R)\right) \arrow[d, "\wr"] \\
 & H_q(S_\bullet(X,A;R)) \arrow[d, equal] \\
\bigoplus_{j\in J} H_q^{sing}(X_j,A_j;R) \arrow[r, "\bigoplus_{j\in J} H_q^{sing}(i_j)"] & H_q^{sing}(X,A;R)
\end{tikzcd}$$

βλ. [ΣΟΑ] 2.3.15 σελ. 101-102

ισομορφισμός R-μοδίων, $\forall q \in \mathbb{Z}$. □

3.3.3. Πόρισμα: Έστω $X \neq \emptyset$ ένας τοπολογικός χώρος και έστω $(X_j)_{j\in J}$ η οικογένεια των δρομοσυνεκτικών συνιστωσών του. Εάν ο A είναι ένας υπόχωρος τού X, $A_j := X_j \cap A$, $\forall j \in J$, και $i_j : (X_j, A_j) \hookrightarrow (X, A)$ οι ενθέσεις τοπολογικών ζευγών, $\forall j \in J$, τότε ο ομομορφισμός R-μοδίων $\bigoplus_{j\in J} H_q^{sing}(i_j) : \bigoplus_{j\in J} H_q^{sing}(X_j,A_j;R) \to H_q^{sing}(X,A;R)$ είναι ισομορφισμός για κάθε $q \in \mathbb{Z}$.

3.3.4. Λήμμα. Εάν ο $X \neq \emptyset$ είναι ένας δρομοσυνεκτικός τοπολογικός χώρος, τότε

$$\boxed{H_0^{sing}(X;R) \cong R}.$$

Απόδειξη: Θεωρώντας τό τμήμα

$$\cdots \longrightarrow S_1(X;R) \xrightarrow{d_1^{sing}} S_0(X;R) \xrightarrow{d_0^{sing}} 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

τού αλυσωτού συμπλόκου $(S_\bullet(X;R), d_\bullet^{sing})$ και παρατηρώντας ότι $d_0^{sing} = 0$, διαπιστώνουμε ότι $Z_0^{sing}(X;R) = \mathrm{Ker}(d_0^{sing}) = S_0(X;R)$, οπότε κάθε ιδιάζουσα 0-αλυσίδα εντός τού X είναι ένα ιδιάζον 0-κύκλημα (και ειδικότερα, $x + B_0^{sing}(X;R) \in H_0^{sing}(X;R)$ για κάθε $x \in X$). Κάθε ιδιάζον 0-κύκλημα εντός τού X είναι τής μορφής $\sum_{x\in X} r_x x$, όπου $r_x \in R$ και σχεδόν όλα τα r_x είναι $= 0_R$.

● Ισχυρισμός: $B_0^{sing}(X;R) = \{\sum_{x\in X} r_x x \in S_0(X;R) \mid \sum_{x\in X} r_x = 0_R\}$.

[Απόδειξη ισχυρισμού: Έστω $c = \sum_{j=1}^{k} r_j x_j \in S_0(X;R)$ $(k \in \mathbb{N})$ με $\sum_{j=1}^{k} r_j = 0_R$. Επιλέγουμε ένα στοιχείο $x \in X (\neq \emptyset)$, καθώς και έναν δρόμο σ_j εντός τού X που ξεκινά από το x και καταλήγει στο x_j. Τότε $d_1^{sing}(\sigma_j) = \sigma_j(e_1) - \sigma_j(e_0) = x_j - x$ (έχοντας ταυτίσει το $I = [0,1]$ με το $\Delta^1 = [e_0, e_1]$). Προφανώς,

$\sum_{j=1}^{k} r_j \sigma_j \in S_1(X;R)$ και $d_1^{sing}(\sum_{j=1}^{k} r_j \sigma_j) = \sum_{j=1}^{k} r_j\, d_1^{sing}(\sigma_j) = \sum_{j=1}^{k} r_j (x_j - x)$

$$= \sum_{j=1}^{k} r_j x_j - \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{k} r_j\right)}_{\substack{\shortparallel \\ 0_R \text{ (εξ υποθέσεως)}}} x = c \implies c = d_1^{sing}\left(\sum_{j=1}^{k} r_j \sigma_j\right) \in B_0^{sing}(X;R).$$

Και αντιστρόφως: εάν $c \in B_0^{sing}(X;R)$, τότε $c = d_1^{sing}(\sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j \tau_j)$, όπου $\nu \in \mathbb{N}$, $\lambda_j \in R$ και τ_j ιδιάζον 1-μονόπλοκο εντός τού X, $\forall j \in \{1,\ldots,\nu\}$. Επομένως, $c = \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j (\tau_j(e_1) - \tau_j(e_0))$ με καθέναν των συντελεστών λ_j εμφανιζόμενον εντός τού προκειμένου αθροίσματος δύο φορές, και μάλιστα με αντίθετο πρόσημο. Συνεπώς, $\sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j = 0_R$.]

● Αποπεράτωση αποδείξεως: Η απεικόνιση $\theta : Z_0^{sing}(X;R) \to R$

$$\sum_{x\in X} r_x x \longmapsto \sum_{x\in X} r_x$$

είναι επιμορφισμός R-μοδίων με πυρήνα του τον $Ke(\theta)=B_0^{sing}(X;R)$.
Βάσει τού 1ου Θ.Ι.Μ. (βλ. [ΣΟΑ], θεώρημα 1.4.8, σελ. 19)

$$H_0^{sing}(X;R) := Z_0^{sing}(X;R)\big/ B_0^{sing}(X;R) \cong R. \qquad \square$$

3.3.5. Πόρισμα. : Έστω $X \neq \emptyset$ ένας τοπολογικός χώρος και έστω $(X_j)_{j\in J}$ η οικογένεια των δρομοσυνεκτικών συνιστωσών του. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $\boxed{H_0^{sing}(X;R) \cong \bigoplus_{j\in J} R = R^{(J)}}$ (με $\operatorname{rank}(H_0^{sing}(X;R)) = \operatorname{card}(J)$).

(ii) Εάν ο A είναι ένας υπόχωρος τού X, $A_j := X_j \cap A$, $\forall j \in J$, και $J' := \{j \in J \mid A_j = \emptyset\}$, τότε

$$\boxed{H_0^{sing}(X,A;R) \cong \bigoplus_{j\in J'} R = R^{(J')}}$$

(Ιδιαιτέρως, εάν ο X είναι αφεαυτού δρομοσυνεκτικός και $A \neq \emptyset$, τότε $H_0^{sing}(X,A;R) \cong \{0\}$.)

Απόδειξη: (i) Τούτο έπεται από το πόρισμα 3.3.3 και το λήμμα 3.3.4.
(ii) Επειδή κάθε X_j είναι δρομοσυνεκτικός, εάν $A_j \neq \emptyset$, τότε $H_0^{sing}(X_j, A_j;R) \cong \{0\}$. (Αιτιολόγηση: Εάν $x \in X_j$ και $a \in A_j$, τότε $\underbrace{1_R\cdot x - 1_R\cdot a}_{\in\, \operatorname{Im}(d_1^{sing})?} \in S_0(X_j, A_j;R) = Z_0^{sing}(X_j,A_j;R)$

$$\cup\!\!\!|$$

$$B_0^{sing}(X_j,A_j;R) = \operatorname{Im}(\bar{d}_1^{sing})$$

Για κάθε δρόμο σ εντός τού X_j από το a στο x έχουμε $d_1^{sing}(\sigma) = x - a$

ο ελεύθερος R-μόδιος που παράγεται από τα σημεία τού $X_j \setminus A_j$

(Τα στοιχεία τού A_j εκπροσωπούν το μηδενικό στοιχείο)

$$\Longrightarrow \quad 1_R\cdot x - 1_R\cdot a = x \in B_0^{sing}(X_j,A_j;R) = 0_{H_0^{sing}(X_j,A_j;R)}.)$$

Αντιθέτως, εάν $A_j = \emptyset$, τότε $H_0^{sing}(X_j,A_j;R) = H_0^{sing}(X_j;R) \underset{3.3.4}{\cong} R$.

Κατόπιν τούτου αρκεί η εφαρμογή τού πορίσματος 3.3.3. $\square$

§ 3.4 Το αξίωμα τού ομοτοπικώς αναλλοιώτου

Για την απόδειξη τού ότι το ζεύγος $(H_\bullet^{sing}, \partial_\bullet^{sing})$ πληροί το αξίωμα (A2) τού "ομοτοπικώς αναλλοιώτου" θα εισαχθεί για κάθε $q \in \mathbb{Z}$ ένας ειδικός φυσικός μετασχηματισμός (ο λεγόμενος <u>πρισματικός τελεστής</u>)

$$P_-^q : S_q(-;R) \longrightarrow S_{q+1}(-\times I; R) \quad (I := [0,1])$$

μεταξύ τού συναλλοίωτου συναρτητή

$$S_q(-;R) : \mathrm{Top}^{(2)} \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_R$$
$$((X,A) \longmapsto S_q(X,A;R))$$

και τού συναλλοίωτου συναρτητή

$$S_q(-\times I;R) : \mathrm{Top}^{(2)} \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_R$$
$$((X,A) \longmapsto S_q((X,A)\times I;R) = S_q(X\times I, A\times I;R)),$$

με τη βοήθεια τού οποίου θα κατασκευασθεί η απαιτούμενη αλυσωτή ομοτοπία. Η ιδιαιτερότητα τού P_-^q έγκειται στο ότι αυτός ορίζεται εν πρώτοις για το <u>ειδικό</u> τοπολογικό ζεύγος $(\Delta_q, \phi) = \Delta_q$, ενώ ο $P^q_{(X,A)}$ για <u>οιοδήποτε</u> τοπολογικό ζεύγος (X,A) αποκτάται μέσω αυτής τής ειδικής περιπτώσεως. (Προς τούτο αρκεί προφανώς να εργασθούμε μόνον για $q \geq 0$.)

<u>3.4.1. Σημείωση.</u> Έστω $q \in \mathbb{N}_0$. Θεωρούμε το θεμελιακό q-μονόπλοκο $\Delta_q := [e_0, e_1, \ldots, e_q] \subset \mathbb{R}^{q+1}$ όπως στον ορσ. 3.1.1 χωρίς, ωστόσο, για λόγους οικονομίας, να αναγράφουμε τον υπερδείκτη "q" στις συντεταγμένες των κορυφών του. Κάθε συσχετική απεικόνιση $f: \Delta_q \to \mathbb{R}^k$ προσδιορίζεται πλήρως όταν είναι γνωστές οι τιμές της $f(e_j)$, $0 \leq j \leq q$ (πρβλ. σχόλια τής σελίδας 92). Στην παρούσα ενότητα, για λόγους συμβολιστικής διευκολύνσεώς μας, θα παριστούμε κάθε τέτοια f μέσω τής $(q+1)$-άδας $f = (f(e_0), f(e_1), \ldots, f(e_q))$. Ιδιαιτέρως, οι απεικονίσεις $\delta_q^j : \Delta_{q-1} \to \Delta_q$, οι οποίες εισήχθησαν στον ορσ. 3.1.2 τής σελίδας 160, θα γράφονται –υπ' αυτήν την έννοια– ως εξής: $\delta_q^j = (e_0, \ldots, \hat{e}_j, \ldots, e_q)$ (όπου το "∧" σημαίνει –ως συνήθως– ότι το κάτω από αυτό αναγραφόμενο σύμβολο παραλείπεται).

<u>3.4.2. Ορισμός.</u> Έστω $q \in \mathbb{N}_0$. Για κάθε $i \in \{0, \dots, q\}$ ορίζουμε τις συσχετικές απεικονίσεις $\tau_i^{q+1} : \Delta_{q+1} \to \Delta_q \times I$, με πεδίο τιμών τους <u>το (μοναδιαίο) πρίσμα υπεράνω τού Δ_q</u>, ως εξής:

$$\tau_i^{q+1}(e_j) := \begin{cases} (e_j, 0), & \text{όταν } j \leq i, \\ (e_{j-1}, 1), & \text{όταν } i < j \leq q+1. \end{cases}$$

Ακολουθώντας τη συντομογραφία τής 3.4.1 λαμβάνουμε

$$\tau_i^{q+1} = ((e_0, 0), \dots, (e_i, 0), (e_i, 1), \dots, (e_q, 1)).$$

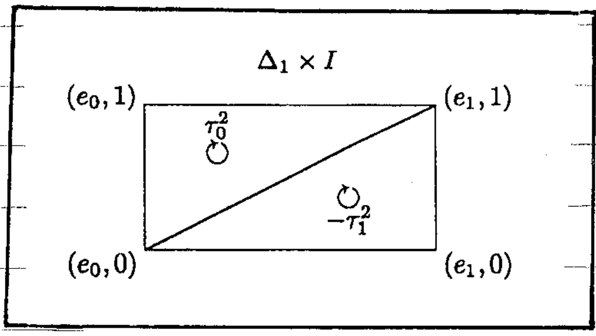
<u>3.4.3. Ορισμός.</u> Έστω $q \in \mathbb{N}_0$. Ο P^q ορίζεται ως ακολούθως:

(i) Θεωρούμε την ταυτοτική απεικόνιση $Id_{\Delta_q} \in S_q(\Delta_q; R) = S_q(\Delta_q, \emptyset; R)$ και θέτουμε:

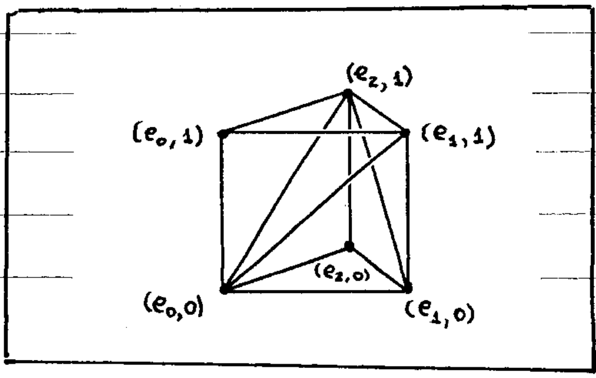
$$\boxed{P^q_{(\Delta_q, \emptyset)}(Id_{\Delta_q}) := \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \tau_i^{q+1} \in S_{q+1}(\Delta_q \times I; R)}$$

Αυτός ο ορισμός μπορεί να "οπτικοποιηθεί" για $q=1$ και $q=2$.

Όταν $q=1$, το $P^1_{(\Delta_1, \emptyset)}(Id_{\Delta_1})$ είναι μια αλυσίδα αποτελούμενη από τα μονόπλοκα τ_0^2 και τ_1^2:



Κατ' αναλογίαν, όταν $q=2$ το $P^2_{(\Delta_2, \emptyset)}(Id_{\Delta_2})$ μας δίδει έναν τριγωνισμό τού πρίσματος $\Delta_2 \times I$:



(ii) Έστω (X,A) οιοδήποτε τοπολογικό ζεύγος και έστω $\sigma_q : \Delta_q \to X$ ένα ιδιάζον q-μονόπλοκο εντός τού X.
Για το στοιχείο $\sigma_q + S_q(A;R) \in S_q(X,A;R)$ θέτουμε

$$\boxed{P^q_{(X,A)}(\sigma_q + S_q(A;R)) := S_{q+1}(\overline{\sigma_q \times Id_I})\,(P^q_{(\Delta_q,\emptyset)}(Id_{\Delta_q}))}$$

και μέσω γραμμικής επεκτάσεως ορίζουμε έναν ομομορφισμό R-μοδίων

$$\boxed{P^q_{(X,A)} : S_q(X,A;R) \longrightarrow S_{q+1}(X\times I, A\times I; R)}.$$

[Σύμβαση: Για $q<0$, $P^q_{(X,A)} := 0$]

3.4.4. Λήμμα. Μέσω των ανωτέρω ομομορφισμών R-μοδίων ορίζεται ένας φυσικός μετασχηματισμός
$$P^q_{-} : S_q(-\,;R) \longrightarrow S_{q+1}(-\times I; R).$$

Απόδειξη: Για οιαδήποτε συνεχή απεικόνιση τοπολογικών ζευγών $f:(X,A)\to(Y,B)$ αρκεί να αποδειχθεί η μεταθετικότητα τού ακόλουθου διαγράμματος:

$$\begin{tikzcd}
S_q(X,A;R) \arrow[r, "P^q_{(X,A)}"] \arrow[d, "S_q(\bar f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & S_{q+1}(X\times I, A\times I; R) \arrow[d, "S_{q+1}(\overline{f\times Id_I})"] \\
S_q(Y,B;R) \arrow[r, "P^q_{(Y,B)}"'] & S_{q+1}(Y\times I, B\times I; R)
\end{tikzcd}$$

Επί των πλευρικών κλάσεων των ιδιαζόντων q-μονοπλόκων εντός τού X. Έστω $\sigma_q : \Delta_q \to X$ ένα τέτοιου είδους μονόπλοκο. Τότε έχουμε

$$(S_{q+1}(\overline{f\times Id_I})\circ P^q_{(X,A)})(\sigma_q + S_q(A;R)) = S_{q+1}(\overline{f\times Id_I})\,(S_{q+1}(\overline{\sigma_q\times Id_I})\,(P^q_{(\Delta_q,\emptyset)}(Id_{\Delta_q}))$$

$$\underset{3.1.14(ii)}{=\!=} S_{q+1}(\overline{(f\circ\sigma_q)\times Id_I})\,(P^q_{(\Delta_q,\emptyset)}(Id_{\Delta_q})) \underset{3.43(ii)}{=} P^q_{(Y,B)}(f\circ\sigma_q + S_q(B;R))$$

$$\underset{3.1.11}{=\!=} P^q_{(Y,B)}(S_q(\bar f)(\sigma_q)) =\!=\!= (P^q_{(Y,B)}\circ S_q(\bar f))(\sigma_q). \qquad \square$$

3.4.5. Λήμμα Εάν οι $\lambda_0^X, \lambda_1^X : (X,A) \longrightarrow (X\times I, A\times I)$ είναι οι απεικονίσεις οι οριζόμενες μέσω των τύπων

$$\lambda_0^X(x) := (x,0) \quad \text{και} \quad \lambda_1^X(x) := (x,1), \ \forall x\in X,$$

τότε η ακολουθία $(P^q_{(X,A)})_{q\in\mathbb{Z}} =: P^\bullet_{(X,A)}$ αποτελεί μια αλυσωτή ομοτοπία (υπό την έννοια των [ΣΟΑ], ορσ. 2.41, σελ. 108) μεταξύ των αλυσωτών μετασχηματισμών $S_\bullet(\overline{\lambda_0^X})$ και $S_\bullet(\overline{\lambda_1^X})$, δηλαδή

$$\boxed{\overline{d}^{sing}_{X\times I,q+1}\circ P^q_{(X,A)} + P^{q-1}_{(X,A)}\circ \overline{d}^{sing}_{X,q} = S_q(\overline{\lambda_1^X}) - S_q(\overline{\lambda_0^X})}$$

για κάθε $q\in\mathbb{Z}$.

Απόδειξη: Αρκεί η ανωτέρω ισότητα να αποδειχθεί για $q\geq 0$. Η απόδειξη θα γίνει σε δύο βήματα. Στο πρώτο θα αποδειχθεί για την προαναφερθείσα "ειδική περίπτωση", ενώ στο δεύτερο θα αποδειχθεί για οιοδήποτε τοπολογικό ζεύγος κάνοντας χρήση του 3.4.4.

● 1º Βήμα: Κατ' αρχάς θα επαληθεύσουμε την ισότητα:

$$\left(d^{sing}_{(\Delta_q,\emptyset),q+1}\circ P^q_{(\Delta_q,\emptyset)}\right)(Id_{\Delta_q}) + \left(P^{q-1}_{(\Delta_q,\emptyset)}\circ d^{sing}_{(\Delta_q,\emptyset),q}\right)(Id_{\Delta_q}) = S_q(\lambda_1^{\Delta_q})(Id_{\Delta_q}) - S_q(\lambda_0^{\Delta_q})(Id_{\Delta_q})$$

(δηλ. για $X=\Delta_q$, $A=\emptyset$.)

Από τη μια μεριά έχουμε:

$$P^{q-1}_{(\Delta_q,\emptyset)}(d^{sing}_{(\Delta_q,\emptyset),q}(Id_{\Delta_q})) \overset{3.1.5}{=} P^{q-1}_{(\Delta_q,\emptyset)}\left(\sum_{j=0}^q (-1)^j\delta_q^j\right) \overset{3.4.3(ii)}{=} \sum_{j=0}^q(-1)^j S_q(\delta_q^j\times Id_I)(P^{q-1}_{(\Delta_q,\emptyset)}(I_{\Delta_{q-1}}))$$

$$\overset{3.4.3(i)}{=} \sum_{j=0}^q(-1)^j S_q(\delta_q^j\times Id_I)\left(\sum_{i=0}^{q-1}(-1)^i\tau_i^q\right) = \sum_{j=0}^q(-1)^j\sum_{i=0}^{q-1}(-1)^i S_q(\delta_q^j\times Id_I)\circ\tau_i^q$$

$$\overset{3.4.2}{=} \sum_{j=0}^q(-1)^j\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i((e_0,0),\dots,(e_i,0),(e_i,1),\dots,\widehat{(e_j,1)},\dots,(e_q,1))$$

$$+\sum_{j=0}^q(-1)^j\sum_{i=j}^{q-1}(-1)^i((e_0,0),\dots,\widehat{(e_j,0)},\dots,(e_{i+1},0),(e_{i+1},1),\dots,(e_q,1))$$

$$=\sum_{0\le i<j\le q}(-1)^{i+j}((e_0,0),\dots,(e_i,0),(e_i,1),\dots,\widehat{(e_j,1)},\dots,(e_q,1))$$

$$+\sum_{0\le j<i\le q}(-1)^{i+j-1}((e_0,0),\dots,\widehat{(e_j,0)},\dots,(e_{i+1},0),(e_{i+1},1),\dots(e_q,1)).$$

Από την άλλη,

$$d^{sing}_{(\Delta_q,\phi),q+1}\left(P^q_{(\Delta_q,\phi)}(Id_{\Delta_q})\right) \overset{3.4.3(i)}{=} d^{sing}_{(\Delta_q,\phi),q+1}\left(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i \tau_i^{q+1}\right) = \sum_{i=0}^{q}(-1)^i d^{sing}_{(\Delta_q,\phi),q+1}(\tau_i^{q+1})$$

$$\overset{3.1.5}{=} \sum_{i=0}^{q}(-1)^i \sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j (\tau_i^{q+1}\circ\delta^j_{q+1})$$

$$\overset{3.4.1,\ 3.4.2}{=} \sum_{i=0}^{q}(-1)^i \sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j \left((e_0,0),\dots,(e_i,0),(e_i,1),\dots,(e_q,1)\right)\circ(e_0,\dots,\hat{e}_j,\dots,e_{q+1})$$

$$= \sum_{i=0}^{q}(-1)^i \Big(\sum_{j=0}^{i}(-1)^j \left((e_0,0),\dots,\widehat{(e_j,0)},\dots,(e_i,0),(e_i,1),\dots,(e_q,1)\right) + \sum_{j=i+1}^{q+1}(-1)^j\left((e_0,0),\dots,(e_i,0),(e_i,1),\dots,\widehat{(e_{j-1},1)},\dots,(e_q,1)\right)\Big)$$

$$\overset{\text{αναδιάταξη}}{=} \sum_{0\le j<i\le q}(-1)^{i+j}\left((e_0,0),\dots,\widehat{(e_j,0)},\dots,(e_i,0),(e_i,1),\dots,(e_q,1)\right)$$

$$+ \sum_{0\le i<j\le q}(-1)^{i+j+1}\left((e_0,0),\dots,(e_i,0),(e_i,1),\dots,\widehat{(e_j,1)},\dots,(e_q,1)\right)$$

$$\overset{\text{από πριν}}{=} -P^{q-1}_{(\Delta_q,\phi)}\left(d^{sing}_{(\Delta_q,\phi),q}(Id_{\Delta_q})\right) + \sum_{i=0}^{q}\left((e_0,0),\dots,\widehat{(e_i,0)},(e_i,1),\dots,(e_q,1)\right) - \sum_{i=0}^{q}\left((e_0,0),\dots,\widehat{(e_i,1)},\dots,(e_q,1)\right)$$

$$= -P^{q-1}_{(\Delta_q,\phi)}\left(d^{sing}_{(\Delta_q,\phi),q}(Id_{\Delta_q})\right) + \left((e_0,1),\dots,(e_q,1)\right) - \left((e_0,0),\dots,(e_q,0)\right)$$

$$= -\left(P^{q-1}_{(\Delta_q,\phi)}\circ d^{sing}_{(\Delta_q,\phi),q}\right)(Id_{\Delta_q}) + S_q(\lambda_1^{\Delta_q})(Id_{\Delta_q}) - S_q(\lambda_0^{\Delta_q})(Id_{\Delta_q}).$$

- <u>2º Βήμα:</u> Για τυχόν τοπολογικό ζεύγος (X,A) και οιοδήποτε ιδιάζον q-μονόπλοκο $\sigma_q:\Delta_q\to X$ έχουμε

$$\bar{d}^{sing}_{X\times I,q+1}\left(P^q_{(X,A)}(\sigma_q+S_q(A;R))\right) + P^{q-1}_{(X,A)}\left(\bar{d}^{sing}_{X,q}(\sigma_q+S_q(A;R))\right)$$

$$\overset{3.4.3(ii)}{\underset{3.1.10}{=}} \bar{d}^{sing}_{X\times I,q+1}\left(S_{q+1}(\overline{\sigma_q\times Id_I})(P^q_{(\Delta_q,\phi)}(Id_{\Delta_q}))\right) + P^{q-1}_{(X,A)}\left(d^{sing}_{X,q}(\sigma_q)+S_{q-1}(A;R)\right)$$

$$\overset{3.1.12}{\underset{3.4.3(ii),\ 3.4.4}{=}} S_q(\overline{\sigma_q\times Id_I})\left(d^{sing}_{\Delta_q,q+1}(P^q_{(\Delta_q,\phi)}(Id_{\Delta_q}))\right) + S_q(\overline{\sigma_q\times Id_I})\left(P^{q-1}_{(\Delta_q,\phi)}(d^{sing}_{(\Delta_q,\phi),q}(Id_{\Delta_q}))\right)$$

$$= S_q(\overline{\sigma_q\times Id_I})\left(\left(d^{sing}_{(\Delta_q,\phi),q+1}\circ P^q_{(\Delta_q,\phi)}\right)(Id_{\Delta_q}) + \left(P^{q-1}_{(\Delta_q,\phi)}\circ d^{sing}_{(\Delta_q,\phi),q}\right)(Id_{\Delta_q})\right)$$

