ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Θεωρίες Ομολογίας

Στο παρόν κεφάλαιο παρατίθεται ο αξιωματικός ορισμός των θεωριών ομολογίας, περιγράφονται κάποιες πρώτες ιδιότητες των μοδίων ομολογίας τοπολογικών ζευγών και δίδονται χρήσιμες εφαρμογές (άμεσα απορρέουσες από τα αξιώματα των Eilenberg και Steenrod).

§ 2.1 Εισαγωγή

Η έννοια τής «ομολογίας» εισήχθη από τον H. Poincaré στο έργο του "Analysis Situs" το 1895 στο πλαίσιο τής μελέτης ορισμένων συνδυαστικών ιδιοτήτων τριγωνίσιμων χώρων. Ωστόσο, η αυστηρή δόμηση τής σχετικής θεωρίας και η αλγεβροποίησή της έμελλε να λάβει την οριστική της μορφή περί τα μέσα τού 20ού αιώνα. Για την περιγραφή των ιστορικών φάσεων αυτής τής εξελικτικής πορείας βλ.

- M. Bollinger: *Geschichtliche Entwicklung des Homologiebegriffs*, Arch. Hist. Ex. Sci. **9** (1972), 94-166.
- J. Dieudonné: *A History of Algebraic and Differentiable Topology*, 1900-1960, Birkhäuser, 1989.
- *History of Topology* (I.M. James, ed.), Elsevier, 1999.

Ένας από τους κύριους στόχους τής Αλγεβρικής Τοπολογίας είναι η μελέτη ποικίλων συναρτητών από «τοπολογικές κατηγορίες» σε «αλγεβρικές», από την οποία εξάγονται αναγκαίες αλγεβρικές συνθήκες για τη λύση δύσκολων τοπολογικών προβλημάτων. Η «αξιωματικοποίηση» των θεωριών ομολογίας και συνομολογίας περιλαμβάνεται στο περιώνυμο σύγγραμμα των:

- S. Eilenberg & N. Steenrod: *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton University Press, 1952.

Στην παρούσα ενότητα παρατίθεται ο ορισμός των θεωριών ομολογίας μέσω των *αξιωμάτων των Eilenberg και Steenrod* (σε μια κάπως πιο σύγχρονη μορφή, συνοδευόμενα από διευκρινιστικά σχόλια). Τα κυριότερα εξ αυτών είναι το *αξίωμα τού ομοτοπικώς αναλλοιώτου* και το *αξίωμα τής εκτομής*. Τα λοιπά αξιώματα πληρούνται (εκ κατασκευής) από τις «συνήθεις θεωρίες» ομολογίας (ιδιάζουσα, μονοπλεκτική και κυτταρική). Εντούτοις, υπάρχουν και αρκετές (καθ' όλα χρήσιμες και σημαντικές) «γενικευμένες» θεωρίες ομολογίας που δεν πληρούν ένα ή δύο εξ αυτών.

2.1.1. Ορισμός. Έστω (X,A) ένα τοπολογικό ζεύγος (υπό την έννοια τού ορσ. 1.18.1, σελ. 79). Ως *σύνδεσμο τού* (X,A) ορίζουμε τα έξι τοπολογικά ζεύγη τού κάτωθι σχήματος, τις μεταξύ τους ταυτοτικές απεικονίσεις, καθώς και τις μέσω βελών υποδεικνυόμενες ενθετικές απεικονίσεις:

$$
\boxed{
\begin{tikzcd}
& & (X,\emptyset) \arrow[dr] & & \\
(\emptyset,\emptyset) \arrow[r, hook] & (A,\emptyset) \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & & (X,A) \arrow[r] & (X,X) \\
& & (A,A) \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}
}
$$

2.1.2 Ορισμός. Μια *ομολογικώς επιτρεπτή κατηγορία* είναι μια κατηγορία $\mathcal{C}$ με τα αντικείμενά της απαρτίζοντα μια υποκλάση τής κλάσεως όλων των τοπολογικών ζευγών και με συνεχείς απεικονίσεις τοπολογικών ζευγών ως μορφισμούς της, ούτως ώστε να ισχύουν τα εξής:

(i) Εάν $(X,A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, τότε η $\mathcal{C}$ περιέχει τον σύνδεσμο τού (X,A).

(ii) Εάν η $f:(X,A) \to (Y,B)$ είναι ένας μορφισμός εντός τής $\mathcal{C}$, τότε η $\mathcal{C}$, πέραν των ιδίων των (X,A), (Y,B), περιέχει και όλες τις απεικονίσεις που προσδιορίζει η f από τον σύνδεσμο τού (X,A) στον σύνδεσμο τού (Y,B).

(iii) Εάν $(X,A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, τότε η $\mathcal{C}$ περιέχει τον κύλινδρο $(X,A)\times I$ ως αντικείμενό της (βλ. 1.18.10, σελ. 81) και τις δύο ενθετικές απεικονίσεις $j_0, j_1 : (X,A) \hookrightarrow (X,A)\times I$ ως μορφισμούς της (όπου $j_0(x) := (x,0)$, $j_1(x) := (x,1)$, $\forall x \in X$).

(iv) Υπάρχει (τουλάχιστον) ένας μονοσημειακός χώρος $\{pt\}$ εντός τής κλάσεως των αντικειμένων τής $\mathcal{C}$ και κάθε συνεχής απεικόνιση $f:\{pt\} \to X$, όπου $X = (X,\emptyset) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, ανήκει στο σύνολο των μορφισμών τής $\mathcal{C}$.

2.1.3. Παραδείγματα. Οι ακόλουθες κατηγορίες είναι ομολογικώς επιτρεπτές:

(i) Η κατηγορία $\mathcal{C} = \mathrm{Top}^{(2)}$ με όλα τα τοπολογικά ζεύγη ως αντικείμενά της και τις συνεχείς απεικονίσεις τοπολογικών ζευγών ως μορφισμούς της.

(ii) Η κατηγορία $\mathcal{C} = \mathbf{Top}^{(2)}_{comp.}$ των τοπολογικών ζευγών (X, A), όπου X συμπαγής τοπολογικός χώρος και A κλειστός υπόχωρός του.

(iii) Η κατηγορία $\mathcal{C} = \mathbf{Top}^{(2)}_{pol.}$ των πολυεδρικών (τοπολογικών) ζευγών (βλ. ορσ. 1.20.26, σελ. 98).

(iv) Η κατηγορία $\mathcal{C} = \mathbf{Top}^{(2)}_{CW}$ των CW-ζευγών (βλ. 1.21.6, σελ. 108).

2.1.4. Σημείωση. Εάν η $\mathcal{C}$ είναι μια ομολογικώς επιτρεπτή κατηγορία, καλούμε κάθε ζεύγος $(X, A) \in Ob(\mathcal{C})$ επιτρεπτό ζεύγος (για την $\mathcal{C}$), κάθε $f \in Mor_{\mathcal{C}}((X,A),(Y,B))$ επιτρεπτό μορφισμό (για την $\mathcal{C}$) κ.λπ.

2.1.5. Ορισμός. Από τούδε και στο εξής θα συμβολίζουμε ως $\mathbb{Z}$-$\mathbf{Mod}_R$ την κατηγορία των $\mathbb{Z}$-βαθμολογημένων R-μοδίων (όπου R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο πολλαπλασιαστικό στοιχείο). Κάθε αντικείμενό της είναι μια μέσω του $\mathbb{Z}$ οριζόμενη ακολουθία $\{M_q \mid q \in \mathbb{Z}\}$ R-μοδίων M_n. Οι μορφισμοί της $\{f_q \mid q \in \mathbb{Z}\} : \{M_q \mid q \in \mathbb{Z}\} \to \{N_q \mid q \in \mathbb{Z}\}$ είναι οι μέσω του $\mathbb{Z}$ οριζόμενες ακολουθίες ομομορφισμών R-μοδίων $f_q : M_q \to N_q$ $(q \in \mathbb{Z})$.

2.1.6. Ορισμός. Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο πολλαπλασιαστικό στοιχείο και έστω $\mathcal{C}$ μια ομολογικώς επιτρεπτή κατηγορία. Ως $\Psi : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}$ συμβολίζουμε τον συναρτητή, ο οποίος αντιστοιχεί σε κάθε $(X, A) \in Ob(\mathcal{C})$ τον $A = (A, \emptyset) \in Ob(\mathcal{C})$ (με προφανή απεικόνιση μορφισμών).