Προσοχή! $\sigma_q=\sigma_q\circ Id_{\Delta_q}=S_q(\sigma_q)(Id_{\Delta_q})$ και $d^{sing}_{X,q}(\sigma_q)=d^{sing}_{X,q}\left(S_q(\sigma_q)(Id_{\Delta_q})\right)\overset{3.1.8}{=}S_{q-1}(\sigma_q)\circ d^{sing}_{(\Delta_q,\phi),q}(Id_{\Delta_q})$

από 1ο βήμα

$$= S_q(\overline{\sigma_q \times Id_I})\,\big(S_q(\lambda_1^{\Delta_q})(Id_{\Delta_q}) - S_q(\lambda_0^{\Delta_q})(Id_{\Delta_q})\big)$$

$$= S_q(\overline{\sigma_q \times Id_I})\,\big(\lambda_1^{\Delta_q}\circ Id_{\Delta_q} - \lambda_0^{\Delta_q}\circ Id_{\Delta_q}\big)$$

$$= S_q(\overline{\sigma_q \times Id_I})(\lambda_1^{\Delta_q}\circ Id_{\Delta_q}) - S_q(\overline{\sigma_q \times Id_I})(\lambda_0^{\Delta_q}\circ Id_{\Delta_q})$$

$$\underset{3.1.11}{=} \big((\sigma_q \times Id_I)\circ(\lambda_1^{\Delta_q}\circ Id_{\Delta_q}) - (\sigma_q \times Id_I)(\lambda_0^{\Delta_q}\circ Id_{\Delta_q})\big) + S_q(A;R)$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "Id_X"] & X \arrow[r, "\lambda_j^X"] & X\times I \\ \Delta_q \arrow[u, "\sigma_q"] \arrow[r, "Id_{\Delta_q}"] & \Delta_q \arrow[u, phantom, "G"] \arrow[r, "\lambda_j^{\Delta_q}"] & \Delta_q\times I \arrow[u, "\sigma_q\times Id_I"'] \end{tikzcd}\quad , j=0,1$$

$$= \big(\lambda_1^X\circ \cancel{Id_X}\circ\sigma_q - \lambda_0^X\circ \cancel{Id_X}\circ\sigma_q\big) + S_q(A;R)$$

$$\underset{3.1.7,\,3.1.11}{=} \big(S_q(\overline{\lambda_1^X}) - S_q(\overline{\lambda_0^X})\big)(\sigma_q + S_q(A;R)).$$ Επειδή

το $\{\sigma_q + S_q(A;R) \mid \sigma_q \in \mathcal{S}_q^{\ell}(X)\}$ παράγει τον $S_q(X,A;R)$ η απόδειξη περατούται. □

3.4.6. Λήμμα Εάν οι $f,g:(X,A)\to(Y,B)$ είναι ομότοπες (συνεχείς) απεικονίσεις τοπολογικών ζευγών, τότε

$$S_\bullet(\bar f) \simeq S_\bullet(\bar g) : S_\bullet(X,A;R) \to S_\bullet(Y,B;R)$$

(↑ υποδηλοί (αλυσωτή) ομοτοπία αλυσωτών συμπλόκων)

Απόδειξη: Έστω $F:(X,A)\times I = (X\times I, A\times I)\to (Y,B)$ μια ομοτοπία από την f στην g (βλ. 1.18.11, σελ. 81). Έστω

$$\lambda_t^X : (X,A) \to (X,A)\times I, \quad \lambda_t^X(x) := (x,t),$$

για κάθε $x\in X$ και κάθε $t\in I$. Τότε η λ_t^X αποτελεί ομοτοπία μεταξύ των λ_0^X, λ_1^X και

$$\begin{cases} F_0 := F\circ\lambda_0^X = f \\ F_1 := F\circ\lambda_1^X = g. \end{cases}$$

Για κάθε $q\in\mathbb{Z}$ ισχύουν οι ισότητες

$$S_q(\bar F_1) - S_q(\bar F_0) = S_q(\overline{F\circ\lambda_1^X}) - S_q(\overline{F\circ\lambda_0^X})$$

$$= S_q(\bar F)\circ\big(S_q(\overline{\lambda_1^X}) - S_q(\overline{\lambda_0^X})\big)$$

$$\underset{\text{από το λήμμα 3.4.5}}{=} S_q(\bar F)\circ\big(\bar d^{\,sing}_{X\times I,q+1}\circ P^q_{(X,A)} + P^{q-1}_{(X,A)}\circ \bar d^{\,sing}_{X,q}\big)$$

$$\underset{\text{από το λήμμα 3.1.12}}{=} \bar d^{\,sing}_{X,q+1}\circ\big(S_{q+1}(\bar F)\circ P^q_{(X,A)}\big) + \big(S_q(\bar F)\circ P^{q-1}_{(X,A)}\big)\circ \bar d^{\,sing}_{X,q}$$

$\Longrightarrow$ η $\big(S_{q+1}(\bar F)\circ P^q_{(X,A)}\big)_{q\in\mathbb{Z}}$ αποτελεί αλυσωτή ομοτοπία μεταξύ των $S_\bullet(\bar f)$ και $S_\bullet(\bar g)$. □

3.4.7. Θεώρημα. Εάν οι $f,g:(X,A)\to(Y,B)$ είναι ομότοπες (συνεχείς) απεικονίσεις τοπολογικών ζευγών, τότε $H_q^{sing}(f) = H_q^{sing}(g)$, $\forall q\in\mathbb{Z}$, οπότε το ζεύγος $(H_\bullet^{sing}, \partial_\bullet^{sing})$ πληροί το αξίωμα (A2) του "ομοτοπικώς αναλλοίωτου".

Απόδειξη: Έπεται άμεσα από λήμμα 3.4.6, τη σημείωση 3.2.3 και την πρόταση 2.4.5 από τα [ΣΟΑ], σελ. 109. □

§ 3.5 Το αξίωμα τής εκτομής

Στην παρούσα ενότητα θα αποδείξουμε ότι το ζεύγος $(H_\bullet^{sing}, \partial_\bullet^{sing})$ πληροί τη συνθήκη (A'3), η οποία (σύμφωνα με την πρόταση 2.2.7, σελ. 124) ισοδυναμεί με το αξίωμα (A3) τής εκτομής (βλ. σελ. 120). Προς τούτο θα καταφύγουμε στην κατ' επανάληψιν εφαρμογή τής "απεικονίσεως βαρυκεντρικής υποδιαιρέσεως" $sd_\bullet : S_\bullet(X;R) \longrightarrow S_\bullet(X;R)$, η οποία αποτελεί έναν φυσικό αλυσωτό μετασχηματισμό και αποσυνθέτει κάθε ιδιάζον •-μονόπλοκο σε μικρότερα μονόπλοκα κατά τέτοιον τρόπο, ώστε η κλάση ομολογίας τής υποδιαιρέσεως οιουδήποτε ιδιάζοντος κυκλήματος να ισούται με την κλάση ομολογίας τού ιδίου τού κυκλήματος. Συγκεκριμένα, η απόδειξη θα γίνει σε τέσσερα βήματα:

- <u>1º Βήμα</u>: Ορίζουμε την $sd_\bullet$ ως αλυσωτό μετασχηματισμό για γραμμικά ιδιάζοντα •-μονόπλοκα εντός τού θεμελιακού μονοπλόκου Δ_q και δείχνουμε ότι $sd_\bullet \simeq Id_\bullet$ και $sd_\bullet^k \simeq Id_\bullet$ (βλ. λήμματα 3.5.9 και 3.5.11).

- <u>2º Βήμα</u>: Ο ορισμός τής $sd_\bullet$ επεκτείνεται για ιδιάζοντα μονόπλοκα εντός τυχόντος (μη κενού) τοπολογικού χώρου και δίδεται μια απόδειξη τού ότι $sd_\bullet^k \simeq Id_\bullet$ κάνοντας χρήση τής φυσικότητας των μετεχουσών απεικονίσεων αλυσωτών συμπλόκων (βλ. λήμμα 3.5.14).

- <u>3º Βήμα</u>: Εισάγουμε την έννοια των ιδιαζουσών "$\mathcal{U}$-μικρών" αλυσίδων ενός τ.χ. $X \neq \emptyset$ (όπου $\mathcal{U} = (U_j)_{j\in J}$ και $X = \bigcup_{j\in J} U_j^\circ$) και των μοδίων ομολογίας $H_q(S_\bullet^{\mathcal{U}}(X;R))$ (βλ. ορσ. 3.5.18). Κατόπιν, στηριζόμενοι σε μια σειρά γεωμετρικών λημμάτων (1.20.13, 3.5.15, 3.5.16) που στοχεύουν στην απόδειξη τού ότι μπορούμε να μικραίνουμε τις διαμέτρους των θεωρουμένων μονοπλόκων κατά βούληση, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $H_q(S_\bullet^{\mathcal{U}}(X;R)) \cong H_q^{sing}(X;R)$ για κάθε $q \in \mathbb{Z}$ (βλ. θεώρημα 3.5.20).

- <u>4º Βήμα</u>: Το (A'3) (⇔(A3)) έπεται απ' ό,τι έχει αποδειχθεί στο 3º βήμα και από το "λήμμα των πέντε" (βλ. θεώρημα 3.5.21, σελ. 195).

3.5.1. Ορισμός. Έστω $p \in \mathbb{N}_0$ και έστω $\Delta_p \subseteq \mathbb{R}^{p+1}$ το θεμελιακό p-μονόπλοκο. Εάν το $Z \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι κυρτό, τότε ένα ιδιάζον p-μονόπλοκο $\sigma : \Delta_p \to Z$ εντός τού Z ονομάζεται <u>γραμμικό p-μονόπλοκο εντός τού Z</u> όταν αποτελεί τον περιορισμό $\Theta|_{\Delta_p}$ τής μονοσημάντως ορισμένης συνεχούς απεικονίσεως

$$\mathrm{aff}(\{e_0,\ldots,e_p\}) = \mathbb{R}^{p+1} \xrightarrow{\Theta} \mathbb{R}^k \quad \text{επί τού } \Delta_p$$

με την ιδιότητα $\Theta(e_j) = v_j \in Z$, $\forall j \in \{0,\ldots,p\}$, πρβλ. σχόλια σελ. 92.
Ένα τέτοιο (γραμμικό) p-μονόπλοκο θα συνεχίσουμε να το συμβολίζουμε ως $(v_0, v_1, \ldots, v_p)$ (όπως και μετά την 3.4.1). Επίσης, $\forall p \in \mathbb{Z}$, θέτουμε

$$\boxed{SL_p(Z;R) := \begin{cases} F_R(\{\text{γραμμικά } p\text{-μονόπλοκα εντός τού } Z\}), & \text{όταν } p \geq 0, \\ \{0\}, & \text{όταν } p < 0. \end{cases}}$$

Τα στοιχεία τού $SL_p(Z;R)$, $p \geq 0$, καλούνται <u>γραμμικές p-αλυσίδες εντός τού Z</u>.

3.5.2. Σημείωση: Εάν $p, q \in \mathbb{N}_0$ και $Z = \Delta_q$, τότε

$$d_p^{\mathrm{sing}}((v_0,\ldots,v_p)) = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j (v_0,\ldots,\hat{v}_j,\ldots,v_p) \in SL_{p-1}(\Delta_q;R),$$

οπότε ορίζεται το αλυσωτό σύμπλοκο

$$\cdots \xrightarrow{d_{p+1}^{\mathrm{sing}}} SL_p(\Delta_q;R) \xrightarrow{d_p^{\mathrm{sing}}} SL_{p-1}(\Delta_q;R) \xrightarrow{d_{p-1}^{\mathrm{sing}}} \cdots \xrightarrow{d_1^{\mathrm{sing}}} SL_0(\Delta_q;R) \to 0,$$

καθώς και το (βολικότερο) "επαυξημένο" αλυσωτό σύμπλοκο

$$\cdots \xrightarrow{d_{p+1}^{\mathrm{sing}}} SL_p(\Delta_q;R) \xrightarrow{d_p^{\mathrm{sing}}} SL_{p-1}(\Delta_q;R) \xrightarrow{d_{p-1}^{\mathrm{sing}}} \cdots \xrightarrow{d_1^{\mathrm{sing}}} SL_0(\Delta_q;R) \xrightarrow{d_0^{\mathrm{sing}}} SL_{-1}(\Delta_q;R),$$

όπου το $SL_{-1}(\Delta_q;R) \cong R$ παράγεται από το "(-1)-μονόπλοκο" (ϕ) που δεν διαθέτει καμία κορυφή και $d_0^{\mathrm{sing}}((v_0)) := (\phi)$, $\forall (v_0) \in SL_0(\Delta_q;R)$.

3.5.3. Ορισμός. Εάν $p, q \in \mathbb{Z}$ με $p \geq -1$, $q \geq 0$, και $b \in \Delta_q$, τότε <u>ο κώνος επί τού Δ_q με το b ως κορυφή του</u> είναι η απεικόνιση

$$K_p^{(b)} : SL_p(\Delta_q;R) \longrightarrow SL_{p+1}(\Delta_q;R)$$

η οριζόμενη μέσω τού τύπου $K_p^{(b)}((v_0,\ldots,v_p)) := (b, v_0, \ldots, v_p)$ και μέσω γραμμικής επεκτάσεως (επί ολοκλήρου τού $SL_p(\Delta_q;R)$).

(Αυτή προσθέτει το b ως μια επιπλέον κορυφή σε οποιοδήποτε p-γραμμικό μονόπλοκο εντός του Δ_q. Σύμβαση: Για $p<-1$ θέτουμε $K_p^{(b)}:=0$.)

3.5.4. Λήμμα: Από το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\arrow[r] & SL_{p+1}(\Delta_q;R) \arrow[r, "d_{p+1}^{sing}"] \arrow[d, "Id"'] & SL_p(\Delta_q;R) \arrow[r, "d_p^{sing}"] \arrow[d, "Id"'] \arrow[dl, "K_p^{(b)}"'] & SL_{p-1}(\Delta_q;R) \arrow[r] \arrow[d, "Id"'] \arrow[dl, "K_{p-1}^{(b)}"'] & \cdots \arrow[r, "d_1^{sing}"] & SL_0(\Delta_q;R) \arrow[r, "d_0^{sing}"] \arrow[d, "Id"'] & SL_{-1}(\Delta_q;R) \arrow[d, "Id"] \arrow[dl, "K_{-1}^{(b)}"'] \\
\arrow[r] & SL_{p+1}(\Delta_q;R) \arrow[r, "d_{p+1}^{sing}"'] & SL_p(\Delta_q;R) \arrow[r, "d_p^{sing}"'] & SL_{p-1}(\Delta_q;R) \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "d_1^{sing}"'] & SL_0(\Delta_q;R) \arrow[r, "d_0^{sing}"'] & SL_{-1}(\Delta_q;R)
\end{tikzcd}$$

προκύπτει ότι $\quad d_{p+1}^{sing}\circ K_p^{(b)} + K_{p-1}^{(b)}\circ d_p^{sing} = Id_{SL_p(\Delta_q;R)} \quad \forall p\in\mathbb{Z}$,

ήτοι ότι η

$$K_\bullet^{(b)} : 0_\bullet \simeq Id_{SL_\bullet(\Delta_q)} \quad \text{είναι μια συστέλλουσα ομοτοπία.}$$

Απόδειξη: Για το γραμμικό (-1)-μονόπλοκο (ϕ) έχουμε

$$(d_0^{sing}\circ K_{-1}^{(b)})(\phi) = d_0^{sing}((b)) = (\phi).$$

Για οποιοδήποτε γραμμικό 0-μονόπλοκο (v_0) έχουμε

$$(d_1^{sing}\circ K_0^{(b)})(v_0) = d_1^{sing}(b,v_0) = v_0 - b = v_0 - K_{-1}^{(b)}(\phi)$$
$$= v_0 - K_{-1}^{(b)}(d_0^{sing}(v_0)) = (Id_{SL_0(\Delta_q;R)} - K_{-1}^{(b)}\circ d_0^{sing})(v_0).$$

Τέλος, για οποιοδήποτε γραμμικό p-μονόπλοκο με $p\geq 1$ έχουμε

$$(d_{p+1}^{sing}\circ K_p^{(b)})(v_0,\dots,v_p) = d_{p+1}^{sing}(b,v_0,\dots,v_p)$$
$$= (v_0,\dots,v_p) + \sum_{j=1}^{p+1}(-1)^j (b,v_0,\dots,\hat{v}_{j-1},\dots,v_p)$$
$$= (v_0,\dots,v_p) - \sum_{j=0}^{p}(-1)^j (b,v_0,\dots,\hat{v}_j,\dots,v_p)$$

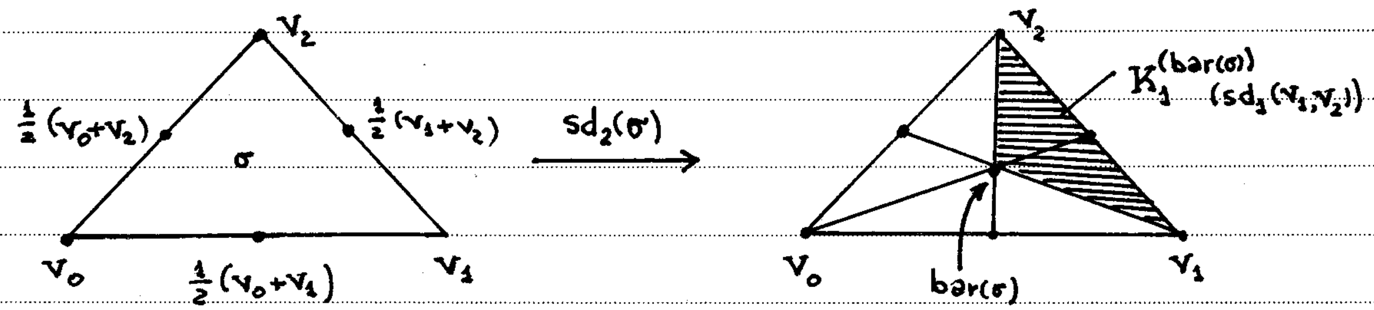
$$= (v_0,\dots,v_p) - K_{p-1}^{(b)}\Big(\sum_{j=0}^{p}(-1)^j(v_0,\dots,\hat{v}_j,\dots,v_p)\Big) = (v_0,\dots,v_p) - K_{p-1}^{(b)}(d_p(v_0,\dots,v_p))$$

$= \left(Id_{SL_p(\Delta_q;R)} - K_{p-1}^{(b)}\circ d_p^{sing}\right)(v_0,\dots,v_p)$, απ' όπου έπεται η επαλήθευση

του αρχικού ισχυρισμού. $\square$

3.5.5. Ορισμός. Ορίζουμε αναδρομικώς τον ομομορφισμό R-μοδίων
$$sd_p : SL_p(\Delta_q;R) \longrightarrow SL_p(\Delta_q;R)$$
μέσω τού τύπου:
$$\boxed{sd_p(\sigma) := \begin{cases} \{0\}, & \text{όταν } p<-1, \\ \sigma, & \text{όταν } p\in\{0,-1\}, \\ K_{p-1}^{(\mathrm{bar}(\sigma))}\left(sd_{p-1}\left(d_p^{sing}(\sigma)\right)\right), & \text{όταν } p>0 \end{cases}}$$
για κάθε γραμμικό p-μονόπλοκο σ εντός τού Δ_q και μέσω γραμμικής επεκτάσεως (επί ολοκλήρου τού $SL_p(\Delta_q;R)$), όπου
$$\mathrm{bar}(\sigma) := \frac{1}{p+1}(v_0+\cdots+v_p) = \sigma\left(\sum_{j=0}^{p} \frac{1}{p+1} e_j\right) \quad (v_j := \sigma(e_j))$$
το <u>βαρύκεντρο</u> τού $\sigma=(v_0,\ldots,v_p)$. Το $sd_p(\sigma)$ καλείται <u>βαρυκεντρική υποδιαίρεση</u> τού γραμμικού p-μονοπλόκου σ.

3.5.6. Γεωμετρική ερμηνεία όταν $p=2$:



$\mathrm{bar}(\sigma) = \frac{1}{3}(v_0+v_1+v_3)$, $d_2^{sing}(\sigma) = (v_1,v_2)-(v_0,v_2)+(v_0,v_1)$

$sd_2(\sigma) = K_1^{(\mathrm{bar}(\sigma))}\left(sd_1(d_2^{sing}(\sigma))\right) = K_1^{(\mathrm{bar}(\sigma))}(sd_1(v_1,v_2)) - K_1^{(\mathrm{bar}(\sigma))}(sd_1(v_0,v_2))$
$+ K_1^{(\mathrm{bar}(\sigma))}(sd_1(v_0,v_1))$, όπου για $0\leq i<j\leq 2$ έχουμε
$sd_1(v_i,v_j) = K_0^{(\mathrm{bar}(v_i,v_j))}\left(sd_0(d_1^{sing}(v_i,v_j))\right) = K_0^{(\mathrm{bar}(v_i,v_j))}\left(d_1^{sing}(v_i,v_j)\right)$
$= K_0^{(\frac{1}{2}(v_i+v_j))}(v_j - v_i) = \left(\frac{1}{2}(v_i+v_j), v_j\right) - \left(v_i, \frac{1}{2}(v_i+v_j)\right)$.

3.5.7. Λήμμα. Η $sd_\bullet = (sd_p)_{p\in\mathbb{Z}} : SL_\bullet(\Delta_q;R) \to SL_\bullet(\Delta_q;R)$ είναι ένας αλυσωτός μετασχηματισμός.

<u>Απόδειξη:</u> Για $p<-1$ (και αντιστοίχως, για $p\in\{-1,0\}$) δεν υφίσταται πρόβλημα, καθότι η sd_p είναι $=0$ (και αντιστοίχως, η ταυτοτική).

'Εστω $p>0$. Θα κάνουμε χρήση πλήρους επαγωγής. Υποθέτουμε ότι

$$sd_{\nu-1}\circ d_\nu^{sing} = d_\nu^{sing}\circ sd_\nu \quad \text{για κάθε } \nu,\ -1\leq \nu<p.$$

Αρκεί η απαιτουμένη ισότητα (για $\nu=p$) να αποδειχθεί για οιοδήποτε γραμμικό p-μονόπλοκο σ εντός τού Δ_q:

$$\begin{aligned}
(d_p^{sing}\circ sd_p)(\sigma) &= \left(d_p^{sing}\circ \left(K_{p-1}^{(bar(\sigma))}\circ sd_{p-1}\circ d_p^{sing}\right)\right)(\sigma) \\
&= \left(d_p^{sing}\circ K_{p-1}^{(bar(\sigma))}\right)\left(sd_{p-1}(d_p^{sing}(\sigma))\right) \underset{3.5.4}{=\!=\!=} \left(Id_{SL_p(\Delta_q)} - K_{p-2}^{(bar(\sigma))}\circ d_{p-1}^{sing}\right)\left(sd_{p-1}(d_p^{sing}(\sigma))\right) \\
&= sd_{p-1}(d_p(\sigma)) - K_{p-2}^{(bar(\sigma))}\left(\left(d_{p-1}^{sing}\circ sd_{p-1}\right)\circ d_p^{sing}\right)(\sigma) \\
&\underset{\substack{\text{Επαγ.}\\ \text{υπόθεση}}}{=\!=\!=} sd_{p-1}(d_p^{sing}(\sigma)) - K_{p-2}^{(bar(\sigma))}\Big(sd_{p-2}\circ \underbrace{(d_{p-1}^{sing}\circ d_p^{sing})}_{\underset{3.1.6.}{=}\,0}\Big)(\sigma) \\
&= (sd_{p-1}\circ d_p^{sing})(\sigma). \qquad \square
\end{aligned}$$

3.5.8 Ορισμός. Ορίζουμε αναδρομικώς τον ομομορφισμό R-μοδίων:

$$\psi_p : SL_p(\Delta_q;R) \longrightarrow SL_{p+1}(\Delta_q;R)$$

μέσω τού τύπου:

$$\boxed{\psi_p(\sigma) := \begin{cases} \{0\}, & \text{όταν } p\leq -1 \\ K_p^{(bar(\sigma))}\left(\sigma - \psi_{p-1}(d_p^{sing}(\sigma))\right), & \text{όταν } p\geq 0, \end{cases}}$$

για κάθε γραμμικό p-μονόπλοκο σ εντός τού Δ_q και μέσω γραμμικής επεκτάσεως (επί ολοκλήρου τού $SL_p(\Delta_q;R)$).

3.5.9 Λήμμα. Από το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & SL_{p+1}(\Delta_q;R) \arrow[r, "d_{p+1}^{sing}"] \arrow[d, "Id"'] & SL_p(\Delta_q;R) \arrow[r, "d_p^{sing}"] \arrow[d, "Id"'] \arrow[dl, "\psi_p"'] & SL_{p-1}(\Delta_q;R) \arrow[r] \arrow[d, "Id"'] \arrow[dl, "\psi_{p-1}"'] & \cdots \arrow[r, "d_1^{sing}"] & SL_0(\Delta_q;R) \arrow[r, "d_0^{sing}"] \arrow[d, "Id"'] & SL_{-1}(\Delta_q;R) \arrow[d, "Id"] \arrow[dl, "\psi_{-1}"'] \\
{} \arrow[r] & SL_{p+1}(\Delta_q;R) \arrow[r, "d_{p+1}^{sing}"] & SL_p(\Delta_q;R) \arrow[r, "d_p^{sing}"] & SL_{p-1}(\Delta_q;R) \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "d_1^{sing}"] & SL_0(\Delta_q;R) \arrow[r, "d_0^{sing}"] & SL_{-1}(\Delta_q;R)
\end{tikzcd}$$

προκύπτει ότι

$$d_{p+1}^{sing}\circ\psi_p + \psi_p\circ d_p^{sing} = Id_{SL_p(\Delta_q;R)} - sd_p,\ \forall p\in\mathbb{Z},\ \text{ήτοι ότι } sd_\bullet \simeq Id_{SL_\bullet(\Delta_q;R)}.$$

<u>Απόδειξη:</u> Για $p \leq -1$ δεν υφίσταται πρόβλημα, καθότι η ψ_p είναι $=0$.
Η ανωτέρω ισότητα είναι αληθής για $p=0$, διότι

$$\psi_0(v_0) = (v_0, v_0) \Longrightarrow (\psi_{-1} \circ d_0^{sing} + d_1^{sing} \circ \psi_0)(v_0) = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\psi_{-1}(\phi)} + d_1^{sing}(v_0, v_0)$$

$$= v_0 - v_0 = 0 = (Id_{SL_0(\Delta_q;R)} - sd_0)(v_0).$$

Έστω $p>0$. Θα κάνουμε χρήση πλήρους επαγωγής. Υποθέτουμε ότι

$$d_{\nu+1}^{sing} \circ \psi_\nu + \psi_{\nu-1} \circ d_\nu^{sing} = Id_{SL_\nu(\Delta_q;R)} - sd_\nu, \text{ για κάθε } \nu, -1 \leq \nu < p.$$

Αρκεί η απαιτουμένη ισότητα (για $\nu = p$) να αποδειχθεί για οιοδήποτε γραμμικό p-μονόπλοκο σ εντός του Δ_q:

$$d_{p+1}^{sing}(\psi_p(\sigma)) = d_{p+1}^{sing}\left(K_p^{(bar(\sigma))}(\sigma - \psi_{p-1}(d_p^{sing}(\sigma))\right)$$

$$= (Id_{SL_p(\Delta_q)} - K_p^{(bar(\sigma))} \circ d_p^{sing})(\sigma - \psi_{p-1}(d_p^{sing}(\sigma)))$$

$$= \sigma - \psi_{p-1}(d_p^{sing}(\sigma)) - K_p^{(bar(\sigma))}(d_p^{sing}(\sigma) - (d_p^{sing} \circ \psi_{p-1} \circ d_p^{sing})(\sigma))$$

$$\underset{\substack{\text{επαγωγική}\\ \text{υπόθεση}}}{=} \sigma - \psi_{p-1}(d_p^{sing}(\sigma)) - K_p^{(bar(\sigma))}\left(d_p^{sing}(\sigma) - (Id_{SL_p(\Delta_q;R)} - sd_{p-1} - \psi_{p-1} \circ d_{p-1}^{sing})(d_p^{sing})(\sigma)\right)$$

$$= \sigma - \psi_{p-1}(d_p^{sing}(\sigma)) - K_p^{(bar(\sigma))}\left(\cancel{d_p^{sing}(\sigma)} - \cancel{d_p^{sing}(\sigma)} + sd_{p-1}(d_p^{sing}(\sigma)) + (\psi_{p-1} \circ \underbrace{d_{p-1}^{sing} \circ d_p^{sing}}_{\overset{3.1.6}{=}\, 0})(\sigma)\right)$$

$$\underset{3.5.5}{=} \sigma - \psi_{p-1}(d_p^{sing}(\sigma)) - sd_p(\sigma) = (Id_{SL_p(\Delta_q;R)} - sd_p - \psi_{p-1} \circ d_p^{sing})(\sigma). \quad \square$$

<u>3.5.10. Ορισμός.</u> Για $k \in \mathbb{N}_0$ θέτουμε

(i)
$$\boxed{sd_p^k := \begin{cases} Id_{SL_p(\Delta_q;R)}, & \text{όταν } k=0, \\ \underbrace{sd_p \circ sd_p \circ \cdots \circ sd_p}_{k\text{-φορές}}, & \text{όταν } k \geq 1, \end{cases}}$$

(Ο $sd_\bullet^k$ είναι αλυσωτός μετασχηματισμός βάσει του 3.5.7.)

(ii)
$$\boxed{\psi_p^{(k)} := \begin{cases} (Id_{SL_p(\Delta_q;R)} + sd_{p+1} + sd_{p+1}^2 + \cdots + sd_{p+1}^{k-1}) \circ \psi_p, & \text{όταν } k \geq 1 \\ 0, & \text{όταν } k=0, \end{cases}}$$

όπου ψ_p είναι ο ομομορφισμός R-μοδίων ο εισαχθείς στον ορ6. 3.5.8.

3.5.11. Λήμμα. Για κάθε $p \in \mathbb{Z}$ και κάθε $k \in \mathbb{N}_0$ ισχύει η ισότητα:

$$d_{p+1}^{sing} \circ \psi_p^{(k)} + \psi_{p-1}^{(k)} \circ d_p^{sing} = Id_{SL_p(\Delta_q;R)} - sd_p^k,$$

ήτοι $sd_\bullet^k \simeq Id_{SL_\bullet(\Delta_q;R)}$.

Απόδειξη: Προφανώς η ανωτέρω ισότητα ισχύει για $k=0$ ή για $p \leq -1$. Για $p \geq 0$ και $k \geq 1$ έχουμε

$$Id_{SL_p(\Delta_q;R)} - sd_p^k = (Id_{SL_p(\Delta_q;R)} + sd_p + sd_p^2 + \cdots + sd_p^{k-1})(Id_{SL_p(\Delta_q;R)} - sd_p)$$

$$\underset{3.5.9}{=\!=} \underbrace{(Id_{SL_p(\Delta_q;R)} + sd_p + sd_p^2 + \cdots + sd_p^{k-1})}_{\text{προφανώς αλυσωτός μετασχηματισμός}} (d_{p+1}^{sing} \circ \psi_p + \psi_{p-1} \circ d_p^{sing})$$

$$=\!= \underbrace{((Id_{SL_p(\Delta_q;R)} + sd_p + \cdots + sd_p^{k-1}) \circ d_{p+1}^{sing}) \circ \psi_p}_{\| \atop d_{p+1}^{sing} \circ \underbrace{(Id_{SL_p(\Delta_q;R)} + sd_p + \cdots + sd_p^{k-1}) \circ \psi_p}_{\| \atop \psi_p^{(k)}}} + \underbrace{(Id_{SL_p(\Delta_q;R)} + sd_p + \cdots + sd_p^{k-1}) \circ \psi_{p-1}}_{\| \atop \psi_{p-1}^{(k)}} \circ d_p^{sing}$$

$$=\!= d_{p+1}^{sing} \circ \psi_p^{(k)} + \psi_{p-1}^{(k)} \circ d_p^{sing}. \qquad \square$$

3.5.12. Ορισμός. Έστω X τυχών μη κενός τοπολογικός χώρος. Για κάθε ιδιάζον q-μονόπλοκο $\sigma : \Delta_q \to X$ εντός τού X και κάθε $k \in \mathbb{N}_0$ και $q \geq -1$ ορίζουμε:

$$\boxed{\begin{aligned} sd_q^k(\sigma) &:= S_q(\sigma)(sd_q^k(Id_{\Delta_q})) \\ \psi_q^{(k)}(\sigma) &:= S_{q+1}(\sigma)(\psi_q^{(k)}(Id_{\Delta_q})) \end{aligned}}$$

και επεκτείνουμε τον sd_q^k (και αντιστοίχως, τον $\psi_q^{(k)}$) γραμμικώς επί ολοκλήρου τού $S_q(X;R)$, θέτοντας – εκ παραλλήλου – $sd_q^k = \psi_q^{(k)} = 0$ για $q < -1$.

Εν προκειμένω, εκλαμβάνουμε την ταυτοτική απεικόνιση $Id_{\Delta_q} : \Delta_q \to \Delta_q$ ως το γραμμικό q-μονόπλοκο $(e_0, e_1, \ldots, e_q)$:

$$\begin{array}{ccccc} Id_{\Delta_q} & & & & \\ \cap & & & & \\ S\mathfrak{L}_q(\Delta_q;R) & \xrightarrow{sd_q^k} & S\mathfrak{L}_q(\Delta_q;R) & & \\ \cap & & \cap & & \\ S_q(\Delta_q;R) & & S_q(\Delta_q;R) & \xrightarrow{S_q(\sigma)} & S_q(X;R) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} Id_{\Delta_q} \in S\mathfrak{L}_q(\Delta_q;R) & \xrightarrow{\psi_q^{(k)}} & S\mathfrak{L}_{q+1}(\Delta_q;R) & & \\ \cap & & \cap & & \\ S_q(\Delta_q;R) & & S_{q+1}(\Delta_q;R) & \xrightarrow{S_{q+1}(\sigma)} & S_{q+1}(X;R). \end{array}$$

<u>3.5.13. Λήμμα</u>. (i) Ο $sd_\bullet^k : S_\bullet \longrightarrow S_\bullet$ $(sd_p^k : S_p(X;R) \to S_p(X;R), p\in\mathbb{Z})$ αποτελεί φυσικό μετασχηματισμό από τον συναρτητή $\mathrm{Top} \xrightarrow{S_\bullet} \mathrm{Com}^{\kappa\lambda}(\mathrm{Mod}_R)$ στον εαυτό του.

(ii) Η ακολουθία $sd_\bullet^k = (sd_p^k)_{p\in\mathbb{Z}} : S_\bullet(X;R) \longrightarrow S_\bullet(X;R)$ είναι ένας αλυσωτός μετασχηματισμός.

<u>Απόδειξη</u>: (i) Έστω $f: X \to Y$ μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ τοπολογικών χώρων (δηλ. $f\in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Top}}(X,Y)$). Τότε για κάθε ιδιάζον q-μονόπλοκο σ εντός του X, όπου $q\geq 0$, έχουμε

$$(S_q(f)\circ sd_q^k)(\sigma) \underset{3.5.12}{=\!=\!=} S_q(f)\big(S_q(\sigma)(sd_q^k(Id_{\Delta_q})\big) = \big(S_q(f)\circ S_q(\sigma)\big)\big(sd_q^k(Id_{\Delta_q})\big)$$

$$\underset{3.1.9(ii)}{=\!=\!=} S_q(f\circ\sigma)\big(sd_q^k(Id_{\Delta_q})\big) = sd_q^k(f\circ\sigma) \underset{3.1.7}{=} \big(sd_q^k\circ S_q(f)\big)(\sigma).$$

(ii) Για κάθε $\sigma\in S_q(X;R)$ έχουμε

$$(d_q^{sing}\circ sd_q^k)(\sigma) \underset{3.5.12}{=\!=\!=} d_q^{sing}\big(S_q(\sigma)(sd_q^k(Id_{\Delta_q}))\big) \underset{\substack{3.1.13\\3.1.8}}{=\!=\!=} S_{q-1}(\sigma)\big(d_q^{sing}(sd_q^k(Id_{\Delta_q}))\big)$$

$$\underset{3.5.7}{=\!=\!=} \big(S_{q-1}(\sigma)\circ sd_{q-1}^k\big)\big(d_q^{sing}(Id_{\Delta_q})\big) \underset{(i)}{=\!=\!=} \big(sd_{q-1}^k\circ S_{q-1}(\sigma)\big)\big(d_q^{sing}(Id_{\Delta_q})\big)$$

$$\underset{\substack{3.1.8\\3.1.13}}{=\!=\!=} sd_{q-1}^k\big(d_q^{sing}(S_q(\sigma)(Id_{\Delta_q}))\big) = sd_{q-1}^k\big(d_q^{sing}(\sigma)\big) = \big(sd_{q-1}^k\circ d_q^{sing}\big)(\sigma).$$

□

3.5.14. Λήμμα. (i) Ο $\psi_\bullet^{(k)}: S_\bullet \longrightarrow S_{\bullet+1}$ είναι φυσικός μετασχηματισμός.
(ii) $d_{q+1}^{sing} \circ \psi_q^{(k)} + \psi_{q-1}^{(k)} \circ d_q^{sing} = Id_{S_q(X;R)} - sd_q^k$, $\forall q \in \mathbb{Z}$, ήτοι $\psi_\bullet^{(k)}: sd_\bullet^k \simeq Id_{S_\bullet(X;R)}$.

<u>Απόδειξη:</u> (i) Έστω $f: X \to Y$ μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ τοπολογικών χώρων (δηλ. $f \in Mor_{\mathcal{Top}}(X,Y)$). Τότε για κάθε ιδιάζον q-μονόπλοκο σ εντός του X, όπου $q \geq 0$, έχουμε

$$\left(S_{q+1}(f) \circ \psi_q^{(k)}\right)(\sigma) \underset{3.5.12}{=\!=} \left(S_{q+1}(f) \circ S_{q+1}(\sigma)\right)\left(\psi_q^{(k)}(Id_{\Delta_q})\right)$$

$$\underset{3.1.9\,(ii)}{=\!=} S_{q+1}(f \circ \sigma)\left(\psi_q^{(k)}(Id_{\Delta_q})\right) \underset{3.5.12}{=} \psi_q^{(k)}(f \circ \sigma) \underset{3.1.7}{=} \left(\psi_q^{(k)} \circ S_q(f)\right)(\sigma).$$

(ii) Για κάθε $\sigma \in S_q(X;R)$ λαμβάνουμε

$$\left(d_{q+1}^{sing} \circ \psi_q^{(k)}\right)(\sigma) \underset{3.5.12}{=\!=} d_{q+1}^{sing}\left(S_{q+1}(\sigma)\left(\psi_q^{(k)}(Id_{\Delta_q})\right)\right)$$

$$\overset{3.1.8}{=\!=} S_q(\sigma)\left(d_{q+1}^{sing} \circ \psi_q^{(k)}\right)(Id_{\Delta_q}) \quad (1) \qquad \text{και}$$

$$\left(\psi_{q-1}^{(k)} \circ d_q^{sing}\right)(\sigma) = \psi_{q-1}^{(k)}\left(d_q^{sing}(\sigma)\right) =\!= \psi_{q-1}^{(k)}\left(d_q^{sing} \circ S_q(\sigma)\right)(Id_{\Delta_q})$$

διότι $\sigma = S_q(\sigma)(Id_{\Delta_q})$

$$\underset{3.1.8}{=\!=} \psi_{q-1}^{(k)}\left(S_{q-1}(\sigma) \circ d_q^{sing}\right)(Id_{\Delta_q})$$

$$= \left(\left(\psi_{q-1}^{(k)} \circ S_{q-1}(\sigma)\right) \circ d_q^{sing}\right)(Id_{\Delta_q}) \underset{(i)}{=\!=} S_q(\sigma)\left(\psi_{q-1}^{(k)} \circ d_q^{sing}\right)(Id_{\Delta_q}) \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι

$$\left(d_{q+1}^{sing} \circ \psi_q^{(k)} + \psi_{q-1}^{(k)} \circ d_q^{sing}\right)(\sigma) = S_q(\sigma)\Big(\underbrace{d_{q+1}^{sing} \circ \psi_q^{(k)} + \psi_{q-1}^{(k)} \circ d_q^{sing}}_{\text{ορισμένος επί του } SL_q(\Delta_q;R)}\Big)(Id_{\Delta_q})$$

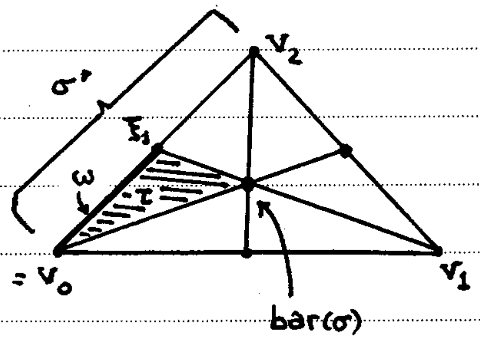
$$\underset{3.5.11}{=\!=} S_q(\sigma)\left(Id_{SL_q(\Delta_q;R)} - sd_q^k\right)(Id_{\Delta_q})$$

$$\underset{3.5.12}{=\!=} \sigma - sd_q^k(\sigma) = \left(Id_{S_q(X;R)} - sd_q^k\right)(\sigma). \qquad \square$$

3.5.15. Λήμμα: Έστω $\sigma = (v_0,\dots,v_p) \in SL_p(\Delta_q;\mathbb{R})$ ένα γραμμικό p-μονόπλοκο εντός τού Δ_q, όπου $p,q \geq 0$. Τότε κάθε p-μονόπλοκο τής γραμμικής p-αλυσίδας $sd_p(\sigma) \in SL_p(\Delta_q;\mathbb{R})$ έχει διάμετρο $\leq \frac{p}{p+1}\operatorname{diam}(\sigma)$ (βλ. ορσ. 1.8.9, σελ. 15).

Απόδειξη: Θα κάνουμε χρήση πλήρους επαγωγής επί τού p. Εάν $p=0$, τότε αυτό είναι προφανές (διότι η διάμετρος είναι $=0$). Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για γραμμικά $(p-1)$-μονόπλοκα εντός τού Δ_q, όπου $p>0$. Έστω τ τυχόν (κατ' ανάγκην γραμμικό) p-μονόπλοκο τής αλυσίδας $sd_p(\sigma) \in SL_p(\Delta_q;\mathbb{R})$. Τότε αυτό θα είναι τής μορφής $\tau = (\operatorname{bar}(\sigma), \xi_0,\dots,\xi_{p-1})$, όπου $\xi_0,\dots,\xi_{p-1}$ αντιστοιχούν στις κορυφές ενός γραμμικού $(p-1)$-μονοπλόκου ω τής βαρυκεντρικής υποδιαιρέσεως τού συνόρου τού σ.

• Βοηθητικό σχήμα για $p=2$:



Έστω σ' το γραμμικό $(p-1)$-μονόπλοκο που ανήκει στο σύνορο τού σ και περιέχει το ω. Τότε
$$\operatorname{diam}(\tau) \underset{\substack{1.20.13(iii)\\ \text{σελ. } 91}}{=\!=\!=} \max_{0\leq i,j\leq q} \{\|\xi_i-\xi_j\|, \|\xi_i - \operatorname{bar}(\sigma)\|\} \quad (1).$$

Από την άλλη μεριά, από την επαγωγική υπόθεση έχουμε
$$\|\xi_i-\xi_j\| \leq \operatorname{diam}(\omega) \leq \frac{(p-1)\operatorname{diam}(\sigma')}{p} \leq \frac{p\operatorname{diam}(\sigma)}{p+1} \quad (2),$$
όπου η τελευταία ανισοϊσότητα έπεται από τις $\frac{p-1}{p} \leq \frac{p}{p+1}$ και $\operatorname{diam}(\sigma') \leq \operatorname{diam}(\sigma)$.

Τέλος, επειδή $\xi_0,\dots,\xi_{p-1} \in \sigma$, θα υπάρχει κάποιος $j \in \{0,\dots,p\}$, τέτοιος ώστε να ισχύει $\|\xi_j - \operatorname{bar}(\sigma)\| \leq \|v_j - \operatorname{bar}(\sigma)\|$ (3) και $\|v_j - \operatorname{bar}(\sigma)\| \underset{1.20.13(iii)}{\leq} \frac{p}{p+1}\operatorname{diam}(\sigma)$ (4).

Από τις (1), (2), (3) και (4) έπεται ότι $\operatorname{dim}(\tau) \leq \frac{p}{p+1}\operatorname{diam}(\sigma)$. $\square$

3.5.16. Λήμμα. Έστω $\sigma \in S\mathcal{L}_p(\Delta_q;R)$, όπου $p,q \geq 0$, και έστω $k \geq 1$. Τότε κάθε p-μονόπλοκο της γραμμικής p-αλυσίδας $sd_p^k(\sigma) \in S\mathcal{L}_p(\Delta_q;R)$ έχει διάμετρο $\leq \left(\frac{p}{p+1}\right)^k \operatorname{diam}(\sigma)$.

Απόδειξη: Έπεται άμεσα ύστερα από εφαρμογή του λήμματος 3.5.15 και χρήση πλήρους επαγωγής επί του k. □

3.5.17. Παρατήρηση. (i) Επειδή $\frac{p}{p+1} < 1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\left(\frac{p}{p+1}\right)^k = 0$, έχουμε τη δυνατότητα να μικραίνουμε τις διαμέτρους των μονοπλόκων της $sd_p^k(\sigma)$ κατά βούληση.

(ii) Από το λήμμα 3.5.16 έπεται ότι

$$\sup\{\operatorname{diam}(\tau) \mid \tau \in sd_p^k(\sigma)\} \leq \left(\frac{p}{p+1}\right)^k \operatorname{diam}(\sigma).$$

3.5.18. Ορισμός Έστω $X \neq \emptyset$ ένας τοπολογικός χώρος. Εάν η οικογένεια υποχώρων $\mathcal{U} = (U_j)_{j\in J}$ του X είναι ένα κάλυμμα του X με $X = \bigcup_{j\in J} U_j^{\circ}$, τότε ορίζουμε τον υπομόδιο $S_q^{\mathcal{U}}(X;R)$ του $S_q(X;R)$ ως ακολούθως:

$$\boxed{S_q^{\mathcal{U}}(X;R) := \begin{cases} Fr_R(\{\sigma \in \mathcal{T}_q^{o}(X) \mid \exists\, i = i_\sigma \in J : \sigma(\Delta_q) \subseteq U_i\}), & \text{όταν } q \geq 0, \\ \{0\}, & \text{όταν } q < 0, \end{cases}}$$

και καλούμε τα στοιχεία του q-αλυσίδες "μεγέθους $\mathcal{U}$" ή "$\mathcal{U}$-μικρές" q-αλυσίδες εντός του X με τους συντελεστές τους ειλημμένους από τον R.

3.5.19. Λήμμα. Έστω $X \neq \emptyset$ ένας τοπολογικός χώρος. Εάν η οικογένεια υποχώρων $\mathcal{U} := (U_j)_{j\in J}$ του X είναι ένα κάλυμμα του X με $X = \bigcup_{j\in J} U_j^{\circ}$ και $c = \sum_{\nu=1}^{\ell} r_\nu \sigma_\nu \in S_q(X;R)$ μια ιδιάζουσα q-αλυσίδα εντός του X, τότε υπάρχει κάποιος $k \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε να ισχύει $sd_q^k(c) \in S_q^{\mathcal{U}}(X;R)$.
[Υπενθύμιση: $sd_q^k(c) = \sum_{\nu=1}^{\ell} r_\nu S_q(\sigma_\nu)(sd_q^k(Id_{\Delta_q}))$.]

<u>Απόδειξη:</u> Επειδή η $\sigma_\nu : \Delta_q \to X$ είναι συνεχής, $\forall \nu \in \{1,\dots,l\}$, η οικογένεια $(\sigma_\nu^{-1}(U_j^\circ))_{j\in J}$ αποτελεί ένα ανοικτό κάλυμμα τού Δ_q, $\forall \nu \in \{1,\dots,l\}$. Επειδή το Δ_q είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος (ως προς τη συνήθη ευκλείδεια μετρική) υπάρχει πραγματικός αριθμός $\delta_\nu > 0$ (ήτοι ο αριθμός Lebesgue τού $(\sigma_\nu^{-1}(U_j^\circ))_{j\in J}$, βλ. λήμμα 1.8.10, σελ. 15-16), τέτοιος ώστε για κάθε μη κενό $B \subseteq \Delta_q$ με $\mathrm{diam}(B) < \delta_\nu$ να υπάρχει κάποιος $j := j_B \in J$ για τον οποίο να ισχύει $B \subseteq \sigma_\nu^{-1}(U_j^\circ)$.

Επιλέγουμε $k_\nu \in \mathbb{N}$, τέτοιον ώστε να ισχύει η ανισότητα $\left(\frac{q}{q+1}\right)^{k_\nu} \mathrm{diam}(\Delta_q) < \delta_\nu$.

Επειδή η απεικόνιση $\underset{\substack{\parallel \\ (e_0,\dots,e_q)}}{Id_{\Delta_q}} : \Delta_q \to \Delta_q$ είναι αφ' εαυτής ένα γραμμικό q-μονόπλοκο

εντός τού Δ_q, εφαρμόζοντας το λήμμα 3.5.16 για την περίπτωση όπου $p = q$, $\sigma = (e_0,\dots,e_q) = Id_{\Delta_q}$ και $sd_q^{k_\nu}(Id_{\Delta_q}) = \sum_{\rho=1}^{\mu} r'_\rho \tau_\rho$, $r'_\rho \in R$, $\mu \in \mathbb{N}$, $\tau_\rho \in S\mathcal{L}_q(\Delta_q; R)$, $\forall \rho \in \{1,\dots,\mu\}$, λαμβάνουμε

$$\mathrm{diam}(\tau_\rho(\Delta_q)) < \left(\frac{q}{q+1}\right)^{k_\nu} \mathrm{diam}(\Delta_q) < \delta_\nu, \quad \forall \nu \in \{1,\dots,l\},$$

οπότε (για $B := \tau_\rho(\Delta_q)$)

$$\tau_\rho(\Delta_q) \subseteq \sigma_\nu^{-1}(U_j^\circ) \implies \sigma_\nu(\tau_\rho(\Delta_q)) \subseteq U_j^\circ \subseteq U_j \quad (*)$$

για κάποιον $j = j_{\tau_\rho(\Delta_q)} \in J$ και για κάθε $\rho \in \{1,\dots,\mu\}$ και κάθε $\nu \in \{1,\dots,l\}$.

Άρα για οιονδήποτε $k \in \mathbb{N}$, $k > \max\{k_\nu \mid \nu \in \{1,\dots,l\}\}$, έχουμε

$$sd_q^k(c) = \sum_{\nu=1}^{l} r_\nu S_q(\sigma_\nu)(sd_q^k(Id_{\Delta_q})) = \sum_{\nu=1}^{l} r_\nu S_q(\sigma_\nu)\left(\sum_{\rho=1}^{\mu} r'_\rho \tau_\rho\right)$$

$$\underset{\text{λόγω τού } (*)}{=\!=} \sum_{\nu=1}^{l}\sum_{\rho=1}^{\mu} r_\nu r'_\rho (\sigma_\nu \circ \tau_\rho) \in S_q^{\mathcal{U}}(X;R). \quad \square$$

<u>3.5.20. Θεώρημα.</u> Έστω $X \neq \emptyset$ ένας τοπολογικός χώρος. Εάν η οικογένεια υποχώρων $\mathcal{U} = (U_j)_{j\in J}$ τού X είναι κάλυμμα τού X με $X = \bigcup_{j\in J} U_j^\circ$, τότε ο συνήθης ενθετικός αλυσωτός μετασχηματισμός $i_\bullet : S_\bullet^{\mathcal{U}}(X;R) \hookrightarrow S_\bullet(X;R)$ επάγει ισομορφισμούς $H_q(i_\bullet) : H_q(S_\bullet^{\mathcal{U}}(X;R)) \xrightarrow{\cong} H_q(S_\bullet(X;R)) =: H_q^{sing}(X;R)$ για κάθε $q \in \mathbb{Z}$.

<u>Απόδειξη:</u> Αυτή θα εκτελεσθεί σε δύο βήματα:

• <u>1º Βήμα:</u> Ο $H_q(i_\bullet): H_q(S_\bullet^{\mathcal{U}}(X;R)) \longrightarrow H_q^{sing}(X;R)$

$$H_q(S_\bullet^{\mathcal{U}}(X;R)) = Z_q(S_\bullet^{\mathcal{U}}(X;R))/B_q(S_\bullet^{\mathcal{U}}(X;R)), \qquad H_q^{sing}(X;R) = Z_q^{sing}(X;R)/B_q^{sing}(X;R)$$

είναι <u>επιμορφισμός R-μοδίων</u>.

'Εστω $c + B_q^{sing}(X;R) \in H_q^{sing}(X;R)$, για τυχόν $c \in Z_q^{sing}(X;R) = Z_q(S_\bullet(X;R)) \subseteq S_q(X;R)$.