Μια R-θεωρία ομολογίας επί της κατηγορίας $\mathcal{C}$ $\mathcal{H}_\bullet \equiv (\mathcal{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ είναι ένας συναλλοίωτος συναρτητής

$$\boxed{\mathcal{H}_\bullet : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}_R} \quad \big((X,A) \mapsto \mathcal{H}_\bullet(X,A;R)\big)$$

μαζί με έναν φυσικό μετασχηματισμό

$$\boxed{\partial_\bullet : \mathcal{H}_\bullet \longrightarrow \mathcal{H}_{\bullet-1} \circ \Psi}$$

(όπου ο $\mathcal{H}_{\bullet-1}$ προκύπτει από τον $\mathcal{H}_\bullet$ ύστερα από προφανή μετακίνηση δεικτών) ούτως ώστε να πληρούνται τα εξής "αξιώματα":

(A 1) Αξίωμα τής ακριβείας. Για κάθε $(X,A) \in Ob(\mathcal{G})$ η (και προς τις δύο κατευθύνσεις απείρως εκτεινόμενη) μακρά ακολουθία

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{q+1}(X,A)} \mathcal{H}_q(A;R) \xrightarrow{\mathcal{H}_q(i)} \mathcal{H}_q(X;R) \xrightarrow{\mathcal{H}_q(j)} \mathcal{H}_q(X,A;R) \xrightarrow{\partial_q(X,A)} \mathcal{H}_{q-1}(A;R) \xrightarrow{\mathcal{H}_{q-1}(i)} \mathcal{H}_{q-1}(X;R) \xrightarrow{\mathcal{H}_{q-1}(j)} \mathcal{H}_{q-1}(X,A;R) \longrightarrow \cdots$$

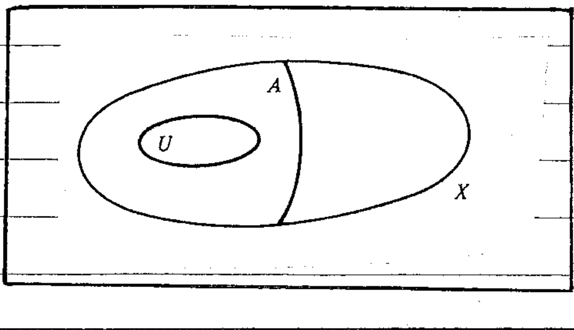
είναι ακριβής, όπου $i: A \hookrightarrow X$, $j: X=(X,\phi) \hookrightarrow (X,A)$ οι συνήθεις ενθέσεις. Η $\partial_q(X,A)$ ονομάζεται <u>συνδετικός ομομορφισμός</u> ή <u>συνοριακός τελεστής</u> και η ανωτέρω ακολουθία <u>μακρά ακριβής ακολουθία του ζεύγους (X,A)</u>

(A 2) Αξίωμα τού ομοτοπικώς αναλλοιώτου. Εάν οι $f,g:(X,A)\to(Y,B)$ είναι ομότοπες εντός της $\mathcal{G}$ (όπου $(X,A),(Y,B) \in Ob(\mathcal{G})$), ήτοι εάν υπάρχει επιτρεπτός μορφισμός $h:(X,A)\times I \to (Y,B)$ με $f=h\circ j_0$ και $g=h\circ j_1$ (όπου j_0, j_1 όπως ορίσθηκαν στο 2.1.2 (iii)), τότε

$$\mathcal{H}_q(f)=\mathcal{H}_q(g): \mathcal{H}_q(X,A;R) \to \mathcal{H}_q(Y,B;R), \ \forall q\in\mathbb{Z}.$$

(A 3) Αξίωμα τής εκτομής. Εάν οι $U\subseteq A\subseteq X$ είναι δυο υπόχωροι ενός τοπολογικού χώρου $X\in Ob(\mathcal{G})$, τέτοιοι ώστε να ισχύει ο εγκλεισμός $\overline{U}\subseteq A^{o}$, τότε η ένθεση τοπολογικών ζευγών $i:(X\setminus U, A\setminus U)\hookrightarrow (X,A)$ επάγει ισομορφισμούς R-modules:

$$\mathcal{H}_q(i): \mathcal{H}_q(X\setminus U, A\setminus U;R) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_q(X,A;R), \ \forall q\in\mathbb{Z}.$$



(A 4) Αξίωμα τής διαστάσεως. Για τον μονοσημειακό χώρο $\{pt\}$ ισχύει:

$$\mathcal{H}_q(\{pt\};R) \cong \begin{cases} R\,, & \text{όταν } q=0,\\ 0\,, & \text{όταν } q\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.\end{cases}$$

(A 5) Αξίωμα τού αθροίσματος. Έστω $(X_j,A_j)_{j\in J}$ μια οικογένεια τοπολογικών ζευγών (που αποτελούν αντικείμενα τής $\mathcal{T}$) και έστω $i_j:(X_j,A_j)\hookrightarrow(X,A)$ η ένθεση τοπολογικών ζευγών όταν $X:=\sum\limits_{j\in J}X_j$, $A:=\sum\limits_{j\in J}A_j$, $\forall j\in J$. Τότε ο ομομορφισμός R-μοδίων

$$\bigoplus_{j\in J}\mathcal{H}_q(i_j): \bigoplus_{j\in J}\mathcal{H}_q(X_j,A_j;R) \longrightarrow \mathcal{H}_q(X,A;R)$$

είναι ισομορφισμός για κάθε $q\in\mathbb{Z}$.

2.1.7. Διευκρινίσεις (i) Ήδη από τον ορισμό ενός συναλλοίωτου συναρτητή (βλ. [ΣΟΑ, Ορισ. 6.2.1]) είναι σαφές ότι (μέσω τού $\mathcal{H}_\cdot$) σε κάθε τοπολογικό ζεύγος $(X,A)\in Ob(\mathcal{T})$ αντιστοιχούμε έναν $\mathbb{Z}$-βαθμολογημένο R-μόδιο $\{\mathcal{H}_q(X,A;R)\mid q\in\mathbb{Z}\}$ και σε κάθε μορφισμό (τής $\mathcal{T}$) $f\in Mor_{\mathcal{T}}((X,A),(Y,B))$ έναν μορφισμό

$$\{\mathcal{H}_q(f): \mathcal{H}_q(X,A;R)\to\mathcal{H}_q(Y,B;R)\ \mid\ q\in\mathbb{Z}\}$$

τής $\mathbb{Z}$-$\mathbf{Mod}_R$, ούτως ώστε να ισχύει $\forall q\in\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{H}_q(Id_{(X,A)}) = Id_{\mathcal{H}_q(X,A;R)} \qquad \mathcal{H}_q(g)\circ\mathcal{H}_q(f)=\mathcal{H}_q(g\circ f).$$

(ii) Ο φυσικός μετασχηματισμός $\partial_\cdot$ αντιστοιχεί σε κάθε $(X,A)\in Ob(\mathcal{T})$ και σε κάθε $q\in\mathbb{Z}$ έναν ομομορφισμό R-μοδίων

$$\partial_q(X,A): \mathcal{H}_q(X,A;R)\to\mathcal{H}_{q-1}(A;R),$$ ούτως ώστε

για κάθε $f\in Mor_{\mathcal{T}}((X,A),(Y,B))$ το διάγραμμα

$$\boxed{\begin{tikzcd} \mathcal{H}_q(X,A;R) \arrow[r, "\partial_q(X,A)"] \arrow[d, "\mathcal{H}_q(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{H}_{q-1}(A;R) \arrow[d, "\mathcal{H}_{q-1}(f|_A)"] \\ \mathcal{H}_q(Y,B;R) \arrow[r, "\partial_q(Y,B)"'] & \mathcal{H}_{q-1}(B;R) \end{tikzcd}}$$

να είναι μεταθετικό.

2.1.8. Σημείωση. Αντίστοιχοι $\mathcal{H}_\bullet \equiv (\mathcal{H}_\bullet, \partial_\bullet)$, οι οποίοι δεν πληρούν κατ' ανάγκην κάποιο εκ των αξιωμάτων (A1), (A4) ή (A5), οδηγούν στη θέσπιση γενικευμένων θεωριών ομολογίας.
(Π.χ. η θεωρία ομολογίας Čech δεν πληροί το (A1), βλ. Eilenberg-Steenrod, ό.π., Chapter IX, Thm. 7.6, p. 248, η θεωρία ομορισμού (bordism theory) και κάποιες K-θεωρίες δεν πληρούν το (A4) κ.λπ.)

Στις ενότητες §2.2 – §2.7 θα εργασθούμε με R-θεωρίες ομολογίας $\mathcal{H}_\bullet \equiv (\mathcal{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ επί της $\mathcal{C} = \mathrm{Top}^{(2)}$! Η ύπαρξη (τουλάχιστον) μιας τέτοιας θεωρίας ομολογίας θα αποδειχθεί στο κεφάλαιο 3!

§ 2.2 Άμεσες συνέπειες των αξιωμάτων

2.2.1. Πρόταση: Εάν $(X,A) \simeq (Y,B)$ (βλ. ορσ. 1.18.13, σελ. 82), τότε $\mathcal{H}_q(X,A;R) \cong \mathcal{H}_q(Y,B;R)$, $\forall q \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη: Εάν $(X,A) \simeq (Y,B)$, τότε υπάρχουν συνεχείς απεικονίσεις $f:(X,A) \to (Y,B)$ και $g:(Y,B) \to (X,A)$ με $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_{(X,A)}$ και $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_{(Y,B)}$. Από το αξίωμα (A2) και το 2.1.7 (i) έπεται ότι

$$\begin{cases} \mathcal{H}_q(g \circ f) = \mathcal{H}_q(g) \circ \mathcal{H}_q(f) = \mathcal{H}_q(\mathrm{Id}_{(X,A)}) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_q(X,A;R)}, \\ \mathcal{H}_q(f \circ g) = \mathcal{H}_q(f) \circ \mathcal{H}_q(g) = \mathcal{H}_q(\mathrm{Id}_{(B,Y)}) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_q(B,Y;R)}, \forall q \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

οπότε ο ομομορφισμός R-μοδίων $\mathcal{H}_q(f)$ είναι ισομορφισμός (με τον $\mathcal{H}_q(g)$ ως αντίστροφό του) για κάθε $q \in \mathbb{Z}$. □

2.2.2. Σημείωση: Για $A = B = \emptyset$ η πρόταση 2.2.1 μας πληροφορεί ότι: $(X \simeq Y \Longrightarrow \mathcal{H}_q(X;R) \cong \mathcal{H}_q(Y;R), \forall q \in \mathbb{Z})$.