Κατά το λήμμα 3.5.19 $\exists\, k \in \mathbb{N}$: $sd_q^k(c) \in S_q^{\mathcal{U}}(X;R)$. (1)

Κατά το λήμμα 3.5.14, $sd_\bullet^k \simeq Id_{S_\bullet(X;R)} \xRightarrow{\text{[ΣΟΑ] Πρόταση 2.4.5, σελ. 109}} H_q(sd_\bullet^k) = H_q(Id_{S_\bullet(X;R)}) = Id_{H_q^{sing}(X;R)}$ ([ΣΟΑ] Πρόταση 2.3.8, σελ. 95-96)

$$\Longrightarrow \quad c + B_q^{sing}(X;R) = Id_{H_q^{sing}(X;R)}(c + B_q^{sing}(X;R))$$
$$= H_q(sd_\bullet^k)(c + B_q^{sing}(X;R))$$
$$= sd_q^k(c) + B_q^{sing}(X;R) \qquad (2)$$

Επιπροσθέτως, $sd_q^k(c) \in Z_q^{\mathcal{U}}(X;R)$ (3).

[Πράγματι· λόγω του (1) αρκεί να δειχθεί ότι $sd_q^k(c) \in Ker(d_q^{sing}|_{S_q^{\mathcal{U}}(X;R)})$.
Επειδή $(d_q^{sing} \circ sd_q^k)(c) \underset{\substack{sd_\bullet^k \text{ αλυσωτός} \\ \text{μετασχηματισμός}}}{=\!=\!=} (sd_{q-1}^k(\underbrace{d_q^{sing}(c)}_{=0_{S_{q-1}(X;R)} \leftarrow c \in Z_q^{sing}(X;R)})) = 0_{S_q(X;R)}$,
τούτο είναι όντως αληθές.]

Από τις (2),(3) έπεται ότι $H_q(i_\bullet)(sd_q^k(c) + B_q(S_\bullet^{\mathcal{U}}(X;R)))$
$=\!=\; sd_q^k(c) + B_q^{sing}(X;R) = c + B_q^{sing}(X;R) \Longrightarrow$ ο $H_q(i_\bullet)$ είναι επιμορφισμός.

• <u>2º Βήμα.</u> Ο $H_q(i_\bullet)$ είναι και <u>μονομορφισμός R-μοδίων</u>.

'Εστω $\gamma \in Z_q(S_\bullet^{\mathcal{U}}(X;R))$ με $\gamma + B_q(S_\bullet^{\mathcal{U}}(X;R)) \in Ker(H_q(i_\bullet))$.

Τότε $H_q(i_\bullet)(\gamma + B_q(S^{\mathcal{U}}_\bullet(X;R))) = \gamma + B^{sing}_q(X;R) = 0_{H^{sing}_q(X;R)} = B^{sing}_q(X;R)$

$\Longrightarrow \gamma \in B^{sing}_q(X;R) := \mathrm{Im}(d^{sing}_{q+1})$

$\Longrightarrow \exists c \in S_{q+1}(X;R) : d^{sing}_{q+1}(c) = \gamma$. Η $(q+1)$-αλυσίδα c δεν είναι κατ' ανάγκην "$\mathcal{U}$-μικρή". Ωστόσο, σύμφωνα με το λήμμα 3.5.19, $\exists k \in \mathbb{N} : sd^k_{q+1}(c) \in S^{\mathcal{U}}_{q+1}(X;R)$. Επειδή ο $sd^k_\bullet$ είναι αλυσωτός μετασχηματισμός, το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \gamma \in Z_q(S^{\mathcal{U}}_\bullet(X;R)) & & \\
 & & \cap & & \\
S^{\mathcal{U}}_{q+1}(X;R) & \xrightarrow{d^{sing}_{q+1}} & S^{\mathcal{U}}_q(X;R) & \xrightarrow{d^{sing}_q} & S^{\mathcal{U}}_{q-1}(X;R) \\
{\scriptstyle i_{q+1}}\downarrow & \circlearrowleft & {\scriptstyle i_q}\downarrow & \circlearrowleft & {\scriptstyle i_{q-1}}\downarrow \\
c \in S_{q+1}(X;R) & \xrightarrow{d^{sing}_{q+1}} & S_q(X;R) & \xrightarrow{d^{sing}_q} & S_{q-1}(X;R) \\
{\scriptstyle sd^k_{q+1}}\downarrow & \circlearrowleft & {\scriptstyle sd^k_q}\downarrow & \circlearrowleft & {\scriptstyle sd^k_{q-1}}\downarrow \\
S_{q+1}(X;R) & \xrightarrow{d^{sing}_{q+1}} & S_q(X;R) & \xrightarrow{d^{sing}_q} & S_{q-1}(X;R) \\
\cup & & & & \\
S^{\mathcal{U}}_{q+1}(X;R) \ni sd^k_{q+1}(c) & & & &
\end{array}$$

μας δίδει: $sd^k_q(\gamma) = sd^k_q(i_q(\gamma)) = sd^k_q(d^{sing}_{q+1}(c)) = d^{sing}_{q+1}(sd^k_{q+1}(c))$

$= d^{sing}_{q+1}(i_{q+1}(sd^k_{q+1}(c))) = i_q(d^{sing}_{q+1}(s^k_{q+1}(c))) = d^{sing}_{q+1}|_{S^{\mathcal{U}}_{q+1}(X;R)}(s^k_{q+1}(c))$

$\Longrightarrow sd^k_q(\gamma) \in \mathrm{Im}(d^{sing}_{q+1}|_{S^{\mathcal{U}}_{q+1}(X;R)}) =: B_q(S^{\mathcal{U}}_\bullet(X;R)) = 0_{H_q(S^{\mathcal{U}}_\bullet(X;R))}$ (1)

Από την άλλη μεριά, μέσω του λήμματος 3.5.14 αποδεικνύεται ότι

$\gamma - sd^k_q(\gamma) = \gamma - sd^k_q(d^{sing}_{q+1}(c)) = d^{sing}_{q+1}(c) - sd^k_q(d^{sing}_{q+1}(c))$

$= d^{sing}_{q+1}(c) - d^{sing}_{q+1}(sd^k_{q+1}(c)) = d^{sing}_{q+1}(c - sd^k_{q+1}(c))$

$= d^{sing}_{q+1}(d^{sing}_{q+2} \circ \psi^{(k)}_{q+1} + \psi^{(k)}_q \circ d^{sing}_{q+1})(c) \underset{\boxed{d^{sing}_{q+1} \circ d^{sing}_{q+2} = 0}}{=\!=} d^{sing}_{q+1}(\psi^{(k)}_q(d^{sing}_{q+1}(c))) = d^{sing}_{q+1}(\psi^{(k)}_q(\gamma))$,

όπου το $\psi^{(k)}_q(\gamma)$ ανήκει στον $S^{\mathcal{U}}_{q+1}(X;R) = \sum_{j \in J} S_{q+1}(U_j;R)$ (διότι $\gamma \in Z_q(S^{\mathcal{U}}_\bullet(X;R))$ και ο $\psi^{(k)}_\bullet$ είναι φυσικός μετασχηματισμός), οπότε

$\gamma - sd^k_q(\gamma) \in \mathrm{Im}(d^{sing}_{q+1}|_{S^{\mathcal{U}}_{q+1}(X;R)}) =: B_q(S^{\mathcal{U}}_\bullet(X;R)) = 0_{H_q(S^{\mathcal{U}}_\bullet(X;R))}$ (2)

Από τα (1) και (2) έπεται ότι

$$\gamma + B_q(S^{\mathcal{U}}_\bullet(X;R)) = B_q(S^{\mathcal{U}}_\bullet(X;R)) = 0_{H_q(S^{\mathcal{U}}_\bullet(X;R))} \Longrightarrow H_q(i) \text{ μονομορφισμός.}$$

□

3.5.21. Θεώρημα. Το ζεύγος $(H_\bullet^{sing}, \partial_\bullet^{sing})$ πληροί τη συνθήκη (A'3), η οποία (σύμφωνα με την πρόταση 2.2.7, σελ. 124) ισοδυναμεί με το αξίωμα (A3) της εκτομής (βλ. σελ. 120).

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι οι A, B είναι δυο υπόχωροι ενός τοπολογικού χώρου $X \neq \phi$, τέτοιοι ώστε να ισχύει $X = A^\circ \cup B^\circ$. Έστω j η συνήθης ένθεση τοπολογικών ζευγών $j: (A, A\cap B) \hookrightarrow (A\cup B, B) = (X, B)$.
Απαιτείται να αποδειχθεί ότι οι ομομορφισμοί R-μοδίων

$$H_q^{sing}(j) = H_q(S_\bullet(\bar{j})): H_q^{sing}(A, A\cap B; R) \longrightarrow H_q^{sing}(X, B; R)$$

είναι ισομορφισμοί για κάθε $q \in \mathbb{Z}$. Θεωρούμε το κάλυμμα $\mathcal{U} := \{A, B\}$ του X και παρατηρούμε ότι

$$\left\{ \begin{array}{l} S_\bullet(A;R) \cap S_\bullet(B;R) = S_\bullet(A\cap B; R) \\ S_\bullet^{\mathcal{U}}(X;R) = \underbrace{S_\bullet(A;R) + S_\bullet(B;R)}_{R\text{-μόδιος παραγόμενος από τα } S_\bullet(A;R),\, S_\bullet(B;R)} \xhookrightarrow{i_\bullet} S_\bullet(X;R) \end{array} \right\},$$

οπότε από το 2ο Θ.Ι.Μ ([ΣΟΑ], 1.4.11, σελ. 20) λαμβάνουμε

$$S_\bullet(A, A\cap B; R) := S_\bullet(A;R) \big/ S_\bullet(A\cap B; R) \cong \big(S_\bullet(A;R) + S_\bullet(B;R)\big) \big/ S_\bullet(B;R),$$

κάτι που μας οδηγεί στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_\bullet(B;R) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & S_\bullet(A;R)+S_\bullet(B;R) \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook, "i_\bullet"] & S_\bullet(A, A\cap B; R) \arrow[r] \arrow[d, "S_\bullet(\bar{j})"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_\bullet(B;R) \arrow[r, hook] & S_\bullet(X;R) \arrow[r, two heads] & S_\bullet(X, B; R) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Κατά την άσκηση 25 του 4ου φυλλαδίου προτεινομένων ασκήσεων των [ΣΟΑ] το ακόλουθο διάγραμμα (με ακριβείς γραμμές) είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_q^{sing}(B;R) \arrow[r] \arrow[d, "Id", "\cong"'] & H_q(S_\bullet^{\mathcal{U}}(X;R)) \arrow[r] \arrow[d, "H_q(i_\bullet)", "\cong"'] & H_q^{sing}(A, A\cap B; R) \arrow[r] \arrow[d, "H_q^{sing}(j)"] & H_{q-1}^{sing}(B;R) \arrow[r] \arrow[d, "Id", "\cong"'] & H_{q-1}(S_\bullet^{\mathcal{U}}(X;R)) \arrow[r] \arrow[d, "H_{q-1}(i_\bullet)", "\cong"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_q^{sing}(B;R) \arrow[r] & H_q^{sing}(X;R) \arrow[r] & H_q^{sing}(X, B; R) \arrow[r] & H_{q-1}^{sing}(B;R) \arrow[r] & H_{q-1}^{sing}(X;R) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Οι $H_q(i_\bullet)$ είναι ισομορφισμοί βάσει του θεωρήματος 3.5.20. Από το "λήμμα των πέντε" οι $H_q^{sing}(j)$ είναι ωσαύτως ισομορφισμοί R-μοδίων, $\forall q \in \mathbb{Z}$. □

[ΣΟΑ], 2.2.2.(iii), σελ. 81

Μέχρι στιγμής έχουμε ορίσει μόνον ιδιάζοντες μοδίους ομολογίας ενός τοπολογικού χώρου με συντελεστές ειλημμένους από έναν μεταθετικό δακτύλιο R με μοναδιαίο πολλαπλασιαστικό στοιχείο. Ο ορισμός αυτός επεκτείνεται κατά τρόπο φυσικό και για συντελεστές ειλημμένους από οιονδήποτε R-μόδιο ως ακολούθως:

<u>3.6.1. Ορισμός.</u> Εάν το (X,A) είναι ένα τοπολογικό ζεύγος και το M ένας R-μόδιος, τότε ορίζουμε ως <u>q-οστό ιδιάζοντα μόδιο ομολογίας</u> $H_q^{sing}(X,A;M)$ <u>με συντελεστές ειλημμένους από τον M</u> τον <u>R-μόδιο</u>

$$\boxed{H_q^{sing}(X,A;M) := H_q(S_\bullet(X,A;R)\otimes_R M),\ \forall q\in\mathbb{Z}}.$$

<u>3.6.2. Σημείωση:</u> (i) Ο R (ως μεταθετικός δακτύλιος) φέρει τη δομή ενός $\mathbb{Z}$-μοδίου. Για κάθε τοπολογικό ζεύγος (X,A) έχουμε $\forall q\in\mathbb{Z}$: $S_q(X,A;R)\cong S_q(X,A;\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} R$, διότι τόσον ο R-μόδιος $S_q(X,A;R)$ όσον και ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $S_q(X,A;\mathbb{Z})$ είναι ελεύθεροι.(*) (Πράγματι· εξ ορισμού ο $S_q(X;R)$ είναι ελεύθερος με βάση του την ένωση

$$\{\sigma:\Delta_q\to A \mid \sigma \text{ συνεχής}\}\cup\{\sigma:\Delta_q\to X \mid \sigma \text{ συνεχής με } \sigma(\Delta_q)\not\subseteq A\},$$

όπου το $\{\sigma:\Delta_q\to A \mid \sigma \text{ συνεχής}\}$ αποτελεί μια βάση τού $S_q(A;R)$. Ως εκ τούτου, το $\{\sigma:\Delta_q\to X \mid \sigma \text{ συνεχής με } \sigma(\Delta_q)\not\subseteq A\}$ εκπροσωπεί μια βάση τού $S_q(X,A;R) := S_q(X;R)/S_q(A;R)$.)

Εξ αυτού συμπεραίνουμε ότι ο ορισμός 3.6.1 (για $M:=R$ και τον $\mathbb{Z}$ ως δακτύλιο αναφοράς): $H_q^{sing}(X,A;R) := H_q(S_\bullet(X,A;\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} R)$ ταυτίζεται με τον προηγηθέντα ορισμό 3.2.2 $H_q^{sing}(X,A;R)\cong H_q(S_\bullet(X,A;R))$ (μέχρις ισομορφισμού R-μοδίων). Εντούτοις, ακόμη και όταν $A=\emptyset$, έχουμε <u>εν γένει</u> $H_q^{sing}(X;R)\not\cong H_q^{sing}(X;\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} R$.

(*) Οι $S_q(X,A;R)$ και $S_q(X,A;\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} R$ είναι <u>και</u> $\mathbb{Z}$- <u>και</u> R-μόδιοι. (Βλ. [ΣΟΑ], άσκ. 16 τού 6ου φυλλαδίου).

(ii) Έστω M τυχών R-μόδιος.

Έστω Ψ_q ο ομομορφισμός R-μοδίων

$$\Psi_q : H_q^{sing}(X, A; R) \otimes_R M \longrightarrow H_q^{sing}(X, A; M)$$

$$(x + B_q^{sing}(X, A; R)) \otimes m \longmapsto (x \otimes m) + B_q(S.(X, A; R) \otimes_R M)$$

(όπου $x \in Z_q^{sing}(X, A; R)$, πρβλ. [ΣΟΑ], λήμμα 5.1.1).

3.6.3. Τοπολογικό καθολικό θεώρημα συντελεστών. Έστω (X, A) ένα τοπολογικό ζεύγος και έστω M ένας R-μόδιος. Εάν οι R-μόδιοι $Z_q^{sing}(X, A; R)$ και $B_q^{sing}(X, A; R)$ είναι ισόπεδοι για κάθε $q \in \mathbb{Z}$, τότε υφίσταται μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων της μορφής:

$$\boxed{\circledast \quad 0 \longrightarrow H_q^{sing}(X, A; R) \otimes_R M \xrightarrow{\Psi_q} H_q^{sing}(X, A; M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(H_{q-1}^{sing}(X, A; R), M) \longrightarrow 0.}$$

Εάν ο $B_q^{sing}(X, A; R)$ είναι -επιπροσθέτως- προβολικός, τότε η $\circledast$ είναι διασπωμένη βραχεία ακριβής ακολουθία.

Απόδειξη: Έπεται άμεσα από το αντίστοιχο αλγεβρικό καθολικό θεώρημα συντελεστών. (Βλ. [ΣΟΑ], θεώρημα 5.1.2). □

3.6.4. Σημείωση: (i) Όταν ο R είναι Π.Κ.Ι (= περιοχή κυρίων ιδεωδών), τότε οι υπομόδιοι $Z_q^{sing}(X, A; R)$ και $B_q^{sing}(X, A; R)$ του ελευθέρου R-μοδίου $S_q(X, A; R)$ οφείλουν να είναι ελεύθεροι (βλ. [ΣΟΑ], θεώρημα 2.4.15, σελ. 115) και κατ' επέκταση προβολικοί και ισόπεδοι (βλ. [ΣΟΑ] πρόταση 3.2.3, σελ. 129-130, και θεώρημα 3.5.22, σελ. 166), οπότε υφίσταται πάντοτε μια διασπωμένη βραχεία ακριβής ακολουθία της μορφής $\circledast$. Επίσης, ο R-μόδιος $\mathrm{Tor}_1^R(H_{q-1}^{sing}(X, A; R), M)$ είναι εύκολα υπολογίσιμος (μέχρις ισομορφισμού, βλ. [ΣΟΑ], θεώρημα 4.2.16, σελ. 205-206) υπό την προϋπόθεση ότι οι $H_{q-1}^{sing}(X, A; R)$ και M είναι <u>πεπερασμένως παραγόμενοι</u> R-μόδιοι με γνωστή δομή (βλ. [ΣΟΑ], θεώρημα 1.7.14, σελ. 67).

(ii) Όταν ο R είναι Π.Κ.Ι. και είτε ο M είτε οι $\{H_{q-1}^{sing}(X,A;R),\ q\in\mathbb{Z}\}$ δεν διαθέτουν στρέψη, τότε

$$H_q^{sing}(X,A;R)\otimes_R M \cong H_q^{sing}(X,A;M),\ \forall q\in\mathbb{Z}.$$

(Επί παραδείγματι, όταν ο R είναι σώμα, τότε οι $\{H_{q-1}^{sing}(X,A;R),\ q\in\mathbb{Z}\}$ στερούνται στρέψεως.)

3.6.5. Πρόταση Εάν το (X,A) είναι ένα τοπολογικό ζεύγος και η

$$0\to L\to M\to N\to 0$$

μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, τότε υφίσταται μια μακρά ακριβής ακολουθία:

$$\cdots\longrightarrow H_q^{sing}(X,A;L)\longrightarrow H_q^{sing}(X,A;M)\to H_q^{sing}(X,A;N)\longrightarrow H_{q-1}^{sing}(X,A;L)\to\cdots$$

Απόδειξη: Επειδή οι $S_p(X,A;R)$ είναι ελεύθεροι (και κατ' επέκτασιν ισόπεδοι) R-μόδιοι, η επαγομένη βραχεία ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων

$$0\longrightarrow S_\bullet(X,A;R)\otimes_R L\longrightarrow S_\bullet(X,A;R)\otimes_R M\longrightarrow S_\bullet(X,A;R)\otimes_R N\longrightarrow 0$$

είναι ακριβής (πρβλ. [ΣΟΑ] πρόταση 3.5.14, σελ. 161). Αρκεί λοιπόν να θεωρήσουμε την επαγομένη μακρά ακολουθία σε επίπεδο μοδίων ομολογίας. (Βλ. [ΣΟΑ], θεώρημα 2.3.11, σελ. 97–100). $\square$

3.6.6. Σημείωση: (i) Ο συνδετικός ομομορφισμός

$$H_q^{sing}(X,A;N)\longrightarrow H_{q-1}^{sing}(X,A;L)$$

καλείται ομομορφισμός του Bockstein.

(ii) Ένα σύνηθες παράδειγμα εφαρμογής της προτάσεως είναι η θεώρηση της μακράς ακριβούς ακολουθίας

$$\longrightarrow H_q^{sing}(X,A;\mathbb{Z})\xrightarrow{k\cdot Id_{H_q^{sing}(X,A;\mathbb{Z})}} H_q^{sing}(X,A;\mathbb{Z})\longrightarrow H_q^{sing}(X,A,\mathbb{Z}_k)\to H_{q-1}^{sing}(X,A;\mathbb{Z})\to$$

που επάγεται από την $0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{k\cdot Id_{\mathbb{Z}}}\mathbb{Z}\xrightarrow{\text{φυσικός επιρ.}}\mathbb{Z}_k\to 0$, $k\in\mathbb{N}, k\geq 2$, βλ. [ΣΟΑ], 2.1.3 (iv), σελ. 71.

Ένα δεύτερο σημαντικό θεώρημα, το οποίο έπεται από την "αλγεβρική εκδοχή" του, είναι το λεγόμενο "Θεώρημα τού Künneth", με τη βοήθεια τού οποίου μπορεί κανείς να υπολογίσει τους ιδιάζοντες μοδίους ομολογίας τού Καρτεσιανού γινομένου $X \times Y$ δυο τοπολογικών χώρων X και Y συναρτήσει των ιδιαζόντων μοδίων ομολογίας τού καθενός εξ αυτών. Ωστόσο, προτού προβούμε στην εν λόγω εφαρμογή τής "αλγεβρικής εκδοχής" είναι απαραίτητο να παραθέσουμε το λεγόμενο "θεώρημα των Eilenberg και Zilber" που μας εξηγεί τον συσχετισμό των ανωτέρω δεδομένων σε "επίπεδο μοδίων αλυσίδων".

<u>3.6.7. Θεώρημα των Eilenberg και Zilber:</u> Έστω ότι οι X, Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι. Τότε υπάρχουν φυσικοί, (μέχρις ομοτοπίας αλυσωτών συμπλόκων) μονοσημάντως ορισμένοι αλυσωτοί μετασχηματισμοί

$$\varphi = \varphi_{p,q} : S_p(X;R) \otimes_R S_q(Y;R) \longrightarrow S_{p+q}(X \times Y;R), \quad p,q \in \mathbb{Z},$$

και

$$\psi = \psi_{p,q} : S_{p+q}(X \times Y;R) \longrightarrow S_p(X;R) \otimes_R S_q(Y;R), \quad p,q \in \mathbb{Z},$$

με

$$\psi \circ \varphi \simeq \mathrm{Id}_{S.(X;R) \otimes S.(Y;R)} \quad \text{και} \quad \varphi \circ \psi \simeq \mathrm{Id}_{S.(X \times Y;R)}.$$

(σημειωτέον ότι για $p=q=0$ εμφανίζεται η προφανής ταύτιση $S_0(X;R) \otimes_R S_0(Y;R) \cong S_0(X \times Y;R)$)

Κατά συνέπειαν, $\boxed{H_q^{sing}(X \times Y;R) \simeq H_q(S.(X;R) \otimes_R S.(Y;R))}$.

<u>Απόδειξη</u>: Αυτή θα δοθεί στις παρουσιάσεις των φοιτητών. Βλ. π.χ.

- J.R. Munkres: *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley Pub. Co., 1984, §32, σελ. 183-185 και §59, σελ. 350-351,
- V.V. Prasolov: *Elements of Homology Theory*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. **81**, A.M.S., 2007, σελ. 103-104 και 212-213, ή
- J.J. Rotman: *An Introduction to Algebraic Topology*, GTM, Vol. **119**, Springer-Verlag, 1988, σελ. 237-245 και 266-267.

Η πρωτότυπη εργασία είναι η ακόλουθη:

- S. Eilenberg & J.A. Zilber: *On products of complexes*, Amer. J. Math. **75** (1953), 200-204,

3.6.8. Σημείωση: Μια δυνατότητα ορισμού της φ του Θεωρήματος 3.6.7 είναι η εξής: Εάν το σ είναι τυχόν ιδιάζον p-μονόπλοκο εντός του X και το τ τυχόν ιδιάζον q-μονόπλοκο εντός του Y, τότε θεωρώντας οιονδήποτε ομοιομορφισμό $\theta_{p,q}: \Delta_{p+q} \xrightarrow{\approx} \Delta_p \times \Delta_q$ θέτομε

$$\begin{aligned} \varphi: S_p(X;R) \otimes_R S_q(Y;R) &\longrightarrow S_{p+q}(X \times Y; R) \\ \sigma \otimes \tau &\longmapsto (\sigma \times \tau) \circ \theta_{p,q} \end{aligned}$$

(όπου $\Delta_p \times \Delta_q \xrightarrow{\sigma \times \tau} X \times Y$) και χρησιμοποιούμε -ως είθισται- γραμμική επέκταση (επί ολοκλήρου του $S_p(X;R) \otimes_R S_q(Y;R)$).

3.6.9. Τοπολογικό θεώρημα του Künneth: Έστω ότι οι X, Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι και ότι οι $Z_q^{sing}(X;R)$ και $B_q^{sing}(X;R)$ (ή οι $Z_q^{sing}(Y;R)$ και $B_q^{sing}(Y;R)$) είναι ισόπεδοι R-μόδιοι για κάθε $q \in \mathbb{Z}$. Τότε υφίσταται μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων της μορφής:

$$\begin{aligned} 0 \to \bigoplus_{p+q=n} \left(H_p^{sing}(X;R) \otimes_R H_q^{sing}(Y;R) \right) &\longrightarrow H_n^{sing}(X \times Y; R) \\ &\qquad \Vert\wr \\ &\quad H_n(S_\bullet(X;R) \otimes_R S_\bullet(Y;R)) \\ \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R\left(H_p^{sing}(X;R), H_q^{sing}(Y;R)\right) &\longrightarrow 0 \qquad (*) \end{aligned}$$

(για κάθε $n \in \mathbb{Z}$).

__Απόδειξη:__ Έπεται άμεσα από το αντίστοιχο αλγεβρικό Θεώρημα του Künneth (βλ. [ΣΟΑ], Θεώρημα 5.2.4). □

3.6.10. Σημείωση: (i) Εάν ο R είναι Π.Κ.Ι., τότε οι $Z_q^{sing}(X;R)$, $Z_q^{sing}(Y;R)$, $B_q^{sing}(X;R)$ και $B_q^{sing}(Y;R)$ είναι ελεύθεροι (και κατ' επέκτασιν ισόπεδοι) R-μόδιοι και η $(*)$ διασπάται, οπότε

$$H_n^{sing}(X \times Y; R) \cong \left(\bigoplus_{p+q=n} \left(H_p^{sing}(X;R) \otimes_R H_q^{sing}(Y;R) \right) \right) \oplus \left(\bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R\left(H_p^{sing}(X;R), H_q^{sing}(Y;R)\right) \right).$$

(βλ. [ΣΟΑ], Θεώρημα 5.2.7).

(ii) Εάν οι $Z_q^{sing}(X;R)$, $B_q^{sing}(Y;R)$ (ή οι $Z_q^{sing}(Y;R)$, $B_q^{sing}(Y;R)$) είναι προβολικοί R-μόδιοι, $\forall q\in\mathbb{Z}$, τότε το γινόμενο στρέψεως καθίσταται τετριμμένο και έτσι προκύπτει ο ισομορφισμός:

$$(**)\quad H_n^{sing}(X\times Y;R)\cong\bigoplus_{p+q=n}\left(H_p^{sing}(X;R)\otimes_R H_q^{sing}(Y;R)\right),\ \forall n\in\mathbb{Z}.$$

(Επί παραδείγματι, τούτο συμβαίνει πάντοτε όταν ο R είναι σώμα, πρβλ. [ΣΟΑ] πορίσματα 5.2.5 και 5.2.6.)

3.6.11. Παραδείγματα υπολογισμών μέσω τού $(**)$:

(i) Εάν $m,n\in\mathbb{N}$, τότε από το πόρισμα 2.4.4 και τον $(**)$ λαμβάνουμε για $m\neq n$:

$$H_q^{sing}(\mathbb{S}^m\times\mathbb{S}^n;R)\cong\begin{cases}R, & \text{όταν } q\in\{0,m,n,m+n\},\\ \{0\}, & \text{αλλιώς},\end{cases}$$

και για $m=n$:

$$H_q^{sing}(\mathbb{S}^m\times\mathbb{S}^m;R)\cong\begin{cases}R, & \text{όταν } q\in\{0,2m\},\\ R\oplus R, & \text{όταν } q=m,\\ \{0\}, & \text{αλλιώς}.\end{cases}$$

(ii) Για τον m-διάστατο τόρο $\mathbb{T}^m:=\underbrace{\mathbb{S}^1\times\cdots\times\mathbb{S}^1}_{m\text{-φορές}}$, $m\geq 1$, γνωρίζουμε τους ιδιάζοντες μοδίους ομολογίας για $m=1$ (από το 2.4.4) και για $m=2$ (από το (i)), ενώ για $m\geq 3$ εφαρμόζουμε πλήρη επαγωγή και τον $(**)$ και λαμβάνουμε:

$$H_q^{sing}(\mathbb{T}^m;R)=H_q^{sing}(\mathbb{T}^{m-1}\times\mathbb{S}^1;R)\cong\bigoplus_{\substack{i+j=q\\ j\in\{0,1\}}}\left(H_i^{sing}(\mathbb{T}^{m-1};R)\otimes_R H_j^{sing}(\mathbb{S}^1;R)\right)$$

$$\cong H_q^{sing}(\mathbb{T}^{m-1};R)\oplus H_{q-1}^{sing}(\mathbb{T}^{m-1};R)\overset{\text{Επαγωγική υπόθεση}}{\cong}\begin{cases}R^{\binom{m-1}{q}}, & 0\leq q\leq m-1\\ \{0\}, & \text{αλλιώς}\end{cases}\oplus\begin{cases}R^{\binom{m-1}{q-1}}, & 0\leq q\leq m\\ \{0\}, & \text{αλλιώς}\end{cases}\overset{\text{Τρίγωνο Pascal}}{\cong}$$

$$\cong\begin{cases}R^{\binom{m}{q}}, & \text{όταν } 0\leq q\leq m\\ \{0\} & \text{αλλιώς}\end{cases},$$ σε συμφωνία με τους προηγούμενους υπολογισμούς μας στη 2.7.7, σελ. 158.

§ 3.7 Σημαντικές εφαρμογές τής ιδιάζουσας ομολογίας όταν $R = \mathbb{Z}$

Όταν $R=\mathbb{Z}$ (ο δακτύλιος των ακεραίων) η ιδιάζουσα θεωρία ομολογίας $(H_\bullet^{\text{sing}}, \partial_\bullet^{\text{sing}})$ είναι σε θέση να αντιμετωπίζει (συνεπικουρούμενη από τα συναφή "αλγεβρικά εργαλεία") με περισσή ευκολία μια σειρά κλασικών τοπολογικών προβλημάτων. Στην παρούσα ενότητα θα ασχοληθούμε με ορισμένα εξ αυτών. Ωστόσο, προτού συμβεί αυτό, κρίνεται ως προσήκουσα η παράθεση τού συσχετισμού τής θεμελιώδους ομάδας ενός (εστιγμένου) τοπολογικού χώρου X με την αβελιανή ομάδα ($\mathbb{Z}$-μόδιο) $H_1^{\text{sing}}(X;\mathbb{Z})$ (ούτως ώστε να συνδεθούν έννοιες που είχαν καταστεί οικείες στο προηγηθέν μάθημα Γ20 : "Αλγεβρική Τοπολογία – Ομοτοπία" με έννοιες εισαχθείσες στο παρόν κεφάλαιο).

Έστω $(X,\{x_0\})$ ένας εστιγμένος τοπολογικός χώρος και έστω $\pi_1(X,x_0)$ η θεμελιώδης ομάδα του στο x_0 (βλ. 1.9.10, σελ. 84).

3.7.1. Θεώρημα. Έστω $\eta : \Delta_1 \xrightarrow{\cong} I \; (:=[0,1])$ ο ομοιομορφισμός $\eta((1-t)e_0 + t\,e_1) := t$, $\forall t \in I$. Τότε η

$$\varphi : \pi_1(X;x_0) \longrightarrow H_1^{\text{sing}}(X;\mathbb{Z})$$

η οριζόμενη από τον τύπο $\varphi([\alpha]) := \alpha \circ \eta + B_1^{\text{sing}}(X;\mathbb{Z})$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων, ο λεγόμενος <u>ομομορφισμός τού Hurewicz</u> (όπου $[\alpha]$ η κλάση ισοδυναμίας ενός δρόμου $\alpha : I \to X$ εντός τού X με $\alpha(0)=\alpha(1)=x_0$ και $\alpha\circ\eta \in Z_1^{\text{sing}}(X;\mathbb{Z})$). Εάν ο X είναι δρομοσυνεκτικός, τότε η φ είναι επιμορφισμός ομάδων με πυρήνα της τον $\mathrm{Ker}(\varphi) = [\pi_1(X,x_0), \pi_1(X,x_0)]$, ήτοι τη μεταθέτρια υποομάδα τής $\pi_1(X,x_0)$ που παράγεται από το σύνολο $\{[\beta]\cdot[\gamma]\cdot[\beta]^{-1}\cdot[\gamma]^{-1} \mid [\beta],[\gamma] \in \pi_1(X,x_0)\}$, οπότε υφίσταται ένας ισομορφισμός ομάδων

$$\boxed{\pi_1(X,x_0)^{ab} \xrightarrow{\cong} H_1^{\text{sing}}(X;\mathbb{Z})},$$

όπου $\pi_1(X,x_0)^{ab} := \pi_1(X,x_0)/[\pi_1(X,x_0),\pi_1(X,x_0)]$ η <u>αβελιανοποίηση</u> τής $\pi_1(X,x_0)$.

Απόδειξη: Αυτή θα δοθεί στις παρουσιάσεις των φοιτητών. Βλ. π.χ.

- M.J. Greenberg & J.R. Harper: *Algebraic Topology. A First Course*, Mathematics Lecture Note Series, Vol. **58**, The Benjamin/Cummings Pub. Co., 1981, Ch. 12, σελ. 63-69.
- J.J. Rotman: *An Introduction to Algebraic Topology*, GTM, Vol. **119**, Springer-Verlag, 1988, σελ. 80-85.

3.7.2. Πόρισμα: Εάν ο X είναι δρομοσυνεκτικός, τότε ο επιμορφισμός φ τού Θεωρήματος 3.7.1 είναι ισομορφισμός εάν και μόνον εάν η θεμελιώδης ομάδα τού X είναι αβελιανή.

3.7.3. Εφαρμογή: Εάν εξαιρέσουμε τις επιφάνειες F_g, N_g, $g \geq 1$, όλοι οι τοπολογικοί χώροι που καταγράφονται στον πίνακα παραδειγμάτων τού 1.19.12 (σελ. 85) διαθέτουν αβελιανές θεμελιώδεις ομάδες (οι οποίες οφείλουν να είναι ισόμορφες των πρώτων ιδιαζόντων ομάδων ομολογίας τους). Για τις F_g, N_g έχουμε

$$\begin{cases} H_1^{\mathrm{sing}}(F_g;\mathbb{Z}) \cong \pi_1(F_g)^{ab} \cong \mathbb{Z}^g, \\ H_1^{\mathrm{sing}}(N_g;\mathbb{Z}) \cong \pi_1(N_g)^{ab} \cong \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2. \end{cases}$$

Από τούδε και εις το εξής θα ασχοληθούμε με τις προαναγγελθείσες εφαρμογές τής ιδιάζουσας θεωρίας ομολογίας (για $R=\mathbb{Z}$) ξεκινώντας με την έννοια τού "βαθμού" συνεχών απεικονίσεων μεταξύ ισοδιάστατων σφαιρών.

3.7.4. Ορισμός: Έστω $n \in \mathbb{N}_0$ και έστω $f: \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ τυχούσα συνεχής απεικόνιση. Ως γνωστόν (βλ. Θεώρημα 2.4.3, σελ. 128-129) $\widetilde{H}_n^{\mathrm{sing}}(\mathbb{S}^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Έστω ξ ένας γεννήτορας τής άπειρης κυκλικής ομάδας $\widetilde{H}_n^{\mathrm{sing}}(\mathbb{S}^n;\mathbb{Z})$. Εάν το x είναι τυχόν στοιχείο αυτής τής ομάδας, τότε $\exists\, m \in \mathbb{Z}: x = m\xi \Longrightarrow \widetilde{H}_n^{\mathrm{sing}}(f)(x) = m\, \widetilde{H}_n^{\mathrm{sing}}(f)(\xi)$. Όμως $\widetilde{H}_n^{\mathrm{sing}}(f)(\xi) = k\xi$, για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$ (μη εξαρτώμενον από τη συγκεκριμένη επιλογή τού ξ), οπότε $\widetilde{H}_n^{\mathrm{sing}}(f)(x) = mk\xi = k(m\xi) = kx$

$\Longrightarrow \widetilde{H}_n^{\mathrm{sing}}(f) = k.\mathrm{Id}_{\widetilde{H}_n^{\mathrm{sing}}(\mathbb{S}^n;\mathbb{Z})}$. Αυτός ο $k =: \deg(f)$ καλείται <u>βαθμός τής f</u>.

3.7.5. Λήμμα. Εάν οι $f,g:\mathbb{S}^n\to\mathbb{S}^n$ είναι συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ ισοδιαστάτων σφαιρών, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $\deg(\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^n})=1$,

(ii) $f\simeq g\Longrightarrow \deg(f)=\deg(g)$,

(iii) $\deg(g\circ f)=\deg(g)\cdot\deg(f)$,

(iv) f ομοτοπική ισοδυναμία $\Longrightarrow \deg(f)\in\{\pm1\}$,

(v) f σταθερή απεικόνιση $\Longrightarrow \deg(f)=0$.

Απόδειξη: Αφήνεται ως άσκηση. □

Στην πραγματικότητα ισχύει και το αντίστροφο του 3.7.5 (ii) αλλά η απόδειξη είναι αρκούντως τεχνική και δύσκολη.

3.7.6. Θεώρημα (Hopf). Δύο συνεχείς απεικονίσεις $f,g:\mathbb{S}^n\to\mathbb{S}^n$ είναι ομότοπες εάν και μόνον εάν $\deg(f)=\deg(g)$.

Απόδειξη: Βλ. S. T. Hu: "Homotopy Theory", Academic Press, 1959, σελ. 53-56, ή J. Dugundji: "Topology", Allyn and Bacon, Inc., 1966, Theorem 7.4, σελ. 352. □

3.7.7. Πρόταση: Έστω $n_0\in\mathbb{N}$ και έστω $\mathbb{R}^{n+1}\supset\mathbb{S}^n\xrightarrow{f}\mathbb{S}^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ η απεικόνιση η οριζόμενη από τον τύπο $f(x_0,\dots,x_n)=(-x_0,x_1,\dots,x_n)$. Τότε $\deg(f)=-1$.

Απόδειξη: Κατ' αρχάς θα δείξουμε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για $n=0$. Επειδή $\mathbb{S}^0=\{\pm1\}\subset\mathbb{R}$ έχουμε:

2.6.10 (i)

$$H_0^{sing}(\{1\};\mathbb{Z})\oplus H_0^{sing}(\{-1\};\mathbb{Z})\xrightarrow{\cong} H_0^{sing}(\mathbb{S}^0;\mathbb{Z})$$

$$\begin{array}{ccc} (a,b) & \longmapsto & (b,a)\in\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
H_0^{sing}(\mathbb{S}^0;\mathbb{Z}) & & \\
\cong & & \\
\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}\cong\tilde{H}_0^{sing}(\mathbb{S}^0;\mathbb{Z}) \\
 & & \downarrow \tilde{H}_0^{sing}(f) \\
(b,a)\in\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}\cong\tilde{H}_0^{sing}(\mathbb{S}^0;\mathbb{Z}) \\
\cong & & \\
H_0^{sing}(\mathbb{S}^0;\mathbb{Z}) & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
H_0^{sing}(\mathbb{S}^0;\mathbb{Z}) \to H_0^{sing}(\{pt\};\mathbb{Z}) & \text{με} & \\
\cong \qquad\qquad\qquad \cong & & \tilde{H}_0^{sing}(\mathbb{S}^0;\mathbb{Z}) \\
\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\ni(a,b)\mapsto a+b\in\mathbb{Z} & & \text{πυρήνας του}
\end{array}$$

Συγκεκριμένα, $\underbrace{\tilde{H}_0^{sing}(\mathbb{S}^0;\mathbb{Z}) = \{(a,-a)\in H_0^{sing}(\{pt\};\mathbb{Z})\oplus H_0^{sing}(\{pt\};\mathbb{Z})}_{\cong H_0^{sing}(\mathbb{S}^0;\mathbb{Z})}\}$

και $\tilde{H}_0^{sing}(f)((a,-a)) = (-a,a) = -(a,-a) \Longrightarrow deg(f) = -1.$

Εν συνεχεία θα εργασθούμε επαγωγικώς επί του n. Ας υποθέσουμε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για την $\mathbb{S}^k$ όπου $k<n$ $(n\geq 1)$. Θεωρούμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}\cong\tilde{H}_n^{sing}(\mathbb{S}^n;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\tilde{H}_n^{sing}(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_n^{sing}(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n_-;\mathbb{Z}) \arrow[d, "H_n^{sing}(\bar{f})"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_n^{sing}(\mathbb{S}^n_+,\mathbb{S}^{n-1};\mathbb{Z}) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "H_n^{sing}(\overline{f|_{\mathbb{S}^n_+}})"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \tilde{H}_{n-1}^{sing}(\mathbb{S}^{n-1};\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z} \arrow[d, "\tilde{H}_{n-1}^{sing}(f)"] \\
\mathbb{Z}\cong\tilde{H}_n^{sing}(\mathbb{S}^n;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\cong"'] & H_n^{sing}(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n_-;\mathbb{Z}) & H_n(\mathbb{S}^n_+,\mathbb{S}^{n-1};\mathbb{Z}) \arrow[l, "\cong"] \arrow[r, "\cong"'] & \tilde{H}_{n-1}^{sing}(\mathbb{S}^{n-1};\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

(με τους υποδεικνυόμενους ισομορφισμούς γνωστούς από την απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.3, σελ. 128-129). Επειδή από την επαγωγική μας υπόθεση ο $\tilde{H}_{n-1}^{sing}(f)$ είναι πολλαπλασιασμός με -1, ο $\tilde{H}_n^{sing}(f)$ θα είναι ωσαύτως πολλαπλασιασμός με -1. Άρα τελικώς $deg(f)=-1$. □

3.7.8. Παρατήρηση: Η πρόταση 3.7.7 παραμένει εν ισχύ ακόμη και εάν αντικαταστήσουμε την f με μια απεικόνιση, ο τύπος ορισμού της οποίας θέτει το "μείον" σε μια άλλη συντεταγμένη.

3.7.9. Πρόταση: Η "αντιποδική απεικόνιση" $\alpha:\mathbb{S}^n\to\mathbb{S}^n$ με $\alpha(x_0,x_1,\dots,x_n) := (-x_0,-x_1,\dots,-x_n)$ έχει βαθμό $deg(\alpha)=(-1)^{n+1}$.

Απόδειξη: Εάν ορίσουμε ως $f_j:\mathbb{S}^n\to\mathbb{S}^n$ την απεικόνιση με τύπο ορισμού του $f_j(x_0,x_1,\dots,x_n) := (x_0,\dots,-x_j,\dots,x_n)$, $\forall j\in\{0,\dots,n\}$, τότε $\alpha = f_0\circ f_1\circ\dots\circ f_n$, οπότε

$$deg(\alpha) \underset{3.7.7 \text{ και } 3.7.8}{\overset{3.7.5\,(iii),}{=\!=\!=\!=}} \prod_{j=0}^{n} deg(f_j) = (-1)^{n+1}. \ \square$$

(Για μια διαφορετική απόδειξη της προτάσεως 3.7.9 για $n\geq 1$, βλ. 4.4.40, σελ. 294.)

3.7.10. Πρόταση: Έστω $f: \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ μια συνεχής απεικόνιση. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Εάν $f(x) \neq x$, $\forall x \in \mathbb{S}^n$, τότε $f \simeq \alpha$ (με α όπως στην 3.7.9).

(ii) Εάν $f(x) \neq -x$, $\forall x \in \mathbb{S}^n$, τότε $f \simeq \mathrm{Id}_{\mathbb{S}^n}$.

Απόδειξη: (i) $f \underset{F}{\simeq} \alpha$, όπου $F: \mathbb{S}^n \times I \to \mathbb{S}^n$

$$(x,t) \longmapsto F(x,t) := \frac{(1-t)f(x) - tx}{\|(1-t)f(x) - tx\|},$$

καθότι $F(x,0) = f(x)$ και $F(x,1) = -x$, $\forall x \in \mathbb{S}^n$.

(ii) $\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^n} \underset{G}{\simeq} f$, όπου $G: \mathbb{S}^n \times I \to \mathbb{S}^n$

$$(x,t) \longmapsto G(x,t) := \frac{t f(x) + (1-t)x}{\|t f(x) + (1-t)x\|},$$

καθότι

$G(x,0) = x$ και $G(x,1) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{S}^n$. □

3.7.11. Πόρισμα: Εάν ο n είναι ένας άρτιος μη αρνητικός ακέραιος αριθμός, τότε $\alpha \not\simeq \mathrm{Id}_{\mathbb{S}^n}$.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι $\alpha \simeq \mathrm{Id}_{\mathbb{S}^n}$. Τότε

$$\deg(\alpha) \underset{3.7.9}{=\!=} (-1)^{n+1} \underset{3.7.5(ii)}{=\!=} \deg(\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^n}) \underset{3.7.5(i)}{=\!=} 1 \Longrightarrow n \text{ περιττός}.$$ □

3.7.12. Πόρισμα: Εάν ο n είναι ένας άρτιος μη αρνητικός ακέραιος αριθμός, τότε για κάθε συνεχή απεικόνιση $f: \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ υπάρχει κάποιο $x \in \mathbb{S}^n$, τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x) \in \{\pm x\}$.

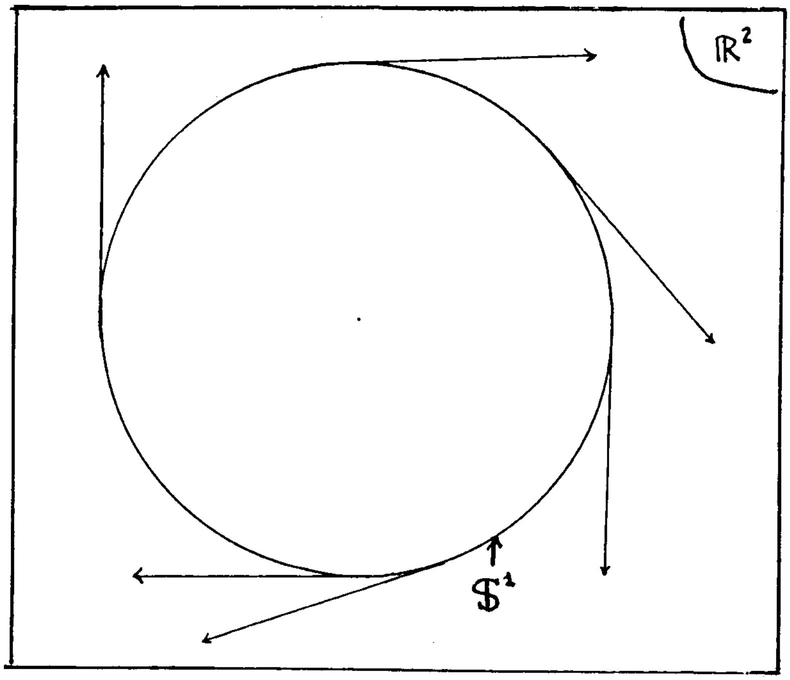
Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι ο ισχυρισμός είναι εσφαλμένος, ήτοι ότι $f(x) \notin \{\pm x\}$, $\forall x \in \mathbb{S}^n$. Χρησιμοποιώντας τις ομοτοπίες F, G, τις ορισθείσες στην πρόταση 3.7.10, κατασκευάζουμε την ομοτοπία

$$H(x,t) := \begin{cases} G(x,2t), & \text{όταν } x \in \mathbb{S}^n,\ 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ F(x,2t-1), & \text{όταν } x \in \mathbb{S}^n,\ \frac{1}{2} \le t \le 1, \end{cases}$$

μέσω της οποίας αποδεικνύεται ότι $\alpha \simeq \mathrm{Id}_{\mathbb{S}^n}$, πράγμα άτοπο επί τη βάσει του πορίσματος 3.7.11. □

<u>3.7.13. Ορισμός</u>: Ένα (συνεχές, εφαπτόμενο) <u>διανυσματικό πεδίο</u> επί της σφαίρας $\mathbb{S}^n$ είναι μια συνεχής απεικόνιση $V: \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ που πληροί την ισότητα $\langle V(x), x \rangle = 0$ (όπου $\langle \cdot , \cdot \rangle$ το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathbb{R}^{n+1}$). Εάν $V(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{S}^n$, τότε λέμε ότι (ένα τέτοιο V) είναι ένα <u>μη μηδενιζόμενο διανυσματικό πεδίο</u>.

<u>3.7.14. Παράδειγμα</u> Όταν $n=1$, τότε η $V: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ η οριζόμενη από τον τύπο $V(x_0, x_1) := (x_1, -x_0)$ είναι ένα μη μηδενιζόμενο διανυσματικό πεδίο επί του κύκλου $\mathbb{S}^1$, όπως δείχνεται στο ακόλουθο σχήμα:



<u>3.7.15. Το Θεώρημα "της τριχωτής μπάλας"</u>: Επί της σφαίρας $\mathbb{S}^n$ υφίσταται ένα μη μηδενιζόμενο διανυσματικό πεδίο εάν και μόνον εάν ο n είναι περιττός.

<u>Απόδειξη</u>: ($\Longrightarrow$) Έστω ότι υπάρχει ένα μη μηδενιζόμενο διανυσματικό πεδίο $V: \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ επί της $\mathbb{S}^n$. Ας υποθέσουμε ότι ο n είναι άρτιος. Τότε η $f: \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $x \longmapsto f(x) := \dfrac{x + V(x)}{\| x + V(x) \|}$, είναι καλώς ορισμένη (καθόσον $\| x + V(x) \|^2 = \underbrace{\| x \|^2}_{\neq 0} + \underbrace{\| V(x) \|^2}_{\neq 0} + 2 \overbrace{\langle V(x), x \rangle}^{0}$) και (προφανώς) συνεχής.

Βάσει τού πορίσματος 3.7.12 $\exists\, y \in \mathbb{S}^n$: $f(y) \in \{y, -y\}$.
Θέτουμε $\lambda := \| y + V(y) \|$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

<u>1η περίπτωση:</u> Εάν $y + V(y) = \lambda y$, τότε

$$\langle V(y), y \rangle = \langle (\lambda-1) y, y \rangle = (\lambda - 1) \underbrace{\|y\|^2}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow V(y) = 0.$$

Άτοπο!

<u>2η περίπτωση:</u> Εάν $y + V(y) = -\lambda y$, τότε

$$\langle V(y), y \rangle = \langle -(\lambda+1) y, y \rangle = -(\lambda+1) \underbrace{\|y\|^2}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow V(y) = 0.$$

Άτοπο!

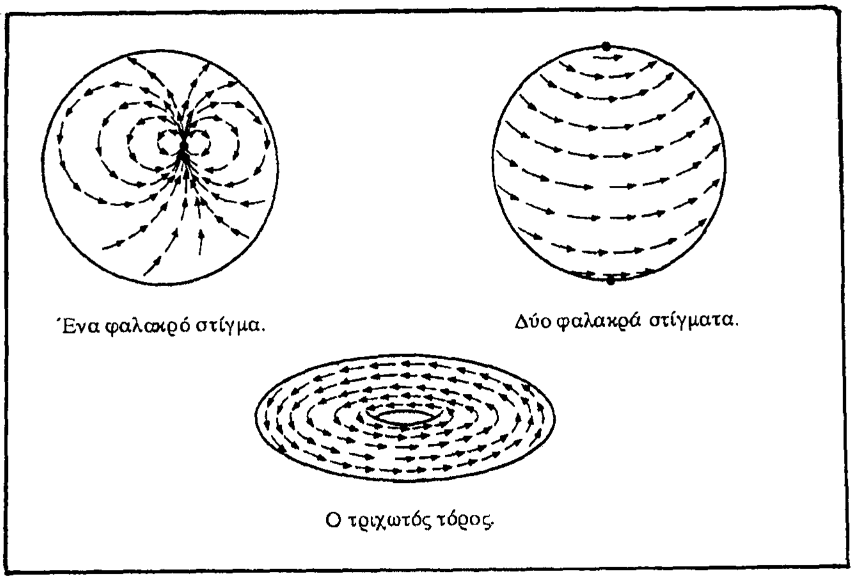
$(\Longleftarrow)$: Εάν $n = 2k+1$, για κάποιον $k \in \mathbb{N}_0$, τότε η συνεχής απεικόνιση $V: \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ η οριζόμενη από τον τύπο

$$V(x_0, \ldots, x_{2k+1}) := (x_1, -x_0, x_3, -x_2, \ldots, x_{2k+1}, -x_{2k})$$

αποτελεί ένα μη μηδενιζόμενο διανυσματικό πεδίο επί της $\mathbb{S}^n$ (καθότι $\langle V(x), x \rangle = \sum_{i=0}^{2k} (x_i x_{i+1} - x_{i+1} x_i) = 0$ και $V(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{S}^n$). $\square$

<u>3.7.16. Σημείωση:</u> (i) Το παρωνύμιο "Θεώρημα της τριχωτής μπάλας" εξηγείται ως εξής: Εάν από κάθε σημείο της επιφανείας μιας μπάλας μεγαλώνει μία τρίχα, κάθε απόπειρα για να καταστεί εφικτό το στρωτό (ομαλό, λείο) χτένισμα των τριχών της μπάλας απ' άκρου εις άκρον είναι καταδικασμένη σε αποτυχία. Έτσι, αποδεχόμενοι αδιαμαρτύρητα αυτό το γεγονός, το καλύτερο το οποίο θα μπορούσαμε να κάνουμε προκειμένου να χτενίσουμε έστω και "εν μέρει" το τρίχωμα της μπάλας στρωτά, είναι να το χτενίσουμε όπως στο ακόλουθο σχήμα, αφήνοντας στη μοίρα τους το ένα ή τα δύο παράταιρα φαλακρά στίγματα. (Εάν υποθέταμε ότι υπάρχει η δυνατότητα εντελώς στρωτού χτενίσματος τού τριχώματος, τότε τα διανύσματα τα εφαπτόμενα των τριχών θα αντέφασκαν προς ό,τι επιτάσσει το Θεώρημα 3.7.15 για $n=2$.)