2.2.3. Πόρισμα. Εάν ο X είναι ένας συσταλτός τοπολογικός χώρος (βλ. 1.17.4, σελ. 70), τότε

$$\mathcal{H}_q(X;R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } q = 0, \\ \{0\}, & \text{όταν } q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Απόδειξη: Άμεση από τις προτάσεις 1.17.19 (σελ. 76), 2.2.1 και το αξίωμα (A4). □

2.2.4. Πρόταση: Έστω (X,A) ένα τοπολογικό ζεύγος. Εάν ως $i: A \hookrightarrow X$ και $j: X \hookrightarrow (X,A)$ συμβολίσουμε τις συνήθεις ενθέσεις και υποθέσουμε ότι ο A είναι μια σύμπτυξη τού X (υπό την έννοια τού ορσ. 1.17.10, σελ. 73), τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Ο $\mathcal{H}_q(i): \mathcal{H}_q(A;R) \to \mathcal{H}_q(X;R)$ είναι μονομορφισμός, $\forall q \in \mathbb{Z}$.

(ii) Ο $\mathcal{H}_q(j): \mathcal{H}_q(X;R) \to \mathcal{H}_q(X,A;R)$ είναι επιμορφισμός, $\forall q \in \mathbb{Z}$.

(iii) Οι συνοριακοί τελεστές $\partial_q(X,A)$ είναι τετριμμένοι, $\forall q \in \mathbb{Z}$.

(iv) $\mathcal{H}_q(X;R) \cong \mathcal{H}_q(A;R) \oplus \mathcal{H}_q(X,A;R)$, $\forall q \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη: Εξ υποθέσεως υπάρχει συνεχής απεικόνιση $r: X \to A$ με $r \circ i = \mathrm{Id}_A$. Άρα $\mathcal{H}_q(r \circ i) = \mathcal{H}_q(r) \circ \mathcal{H}_q(i) = \mathcal{H}_q(\mathrm{Id}_A) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_q(A;R)}$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_q(r) \text{ επιμορφισμός και} \\ \mathcal{H}_q(i) \text{ μονομορφισμός, } \forall q \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}, \text{ απ' όπου προκύπτει το (i)}$$

και η βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων:

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}_q(A;R) \xrightarrow{\mathcal{H}_q(i)} \mathcal{H}_q(X;R) \xrightarrow{\mathcal{H}_q(r)} \mathcal{H}_q(A;R) \longrightarrow 0.$$

Κατά το Θεώρημα 2.1.13 της [ΣΟΑ, σελ. 77],

$$\mathcal{H}_q(X;R) \cong \mathrm{Im}(\mathcal{H}_q(i)) \oplus \mathrm{Ker}(\mathcal{H}_q(r)), \ \forall q \in \mathbb{Z}. \ (*)$$

Εν συνεχεία θεωρούμε τη μακρά ακριβή ακολουθία τού (A1)

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{H}_{q+1}(X,A;R) \xrightarrow{\partial_{q+1}(X,A)} \mathcal{H}_q(A;R) \xrightarrow{\mathcal{H}_q(i)} \mathcal{H}_q(X;R) \xrightarrow{\mathcal{H}_q(j)}$$

$$\hookrightarrow \mathcal{H}_q(X,A;R) \xrightarrow{\partial_q(X,A)} \mathcal{H}_{q-1}(A;R) \xrightarrow{\mathcal{H}_{q-1}(i)} \mathcal{H}_q(X;R) \xrightarrow{\mathcal{H}_{q-1}(j)} \cdots$$

και συνάγουμε ότι

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Im}(\partial_q(X,A)) = \mathrm{Ker}(\mathcal{H}_{q-1}(i)) \overset{(i)}{=\!=} \{0\} \Longrightarrow \text{το (iii) είναι αληθές.} \\ \mathrm{Im}(\mathcal{H}_q(j)) = \mathrm{Ker}(\partial_q(X,A)) = \mathcal{H}_q(X,A;R) \Longrightarrow \text{το (ii) είναι αληθές.} \end{array} \right.$$

Τέλος, από την (*) έχουμε $\mathrm{Ker}(\mathcal{H}_q(r)) \cong \mathcal{H}_q(X;R) / \mathrm{Im}(\mathcal{H}_q(i))$

$$\underset{\text{ακρίβεια}}{\cong} \mathcal{H}_q(X;R) / \mathrm{Ker}(\mathcal{H}_q(j)) \underset{1^{\text{ο}}\ \text{ΘΙΜ [ΣΟΑ, 1.4.8, σελ. 19]}}{\cong} \mathrm{Im}(\mathcal{H}_q(j)) \overset{(ii)}{=} \mathcal{H}_q(X,A;R)$$

Κι επειδή $\mathrm{Im}(\mathcal{H}_q(i)) \underset{(i)}{\cong} \mathcal{H}_q(A;R)$, το (iv) είναι ωσαύτως αληθές. □

2.2.5. Πόρισμα. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $x_0 \in X$. Τότε
$$\mathcal{H}_q(X;R) \cong \begin{cases} R \oplus \mathcal{H}_0(X,\{x_0\};R), & \text{όταν } q=0, \\ \mathcal{H}_q(X,\{x_0\};R), & \text{όταν } q \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}. \end{cases}$$

Απόδειξη: Άμεση από την πρόταση 2.2.4 (iv) (για $A=\{x_0\}$) και το πόρισμα 2.2.3. (Εδώ $r(x):=x_0$, $\forall x \in X$.) □

2.2.6. Πόρισμα. Έστω (X,A) ένα τοπολογικό ζεύγος. Εάν ο A είναι μια παραμορφωτική σύμπτυξη του X (βλ. ορσ. 1.17.20, σελ. 77), τότε $\mathcal{H}_q(X,A;R) \cong \{0\}$, $\forall q \in \mathbb{Z}$. (Π.χ. $\mathcal{H}_q(X,X;R) \cong \{0\}, \forall q \in \mathbb{Z}$.)

Απόδειξη: Άμεση από την πρόταση 2.2.4 (iv) και τη σημείωση 1.17.21, σελ. 77, καθότι $X \simeq A \xrightarrow[2.2.1]{} \mathcal{H}_q(X;R) \cong \mathcal{H}_q(A;R)$ $(\forall q \in \mathbb{Z})$. □

2.2.7. Πρόταση. Το αξίωμα της εκτομής (A3) (σελ. 120) είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο:

(A'3): Εάν οι A, B είναι δυο υπόχωροι ενός τοπολογικού χώρου X, τέτοιοι ώστε να ισχύει $X = A^\circ \cup B^\circ$, τότε η ένθεση τοπολογικών ζευγών $j:(A, A\cap B) \hookrightarrow (A\cup B, B) = (X,B)$ επάγει ισομορφισμούς R-μοδίων $\mathcal{H}_q(j): \mathcal{H}_q(A, A\cap B;R) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_q(X,B;R)$, $\forall q \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη: (A3) $\Rightarrow$ (A'3): Εάν $X = A^\circ \cup B^\circ$, θέτουμε $U' := X \setminus A$ και $A' := B$. Προφανώς, $\overline{U'} = X \setminus A^\circ \subseteq B^\circ = A'^\circ$ και $(X\setminus U', A'\setminus U') \overset{1.2.8\,(i)}{=} (A, A\cap B)$, οπότε το (A'3) είναι αληθές.

(A'3) $\Rightarrow$ (A3): Έστω $U \subseteq A \subseteq X$ με $\overline{U} \subseteq A^\circ$. Θέτοντας $A' := X\setminus U$ και $B' := A$ έχουμε $A'^\circ \cup B'^\circ = (X\setminus\overline{U}) \cup A^\circ = X$ και επειδή $(X\setminus U, A\setminus U) = (A', A'\cap B')$ η ένθεση $i:(X\setminus U, A\setminus U) \hookrightarrow (X,A)$ επάγει ισομορφισμούς R-μοδίων
$$\mathcal{H}_q(i): \mathcal{H}_q(X\setminus U, A\setminus U;R) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_q(X,A;R)$$
για κάθε $q \in \mathbb{Z}$. □

§ 2.3 Ανηγμένοι μόδιοι ομολογίας

Οι μόδιοι ομολογίας $\mathcal{H}_q(\{pt\};R)$ ενός μονοσημειακού χώρου είναι απαραίτητα δεδομένα μιας θεωρίας ομολογίας $\mathcal{H}_\bullet$ αλλά δεν εμπεριέχουν καμιά γεωμετρική πληροφορία για τους χώρους στους οποίους (ενδέχεται να) ανήκουν. Ως εκ τούτου, για την απλούστευση ορισμένων τύπων είθισται να ορίζονται οι "ανηγμένοι" μόδιοι ομολογίας.

2.3.1. Ορισμός. Έστω $X \neq \emptyset$ ένας τοπολογικός χώρος. Τότε υπάρχει ακριβώς μια συνεχής απεικόνιση $\mu := \mu_X : X \to \{pt\}$. Θέτουμε

$$\widetilde{\mathcal{H}}_q(X;R) := \mathrm{Ker}\left(\mathcal{H}_q(\mu) : \mathcal{H}_q(X;R) \to \mathcal{H}_q(\{pt\};R)\right)$$

και για $\emptyset \neq A \subseteq X$: $\widetilde{\mathcal{H}}_q(X,A;R) := \mathcal{H}_q(X,A;R)$, $\forall q \in \mathbb{Z}$.
Αυτοί οι R-μόδιοι καλούνται <u>ανηγμένοι μόδιοι ομολογίας</u> του X (και αντιστοίχως, του ζεύγους (X,A)).