Ωστόσο, μπορούμε να χτενίσουμε στρωτά τον "τριχωτό τόρο":



Στην πραγματικότητα, ο τόρος είναι η μόνη προσανατολίσιμη "τριχωτή" κλειστή επιφάνεια που μπορεί να χτενισθεί εντελώς στρωτά. (Βλ. M.A. Armstrong: "Basic Topology", UTM, Springer-Verlag, 1983, §9.4., ή Παράδειγμα 4.4.43, σελ. 295.)

(ii) Στη γερμανική βιβλιογραφία, αντί τού παρωνυμίου "θεώρημα τής τριχωτής μπάλας", χρησιμοποιείται το "θεώρημα τού σκαντζόχοιρου": Είναι αδύνατο κανείς να χτενίσει στρωτά έναν σκαντζόχοιρο (ή -λογίως- "ακανθόχοιρο") χωρίς την εμφάνιση ενός φαλακρού σημείου (επί τού χτενισθέντος τριχώματός του).

<u>3.7.17. Ορισμός.</u> (i) Για κάθε $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ ορίζουμε τη συνεχή απεικόνιση $\vartheta_a : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{S}^n$, $\vartheta_a(x) := \frac{x-a}{\|x-a\|}$.

(ii) Έστω $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ μια συνεχής απεικόνιση και έστω $a \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus f(\mathbb{S}^n)$. Τότε ως <u>τάξη τής f στο σημείο a</u> ορίζουμε τον ακέραιο αριθμό

$$\boxed{\operatorname{ord}_a(f) := \deg(\vartheta_a \circ f)}.$$

3.7.18. Παράδειγμα: Εάν $n=0$, $f: \mathbb{S}^0 \to \mathbb{R}$ συνεχής και $a \in \mathbb{R} \setminus f(\mathbb{S}^0)$, τότε διακρίνουμε τέσσερεις περιπτώσεις:

(i) $f(-1) < a$ και $f(1) < a \Longrightarrow \mathrm{ord}_a(f) = 0$,

(ii) $f(-1) < a$ και $f(1) > a \Longrightarrow \mathrm{ord}_a(f) = 1$,

(iii) $f(-1) > a$ και $f(1) > a \Longrightarrow \mathrm{ord}_a(f) = 0$,

(iv) $f(-1) > a$ και $f(1) < a \Longrightarrow \mathrm{ord}_a(f) = -1$.

3.7.19. Άσκηση: Έστω $\gamma: I \to \mathbb{S}^1$ η απεικόνιση $\gamma(t) := \exp(2\pi\sqrt{-1}\,t)$. Να αποδειχθεί ότι για οποιαδήποτε συνεχή απεικόνιση $f: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ και οιοδήποτε $a \in \mathbb{R}^2 \setminus f(\mathbb{S}^1)$ η τάξη $\mathrm{ord}_a(f)$ της f στο a ισούται με τον αριθμό περιελίξεως (ή "δείκτη") τού δρόμου $f \circ \gamma$ (εντός τού $\mathbb{R}^2$) στο a (ο οποίος είναι γνωστός από τις παραδόσεις τού μαθήματος Γ20 ή τη Μιγαδική Ανάλυση).

3.7.20. Θεώρημα υπάρξεως τού Kronecker: Ας υποθέσουμε ότι η $f: \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ είναι μια συνεχής απεικόνιση, $g := f|_{\mathbb{S}^n}$, και ότι $a \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus f(\mathbb{S}^n)$. Εάν $\mathrm{ord}_a(g) \neq 0$, τότε υπάρχει κάποιο σημείο $x \in \mathbb{D}^{n+1}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x) = a$.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι $a \notin f(\mathbb{D}^{n+1})$. Τότε κατασκευάζεται μια ομοτοπία $g \underset{H}{\simeq} c_{f(0)}$ (όπου $c_{f(0)}: \mathbb{S}^n \to \{f(0)\}$ η σταθερή απεικόνιση) μέσω τού τύπου

$$H: \mathbb{S}^n \times I \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{a\}$$
$$(x,t) \longmapsto H(x,t) := f(tx)$$

και

$$\vartheta_a \circ g \simeq \vartheta_a \circ c_{f(0)} \underset{(A2)}{\Longrightarrow} \widetilde{H}_n^{\mathrm{sing}}(\vartheta_a \circ g) = \widetilde{H}_n^{\mathrm{sing}}(\vartheta_a \circ c_{f(0)}) = 0$$

$\Longrightarrow \deg(g) = \mathrm{ord}_a(g) = 0$, κάτι που αντίκειται προς την αρχική υπόθεσή μας (ότι $\mathrm{ord}_a(g) \neq 0$). Άρα $a \in f(\mathbb{D}^{n+1})$. □

3.7.21. Σημείωση: Για $n=0$ το Θεώρημα 3.7.20 είναι κατ' ουσίαν το "Θεώρημα της ενδιαμέσου τιμής" για συνεχείς συναρτήσεις που συναντούμε στον Απειροστικό Λογισμό.

3.7.22. Θεώρημα: Έστω $f: \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ μια συνεχής απεικόνιση, η οποία διατηρεί τα αντιποδικά σημεία (δηλαδή $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{S}^n$). Τότε η f έχει ως βαθμό της έναν περιττό ακέραιο αριθμό.

Απόδειξη: Βλ. M.A. Armstrong: "Basic Topology", UTM, Springer-Verlag, 1983, §9.3. □

3.7.23. Πόρισμα Εάν η $f: \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ είναι μια συνεχής απεικόνιση, η οποία διατηρεί τα αντιποδικά σημεία (δηλαδή $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{S}^m$), τότε $m \leq n$.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι $m > n > 0$. Προφανώς,

$$\mathbb{S}^n \approx S := \{(x_0, \ldots, x_m) \in \mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1} \mid x_j = 0,\ \forall j \geq n+1\}.$$

Έστω $g := f|_S$. Επειδή $g(-x) = -g(x)$, $\forall x \in S$, έχουμε $\deg(g) =$ περιττός (βάσει του θεωρήματος 3.7.22). Όμως η g είναι ομότοπη μιας σταθερής απεικονίσεως, διότι επεκτείνεται υπεράνω της $(n+1)$-διάστατης μπάλας της αποτελουμένης από όλα εκείνα τα σημεία της $\mathbb{S}^m$, οι τελευταίες $m-n-1$ συντεταγμένες των οποίων είναι όλες μηδέν, ενώ οι συντεταγμένες τους στη θέση $m-n$ είναι ≥ 0. (Η εν λόγω μπάλα είναι $\approx$ του κλειστού άνω ημισφαιρίου της $\mathbb{S}^m$.) Επομένως, $\deg(g) = 0$ (βλ. 3.7.5 (ii),(v)). Άτοπο! Άρα $m \leq n$. □

3.7.24. Θεώρημα των Borsuk και Ulam: Για κάθε συνεχή απεικόνιση $f: \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ υπάρχει κάποιο σημείο $x \in \mathbb{S}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x) = f(-x)$.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι $f(x) \neq f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{S}^n$, για κάποια συνεχή απεικόνιση $f: \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$. Τότε η συνεχής απεικόνιση $g: \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$, $g(x) := \dfrac{f(x) - f(-x)}{\| f(x) - f(-x) \|}$, διατηρεί τα αντιποδικά σημεία, κάτι που αντιφάσκει προς το πόρισμα 3.7.23. □

3.7.25. Πόρισμα ("Μετεωρολογικό Θεώρημα") Κάπου επί της γης (θεωρώντας την επιφάνειά της $\approx \mathbb{S}^2$) υπάρχει ένα ζεύγος αντιποδικών σημείων, στα οποία υφίσταται η ίδια θερμοκρασία και η ίδια πίεση.

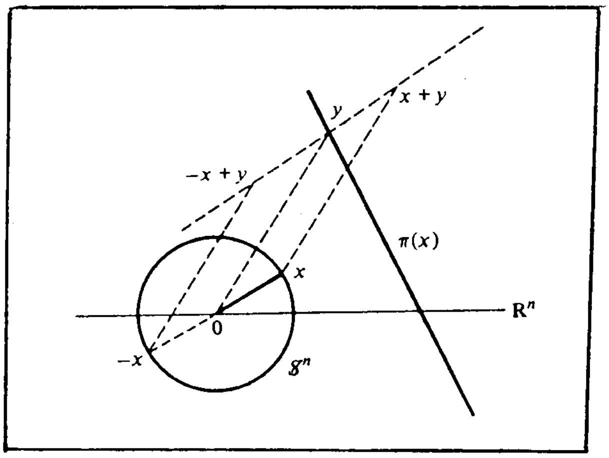
Απόδειξη: Συμβολίζοντας ως T και P τις συναρτήσεις θερμοκρασίας και πιέσεως, αντιστοίχως, και υποθέτοντας ότι αυτές είναι συνεχείς επί της επιφανείας της γης, κατασκευάζουμε τη συνεχή απεικόνιση $f: \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) := (T(x), P(x))$, $\forall x \in \mathbb{S}^2$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 3.7.24 των Borsuk και Ulam. □

3.7.26 Πόρισμα. Δεν υπάρχει υπόχωρος τού $\mathbb{R}^n$ που να είναι ομοιομορφικός της σφαίρας $\mathbb{S}^n$.

Απόδειξη: Κατά το Θεώρημα 3.7.24 των Borsuk και Ulam δεν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f: \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ που να είναι ενριπτική. □

3.7.27. Πόρισμα (Γενικευμένο "θεώρημα τού σάντουιτς με ζαμπόν"): Ας υποθέσουμε ότι τα $E_1, \ldots, E_n$ είναι μετρήσιμα, φραγμένα υποσύνολα τού $\mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχει πάντοτε ένα υπερεπίπεδο (εντός τού $\mathbb{R}^n$), το οποίο υποδιαιρεί καθένα των E_j, $1 \leq j \leq n$, σε δύο τμήματα ίσου όγκου.

Απόδειξη: Κατ' αρχάς ταυτίζουμε τον $\mathbb{R}^n$ με τον $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Έστω $y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n$ και έστω 0 η αρχή των αξόνων. Εάν $x \in \mathbb{S}^n$, τότε υπάρχει μια μονοπαραμετρική οικογένεια υπερεπιπέδων, τα οποία κείνται καθέτως προς την ευθεία την καθοριζομένη από το 0 και το x. Συμβολίζουμε ως $\pi(x)$ το (μονοσημάντως ορισμένο) υπερεπίπεδο της εν λόγω οικογενείας, το οποίο περιέχει το y. Προφανώς, $\pi(x) = x^{\perp} + y$, όπου $\quad x^{\perp} := \{ z \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle z, x \rangle = 0 \}$.



(εδώ $n=1$)

Παρατηρούμε τα εξής:

(i) $\pi(x) \neq \mathbb{R}^n$ (διότι $y \in \pi(x) \setminus \mathbb{R}^n$).

(ii) Γράφοντας $\mathbb{R}^{n+1} = (H_+(x) + y) \amalg \pi(x) \amalg (H_-(x)+y)$, όπου

$$H_+(x) := \{ z \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle z, x \rangle > 0 \}$$
$$H_-(x) := \{ z \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle z, x \rangle < 0 \},$$

έχουμε $\quad x+y \in H_{\pm}(x)+y \quad$ και $\quad -x+y \in H_{\mp}(y)+y \quad$ (ήτοι ανήκουν πάντα σε διαφορετικούς αν. ημίχωρους.)

(Πράγματι· $\pm x + y \notin \pi(x)$, διότι εν εναντία περιπτώσει θα υπήρχε $z \in x^{\perp}$: $\pm x + y = z + y \Rightarrow \pm x = z$ με $\langle x, x \rangle = 0 \neq 1$. Άτοπο!
Επιπροσθέτως, το $y \in \pi(x)$ αποτελεί το μεσοσημείο τού ευθυγράμμου τμήματος τού συνδέοντος το $x+y$ με το $-x+y$.)

(iii) $\pi(x) = \pi(-x)$ (καθότι οι ευθείες που καθορίζονται από τα $0, x$ και τα $0, -x$ συμπίπτουν).

Εν συνεχεία, για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$, θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$\varphi_j : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}, \quad \varphi_j(x) := \mu((\text{ημίχωρου στον οποίο ανήκει το } x+y) \cap F_j)$$

όπου $\mu :=$ μέτρο Lebesgue.

Καθεμιά των φ_j είναι συνεχής: Τούτο προκύπτει από την ιδιότητα τής (αριθμήσιμης) προσθετικότητας τού μέτρου Lebesgue: Εάν μια ακολουθία (x_m) συγκλίνει στο x και εάν ως S_m

συμβολίσουμε τη "φέτα" τού $\mathbb{R}^{n+1}$ που περιλαμβάνεται μεταξύ των υπερεπιπέδων $\pi(x_m)$ και $\pi(x_{m+1})$, τότε $\lim_{m\to\infty} \mu(E_j \cap S_m) = 0$.

'Εστω $f: \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ η απεικόνιση $f(x) := (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$, $\forall x \in \mathbb{S}^n$. Επειδή καθεμιά των συντεταγμένων συναρτήσεων φ_j τής f είναι συνεχής, η ίδια η f οφείλει να είναι συνεχής. Κατά το Θεώρημα 3.7.24 των Borsuk και Ulam $\exists\, w \in \mathbb{S}^n$: $f(w) = f(-w)$, οπότε $\varphi_j(w) = \varphi_j(-w)$, $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$. Εξάλλου, $\forall x \in \mathbb{S}^n$, έχουμε $\varphi_j(x) + \varphi_j(-x) = \mu(E_j)$, $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$.
(Τούτο έπεται από τα (ii), (iii) και την προσθετικότητα τού μ.)

Κατά συνέπειαν, $\varphi_j(w) = \frac{1}{2}\mu(E_j)$, $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$. Τέλος, αρκεί να επισημανθεί ότι το απαιτούμενο υπερεπίπεδο (εντός τού $\mathbb{R}^n$) είναι η τομή $\pi(w) \cap \mathbb{R}^n$ (η οποία είναι όντως υπερεπίπεδο λόγω τού (i)). $\square$

<u>3.7.28. Σημείωση:</u> (i) Η εισαγωγή τούτης της "ιδιαίτερης ονομασίας" για το 3.7.27 οφείλεται στον Πολωνό μαθηματικό H. D. Steinhaus (1887-1972), ο οποίος υπήρξε μαθητής τού D. Hilbert και κατοπινός συνεργάτης τού S. Banach. 'Ενα σάντουιτς με ζαμπόν υποτίθεται ότι αποτελείται από τρία τμήματα (συστατικά): ένα κομμάτι ζαμπόν (= παστό χοιρομέρι) που βρίσκεται τοποθετημένο ανάμεσα σε δύο φέτες ψωμιού. Το πρόβλημα (για $n=3$) έγκειται στην απόδειξη υπάρξεως ενός (υπερ)επιπέδου εντός τού $\mathbb{R}^3$, καθοριζόμενου από την πορεία που ακολουθεί η κόψη ενός μαχαιριού, το οποίο κόβει <u>στη μέση</u> όχι μόνον ολόκληρο το σάντουιτς αλλά και καθένα από τα τρία συστατικά του χωριστά.
(ii) 'Οσοι έχουν φάει ένα σάντουιτς με ζαμπόν ίσως να πιστεύουν ότι το κατάλληλο "κόψιμο" είναι <u>διαισθητικώς αυτονόητο</u>. Ωστόσο, πρέπει να επισημανθεί ότι <u>δεν είναι κάτι το τετριμμένο</u>! Προς τούτο αρκεί οι αναγνώστες να πειραματισθούν

προκειμένου να προσδιορίσουν ακόμη και για $n=2$ την κατάλληλη ευθεία που υποδιαιρεί καθένα των $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ σε δύο ισεμβαδικά τμήματα (κατά το 3.7.27), ακόμη και όταν τα $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ είναι τυχόντα τρίγωνα!

3.7.29. Πόρισμα ("Θεώρημα των Lyusternik και Schnirelman", 1930)
Εάν η σφαίρα $\mathbb{S}^n$ καλυφθεί από $n+1$ κλειστά υποσύνολά της $A_1, \ldots, A_{n+1}$, τότε τουλάχιστον ένα από αυτά οφείλει να περιέχει ένα ζεύγος αντιποδικών σημείων της $\mathbb{S}^n$.

Απόδειξη: Για $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ συμβολίζουμε ως $-A_j$ το συμμετρικό (κλειστό) υποσύνολο της $\mathbb{S}^n$ ως προς το κέντρο της $\mathbb{S}^n$.
Κατ' αρχάς θα δείξουμε ότι εάν $A_j \cap (-A_j) = \phi$, τότε $A_{n+1} \cap (-A_{n+1}) \neq \phi$. Εφαρμόζοντας το λήμμα τού Urysohn για τα κλειστά, ξένα υποσύνολα $A_1, -A_1$ τού $\mathbb{R}^{n+1}$, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια συνεχή συνάρτηση $\varphi_1 : \mathbb{S}^n \to [0,1]$ με $\varphi_1(A_1) = \{0\}$ και $\varphi_1(-A_1) = \{1\}$. (Βλ. π.χ. J.R. Munkres: "Topology", Second Ed., Prentice-Hall, Inc., 2000, Thm. 33.1, pp. 207-210.) Παρομοίως, για τα $A_2, \ldots, A_n$ κατασκευάζουμε συναρτήσεις $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$ με

$$\varphi_j(A_j) = \{0\} \quad \text{και} \quad \varphi_j(-A_j) = \{1\}, \quad \forall j \in \{2, \ldots, n\}.$$

Εν συνεχεία, θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση

$$f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad f(x) := (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)), \ \forall x \in \mathbb{S}^n.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.7.24 των Borsuk και Ulam $\exists\, y \in \mathbb{S}^n : f(y) = f(-y)$. Εάν $y \in A_j$ για κάποιον $j \in \{1, \ldots, n\}$, τότε $\varphi_j(y) = 0 \neq 1 = \varphi_j(-y) \Longrightarrow f(y) \neq f(-y)$. Άτοπο! Άρα $y \notin A_j$, $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$. Παρομοίως, $-y \notin A_j$, $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$. Συνεπώς $A_{n+1} \cap (-A_{n+1}) \neq \phi$ και μάλιστα, επειδή εξ υποθέσεως $\mathbb{S}^n = \bigcup_{j=1}^{n+1} A_j$, έχουμε $y \in A_{n+1}$ και $-y \in A_{n+1}$. $\square$

3.7.30. Σημείωση: Υπάρχει μια πληθώρα διαφορετικών (συνδυαστικών, τοπολογικών ή αναλυτικών) αποδείξεων τού τόσο σημαντικού Θεωρήματος 3.7.24 των Borsuk και Ulam, καθώς και σωρεία περαιτέρω εφαρμογών του, οι οποίες είναι αδύνατον να παρουσιασθούν στο πλαίσιο των παραδόσεων τού παρόντος μαθήματος. Στους ενδιαφερόμενους αναγνώστες συνιστάται (γι' αυτόν τον λόγο) να ανατρέξουν (για περισσότερες πληροφορίες και σχετική βιβλιογραφία) στο σύγγραμμα τού J. Matoušek: "Using the Borsuk-Ulam Theorem. (Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry)", Universitext, Springer-Verlag, 2003.

Το υπόλοιπο μέρος τής παρούσας ενότητας είναι αφιερωμένο στην απόδειξη τής γενικεύσεως τού κλασικού θεωρήματος καμπυλών τού Jordan (σε οιεσδήποτε διαστάσεις), το οποίο μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: " Εάν η $f: \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ είναι μια τοπολογική εμφύτευση (δηλαδή εάν η f απεικονίζει ομοιομορφικώς τον κύκλο $\mathbb{S}^1$ επί τής εικόνας $f(\mathbb{S}^1)$ αυτού μέσω τής f), τότε το συμπλήρωμα $\mathbb{R}^2 \setminus f(\mathbb{S}^1)$ διαθέτει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες (το "εσωτερικό" και το "εξωτερικό" τής κλειστής καμπύλης $f(\mathbb{S}^1)$), με κοινή μεθόριό τους (= τοπολογικό σύνορό τους) την $f(\mathbb{S}^1)$." Τούτο είχε διατυπωθεί ως εικασία από τον Camille Jordan το έτος 1892. Πολλές εσφαλμένες αποδείξεις δημοσιεύθηκαν στα επόμενα χρόνια (συμπεριλαμβανομένης και μιας τού ιδίου τού Jordan). Κατά πάσα πιθανότητα η πρώτη "ορθή" απόδειξη τού Θεωρήματος είναι αυτή που εδόθη από τον Oswald Veblen το 1905. Ακολούθησαν και άλλες, συνδυαστικής φύσεως, που ήταν αρκετά περίπλοκες. 'Εκτοτε έχουν προταθεί δεκάδες "απλοποιημένων" αποδείξεων. Για μια τέτοια απόδειξη που κάνει χρήση τεχνικών εργαλείων προερχομένων αποκλειστικώς από τη Γενική Τοπολογία, βλ. π.χ.

J.R. Munkres: "Topology", Second Ed., Prentice-Hall, Inc., 2000, Theorem 6.34, σελ. 390–392.

Με τη βοήθεια της Θεωρίας ιδιάζουσας ομολογίας τόσο η κλασική μορφή του πρωταρχικού Θεωρήματος του Jordan όσο και οι (μη τετριμμένες) γενικεύσεις αυτού εξάγονται κατά τρόπο άμεσο, χωρίς κανείς να είναι υποχρεωμένος να καταφύγει σε ad hoc γεωμετρικά επιχειρήματα.

3.7.31. Λήμμα. Έστω ότι ο X είναι ένας τοπολογικός χώρος που γράφεται ως ένωση $X = X_1^\circ \cup X_2^\circ$ των εσωτερικών δυο υποχώρων του X_1, X_2, και ότι οι $i_\nu : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_\nu$, $\nu \in \{1,2\}$ συμβολίζουν τις φυσικές ενθέσεις. Εάν $x \in \widetilde{H}_q^{\text{sing}}(X_1 \cap X_2; \mathbb{Z})$ και $\widetilde{H}_{q+1}^{\text{sing}}(X;\mathbb{Z}) \cong \{0\}$ για κάποιο $q \in \mathbb{N}_0$, τότε:

$$x = 0 \iff \left(\widetilde{H}_q^{\text{sing}}(i_1)(x) = 0 \text{ και } \widetilde{H}_q^{\text{sing}}(i_2)(x) = 0\right).$$

Απόδειξη: Η ανηγμένη ακριβής ακολουθία των Mayer και Vietoris για την εκτιμητική τοπολογική τριάδα (X, X_1, X_2) (βλ. 2.6.2 (i), σελ. 140, και 2.6.4 (iii), σελ. 142):

$$\cdots \longrightarrow \underbrace{\widetilde{H}_{q+1}^{\text{sing}}(X;\mathbb{Z})}_{\cong \{0\} \ \boxed{\text{εξ υποθέσεως}}} \longrightarrow \widetilde{H}_q^{\text{sing}}(X_1 \cap X_2;\mathbb{Z}) \xrightarrow{(\widetilde{H}_q^{\text{sing}}(i_1),\, \widetilde{H}_q^{\text{sing}}(i_2))} \widetilde{H}_q^{\text{sing}}(X_1;\mathbb{Z}) \oplus \widetilde{H}_q^{\text{sing}}(X_2;\mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots$$

μας πληροφορεί ότι ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $(\widetilde{H}_q^{\text{sing}}(i_1), \widetilde{H}_q^{\text{sing}}(i_2))$ είναι μονομορφισμός (βλ. [ΣΟΑ], 2.1.3 (i), σελ. 70). Επομένως,

$x = 0$ εάν και μόνον εάν $\widetilde{H}_q^{\text{sing}}(i_1)(x) = 0$ (εντός της $\widetilde{H}_q^{\text{sing}}(X_1;\mathbb{Z})$) <u>και ταυτοχρόνως</u> $\widetilde{H}_q^{\text{sing}}(i_2)(x) = 0$ (εντός της $\widetilde{H}_q^{\text{sing}}(X_2;\mathbb{Z})$). $\square$

Ένα δεύτερο, σημαντικό λήμμα που θα χρειασθούμε είναι το ακόλουθο:

3.7.32. Λήμμα. Έστω ότι ο X είναι ένας τοπολογικός χώρος ο οποίος γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση $X=\bigcup_{k=0}^{\infty} X_k$ (μιας ακολουθίας) υποχώρων του $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ με $X_k \subseteq X_{k+1}$, $\forall\, k\in\mathbb{N}_0$, και ότι οι $\lambda_k : X_k \hookrightarrow X$, $\mu_k : X_k \hookrightarrow X_{k+1}$ είναι οι φυσικές ενθέσεις.
Εάν κάθε συμπαγής υπόχωρος A του X περιέχεται σε κάποιον X_k, τότε η κλάση $y + B_q^{sing}(X;\mathbb{Z}) \in H_q^{sing}(X;\mathbb{Z})$ ενός $y\in Z_q^{sing}(X;\mathbb{Z})$ είναι μηδενική (δηλαδή $y\in B_q^{sing}(X;\mathbb{Z})$) εάν και μόνον εάν υπάρχουν $\ell\in\mathbb{N}_0$ και $y'+B_q^{sing}(X_\ell;\mathbb{Z})\in H_q^{sing}(X_\ell;\mathbb{Z})$, $y'\in Z_q^{sing}(X_\ell;\mathbb{Z})$, ούτως ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

$$
\begin{aligned}
H_q^{sing}(\lambda_\ell)(y'+B_q^{sing}(X_\ell;\mathbb{Z})) &= S_q(\lambda_\ell)(y')+B_q^{sing}(X;\mathbb{Z}) \\
&= y + B_q^{sing}(X;\mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
H_q^{sing}(\mu_\ell)(y'+B_q^{sing}(X_\ell;\mathbb{Z})) &= S_q(\mu_\ell)(y')+B_q^{sing}(X_{\ell+1};\mathbb{Z}) \\
&= B_q^{sing}(X_{\ell+1};\mathbb{Z}) = 0_{H_q^{sing}(X_{\ell+1};\mathbb{Z})}
\end{aligned}
$$

Απόδειξη: ($\Leftarrow$) Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι για κάθε $k\in\mathbb{N}_0$ σχηματίζεται το μεταθετικό διάγραμμα:

$$
\begin{tikzcd}
& X & \\
X_k \arrow[ur, hook, "\lambda_k"] \arrow[rr, hook, "\mu_k"'] & \circlearrowright & X_{k+1} \arrow[ul, hook', "\lambda_{k+1}"']
\end{tikzcd}
$$

Εάν λοιπόν οι ανωτέρω ισότητες ισχύουν για κάποιον $\ell\in\mathbb{N}_0$, τότε

$$
\begin{aligned}
y+B_q^{sing}(X;\mathbb{Z}) &= H_q^{sing}(\lambda_\ell)(y'+B_q^{sing}(X_\ell;\mathbb{Z})) \\
&= \left(H_q^{sing}(\lambda_{\ell+1})\circ H_q^{sing}(\mu_\ell)\right)(y'+B_q^{sing}(X_\ell;\mathbb{Z})) \\
&= H_q^{sing}(\lambda_{\ell+1})\left(0_{H_q^{sing}(X_{\ell+1};\mathbb{Z})}\right) = 0_{H_q^{sing}(X;\mathbb{Z})}.
\end{aligned}
$$

($\Rightarrow$) Ας υποθέσουμε ότι $y\in B_q^{sing}(X;\mathbb{Z}) = \mathrm{Im}(d_{q+1}^{sing})$.
Εάν $S_q(X;\mathbb{Z})\ni y=\sum_{i=1}^{\nu}\xi_i\sigma_i$, $\xi_i\in\mathbb{Z}$, $\sigma_i:\Delta_q\to X$ ιδιάζοντα q-μονόπλοκα για $i\in\{1,\dots,\nu\}$, τότε $\exists$ ιδιάζουσα $(q+1)$-αλυσίδα $\sum_{j=1}^{\nu'}\xi'_j\tau_j\in S_{q+1}(X;\mathbb{Z})$ με $d_{X,q+1}^{sing}\left(\sum_{j=1}^{\nu'}\xi'_j\tau_j\right)=y$ $\quad(\nu,\nu'\in\mathbb{N})$.