2.3.2. Σημείωση: (i) Εάν $\nu := \nu_X : \{pt\} \hookrightarrow X$ είναι η συνήθης ένθεση, τότε $\mu \circ \nu = \mathrm{Id}_{\{pt\}}$, οπότε $\mathcal{H}_0(\mu) \circ \mathcal{H}_0(\nu) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_0(\{pt\};R)}$

$\Longrightarrow \begin{cases} \mathcal{H}_0(\mu) \text{ επιμορφισμός} \\ \mathcal{H}_0(\nu) \text{ μονομορφισμός} \end{cases}$ απ' όπου προκύπτει η βραχεία ακριβής ακολουθία:

$$0 \to \mathcal{H}_0(\{pt\};R) \xrightarrow{\mathcal{H}_0(\nu)} \mathcal{H}_0(X;R) \xrightarrow{\mathcal{H}_0(\mu)} \mathcal{H}_0(\{pt\};R) \to 0$$

και -ως εκ τούτου- ο ισομορφισμός R-μοδίων:

$$\mathcal{H}_0(X;R) \cong \underbrace{\mathrm{Im}(\mathcal{H}_0(\nu))}_{\cong R,\ \text{μονο}} \oplus \underbrace{\mathrm{Ker}(\mathcal{H}_0(\mu))}_{= \widetilde{\mathcal{H}}_0(X;R)}.$$

(ii) Λόγω του αξιώματος (A4), $\widetilde{\mathcal{H}}_q(X;R) = \mathcal{H}_q(X;R)$, $\forall q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(iii) Από το 1ο ΘΙΜ: $\mathcal{H}_q(X;R) / \widetilde{\mathcal{H}}_q(X;R) \cong \mathcal{H}_q(\{pt\};R)$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{H}_q(X;R) \cong \widetilde{\mathcal{H}}_q(X;R) \oplus \mathcal{H}_q(\{pt\};R), \ \forall q \in \mathbb{Z}.$$

(Για $q=0$, ο $\mathcal{H}_0(\{pt\};R) \cong R$ είναι ελεύθερος R-μόδιος, πρβλ. [ΣΟΑ, Πρόταση 1.6.34, σελ. 57]. Εναλλακτικώς, βλ. (i), (ii).)

2.3.3. Πρόταση. Εάν το (X,A) είναι ένα τοπολογικό ζεύγος με $X\neq\emptyset$ και $A\neq\emptyset$, τότε υφίσταται μια μακρά ακριβής ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow \tilde{\mathcal{H}}_q(A;R) \xrightarrow{\tilde{\mathcal{H}}_q(i)} \tilde{\mathcal{H}}_q(X;R) \xrightarrow{\tilde{\mathcal{H}}_q(j)} \mathcal{H}_q(X,A;R) \xrightarrow{\partial_q(X,A)} \tilde{\mathcal{H}}_{q-1}(A;R) \longrightarrow \cdots$$

(η λεγομένη ανηγμένη μακρά ακριβής ακολουθία ομολογίας), όπου $i: A\hookrightarrow X$, $j: X\hookrightarrow (X,A)$ οι συνήθεις ενθέσεις και

$$\tilde{\mathcal{H}}_q(i) := \begin{cases} \mathcal{H}_0(i)|_{\tilde{\mathcal{H}}_0(A;R)}, & \text{όταν } q=0, \\ \mathcal{H}_q(i), & \text{όταν } q\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}, \end{cases} \qquad \tilde{\mathcal{H}}_q(j) := \begin{cases} \mathcal{H}_0(j)|_{\tilde{\mathcal{H}}_0(X;R)}, & \text{όταν } q=0, \\ \mathcal{H}_q(j), & \text{όταν } q\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}. \end{cases}$$

Απόδειξη: Η ανωτέρω μακρά ακολουθία διαφέρει τής "συνήθους" (τού αξιώματος (A1)) μόνον για $q=0$:

$$\begin{tikzcd}
 & & \tilde{\mathcal{H}}_0(A;R) \arrow[r, "\tilde{\mathcal{H}}_0(i)"] \arrow[d, "\text{ένθεση}"] & \tilde{\mathcal{H}}_0(X;R) \arrow[d, "\text{ένθεση}"'] \arrow[dr, "\tilde{\mathcal{H}}_0(j)"] & & & \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{H}_1(X,A;R) \arrow[r, "\partial_1(X,A)"'] \arrow[ur, "\partial_1(X,A)"] & \mathcal{H}_0(A;R) \arrow[r, "\mathcal{H}_0(i)"'] \arrow[d] & \mathcal{H}_0(X;R) \arrow[r, "\mathcal{H}_0(j)"'] \arrow[d] & \mathcal{H}_0(X,A;R) \arrow[r, "\partial_0(X,A)"] & \mathcal{H}_{-1}(A;R) \arrow[r] & \cdots \\
 & \mathcal{H}_1(\{pt\},\{pt\};R) \arrow[r] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & \mathcal{H}_0(\{pt\};R) \arrow[r] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & \mathcal{H}_0(\{pt\};R) \arrow[r] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & \mathcal{H}_0(\{pt\},\{pt\};R) \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & & \\
 & \{0\} & R & R & \{0\} & &
\end{tikzcd}$$

Επειδή η $\tilde{\mathcal{H}}_0(i)$ στέλνει τον R-μόδιο $\tilde{\mathcal{H}}_0(A;R)$ να απεικονισθεί στον R-μόδιο $\tilde{\mathcal{H}}_0(X;R)$ και την εικόνα $\mathrm{Im}(\mathcal{H}_0(\nu_A))$ να απεικονισθεί (ισομορφικώς) επί τής εικόνας $\mathrm{Im}(\mathcal{H}_0(\nu_X))$ έχουμε
$\mathrm{Ker}(\tilde{\mathcal{H}}_0(i)) = \mathrm{Ker}(\mathcal{H}_0(i))$ και $\mathrm{Im}(\tilde{\mathcal{H}}_0(i)) = \mathrm{Im}(\mathcal{H}_0(i))\cap\tilde{\mathcal{H}}_0(X;R)$.
Επιπροσθέτως, $\mathrm{Ker}(\tilde{\mathcal{H}}_0(j)) = \mathrm{Ker}(\mathcal{H}_0(j))\cap\tilde{\mathcal{H}}_0(X)$ (εξ ορισμού).
Άρα

$$\mathrm{Im}(\partial_1(X,A)) \overset{\text{ακρίβεια αρχικής}}{=} \mathrm{Ker}(\mathcal{H}_0(i)) = \mathrm{Ker}(\tilde{\mathcal{H}}_0(i))$$

$$\mathrm{Im}(\tilde{\mathcal{H}}_0(i)) = \mathrm{Im}(\mathcal{H}_0(i))\cap\tilde{\mathcal{H}}_0(X;R) \underset{\text{ακρίβεια αρχικής}}{=} \underbrace{\mathrm{Ker}(\mathcal{H}_0(j))\cap\tilde{\mathcal{H}}_0(X)}_{\mathrm{Ker}(\tilde{\mathcal{H}}_0(j))},$$

οπότε και η ανωτέρω ακολουθία είναι ακριβής. $\square$

2.3.4. Σημείωση. (i) Εάν $X \simeq Y$, τότε $\tilde{H}_q(X;R) \cong \tilde{H}_q(Y;R)$, $\forall q \in \mathbb{Z}$.

(ii) Εάν ένας τοπολογικός χώρος X είναι συσταλτός, τότε

$$\tilde{H}_q(X;R) \cong \{0\}, \ \forall q \in \mathbb{Z}.$$

2.3.5. Πόρισμα Έστω (X, A) ένα τοπολογικό ζεύγος με $A \neq \emptyset$.

(i) Εάν ο X είναι συσταλτός, τότε

$$H_q(X, A; R) \cong \tilde{H}_{q-1}(A;R), \ \forall q \in \mathbb{Z}.$$

(ii) Εάν ο A είναι συσταλτός, τότε

$$\tilde{H}_q(X;R) \cong H_q(X, A; R), \ \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Απόδειξη: Άμεση απόρροια των 2.3.3 και 2.3.4 (ii). □

§ 2.4 Υπολογισμός των μοδίων ομολογίας των σφαιρών

Οι μόδιοι ομολογίας $H_q(\mathbb{S}^n;R)$ της n-διάστατης σφαίρας υπολογίζονται αρκετά εύκολα κάνοντας χρήση των παρατεθέντων αξιωμάτων. Ας συμβολίσουμε ως $\mathbb{S}^n_+$ (και αντιστοίχως, ως $\mathbb{S}^n_-$) το βόρειο (και αντιστοίχως, το νότιο) ημισφαίριο της $\mathbb{S}^n$ και ως $P_- = (0,\dots,0,-1)$ τον νότιο πόλο της $\mathbb{S}^n$ (βλ. σελ. 9-10).