'Εστω $A := \left(\bigcup_{i=1}^{\nu} \sigma_i(\Delta_q)\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\nu'} \tau_j(\Delta_{q+1})\right) = \bigcup_{j=1}^{\nu'} \tau_j(\Delta_{q+1})$

$\left(\text{διότι } \bigcup_{i=1}^{\nu} \sigma_i(\Delta_q) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\nu'} \tau_j(\Delta_{q+1})\right)$. Επιλέγουμε αρκούντως μεγάλο $\ell \in \mathbb{N}_0$, τέτοιο ώστε να ισχύει: $A \subseteq X_\ell$.

Εάν γράψουμε $\left\{\begin{array}{l} \sigma_i = \lambda_\ell \circ \sigma_i', \text{όπου } \sigma_i' : \Delta_q \to X_\ell \text{ ιδιάζον } q\text{-μονόπλοκο εντός του } X_\ell \\ \tau_j = \lambda_\ell \circ \tau_j', \text{ όπου } \tau_j' : \Delta_{q+1} \to X_\ell \text{ ιδιάζον } (q+1)\text{-μονόπλοκο } -\text{''}- \\ \forall i \in \{1,\dots,\nu\},\ \forall j \in \{1,\dots,\nu'\} \end{array}\right\}$

και θέσουμε $y' := \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i \sigma_i' \in S_q(X_\ell;\mathbb{Z})$, $z := \sum_{j=1}^{\nu'} \xi_j' \tau_j' \in S_{q+1}(X_\ell;\mathbb{Z})$, τότε

$y' \in Z_q^{sing}(X_\ell;\mathbb{Z})$ $\left(\text{διότι } d^{sing}_{X_\ell,q}(y') = d^{sing}_{X_\ell,q}(S_q(\lambda_\ell)(y)) \underset{\substack{3.1.8 \\ \text{σελ. 163}}}{=\!=} S_{q-1}(\lambda_\ell)(d^{sing}_{X,q}(y))\right.$

$\left. = S_{q-1}(\lambda_\ell)(0) = 0\right)$ και $H_q^{sing}(\lambda_\ell)(y' + B_q^{sing}(X_\ell;\mathbb{Z})) = y + B_q^{sing}(X;\mathbb{Z})$.

Επιπροσθέτως, $\left(d^{sing}_{X_{\ell+1},q+1} \circ S_{q+1}(\mu_\ell)\right)(z) \underset{\substack{3.1.8 \\ \text{σελ. 163}}}{=\!=} \left(S_q(\mu_\ell) \circ d^{sing}_{X_\ell,q+1}\right)(z)$

$= S_q(\mu_\ell)(y') \in B_q^{sing}(X_{\ell+1};\mathbb{Z})$. □

3.7.33. Θεώρημα: Εάν $k, n \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$, τότε για κάθε τοπολογική εμφύτευση $f : \mathbb{D}^k \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ έχουμε $\widetilde{H}_q^{sing}(\mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{D}^k);\mathbb{Z}) \cong \{0\}$ για κάθε $q \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη: Επειδή $\mathbb{D}^k \approx I^k$ $(I := [0,1])$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\widetilde{H}_q^{sing}(\mathbb{S}^n \setminus f(I^k);\mathbb{Z}) \cong \{0\}$ για κάθε $q \geq 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε πλήρη επαγωγή επί του k. Για $k=0$ το I^k (και κατ' επέκτασιν και η εικόνα του $f(I^k)$) είναι ένα σημείο, οπότε

$\mathbb{S}^n \setminus f(I^0) \approx \mathbb{D}^n$ (βλ. 1.5.3 (iv), σελ. 10) $\qquad \widetilde{H}_q^{sing}(\mathbb{S}^n \setminus f(I^0);\mathbb{Z})$

$\mathbb{D}^n$ συσταλτός (βλ. 1.17.4 (iv), σελ. 71) $\qquad \cong \widetilde{H}_q^{sing}(\mathbb{D}^n;\mathbb{Z})$

$\qquad \cong \{0\}$ (2.3.4 (ii), σελ. 137)

Εν συνεχεία υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για $0\leq k<k_0$, όπου k_0 παγιωμένος φυσικός $\in\{1,\ldots,n\}$. Θα δείξουμε ότι είναι αληθής και για τον k_0. Έστω $f: I^{k_0} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ μια τοπολογική εμφύτευση. Θέτουμε: $A_0 := I^{k_0}$, $B_1 := I^{k_0-1}\times[0,1/2]$, $B_2 := I^{k_0-1}\times[\frac{1}{2},1]$.
Τότε $A_0 = B_1\cup B_2$ και $B_1\cap B_2 = I^{k_0-1}\times\{\frac{1}{2}\}\approx I^{k_0-1}$. Επειδή η f είναι ενριπτική έχουμε

$$\mathbb{S}^n\smallsetminus f(B_1\cap B_2) = (\mathbb{S}^n\smallsetminus f(B_1))\cup(\mathbb{S}^n\smallsetminus f(B_2)).$$

Η ανηγμένη ακριβής ακολουθία των Mayer και Vietoris για την εκτμητική τοπολογική τριάδα $(\mathbb{S}^n\smallsetminus f(I^{k_0-1}), \mathbb{S}^n\smallsetminus f(B_1), \mathbb{S}^n\smallsetminus f(B_2))$ (βλ. 2.6.2 (i), σελ. 140, και 2.6.4 (iii), σελ. 142) μας δίδει:

$$\begin{tikzcd}
& \{0\} \arrow[d, equal, "\wr"] & \boxed{\text{Επαγωγική υπόθεση}} \arrow[l] & & & \\
\cdots \arrow[r] & \tilde{H}^{sing}_{q+1}(\mathbb{S}^n\smallsetminus f(I^{k_0-1});\mathbb{Z}) \arrow[r] & \tilde{H}^{sing}_{q}(\mathbb{S}^n\smallsetminus f(A_0);\mathbb{Z}) \arrow[r, "(\tilde{H}^{sing}_q(i_1){,}\,\tilde{H}^{sing}_q(i_2))"] & \tilde{H}^{sing}_{q}(\mathbb{S}^n\smallsetminus f(B_1);\mathbb{Z})\oplus\tilde{H}^{sing}_{q}(\mathbb{S}^n\smallsetminus f(B_2);\mathbb{Z}) \arrow[r] & \tilde{H}^{sing}_{q}(\mathbb{S}^n\smallsetminus f(I^{k_0-1});\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, equal, "\wr"] & \cdots \\
& & & \boxed{\text{Επαγωγική υπόθεση}} \arrow[ur] & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

$$\underbrace{(\mathbb{S}^n\smallsetminus f(B_1))\cap(\mathbb{S}^n\smallsetminus f(B_2))}_{=}$$

όπου $i_\nu: \mathbb{S}^n\smallsetminus f(A_0)\hookrightarrow \mathbb{S}^n\smallsetminus f(B_\nu)$, $\nu\in\{1,2\}$, οι φυσικές ενθέσεις.
Άρα ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $(\tilde{H}^{sing}_q(i_1), \tilde{H}^{sing}_q(i_2))$ είναι ισομορφισμός (βλ. [ΣΟΑ], 2.1.3 (i), σελ. 70). Ας υποθέσουμε ότι $\tilde{H}^{sing}_q(\mathbb{S}^n\smallsetminus f(A_0);\mathbb{Z})\neq\{0\}$. Τότε $\exists\, x\in \tilde{H}^{sing}_q(\mathbb{S}^n\smallsetminus f(A_0);\mathbb{Z})$, $x\neq 0$, οπότε είτε $\tilde{H}^{sing}_q(i_1)(x)\neq 0$ είτε $\tilde{H}^{sing}_q(i_2)(x)\neq 0$ (βλ. 3.7.31).
Ας υποθέσουμε (δίχως βλάβη της γενικότητας) ότι $\tilde{H}^{sing}_q(i_1)(x)\neq 0$.
Θέτουμε $j_1 := i_1$, $A_1 := B_1$, υποδιαιρούμε το A_1 όπως είχαμε υποδιαιρέσει προηγουμένως το A_0 και κατόπιν εφαρμογής της ανηγμένης ακριβούς ακολουθίας των Mayer και Vietoris λαμβάνουμε είτε $\tilde{H}^{sing}_q(i_1\circ j_1)(x)\neq 0$ είτε $\tilde{H}^{sing}_q(i_2\circ j_2)(x)\neq 0$.

Συνεχίζοντας αυτήν τη διαδικασία κατασκευάζουμε διαδοχικώς μια ακολουθία υποχώρων $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ με

(α) $A_\infty := \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k = I^{k_0-1}\times\{a\}$ για κάποιο $a\in I$,

(β) $\tilde{H}_q^{sing}(j_k)(x)\neq 0$, $\forall k\in\mathbb{N}_0$, όπου $j_k : \mathbb{S}^n\setminus f(A_0)\hookrightarrow \mathbb{S}^n\setminus f(A_k)$ η φυσική ένθεση.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν και τις λοιπές φυσικές ενθέσεις ($\lambda_k : \mathbb{S}^n\setminus f(A_k)\hookrightarrow \mathbb{S}^n\setminus f(A_\infty)$, $\mu_k : \mathbb{S}^n\setminus f(A_k)\hookrightarrow \mathbb{S}^n\setminus f(A_{k+1})$) σχηματίζουμε το εξής μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{S}^n\setminus f(A_{k+1}) \arrow[dr, hook, "\lambda_{k+1}"] & \\
\mathbb{S}^n\setminus f(A_0) \arrow[ur, hook, "j_{k+1}"] \arrow[rr, hook, "\lambda_0"] \arrow[dr, hook, "j_k"'] & & \mathbb{S}^n\setminus f(A_\infty)=\bigcup_{k=0}^{\infty}(\mathbb{S}^n\setminus f(A_k)) \\
 & \mathbb{S}^n\setminus f(A_k) \arrow[u, hook, "\mu_k"] \arrow[ur, hook, "\lambda_k"'] &
\end{tikzcd}$$

(Λόγω του (β) έχουμε $\tilde{H}_q^{sing}(\overbrace{\mu_k\circ j_k}^{=j_{k+1}})(x)\neq 0$, $\forall k\in\mathbb{N}_0$.) Έστω Γ ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{S}^n\setminus f(A_\infty)=\bigcup_{k=0}^{\infty}(\mathbb{S}^n\setminus f(A_k))$.

(γ) Το $\{\mathbb{S}^n\setminus f(A_k)\mid k\in\mathbb{N}_0\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του Γ, οπότε το Γ διαθέτει ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα αποτελούμενο από στοιχεία του και -ως εκ τούτου- $\exists k\in\mathbb{N}_0 : \Gamma\subseteq \mathbb{S}^n\setminus f(A_k)$ (διότι $\mathbb{S}^n\setminus f(A_k)\subseteq \mathbb{S}^n\setminus f(A_{k+1})$, $\forall k\in\mathbb{N}_0$).

(δ) $\tilde{H}_q^{sing}(\lambda_0)(x)=0$, διότι $\tilde{H}_q^{sing}(\mathbb{S}^n\setminus f(A_\infty);\mathbb{Z})\cong \tilde{H}_q^{sing}(\mathbb{S}^n\setminus f(I^{k_0-1});\mathbb{Z})$

$\boxed{\text{Επαγωγική υπόθεση}} \longrightarrow \cong \{0\}$

Εάν (λόγω των (β) και (γ)) εφαρμόσουμε το λήμμα 3.7.32 (θέτοντας το $\mathbb{S}^n\setminus f(A_\infty)$ στη θέση του X, το $\mathbb{S}^n\setminus f(A_k)$ στη θέση του X_ℓ και την κλάση ομολογίας $\tilde{H}_q^{sing}(\lambda_0)(x)\in H_q^{sing}(\mathbb{S}^n\setminus f(A_\infty);\mathbb{Z})$ στη θέση της εκεί συμβολιζόμενης ως $y+B_q^{sing}(X;\mathbb{Z})$), τότε, επειδή <u>για κάθε $k\in\mathbb{N}_0$</u> έχουμε

$$\begin{cases} H_q^{sing}(\lambda_k)(\tilde{H}_q^{sing}(j_k)(x)) = \tilde{H}_q^{sing}(\lambda_0)(x) & \text{και} \\ H_q^{sing}(\mu_k)(\tilde{H}_q^{sing}(j_k)(x)) = \tilde{H}_q^{sing}(j_{k+1})(x) \underset{(\beta)}{\neq} 0 \end{cases}$$

καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\tilde{H}_q^{sing}(\lambda_0)(x) \neq 0$, κάτι που αντίκειται προς το (δ)! Άρα τελικώς

$$\tilde{H}_q^{sing}(\mathbb{S}^n \setminus f(A_0);\mathbb{Z}) = \tilde{H}_q^{sing}(\mathbb{S}^n \setminus f(I^{k_0});\mathbb{Z}) \cong \tilde{H}_q^{sing}(\mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{D}^{k_0});\mathbb{Z}) \cong \{0\}.$$

□

3.7.34. Πόρισμα: Εάν $k, n \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$, τότε για κάθε τοπολογική εμφύτευση $f: \mathbb{D}^k \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ το συμπλήρωμα $\mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{D}^k)$ είναι χώρος δρομοσυνεκτικός.

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 3.7.33,

$$\tilde{H}_0^{sing}(\mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{D}^k);\mathbb{Z}) \cong \{0\} \underset{\substack{2.3.2.(iii) \\ \text{σελ. } 125}}{\Longrightarrow} H_0^{sing}(\mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{D}^k);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

$$\underset{\substack{3.3.5(i) \\ \text{σελ. } 174}}{\Longrightarrow} \mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{D}^k) \text{ δρομοσυνεκτικός.}$$ □

3.7.35. Πόρισμα: Εάν $k, n \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$, $n \geq 2$, τότε για κάθε τοπολογική εμφύτευση $f: \mathbb{D}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ έχουμε:

$$\boxed{H_q^{sing}(\mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{D}^k);\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } q \in \{0, n-1\}, \\ \{0\}, & \text{αλλιώς.} \end{cases}}$$

Απόδειξη: Κατά το 1.5.3 (iv), σελ. 10, η στερεογραφική προβολή $p: \mathbb{S}^n \setminus \{P_+\} \to \mathbb{R}^n$ είναι ένας ομοιομορφισμός. Η αντιστροφή της p^{-1} απεικονίζει την μπάλα $f(\mathbb{D}^k)$ ομοιομορφικώς επί μιας μπάλας $p^{-1}(f(\mathbb{D}^k)) \subset \mathbb{S}^n$ με $P_+ \notin p^{-1}(f(\mathbb{D}^k))$. Θεωρούμε την εξής ακολουθία:

$$H_q^{sing}(\mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{D}^k);\mathbb{Z}) \xleftarrow{\cong} H_q^{sing}(\mathbb{S}^n \setminus (p^{-1}(f(\mathbb{D}^k)) \cup \{P_+\});\mathbb{Z}) \xleftarrow{\partial_q^{sing}}$$

$$H_{q+1}^{sing}(\mathbb{S}^n \setminus p^{-1}(f(\mathbb{D}^k)), \mathbb{S}^n \setminus (p^{-1}(f(\mathbb{D}^k)) \cup \{P_+\});\mathbb{Z}) \underset{(i)}{\xleftarrow{\cong}}$$

$$H_{q+1}^{sing}(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus \{P_+\};\mathbb{Z}) \underset{(ii)}{\xleftarrow{\cong}} H_{q+1}^{sing}(\mathbb{S}^n, \{P_-\};\mathbb{Z}) \underset{(iii)}{\cong} \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } q = n-1, \\ \{0\}, & \text{όταν } q \neq n-1. \end{cases}$$

Εν προκειμένω, ο ισομορφισμός (i) έπεται από το αξίωμα A3 της εκτομής (σελ. 120), ο ισομορφισμός (ii) από το γεγονός ότι το $\{P_-\}$ αποτελεί παραμορφωτική σύμπτυξη του $\mathbb{S}^n \setminus \{P_+\}$ (βλ. 1.17.5 (v), σελ. 71, 1.17.19, σελ. 76) και ο ισομορφισμός (iii) από τον ισομορφισμό $H_{q+1}^{sing}(\mathbb{S}^n, \{P_-\};\mathbb{Z}) \underset{\substack{2.3.5\,(i) \\ \text{σελ. } 127}}{\cong} \tilde{H}_{q+1}(\mathbb{S}^n;\mathbb{Z})$

Και το Θεώρημα 2.4.3.(I_n) (για $R=\mathbb{Z}$, σελ. 128–129).

Εν συνεχεία διαχωρίζουμε δύο περιπτώσεις:

- <u>1η περίπτωση</u>: Εάν $q \neq 0$, η μακρά ακριβής ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow \underbrace{H_{q+1}^{sing}(\mathbb{S}^n \setminus p^{-1}(f(\mathbb{D}^k));\mathbb{Z})}_{\substack{\boxed{\text{Θεώρημα 3.7.33 Και Σημ. 2.3.2 (ii)}} \to\, \cong \\ \{0\}}} \longrightarrow H_{q+1}^{sing}(\mathbb{S}^n \setminus p^{-1}(f(\mathbb{D}^k)), \mathbb{S}^n \setminus (p^{-1}(f(\mathbb{D}^k)) \cup \{P_+\});\mathbb{Z})$$

$$\xrightarrow{\partial_q^{sing}} H_q^{sing}(\mathbb{S}^n \setminus (p^{-1}(f(\mathbb{D}^k)) \cup \{P_+\});\mathbb{Z}) \longrightarrow \underset{\substack{\boxed{\text{Θεώρημα 3.7.33 Και Σημ. 2.3.2 (ii)}} \to\, \cong \\ \{0\}}}{H_q^{sing}(\mathbb{S}^n \setminus p^{-1}(f(\mathbb{D}^k));\mathbb{Z})}$$

δηλοί ότι ο συνδετικός ομομορφισμός ∂_q^{sing} είναι ισομορφισμός, οπότε το πόρισμα είναι αληθές βάσει των όσων προαναφέρθηκαν.

- <u>2η περίπτωση</u>: Εάν $q=0$, τότε $n-1>0 \Longrightarrow \partial_0^{sing} = 0$

$\Longrightarrow$ ο ομομορφισμός $\underbrace{H_0^{sing}(\mathbb{S}^n \setminus (p^{-1}(f(\mathbb{D}^k)) \cup \{P_+\});\mathbb{Z})}_{\text{ελεύθερη αβ. ομάδα } (\neq \{0\})} \longrightarrow \underset{\substack{\cong\ (3.7.33) \\ \mathbb{Z}}}{H_0^{sing}(\mathbb{S}^n \setminus p^{-1}(f(\mathbb{D}^k));\mathbb{Z})}$ είναι μονομορφισμός

$$\underset{\boxed{\text{[ZOA], Πρόταση 1.6.35, σελ. 57}}}{\Longrightarrow} H_0^{sing}(\mathbb{S}^n \setminus (p^{-1}(f(\mathbb{D}^k)) \cup \{P_+\});\mathbb{Z}) \cong H_0^{sing}(\mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{D}^k)) \cong \mathbb{Z}. \qquad \square$$

3.7.36. Θεώρημα. Εάν $k \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, $k<n$, τότε για κάθε τοπολογική εμφύτευση $f\colon \mathbb{S}^k \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ έχουμε

$$\widetilde{H}_q^{\mathrm{sing}}(\mathbb{S}^n \smallsetminus f(\mathbb{S}^k);\mathbb{Z}) \cong \widetilde{H}_q^{\mathrm{sing}}(\mathbb{S}^{n-k-1};\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } q=n-k-1,\\ \{0\}, & \text{αλλιώς.}\end{cases}$$

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε πλήρη επαγωγή επί του k. Για $k=0$ έχουμε $\mathbb{S}^n \smallsetminus f(\mathbb{S}^0) \approx \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$, οπότε ο ισχυρισμός είναι αληθής. Υποθέτουμε ότι αυτός είναι αληθής για $k-1$ και θα αποδείξουμε ότι είναι αληθής και για k (όπου $k \geq 1$). Θέτοντας $U_+ := \mathbb{S}^n \smallsetminus f(\mathbb{S}^k_+)$ και $U_- := \mathbb{S}^n \smallsetminus f(\mathbb{S}^k_-)$ έχουμε

$$U_+ \cap U_- = \mathbb{S}^n \smallsetminus f(\mathbb{S}^k) \quad \text{και} \quad U_+ \cup U_- \approx \mathbb{S}^n \smallsetminus f(\mathbb{S}^{k-1}).$$

Η ανηγμένη ακριβής ακολουθία των Mayer και Vietoris για την εκτμητική τοπολογική τριάδα $(\mathbb{S}^n \smallsetminus f(\mathbb{S}^{k-1}), U_+, U_-)$, όπου $U_+ \approx U_- \approx \mathbb{S}^n \smallsetminus f(\mathbb{D}^k)$ (βλ. 1.5.3 (iv), σελ. 10), γράφεται ως εξής:

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_{q+1}^{\mathrm{sing}}(U_+;\mathbb{Z}) \oplus \widetilde{H}_{q+1}^{\mathrm{sing}}(U_-;\mathbb{Z}) \longrightarrow \widetilde{H}_{q+1}^{\mathrm{sing}}(\mathbb{S}^n \smallsetminus f(\mathbb{S}^{k-1});\mathbb{Z}) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \widetilde{H}_q^{\mathrm{sing}}(\mathbb{S}^n \smallsetminus f(\mathbb{S}^k);\mathbb{Z}) \longrightarrow \widetilde{H}_q^{\mathrm{sing}}(U_+;\mathbb{Z}) \oplus \widetilde{H}_q^{\mathrm{sing}}(U_-;\mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots$$

Επειδή $\widetilde{H}_q^{\mathrm{sing}}(U_+;\mathbb{Z}) \cong \widetilde{H}_q^{\mathrm{sing}}(U_-;\mathbb{Z}) \underset{3.7.33}{\cong} \{0\}$, $\forall q \in \mathbb{Z}$, λαμβάνουμε

$$\widetilde{H}_q^{\mathrm{sing}}(\mathbb{S}^n \smallsetminus f(\mathbb{S}^k);\mathbb{Z}) \cong \widetilde{H}_{q+1}^{\mathrm{sing}}(\mathbb{S}^n \smallsetminus f(\mathbb{S}^{k-1});\mathbb{Z}) \underset{\boxed{\text{Επαγωγική υπόθεση}}}{\cong} \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } q+1=n-k,\\ \{0\}, & \text{αλλιώς.}\end{cases}$$

$\square$

3.7.37. Σημείωση: Προφανώς,

$$H_q^{\mathrm{sing}}(\mathbb{S}^n \smallsetminus f(\mathbb{S}^k);\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } q=n-k-1 \text{ και } n \geq k+2,\\ \mathbb{Z}, & \text{όταν } q=0 \text{ και } n \geq k+2,\\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}, & \text{όταν } q=0 \text{ και } n=k+1,\\ \{0\}, & \text{αλλιώς.}\end{cases}$$

(Πρβλ. 2.3.2 (i), (ii), σελ. 125.)

3.7.38. Θεώρημα: Εάν $k\in\mathbb{N}_0, n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $k\leq n-1$, τότε για κάθε τοπολογική εμφύτευση $f:\mathbb{S}^k\hookrightarrow\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$H_q^{sing}(\mathbb{R}^n\setminus f(\mathbb{S}^k);\mathbb{Z})\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & \text{όταν } \begin{cases} q=k=0,\\ q=n-k-1,\ 1\leq k\leq n-2, \text{ ή}\\ q=n-1,\ 1\leq k\leq n-1,\end{cases}\\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}, & \text{όταν }\begin{cases}q=0,\ k=n-1, \text{ ή}\\ q=n-1,\ k=0,\end{cases}\\ \{0\}, & \text{αλλιώς.}\end{cases}$$

Απόδειξη: Αυτή είναι παρόμοια της αποδείξεως του πορίσματος 3.7.35. Θεωρούμε την ακολουθία

$$H_q^{sing}(\mathbb{R}^n\setminus f(\mathbb{S}^k);\mathbb{Z})\xleftarrow{\cong}H_q^{sing}(\mathbb{S}^n\setminus(p^{-1}(f(\mathbb{S}^k))\cup\{P_+\});\mathbb{Z})$$
$$\xleftarrow{\partial_q^{sing}}H_{q+1}^{sing}(\mathbb{S}^n\setminus p^{-1}(f(\mathbb{S}^k)),\mathbb{S}^n\setminus(p^{-1}(f(\mathbb{S}^k))\cup\{P_+\});\mathbb{Z})\xleftarrow{\cong}$$
$$H_{q+1}^{sing}(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n\setminus\{P_+\};\mathbb{Z})\xleftarrow{\cong}H_{q+1}^{sing}(\mathbb{S}^n,\{P_-\};\mathbb{Z})\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & \text{όταν } q=n-1,\\ \{0\}, & \text{όταν } q\neq n-1,\end{cases}$$

Καθώς και τη μακρά ακριβή ακολουθία:

$$\to H_{q+1}^{sing}(\mathbb{S}^n\setminus p^{-1}(f(\mathbb{S}^k));\mathbb{Z})\longrightarrow H_{q+1}^{sing}(\mathbb{S}^n\setminus p^{-1}(f(\mathbb{S}^k)),\mathbb{S}^n\setminus(p^{-1}(f(\mathbb{S}^k))\cup\{P_+\});\mathbb{Z})$$
$$\xrightarrow{\partial_q^{sing}}H_q^{sing}(\mathbb{S}^n\setminus(p^{-1}(f(\mathbb{S}^k))\cup\{P_+\});\mathbb{Z})\longrightarrow H_q^{sing}(\mathbb{S}^n\setminus p^{-1}(f(\mathbb{S}^k));\mathbb{Z})\to\ldots$$

Και διαχωρίζουμε έξι περιπτώσεις:

- **1η περίπτωση:** Εάν $q\notin\{-1,0,n-k-2,n-k-1\}$, $k\geq 1$, τότε ο ∂_q^{sing} είναι ισομορφισμός, οπότε

$$H_q^{sing}(\mathbb{R}^n\setminus f(\mathbb{S}^k);\mathbb{Z})\underset{3.7.37}{\cong}\begin{cases}\mathbb{Z}, & \text{όταν } q=n-1,\\ \{0\}, & \text{όταν } q\neq n-1.\end{cases}$$

- **2η περίπτωση:** Εάν $q=n-k-1$, $1\leq k\leq n-2$, τότε ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$\underset{\not\cong 0\ (\text{Ελ.αβ.ομ.}\subseteq\mathbb{Z})}{H_q^{sing}(\mathbb{R}^n\setminus f(\mathbb{S}^k);\mathbb{Z})}\longrightarrow \overset{\mathbb{Z}}{\cong}\ H_q^{sing}(\mathbb{S}^n\setminus p^{-1}(f(\mathbb{S}^k));\mathbb{Z})$$

είναι μονομορφισμός $\xRightarrow{\boxed{[\Sigma\text{ΟΑ}],\ 1.6.35,\ \text{σελ. } 57}} H_{n-k-1}^{sing}(\mathbb{R}^n\setminus f(\mathbb{S}^k);\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$.

● <u>3η περίπτωση:</u> Εάν $q=k=0$, τότε η ανωτέρω μακρά ακριβής ακολουθία δίδει

$$0 \longrightarrow H_0^{sing}(\mathbb{R}^n \setminus f(S^0);\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

● <u>4η περίπτωση:</u> Εάν $q=0$, $k=n-1$, τότε η ανωτέρω μακρά ακριβής ακολουθία δίδει

$$0 \longrightarrow H_0^{sing}(\mathbb{R}^n \setminus f(S^{n-1});\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \to 0$$

● <u>5η περίπτωση:</u> Εάν $q=n-1$, $k=0$, τότε η ανωτέρω μακρά ακριβής ακολουθία καθίσταται μια <u>διασπώμενη</u> βραχεία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_{n-1}^{sing}(\mathbb{R}^n \setminus f(S^0);\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

(βλ. [ΣΟΑ], Πρόταση 2.1.15, σελ. 79), οπότε

$$H_{n-1}^{sing}(\mathbb{R}^n \setminus f(S^0);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$$ (βλ. [ΣΟΑ], Θεώρημα 2.1.13, σελ. 77-78).

● <u>6η περίπτωση:</u> Για q,k,n που δεν εμπίπτουν στις περιπτώσεις 1-5 είναι εύκολο να δειχθεί ότι $H_q^{sing}(\mathbb{R}^n \setminus f(S^k);\mathbb{Z}) \cong \{0\}$. (Οι λεπτομέρειες αφήνονται ως άσκηση.) $\square$

<u>3.7.39. Λήμμα</u> Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και έστω A ένας συνεκτικός υπόχωρος τού X, ο οποίος περιέχει τόσον εσωτερικά όσον και εξωτερικά σημεία ενός $B\subseteq X$. Τότε $A\cap Fr(B)\neq\emptyset$, όπου $Fr(B)$ η μεθόριος (= τοπολογικό σύνορο) τού B (βλ. 1.2.9., σελ. 5).

<u>Απόδειξη:</u> Εάν υποθέσουμε ότι $A\cap Fr(B)=\emptyset$, τότε τα (ξένα μεταξύ τους) σύνολα B° και $(X\setminus B)^\circ$ καλύπτουν τον A με τα $\mathring{B}\cap A$ και $(X\setminus B)^\circ\cap A$ ανοικτά, μη κενά υποσύνολα τού A. <u>Ως</u> εκ τούτου, το $A=(\mathring{B}\cap A)\amalg((X\setminus B)^\circ\cap A)$ είναι μη συνεκτικό, κάτι που είναι (εξ υποθέσεως) άτοπο! $\square$

Το ακόλουθο Θεώρημα είναι γνωστό και ως "Θεώρημα διαχωρισμού των Jordan και Brouwer."

3.7.40. Θεώρημα Εάν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, και $f: \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ (και αντιστοίχως, $f: \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$) μια τοπολογική εμφύτευση, τότε ισχύουν τα εξής:
(i) Το συμπλήρωμα $\mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{S}^{n-1})$ (και αντιστοίχως, $\mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{S}^{n-1})$) διαθέτει ακριβώς δύο (δρομο)συνεκτικές συνιστώσες U και V.
(ii) Οι U και V είναι ανοικτές και η σφαίρα
$f(\mathbb{S}^{n-1}) = Fr(U) = Fr(V)$ αποτελεί την κοινή μεθόριό τους (= τοπολογικό σύνορό τους, βλ. 1.2.9, σελ. 5).

Απόδειξη: (i) Τούτο έπεται άμεσα από το πόρισμα 3.3.5 (i) και τη σημείωση 3.7.37 (και αντιστοίχως, το Θεώρημα 3.7.38).

(ii) Ως ανοικτός υπόχωρος του X (όπου $X = \mathbb{S}^n$ και $X = \mathbb{R}^n$, αντιστοίχως) το συμπλήρωμα $X \setminus f(\mathbb{S}^{n-1})$ είναι τοπικά δρομοσυνεκτικό, οπότε οι δρομοσυνεκτικές συνιστώσες του U και V είναι ανοικτές (βλ. πρόταση 1.9.23 (ii), σελ. 21. Εν προκειμένω, δρομοσυνεκτικές και συνεκτικές συνιστώσες ταυτίζονται!)

► $Fr(U) \cup Fr(V) \subseteq f(\mathbb{S}^{n-1})$: Επειδή οι U και V είναι ανοικτές έχουμε $Fr(U) \cap U = \phi$ και $Fr(U) \cap V = \phi$ (διότι αλλοιώς θα είχαμε $U \cap V \neq \phi$, καθότι η V είναι ανοικτή, πράγμα άτοπο). Επειδή $X = U \amalg V \amalg f(\mathbb{S}^{n-1})$, έχουμε $Fr(U) \subseteq f(\mathbb{S}^{n-1})$. Εναλλάσσοντας τον ρόλο των U και V και χρησιμοποιώντας την ίδια επιχειρηματολογία δείχνουμε ότι $Fr(V) \subseteq f(\mathbb{S}^{n-1})$. Άρα $Fr(U) \cup Fr(V) \subseteq f(\mathbb{S}^{n-1})$.

► $f(\mathbb{S}^{n-1}) \subseteq Fr(U) \cap Fr(V)$: Έστω $x \in f(\mathbb{S}^{n-1})$ και έστω W μια ανοικτή περιοχή του x εντός του X. Η $(n-1)$-σφαίρα $f(\mathbb{S}^{n-1})$ γράφεται ως ένωση $f(\mathbb{S}^{n-1}) = f(\mathbb{S}^{n-1}_+) \cup f(\mathbb{S}^{n-1}_-)$ δύο $(n-1)$-μπαλών (καθότι $\mathbb{S}^{n-1}_\pm \approx \mathbb{D}^{n-1}$, βλ. 1.5.3. (iv), σελ. 10), οι οποίες μπορούν να επιλεγούν έτσι ώστε να ισχύει $x \in f(\mathbb{S}^{n-1}_+) \subset f(\mathbb{S}^{n-1}) \cap W$ (αφού η τομή $f(\mathbb{S}^{n-1}) \cap W$ είναι ανοικτή εντός της $f(\mathbb{S}^{n-1})$). Θεωρούμε έναν δρόμο $\beta: I \to X$ με σημείο αφετηρίας ανήκον στην U, σημείο απολήξεως ανήκον στην V και $Im(\beta) \cap f(\mathbb{S}^{n-1}_-) = \phi$. (Σημειωτέον ότι ο $X \setminus f(\mathbb{S}^{n-1}_-) \approx X \setminus f(\mathbb{D}^{n-1})$ είναι δρομοσυνεκτικός επί τη βάσει των πορισμάτων 3.7.34 και 3.7.35.)

Επειδή το συνεκτικό σύνολο $Im(\beta) = \beta(I)$ περιέχει τόσον εσωτερικά όσον και εξωτερικά σημεία τής U, έχουμε $\beta(I) \cap Fr(U) \neq \phi$ (βλ. λήμμα 3.7.39). Κατά συνέπειαν $\exists\, y \in \beta(I) \cap Fr(U)$. Επειδή τώρα $Fr(U) \subseteq f(\mathbb{S}^{n-1})$ και $\beta(I) \cap f(\mathbb{S}^{n-1}_-) = \phi$, το y ανήκει στη μπάλα $f(\mathbb{S}^{n-1}_+)$ και κατ' επέκτασιν και στην W. Επομένως, για κάθε ανοικτή περιοχή W οιουδήποτε θεωρούμενου σημείου $x \in f(\mathbb{S}^{n-1})$ ισχύει: $W \cap Fr(U) \neq \phi$. Αυτό σημαίνει ότι $x \in \overline{U}$, διότι το $Fr(U)$ είναι κλειστό. Άρα τελικώς $f(\mathbb{S}^{n-1}) \subseteq Fr(U)$. Εναλλάσσοντας τον ρόλο των U και V και χρησιμοποιώντας την ίδια επιχειρηματολογία δείχνουμε ότι $f(\mathbb{S}^{n-1}) \subseteq Fr(V)$. Κατά συνέπειαν, $f(\mathbb{S}^{n-1}) \subseteq Fr(U) \cap Fr(V)$.

- <u>$f(\mathbb{S}^{n-1}) = Fr(U) = Fr(V)$</u>: Τούτο έπεται άμεσα από τους προηγουμένως αποδειχθέντες συνολοθεωρητικούς εγκλεισμούς

$$Fr(U) \cup Fr(V) \subseteq f(\mathbb{S}^{n-1}) \subseteq Fr(U) \cap Fr(V). \qquad \square$$

Για $n=2$ οι πληροφορίες μας για τη φύση των U και V καθίστανται διεξοδικότερες μέσω τού εξής θεωρήματος:

3.7.41. <u>Θεώρημα τού Schoenflies</u>: (i) Εάν η $f: \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^2$ είναι μια τοπολογική εμφύτευση, τότε υπάρχει ομοιομορφισμός $h: \mathbb{S}^2 \xrightarrow{\approx} \mathbb{S}^2$, τέτοιος ώστε να ισχύει

$$h|_{f(\mathbb{S}^1)}: f(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\approx} h(f(\mathbb{S}^1)) \approx \mathbb{S}^1 \quad \text{και}$$

$$\left[\begin{array}{lllll} h|_U & : U & \xrightarrow{\quad\approx\quad} & h(U) \approx (\mathbb{S}^2_+)^\circ \approx \mathring{\mathbb{D}}^2 \\ h|_V & : V & \xrightarrow{\quad\approx\quad} & h(V) \approx (\mathbb{S}^2_-)^\circ \approx \mathring{\mathbb{D}}^2 \end{array}\right]$$

(ii) Εάν η $f: \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ είναι μια τοπολογική εμφύτευση, τότε υπάρχει ομοιομορφισμός $h: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^2$ με

$$h|_{f(\mathbb{S}^1)}: f(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\approx} h(f(\mathbb{S}^1)) \approx \mathbb{S}^1$$

και με τη μία εκ των δύο δρομοσυνεκτικών συνιστωσών τού $\mathbb{R}^2 \setminus f(\mathbb{S}^1)$ ομοιομορφική ενός 2-κυττάρου ($\approx \mathring{\mathbb{D}}^2$) και την άλλη ομοιομορφική τού $\mathring{\mathbb{D}}^2 \setminus \{0\}$.

Απόδειξη: Για τοπολογικές αποδείξεις βλ.

- D.W. Hall & G.L. Spencer: *Elementary Topology*, John Wiley & Sons, Inc., 1955,
- E.E. Moise: *Geometric Topology in Dimension 2 and 3*, GTM, Vol. **47**, Springer-Verlag, 1977, §9,
- M.H.A. Newman: *Topology of Plane Sets of Points*, Cambridge University Press, 1951.

Για αποδείξεις που χρησιμοποιούν το περιώνυμο «θεώρημα απεικονίσεως τού Riemann» (που συναντούμε στις παραδόσεις μαθημάτων Μιγαδικής Αναλύσεως) βλ.

- Z. Nechari: *Conformal Mapping*, McGraw-Hill, 1952,
- Ch. Pommerenke: *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, 1992.

3.7.42. Λήμμα: Έστω $f: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ μια συνεχής απεικόνιση. Εάν τα a, a' ανήκουν στην ίδια δρομοσυνεκτική συνιστώσα τού συμπληρώματος $\mathbb{R}^2 \setminus f(\mathbb{S}^1)$, τότε $\mathrm{ord}_a(f) = \mathrm{ord}_{a'}(f)$. (Για τον ορισμό τής τάξεως $\mathrm{ord}_a(f)$ βλ. 3.7.17, σελ. 209).

Απόδειξη: Εάν η $\beta: I \to \mathbb{R}^2 \setminus f(\mathbb{S}^1)$ είναι ένας δρόμος με σημείο αφετηρίας του το a και σημείο απολήξεώς του το a', τότε $\vartheta_a \circ f \simeq \vartheta_{a'} \circ f$ (μέσω τής $(x,t) \mapsto \dfrac{f(x)-\beta(t)}{\|f(x)-\beta(t)\|}$), οπότε

$$\mathrm{ord}_a(f) := \deg(\vartheta_a \circ f) \underset{\substack{3.7.5(\text{ii})\\ \text{σελ. } 204}}{=\!=} \deg(\vartheta_{a'} \circ f) =: \mathrm{ord}_{a'}(f). \quad \square$$

3.7.43. Λήμμα. Για κάθε συνεχή απεικόνιση $f: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ το συμπλήρωμα $\mathbb{R}^2 \setminus f(\mathbb{S}^1)$ περιέχει ακριβώς μία μη φραγμένη δρομοσυνεκτική συνιστώσα. Επιπροσθέτως, για κάθε a που ανήκει σε αυτήν έχουμε $\mathrm{ord}_a(f) = 0$.

Απόδειξη: Είναι προφανές ότι υφίσταται τουλάχιστον μία μη φραγμένη δρομοσυνεκτική συνιστώσα τού $\mathbb{R}^2 \setminus f(\mathbb{S}^1)$. Ας συμβολίσουμε ως V μια (τέτοιου είδους) δρομοσυνεκτική συνιστώσα τού $\mathbb{R}^2 \setminus f(\mathbb{S}^1)$. Έστω $\varepsilon > 0$ αρκούντως μεγάλο, ούτως ώστε να ισχύει $f(\mathbb{S}^1) \subset D := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < \varepsilon\}$. Επειδή το $\mathbb{R}^2 \setminus D$ είναι δρομοσυνεκτικό και $(\mathbb{R}^2 \setminus D) \cap V \neq \emptyset$, έχουμε $\mathbb{R}^2 \setminus D \subseteq V$. Κατά συνέπειαν, η V είναι η μοναδική μη φραγμένη δρομοσυνεκτική συνιστώσα τού $\mathbb{R}^2 \setminus f(\mathbb{S}^1)$. (Εάν υπήρχε μια άλλη μη φραγμένη δρομοσυνεκτική συνιστώσα V' τού $\mathbb{R}^2 \setminus f(\mathbb{S}^1)$, τότε $\mathbb{R}^2 \setminus D \subseteq V'$, οπότε $V \cap V' \neq \emptyset \Rightarrow V' = V$.)

Εάν $a \in V$ και $a' \in \mathbb{R}^2 \setminus D$, τότε (κατά το λήμμα 3.7.42) $\mathrm{ord}_a(f) = \mathrm{ord}_{a'}(f)$. Επειδή η $(x,t) \longmapsto \dfrac{tf(x) - a'}{\|tf(x) - a'\|}$ ορίζει μια ομοτοπία μεταξύ τής $\partial_{a'} \circ f$ και μιας σταθερής απεικονίσεως, έχουμε $\mathrm{ord}_{a'}(f) = 0$ (βλ. 3.7.5 (ii),(v)). □

3.7.44. Πρόταση: Έστω $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ μια τοπολογική εμφύτευση.

(i) Το συμπλήρωμα $\mathbb{R}^2 \setminus f(\mathbb{S}^1)$ διαθέτει δύο δρομοσυνεκτικές συνιστώσες με κοινή μεθόριό τους την $f(\mathbb{S}^1)$.

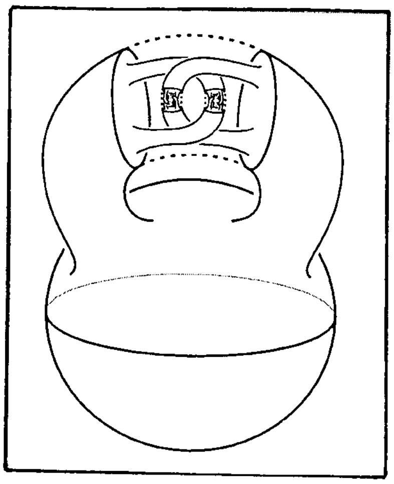
(ii) Μόνον μία εξ αυτών είναι μη φραγμένη (και καλείται το <u>εξωτερικό</u> τής κλειστής καμπύλης $f(\mathbb{S}^1)$). Επιπροσθέτως, για κάθε a που ανήκει στην εν λόγω δρομοσυνεκτική συνιστώσα, $\mathrm{ord}_a(f) = 0$. Για κάθε a που ανήκει στην άλλη (κατ' ανάγκην φραγμένη) δρομοσυνεκτική συνιστώσα (που καλείται <u>εσωτερικό</u> τής κλειστής καμπύλης $f(\mathbb{S}^1)$) έχουμε $\mathrm{ord}_a(f) \in \{\pm 1\}$.

(iii) Η μη φραγμένη δρομοσυνεκτική συνιστώσα τού $\mathbb{R}^2 \setminus f(\mathbb{S})$ είναι $\approx \mathring{\mathbb{D}}^2 \setminus \{0\}$, ενώ η φραγμένη δρομοσυνεκτική συνιστώσα του είναι $\approx \mathring{\mathbb{D}}^2$.

<u>Απόδειξη:</u> Το (i) έπεται από το Θεώρημα 3.7.40 για $n = 2$. Ο πρώτος ισχυρισμός στο (ii) είναι αληθής βάσει τού λήμματος 3.7.43. Για την απόδειξη τής αληθείας τού δευτέρου ισχυρισμού στο (ii) βλ. π.χ. J.R. Munkres: "Topology", Second Edition, Prentic-Hall, Inc., 2000, Theorem 66.2, σελ. 404. Τέλος, το (iii) έπεται άμεσα από την απόδειξη τού θεωρήματος 3.7.41 (ii) τού Schoenflies. □

3.7.45. Σημείωση: Τα (i) και (ii) της προτάσεως 3.7.44 είναι το κλασικό Θεώρημα καμπυλών τού Jordan. (Στη βιβλιογραφία, οι ομοιομορφικές εικόνες $f(\mathbb{S}^1)$ τού κύκλου $\mathbb{S}^1$ εντός τού $\mathbb{R}^2$ ονομάζονται ενίοτε καμπύλες (τού) Jordan.)

3.7.46. Σχόλια: (i) Το θεώρημα 3.7.41 τού Schoenflies δεν επιδέχεται άμεση γενίκευση σε διαστάσεις $n \geq 3$. Είναι πασίγνωστο το παράδειγμα της κερατωμένης σφαίρας (horned sphere) S τού J. W. Alexander (που το επινόησε το 1924) με $\mathbb{S}^2 \approx S \subset \mathbb{R}^3$ και συμπλήρωμα $\mathbb{R}^3 \setminus S$, η μη φραγμένη δρομοσυνεκτική συνιστώσα τού οποίου δεν είναι απλά συνεκτική (και —ως εκ τούτου— $\not\approx \mathring{\mathbb{D}}^3 \setminus \{0\}$). Η κατασκευή της γίνεται ως εξής: Έστω $X_0 \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ ο στερεός τόρος ο σχηματιζόμενος από μια μπάλα B_0 ύστερα από προσάρτηση μιας "χειρολαβής" $I \times \mathbb{D}^2$ κατά μήκος τού $\partial I \times \mathbb{D}^2$. Στο σχήμα που ακολουθεί αυτή η χειρολαβή εικονογραφείται ως ένωση δύο "κεράτων", τα οποία έχουν προσαρτηθεί στη μπάλα, μαζί με μια κοντύτερη χειρολαβή υποδηλούμενη μέσω διακεκομμένων γραμμών.



Εν συνεχεία θεωρούμε τον χώρο $X_1 \subset X_0$ που προκύπτει ύστερα από αφαίρεση ενός τμήματος της κοντύτερης χειρολαβής, ούτως ώστε αυτό που απομένει να είναι ένα ζεύγος αρθρωτών χειρολαβών πού προσαρτώνται στη μπάλα $B_1 := B_0 \cup \{\text{τα δύο κέρατα}\}$. Κατόπιν διαδοχικής επαναλήψεως της ανωτέρω διαδικασίας (αποσύνθεση καθεμιάς των χειρολαβών τού προηγούμενου βήματος σε δύο κέρατα και μιας κοντύτερης χειρολαβής, αφαίρεση αυτής της χειρολαβής κ.ο.κ.) κατασκευάζουμε μια ακολουθία (συμπαγών) τοπολογικών υποχώρων

$$X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_{k-1} \supset X_k \supset \cdots$$

τού $\mathbb{R}^3$ με $X := \bigcap_{k=0}^{\infty} X_k \approx \mathbb{D}^3$.

Εν προκειμένω, ο X_k είναι μια μπάλα B_k με 2^k προσαρτηθείσες χειρολαβές, όπου η B_k προκύπτει από την B_{k-1} ύστερα από προσάρτηση 2^k κεράτων. Υπάρχουν ομοιομορφισμοί $h_k : B_{k-1} \to B_k$, οι οποίοι μακριά από μια μικρή περιοχή τού $B_k \setminus B_{k-1}$ είναι ταυτοτικοί. Καθώς το k τείνει στο άπειρο, η σύνθεση $h_k \circ h_{k-1} \circ \cdots \circ h_1$ προσεγγίζει μια απεικόνιση $f: B_0 \to \mathbb{R}^3$, η οποία είναι συνεχής (διότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη). Το σύνολο των σημείων τής B_0, στο οποίο η f δεν ισούται με την $h_k \circ h_{k-1} \circ \cdots \circ h_1$ (για αρκούντως μεγάλους k) είναι ένα "σύνολο (τού) Cantor", η εικόνα τού οποίου (μέσω τής f) είναι η τομή όλων των παρεμβηθεισών χειρολαβών.
Αποδεικνύεται ότι η f είναι ενριπτική, οπότε (λόγω τής συμπάγειας τής B_0) επάγει έναν ομοιομορφισμό $f: B_0 \xrightarrow{\approx} f(B_0) =: B \subset \mathbb{R}^3$.
Η κερατωμένη σφαίρα S ορίζεται ως το σύνορο $S := \partial B = f(\partial B_0)$ τής μπάλας B. Για μια (αδρή) περιγραφή τού τρόπου αποδείξεως τού ότι η μη φραγμένη δρομοσυνεκτική συνιστώσα τού $\mathbb{R}^3 \setminus S$ δεν είναι απλά συνεκτική, βλ. A. Hatcher: "Algebraic Topology", Cambridge University Press, 2001, σελ. 171.

(ii) Για μια τρισδιάστατη (φιλμική) αναπαράσταση τής κατασκευής τής S, βλ. τη διαδικτυακή διεύθυνση:

http://www.youtube.com/watch?v=d1Vjsm9pQlc

(iii) Για ανάλογα (αντι)παραδείγματα εμφυτεύσεων $(n-1)$-σφαιρών στον $\mathbb{R}^n$ ή στην $\mathbb{S}^n$, $n \geq 3$, βλ. T.B. Rushing: "Topological Embeddings", Academic Press, 1973.

(iv) Εάν στην $\mathbb{S}^{n-1}$ προσθέσουμε ένα διπλό "κολάρο" (δηλ. εάν θεωρήσουμε το $\mathbb{S}^{n-1} \times [-1,1]$) τότε υπάρχει μια γενίκευση τού Θεωρήματος 3.7.41 (i) τού Schoenflies:

3.7.47. Γενικευμένο Θεώρημα τού Schoenflies (B. Mazur, M. Morse, M. Brown, 1959-60)
Εάν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, και εάν η $f: \mathbb{S}^{n-1} \times [-1,1] \longrightarrow \mathbb{S}^n$ είναι τοπολογική εμφύτευση, τότε η κλειστή θήκη καθεμιάς των (δρομο)συνεκτικών συνιστωσών τού $\mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\})$ είναι $\approx \mathbb{D}^n$.

Απόδειξη: Βλ. G.E. Bredon: "Topology and Geometry", GTM, Vol. 139, Springer-Verlag, 1993, σελ. 236-239. □