2.4.1. Λήμμα $H_q(\mathbb{S}^n_+, \mathbb{S}^{n-1}; R) \cong H_q(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n_-; R)$, $\forall q \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη: Η ένθεση τοπολογικών ζευγών $i : (\mathbb{S}^n_+, \mathbb{S}^{n-1}) \hookrightarrow (\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n_-)$ γράφεται ως σύνθεση $i = j \circ j'$ των ενθέσεων

$$j : (\mathbb{S}^n \setminus \{P_-\}, \mathbb{S}^n_- \setminus \{P_-\}) \hookrightarrow (\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n_-) \quad \text{και}$$

$$j' : (\mathbb{S}^n_+, \mathbb{S}^{n-1}) \hookrightarrow (\mathbb{S}^n \setminus \{P_-\}, \mathbb{S}^n_- \setminus \{P_-\}).$$

Επειδή $\overline{\{P_-\}} \underset{1.6.3}{\overset{1.2.2(v)}{=}} \{P_-\} \subset \mathring{\mathbb{S}}^n_-$ (= νότιο ημισφαίριο χωρίς τον ισημερινό), το αξίωμα (A3) της εκτομής μας πληροφορεί ότι $\forall q \in \mathbb{Z}$:

$$H_q(j) : H_q(\mathbb{S}^n \setminus \{P_-\}, \mathbb{S}^n_- \setminus \{P_-\}; R) \xrightarrow{\cong} H_q(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n_-; R) \quad (1)$$

Επίσης, ορίζοντας τη συνεχή απεικόνιση τοπολογικών ζευγών

$$g : (\mathbb{S}^n \setminus \{P_-\}, \mathbb{S}^n_- \setminus \{P_-\}) \longrightarrow (\mathbb{S}^n_+, \mathbb{S}^{n-1})$$

μέσω του τύπου $g(x_1,\dots,x_{n+1}) := \begin{cases} (x_1,\dots,x_{n+1}), & \text{όταν } x_{n+1} \geqslant 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1-x_{n+1}^2}}(x_1,\dots,x_n,0), & \text{όταν } x_{n+1} \leqslant 0 \end{cases}$

διαπιστώνουμε ότι

$$g \circ j' = \mathrm{Id}_{(\mathbb{S}^n_+, \mathbb{S}^{n-1})} \quad \text{και} \quad j' \circ g \underset{F}{\simeq} \mathrm{Id}_{(\mathbb{S}^n \setminus \{P_-\}, \mathbb{S}^n_- \setminus \{P_-\})}$$

μέσω της $F(x,t) := \dfrac{(1-t)x + t\,g(x)}{\|(1-t)x + t\,g(x)\|}$, $\forall (x,t) \in \mathbb{S}^n \times I$.

Επομένως, $(\mathbb{S}^n_+, \mathbb{S}^{n-1}) \simeq (\mathbb{S}^n \setminus \{P_-\}, \mathbb{S}^n_- \setminus \{P_-\})$, και βάσει της προτάσεως 2.2.1, σελ. 122, $\forall q \in \mathbb{Z}$:

$$\mathcal{H}_q(j'): \mathcal{H}_q(\mathbb{S}^n_+, \mathbb{S}^{n-1}; R) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_q(\mathbb{S}^n \setminus \{P_-\}, \mathbb{S}^n_- \setminus \{P_-\}; R) \quad (2).$$

Από τις (1), (2) έπεται ότι και η σύνθεση $\mathcal{H}_q(i) = \mathcal{H}_q(j) \circ \mathcal{H}_q(j')$ είναι ισομορφισμός R-μοδίων, $\forall q \in \mathbb{Z}$. □

2.4.2. Λήμμα. $\widetilde{\mathcal{H}}_q(\mathbb{D}^n; R) \cong \widetilde{\mathcal{H}}_q(\mathbb{S}^n_\pm; R) \cong \{0\}$, $\forall q \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη: Ο πρώτος ισομορφισμός είναι αληθής, διότι $\mathbb{D}^n \approx \mathbb{S}^n_\pm$ (βλ. 1.5.3 (iv), σελ. 9 και σημείωση 2.3.4 (i), σελ. 127). Επειδή η μπάλα $\mathbb{D}^n$ είναι συσταλτή (βλ. 1.17.5 (v), σελ. 71), έχουμε

$$\widetilde{\mathcal{H}}_q(\mathbb{D}^n; R) \cong \{0\}, \ \forall q \in \mathbb{Z} \quad (\text{βλ. } 2.3.4 (ii)). \ \square$$

2.4.3. Θεώρημα. Για κάθε $q \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

(I_n) $$\widetilde{\mathcal{H}}_q(\mathbb{S}^n; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } q = n, \\ \{0\}, & \text{όταν } q \in \mathbb{Z} \setminus \{n\}. \end{cases}$$

(II_n) $$\mathcal{H}_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } q = n, \\ \{0\}, & \text{όταν } q \in \mathbb{Z} \setminus \{n\}. \end{cases}$$

(III_n) $$\mathcal{H}_q(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n_-; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } q = n, \\ \{0\}, & \text{όταν } q \in \mathbb{Z} \setminus \{n\}. \end{cases}$$

Απόδειξη: Οι ισομορφισμοί (I_n), (II_n) και (III_n) θα αποδειχθούν "υπαναλειπτικώς" (δηλαδή μέσω διαδοχικού προσδιορισμού των εν λόγω μοδίων μέχρις ισομορφισμού).

• Βήμα 1ο: Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε ότι ισχύει η (III_0): Από το λήμμα 2.4.1 έχουμε

$$H_q(S^0, S^0_-; R) = H_q(\{\pm 1\}, \{-1\}; R) \cong H_q(\{1\}, \phi; R) \cong H_q(\{pt\}; R),$$

οπότε αρκεί η εφαρμογή του αξιώματος (A4) της διαστάσεως.

• Βήμα 2ο: $(I_n) \Longleftrightarrow (III_n)$. Τούτη η ισοδυναμία έπεται από την ανηγμένη μακρά ακριβή ακολουθία ομολογίας 2.3.3 για το τοπολογικό ζεύγος (S^n, S^n_-):

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \tilde{H}_q(S^n_-; R) \arrow[r] \arrow[d, equal, "\wr", "2.4.2"'] & \tilde{H}_q(S^n; R) \arrow[r, "\cong"] & H_q(S^n, S^n_-; R) \arrow[r] & \tilde{H}_{q-1}(S^n_-; R) \arrow[r] \arrow[d, equal, "\wr", "2.4.2"'] & \cdots \\
& \{0\} & & & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

• Βήμα 3ο: $(II_n) \Longleftrightarrow (III_n)$. Επειδή καθένα ημισφαίριο $S^n_\pm$ είναι ομοιομορφικό με τη μοναδιαία μπάλα D^n (μέσω της ορθογώνιας προβολής, βλ. σελ. 10) έχουμε

$$H_q(D^n, S^{n-1}; R) \cong H_q(S^n_+, S^{n-1}; R) \cong H_q(S^n, S^n_-; R), \ \forall q \in \mathbb{Z}.$$

• Βήμα 4ο: $(I_{n-1}) \Longleftrightarrow (II_n)$. Τούτο έπεται από ανηγμένη μακρά ακριβή ακολουθία ομολογίας 2.3.3 για το τοπολογικό ζεύγος (D^n, S^{n-1}):

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \tilde{H}_q(D^n; R) \arrow[r] \arrow[d, equal, "\wr", "2.4.2"'] & H_q(D^n, S^{n-1}; R) \arrow[r, "\cong"] & \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}; R) \arrow[r] & \tilde{H}_{q-1}(D^n; R) \arrow[r] \arrow[d, equal, "\wr", "2.4.2"'] & \cdots \\
& \{0\} & & & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

• Βήμα 5ο: Από τα προηγούμενα βήματα διαπιστώνουμε ότι οι αποδειχθείσες αμφίπλευρες συνεπαγωγές (μαζί με την (III_0)) αρκούν για την ολοκλήρωση της αποδείξεως επί τη βάσει του παράπλευρου διαγράμματος λογικών ισοδυναμιών. □

$$\begin{tikzcd}
(I_0) \arrow[d, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & (I_1) \arrow[d, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & (I_2) \arrow[d, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & \cdots \\
(II_0) \arrow[d, Leftrightarrow] & (II_1) \arrow[d, Leftrightarrow] & (II_2) \arrow[d, Leftrightarrow] & \cdots \\
(III_0) & (III_1) & (III_2) & \cdots
\end{tikzcd}$$

2.4.4 Πόρισμα Οι μόδιοι ομολογίας της σφαίρας $\mathbb{S}^n$, $n \geq 0$, είναι οι εξής:

$$\boxed{\mathcal{H}_q(\mathbb{S}^n;R) \cong \begin{cases} \{0\}, & \text{όταν } q \in \mathbb{Z}\setminus\{0,n\}, \\ R, & \text{όταν } q \in \{0,n\} \text{ και } n>0, \\ R \oplus R, & \text{όταν } q=n=0. \end{cases}}$$

Απόδειξη: Έπεται άμεσα από το θεώρημα 2.4.3 (I_n), τη σημείωση 2.3.2 (iii), σελ. 125, και το αξίωμα της διαστάσεως (A4). □

2.4.5 Πόρισμα (i) Για κάθε $n \geq 1$ έχουμε

$$\boxed{\tilde{\mathcal{H}}_q(\mathbb{R}^n\setminus\{0\};R) \cong \tilde{\mathcal{H}}_q(\mathbb{D}^n\setminus\{0\};R) \cong \begin{cases} \{0\}, & \text{όταν } q \in \mathbb{Z}\setminus\{n-1\}, \\ R, & \text{όταν } q=n-1. \end{cases}}$$

(ii) Για κάθε $n \geq 0$ έχουμε

$$\boxed{\mathcal{H}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus\{0\};R) \cong \mathcal{H}_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{D}^n\setminus\{0\};R) \cong \begin{cases} \{0\}, & \text{όταν } q \in \mathbb{Z}\setminus\{n\}, \\ R, & \text{όταν } q=n. \end{cases}}$$

Απόδειξη: (i) Επειδή η $\mathbb{S}^{n-1}$ είναι ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη τόσον του $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ όσον και του $\mathbb{D}^n\setminus\{0\}$ (βλ. 1.7.22 (i), σελ. 77) τούτοι οι ισομορφισμοί έπονται από τις σημειώσεις 1.7.21, σελ. 77, 2.3.4 (i), σελ. 127, και το θεώρημα 2.4.3 (I_n).

(ii) Κατ' αρχάς $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus\{0\}) \simeq (\mathbb{D}^n, \mathbb{D}^n\setminus\{0\})$. Πράγματι· εάν $i : (\mathbb{D}^n, \mathbb{D}^n\setminus\{0\}) \hookrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ είναι η συνήθης ένθεση και $r : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus\{0\}) \to (\mathbb{D}^n, \mathbb{D}^n\setminus\{0\})$ η απεικόνιση η οριζόμενη μέσω του τύπου

$$r(x) := \begin{cases} x, & \text{όταν } \|x\| \leq 1, \\ \dfrac{x}{\|x\|}, & \text{όταν } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

τότε η r είναι συνεχής, $r \circ i = \mathrm{Id}_{(\mathbb{D}^n, \mathbb{D}^n\setminus\{0\})}$ και $i \circ r \underset{H}{\simeq} \mathrm{Id}_{(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus\{0\})}$ μέσω της ομοτοπίας $H : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times I \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

$$(x,t) \longmapsto H(x,t) := (1-t)(i\circ r)(x) + tx.$$

Ως εκ τούτου, οι πρώτοι ισομορφισμοί είναι αληθείς επί τη βάσει της προτάσεως 2.2.1, σελ. 122. Εν συνεχεία, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η $\mathbb{S}^{n-1}$ είναι ισχυρή παραμορφωτική σύμπτωξη του $\mathbb{D}^n \setminus \{0\}$, θεωρούμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{H}_q(\mathbb{S}^{n-1};R) & \to & \mathcal{H}_q(\mathbb{D}^n;R) & \to & \mathcal{H}_q(\mathbb{D}^n,\mathbb{S}^{n-1};R) & \to & \mathcal{H}_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1};R) & \to & \mathcal{H}_{q-1}(\mathbb{D}^n;R) \\
\cong\downarrow & \circlearrowleft & \mathrm{Id}\downarrow\cong & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow\cong & \circlearrowleft & \mathrm{Id}\downarrow\cong \\
\mathcal{H}_q(\mathbb{D}^n\setminus\{0\};R) & \to & \mathcal{H}_q(\mathbb{D}^n;R) & \to & \mathcal{H}_q(\mathbb{D}^n,\mathbb{D}^n\setminus\{0\};R) & \to & \mathcal{H}_{q-1}(\mathbb{D}^n\setminus\{0\};R) & \to & \mathcal{H}_{q-1}(\mathbb{D}^n;R)
\end{array}$$

Και παρατηρούμε ότι οι δύο αριστεροί και οι δύο δεξιοί ομομορφισμοί R-μοδίων (οι υποδηλούμενοι μέσω των κατακορύφων βελών) είναι ισομορφισμοί. Αρκεί λοιπόν η εφαρμογή του "λήμματος των πέντε" (βλ. [ΣΟΑ, 2.2.2(iii), σελ. 81) και του Θεωρήματος 2.4.3 (II_n). □

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το "Θεώρημα του αναλλοιώτου της διαστάσεως των σφαιρών μέσω ομοτοπικής ισοδυναμίας", το οποίο γενικεύει το πόρισμα 1.5.5 (ii), σελ. 11.

2.4.6. <u>Θεώρημα</u>. Εάν $m, n \in \mathbb{N}_0$ και $m \neq n$, τότε $\mathbb{S}^m \not\simeq \mathbb{S}^n$

<u>Απόδειξη</u>: Εάν $m, n \in \mathbb{N}$ και $\mathbb{S}^m \simeq \mathbb{S}^n$, τότε $\mathcal{H}_q(\mathbb{S}^m;R) \cong \mathcal{H}_q(\mathbb{S}^n;R)$ (βλ. 2.2.2, σελ. 122), οπότε κατ' ανάγκην $m = n$ (λόγω του πορίσματος 2.4.4, σελ. 130). □

2.4.7. <u>Λήμμα</u>. Ας υποθέσουμε ότι ο X είναι ένας τοπολογικός χώρος και ότι $x_0 \in X$ με το μονοσύνολο $\{x_0\}$ κλειστό εντός του X. Τότε για κάθε περιοχή V του x_0 η συνήθης ένθεση $i : (V, V\setminus\{x_0\}) \hookrightarrow (X, X\setminus\{x_0\})$ επάγει ισομορφισμούς

$$\mathcal{H}_q(i) : \mathcal{H}_q(V, V\setminus\{x_0\};R) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_q(X, X\setminus\{x_0\};R), \forall q \in \mathbb{Z}.$$

132 (Ο $H_q(X, X\setminus\{x_0\}; R)$ ονομάζεται <u>τοπικός μόδιος ομολογίας τού X στο x_0</u>.)

<u>Απόδειξη</u>: Επειδή το V είναι περιοχή τού x_0 έχουμε $x_0 \in V^\circ$

και $$\overline{X\setminus V} \underset{1.2.8(i)}{=} X\setminus V^\circ \subseteq \underbrace{X\setminus\{x_0\}}_{\text{ανοικτό}} \underset{1.2.8(ii)}{=} (X\setminus\{x_0\})^\circ$$

Αρκεί λοιπόν η εφαρμογή τού αξιώματος (A3) τής εκτομής (σελ. 120). □

<u>2.4.8. Παραδείγματα</u> (i) Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\mathcal{H}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus\{x_0\}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } q=n \\ \{0\}, & \text{όταν } q\in\mathbb{Z}\setminus\{n\}. \end{cases}$$

Για $x_0 = 0$ τούτο είναι αληθές επί τη βάσει τού πορίσματος 2.4.5(ii). Για $x_0 \neq 0$ ο ισχυρισμός επαληθεύεται κάνοντας χρήση τού ομοιομορφισμού τοπολογικών ζευγών $f: (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus\{x\}) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ και τής προτάσεως 2.2.1, σελ. 122.

(ii) Εάν το U είναι ένα ανοικτό υποσύνολο τού $\mathbb{R}^n$ και $x_0 \in U$, τότε σύμφωνα με το λήμμα 2.4.7 έχουμε

$$\mathcal{H}_q(U, U\setminus\{x_0\}; R) \cong \mathcal{H}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus\{x_0\}; R),\ \forall q\in\mathbb{Z}.$$

(iii) Έστω $\mathbb{R}^{n-1}\times[0,\infty) = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ ο άνω ημίχωρος. Εάν $x = (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n-1}\times[0,\infty)$, τότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Εάν $x_n > 0$, δηλ. εάν το x ανήκει στο εσωτερικό τού $\mathbb{R}^{n-1}\times[0,\infty)$, τότε $\exists\, \varepsilon > 0$ με $S(x,\varepsilon) := \{y\in\mathbb{R}^n \mid \|y-x\| < \varepsilon\} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}\times[0,\infty)$

και $$\mathcal{H}_q(\mathbb{R}^{n-1}\times[0,\infty), (\mathbb{R}^{n-1}\times[0,\infty))\setminus\{x\}; R) \cong \mathcal{H}_q(S(x,\varepsilon), S(x,\varepsilon)\setminus\{x\}; R)$$
$$\cong \mathcal{H}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus\{x\}; R),\ \forall q\in\mathbb{Z},$$ κάτι υπολογίσιμο μέσω τού (i).

- Εάν $x_n = 0$, δηλ. εάν το x ανήκει στο σύνορο τού $\mathbb{R}^{n-1}\times[0,\infty)$, τότε $(\mathbb{R}^{n-1}\times[0,\infty), (\mathbb{R}^{n-1}\times[0,\infty))\setminus\{x\}) \underset{H}{\simeq} (\{p\},\{p\})$, για κάθε $p = (p_1,\dots,p_n)\in\mathbb{R}^{n-1}\times[0,\infty)$ με $p_n > 0$, μέσω τής ομοτοπίας

$$H(\xi, t) := (1-t)\xi + tp,$$ οπότε (βλ. πρ. 2.2.1)

$$\mathcal{H}_q(\mathbb{R}^{n-1}\times[0,\infty), (\mathbb{R}^{n-1}\times[0,\infty))\setminus\{x\}; R) \cong \mathcal{H}_q(\{p\},\{p\}; R) = \{0\}$$

για κάθε $q\in\mathbb{Z}$. Κατά συνέπειαν, οι n-οστοί τοπικοί μόδιοι ομολογίας τού $\mathbb{R}^{n-1}\times[0,\infty)$ σε εσωτερικά σημεία τού $\mathbb{R}^{n-1}\times[0,\infty)$ είναι <u>μη</u> ισόμορφοι των n-οστών τοπικών μοδίων ομολογίας του στα συνοριακά του σημεία.

2.4.9 (=1.5.4) Θεώρημα αναλλοιώτου των περιοχών. Όταν $m \neq n$, τότε δεν υπάρχει κανείς ανοικτός υπόχωρος τού $\mathbb{R}^m$ που να είναι ομοιομορφικός ενός ανοικτού υποχώρου τού $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}^m$, ένα ανοικτό υποσύνολο V τού $\mathbb{R}^n$ και ένας ομοιομορφισμός $f: U \xrightarrow{\cong} V$. Εάν επιλέξουμε ένα σημείο $x \in U$, τότε η $f: (U, U \setminus \{x\}) \to (V, V \setminus \{f(x)\})$ αποτελεί ομοιομορφισμό τοπολογικών ζευγών επάγοντας (κατά την πρόταση 2.2.1, σελ. 122) ισομορφισμούς R-μοδίων:

$$\mathcal{H}_q(f): \mathcal{H}_q(U, U\setminus\{x\}; R) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_q(V, V\setminus\{f(x)\}; R), \ \forall q \in \mathbb{Z}. \ (*)$$

Επειδή

$$\left.\begin{cases} \mathcal{H}_q(U, U\setminus\{x\}; R) \cong \mathcal{H}_q(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m\setminus\{x\}; R) \\ \mathcal{H}_q(V, V\setminus\{f(x)\}; R) \cong \mathcal{H}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus\{f(x)\}; R) \end{cases}\right\} \ \forall q \in \mathbb{Z} \ (\text{βλ. } 2.4.8\,(\text{ii})),$$

οι ισομορφισμοί $(*)$ (σύμφωνα με το 2.4.8 (ii)) μπορούν να υφίστανται μόνον όταν $m = n$. □

2.4.10 Θεώρημα τού αναλλοιώτου τού συνόρου. Έστω ότι τα x, x' είναι δυο σημεία τού άνω ημίχωρου $\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty) \subset \mathbb{R}^n$. Εάν το U είναι μια περιοχή τού x και το V μια περιοχή τού x', τέτοιες ώστε να ισχύει $(U, \{x\}) \approx (V, \{x'\})$, τότε είτε αμφότερα τα x, x' ανήκουν στο σύνορο $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ τού $\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty)$ είτε αμφότερα τα x, x' ανήκουν στο εσωτερικό $\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty)$ τού $\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty)$.

Απόδειξη: Εάν η $h: (U, \{x\}) \to (V, \{x'\})$ είναι ένας ομοιομορφισμός εστιγμένων χώρων, τότε μπορεί να εκληφθεί και ως ένας ομοιομορφισμός $h: (U, U\setminus\{x\}) \to (V, V\setminus\{x'\})$ τοπολογικών ζευγών, ο οποίος, βεβαίως επάγει έναν ισομορφισμό μεταξύ των n-οστών μοδίων ομολογίας:

$$\mathcal{H}_n(f): \mathcal{H}_n(U, U\setminus\{x\}; R) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_n(V, V\setminus\{x'\}; R).$$

Σύμφωνα με όσα προαναφέρθησαν στο 2.4.8 (iii) τούτο σημαίνει ότι είτε αμφότερα τα x, x' ανήκουν στο σύνορο είτε αμφότερα τα x, x' ανήκουν στο εσωτερικό τού άνω ημίχωρου $\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty) \subset \mathbb{R}^n$. □

2.4.11. Θεώρημα τού αναλλοιώτου τής διαστάσεως τοπολογικών πολυπτυγμάτων μέσω ομοιομορφισμών. Έστω ότι το X είναι ένα m-διάστατο και το Y ένα n-διάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα (χωρίς ή με σύνορο). Τότε ισχύει η συνεπαγωγή:

$$X \approx Y \Longrightarrow m=n.$$

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποιος ομοιομορφισμός $h: X \xrightarrow{\approx} Y$. Σύμφωνα με τους ορισμούς 1.11.1 και 1.11.3 (σελ. 31-32) κάθε στοιχείο $x \in X$ διαθέτει μια περιοχή U ομοιομορφική ενός ανοικτού υποσυνόλου τού $\mathbb{R}^m$ (εάν δεν έχει σύνορο) ή τού άνω ημίχωρου $\mathbb{R}^{m-1}\times[0,\infty)$ (εάν έχει μη κενό σύνορο). Επομένως και το $h(x) \in Y$ διαθέτει μια περιοχή V ομοιομορφική ενός ανοικτού υποσυνόλου τού $\mathbb{R}^n$ (εάν δεν έχει σύνορο) ή τού άνω ημίχωρο $\mathbb{R}^{n-1}\times[0,\infty) \subset \mathbb{R}^n$ (εάν έχει μη κενό σύνορο). Ως εκ τούτου το $h(U)\cap V$ είναι ομοιομορφικό τόσον ενός ανοικτού υποσυνόλου τού $\mathbb{R}^n$ (αντ., $\mathbb{R}^{n-1}\times[0,\infty)$) όσον και ενός ανοικτού υποσυνόλου τού $\mathbb{R}^m$ (αντ., $\mathbb{R}^{m-1}\times[0,\infty)$). Αρκεί λοιπόν να εφαρμοσθεί το θεώρημα 2.4.9. (όταν τα X, Y δεν έχουν σύνορο) σε συνδυασμό με το θεώρημα 2.4.10 (όταν έχουν σύνορο). $\square$

Εν συνεχεία θα αποδείξουμε ένα περιώνυμο θεώρημα οφειλόμενο στον L.E.J. Brouwer.

2.4.12. Λήμμα Έστω $n \in \mathbb{N}_0$. Η ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^n}: \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ δεν έχει καμία συνεχή επέκταση $h: \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$.

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχει συνεχής απεικόνιση $h: \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$ με $h|_{\mathbb{S}^n} = \mathrm{Id}_{\mathbb{S}^n}$. Τότε έχουμε το εξής μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^n \arrow[rr, "\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^n}"] \arrow[dr, hook, "i = \text{ένθεση}"'] & & \mathbb{S}^n \\ & \mathbb{D}^{n+1} \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) $\underline{n=0}$. Τότε $\mathbb{S}^0=\{\pm 1\}$ και η $h:\underset{\mathbb{D}^1}{\overset{\shortparallel}{[-1,1]}}\longrightarrow\{\pm 1\}$ είναι συνεχής και κατ' ανάγκην επιρριπτική (διότι αλλιώς $h|_{\mathbb{S}^0}\neq Id_{\mathbb{S}^0}$). Επειδή το $\mathbb{D}^1$ είναι συνεκτικό (βλ. 1.9.2 (ii), σελ. 16), ενώ η $\mathbb{S}^0$ δεν είναι συνεκτική, καταλήγουμε σε άτοπο (μέσω της προτάσεως 1.9.6, σελ. 17). Κατά συνέπειαν είναι αδύνατη η ύπαρξη μιας τέτοιας h.

(ii) $\underline{n\geq 1}$. Σε αυτήν την περίπτωση προκύπτει το μεταθετικό διάγραμμα

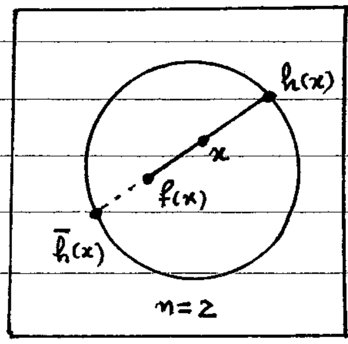
$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\cong", "2.4.4"'] & \mathcal{H}_n(\mathbb{S}^n;R) \arrow[rr, "\mathcal{H}_n(Id_{\mathbb{S}^n})"] \arrow[dr, "\mathcal{H}_n(i)"'] & & \mathcal{H}_n(\mathbb{S}^n;R) \arrow[r, "\cong", "2.4.4"'] & R \\
& & \mathcal{H}_n(\mathbb{D}^{n+1};R) \arrow[ur, "\mathcal{H}_n(h)"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[r, "\cong", "1.17.5(v)\ 2.2.3"'] & \{0\}, &
\end{tikzcd}$$

το οποίο μας οδηγεί εκ νέου σε άτοπο $\left(\mathcal{H}_n(Id_{\mathbb{S}^n})=Id_{\mathcal{H}_n(\mathbb{S}^n)}=\mathcal{H}_n(h)\circ\mathcal{H}_n(i)=0\right)$. Άρα είναι και πάλι αδύνατη η ύπαρξη μιας τέτοιας h. □

2.4.13. Θεώρημα σταθερού σημείου τού Brouwer. Έστω $n\in\mathbb{N}$. Τότε κάθε συνεχής απεικόνιση $f:\mathbb{D}^n\longrightarrow\mathbb{D}^n$ διαθέτει κάποιο σταθερό σημείο (δηλαδή $\exists x\in\mathbb{D}^n: f(x)=x$).

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι ο ισχυρισμός είναι εσφαλμένος, ήτοι ότι υπάρχει $f:\mathbb{D}^n\to\mathbb{D}^n$ συνεχής με $f(x)\neq x$, $\forall x\in\mathbb{D}^n$. Ορίζουμε την απεικόνιση $h:\mathbb{D}^n\longrightarrow\partial\mathbb{D}^n=\mathbb{S}^{n-1}$ ως εξής:

$h(x):=$ το σημείο τομής τού συνόρου $\partial\mathbb{D}^n=\mathbb{S}^{n-1}$ της μπάλας $\mathbb{D}^n$ και της ημιευθείας που διέρχεται από το $f(x)$ και x και έχει ως αρχή της το σημείο $f(x)$.



Επειδή $h|_{\mathbb{S}^{n-1}}=Id_{\mathbb{S}^{n-1}}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι η h είναι συνεχής και να εφαρμόσουμε το λήμμα 2.4.12 για να καταλήξουμε σε άτοπο. Προς τούτο θα προσδιορίσουμε επακριβώς τον τύπο ορισμού της h.

Το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση από το $f(x)$ στο x (το οποίο αντιστοιχεί στο διάνυσμα $f(x)-x$ από το $f(x)$ στο x) είναι το $g(x) := \dfrac{f(x)-x}{\|f(x)-x\|}$. Κατ' αυτόν τον τρόπο ορίζεται μια συνεχής απεικόνιση $g: \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$.

Προφανώς, οι $\left\{ \begin{array}{ll} \varphi: \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}, & x \mapsto \varphi(x) := \langle f(x), g(x) \rangle \\ \psi: \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}, & x \mapsto \psi(x) := \|f(x)\|^2 \end{array} \right\}$

είναι ωσαύτως συνεχείς απεικονίσεις. (Εδώ "$\langle\cdot,\cdot\rangle$" = σύνηθες εσωτ. γ.)

Επειδή το σημείο $h(x)$ λαμβάνεται εάν κανείς εκκινήσει από το $f(x)$ και κινηθεί παραλλήλως προς το $g(x)$ έως ότου συναντήσει τη σφαίρα $\mathbb{S}^{n-1}$, η παραμετρική εξίσωση της αντίστοιχης ημιευθείας (που ξεκινά από το $f(x)$) είναι της μορφής

$$h(x) - f(x) = t \cdot g(x), \text{ για κάποιον } t \geq 0.$$

Για τον προσδιορισμό τού t παρατηρούμε ότι

$$1 = \|h(x)\|^2 = \|f(x) + t\cdot g(x)\|^2 = \|f(x)\|^2 + t^2 \underbrace{\|g(x)\|^2}_{=1} + 2t\langle f(x), g(x)\rangle$$
$$= \psi(x) + 2t\,\varphi(x) + t^2$$
$$\Longleftrightarrow \quad t^2 + (2\varphi(x))t + (\psi(x)-1) = 0$$

Επιλύοντας ως προς t λαμβάνουμε $t = -\varphi(x) \pm \sqrt{\varphi(x)^2 + 1 - \psi(x)}$.
(Επειδή $\|f(x)\| \leq 1 \Longrightarrow 1 - \|f(x)\|^2 = 1 - \psi(x) \geq 0$, οπότε οι ρίζες είναι κατ' ανάγκην πραγματικές.)
Επιλέγουμε λοιπόν τη ρίζα με το θετικό πρόσημο και συμπεραίνουμε ότι

$$h(x) = f(x) + \left(-\varphi(x) + \sqrt{\varphi(x)^2 + 1 - \psi(x)}\right) g(x).$$

(Η ρίζα με το αρνητικό πρόσημο μάς δίνει το $\bar{h}(x)$, βλ. σχήμα.)
Η h είναι προφανώς συνεχής! □

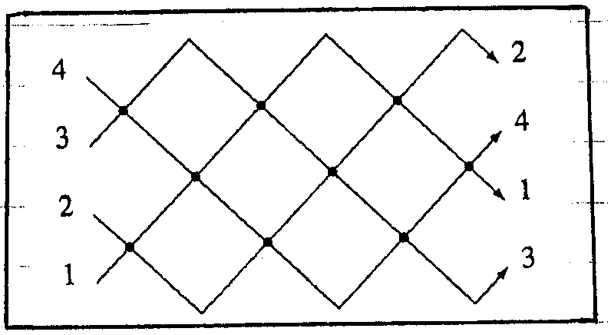
> **2.4.14 Πόρισμα:** Εάν η $f: \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι συνεχής απεικόνιση, τότε είτε $f(0) = 0$ είτε $\exists x \in \mathbb{D}^n$: $f(x) = \lambda x$ για κάποιο $\lambda > 1$.

Απόδειξη: Έστω $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{D}^n$, $g(y) := \dfrac{y}{1+\|y\|}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Τότε η $g \circ f: \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ είναι συνεχής. Κατά το Θεώρημα 2.4.13 $\exists x \in \mathbb{D}^n$: $g(f(x)) = x \Longrightarrow f(x) = (1 + \|f(x)\|)x$, απ' όπου έπεται το ζητούμενο. □

§ 2.5 Μακρά ακριβής ακολουθία τοπολογικών τριάδων

Ξεκινούμε την παρούσα ενότητα υπενθυμίζοντας ένα χρήσιμο λήμμα από τη θεωρία των "αλληλοεμπλεκομένων ακολουθιών" (interlocking sequences), γνωστών και ως "διαγράμματα πλεξιδίων" (braid diagrams).

<u>2.5.1. Λήμμα τού C.T.C. Wall</u>: Έστω ένα μεταθετικό διάγραμμα τής μορφής:



(όπου οι κουκκίδες υποδηλώνουν R-μοδίους, τα μεταξύ τους ευθύγραμμα τμήματα ομομορφισμούς R-μοδίων και τα νούμερα 1, 2, 3, 4 τον τρόπο με τον οποίο καθεμιά από τις τέσσερεις μετέχουσες ακολουθίες είναι τοποθετημένη στο διάγραμμα.)
Εάν οι τρεις εκ των τεσσάρων ακολουθιών είναι ακριβείς και η τέταρτη συνιστά ένα αλυσωτό σύμπλοκο (βλ. [ΣΟΑ, ορσ. 2.3.1, σελ. 92]), τότε και η τέταρτη υποχρεούται να είναι ακριβής.

<u>Απόδειξη</u>: Το ανωτέρω λήμμα πρωτοεμφανίσθηκε στο άρθρο τού C.T.C. Wall: *On the exactness of intelocking sequences*, Enseignement Math., Vol. **12**, 1966, 95-100. Για μια τυπολατρική απόδειξή του βλ. π.χ. G.E. Bredon: *Topology and Geometry*, GTM, Vol. **139**, Springer-Verlag, 1993, Lemma 6.16, p. 189. □

<u>2.5.2. Ορισμός</u>. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Ορίζουμε ως <u>τοπολογική τριάδα</u> (αφορώσα στον X) κάθε διατεταγμένη τριάδα τής μορφής (X, A, B), όπου A, B είναι δυο τοπολογικοί υπόχωροι τού X. (Στις περισσότερες περιπτώσεις θα θεωρούμε τέτοιες τριάδες με την επιπρόσθετη ιδιότητα: $B \subseteq A$.)

2.5.3. Θεώρημα. Έστω (X, A, B) μια τοπολογική τριάδα με $B \subseteq A$. Εάν συμβολίσουμε ως $i : (A, B) \hookrightarrow (X, B)$, $j : (X, B) \hookrightarrow (X, A)$ και $k : A \hookrightarrow (A, B)$ τις συνήθεις εμθέσεις και ως $\partial_q(X; A, B)$ τη σύνθεση των ομομορφισμών R-μοδίων:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_q(X, A; R) \arrow[r, "\partial_q(X,A)"] \arrow[rr, bend right, "\partial_q(X;A,B)"'] & \mathcal{H}_{q-1}(A; R) \arrow[r, "\mathcal{H}_{q-1}(k)"] & \mathcal{H}_{q-1}(A, B; R), \end{tikzcd} \quad \forall q \in \mathbb{Z},$$

τότε η μακρά ακολουθία

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{q+1}(X;A,B)} \mathcal{H}_q(A, B; R) \xrightarrow{\mathcal{H}_q(i)} \mathcal{H}_q(X, B; R) \xrightarrow{\mathcal{H}_q(j)} \mathcal{H}_q(X, A; R) \xrightarrow{\partial_q(X;A,B)} \mathcal{H}_{q-1}(A, B; R) \xrightarrow{\mathcal{H}_{q-1}(i)} \mathcal{H}_{q-1}(X, B; R) \xrightarrow{\mathcal{H}_{q-1}(j)} \mathcal{H}_{q-1}(X, A; R) \longrightarrow \cdots$$

είναι ακριβής (και καλείται, ιδιαιτέρως, (φυσική) μακρά ακριβής ακολουθία της τοπολογικής τριάδας (X, A, B)).

Απόδειξη: Θεωρούμε το εξής μεταθετικό διάγραμμα αλληλοεμπλεκομένων ακολουθιών:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathcal{H}_{q+1}(X,A;R) \arrow[dr, "\partial_{q+1}(X,A)"'] \arrow[rr, bend left, "\partial_{q+1}(X;A,B)"] & & \mathcal{H}_q(A,B;R) \arrow[dr, "\mathcal{H}_q(i)"] \arrow[rr, bend left, "\partial_q(A,B)"] & & \mathcal{H}_{q-1}(B;R) \arrow[dr] \arrow[rr, bend left] & & \mathcal{H}_{q-1}(X;R) \arrow[dr] & \\
\cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathcal{H}_q(A;R) \arrow[ur, "\mathcal{H}_q(k)"'] \arrow[dr] & & \mathcal{H}_q(X,B;R) \arrow[ur, "\partial_q(X,B)"'] \arrow[dr, "\mathcal{H}_q(j)"'] & & \mathcal{H}_{q-1}(A;R) \arrow[ur] \arrow[dr, "\mathcal{H}_{q-1}(k)"] & & \cdots \\
 & \mathcal{H}_q(B;R) \arrow[ur] \arrow[rr, bend right] & & \mathcal{H}_q(X;R) \arrow[ur] \arrow[rr, bend right] & & \mathcal{H}_q(X,A;R) \arrow[ur, "\partial_q(X,A)"] \arrow[rr, bend right, "\partial_q(X;A,B)"'] & & \mathcal{H}_{q-1}(A,B;R) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Οι τρεις εξ αυτών είναι οι (λόγω του αξιώματος (A1) υπάρχουσες) μακρές ακριβείς ακολουθίες των ζευγών (X, A), (X, B) και (A, B), ενώ η τέταρτη είναι αυτή που δίδεται στην εκφώνηση (και έχει σημανθεί με ιδιαίτερο τρόπο). Λόγω της μεταθετικότητας του διαγράμματος έχουμε προφανώς $\forall q \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} \mathcal{H}_q(i) \circ \partial_{q+1}(X; A, B) = \mathcal{H}_q(i) \circ \mathcal{H}_q(k) \circ \partial_{q+1}(X, A) = 0 \\ \partial_q(X; A, B) \circ \mathcal{H}_q(j) = \mathcal{H}_{q-1}(k) \circ \partial_q(X, A) \circ \mathcal{H}_q(j) = 0 \end{cases}$$

Επιπροσθέτως, η σύνθεση $\mathcal{H}_q(j)\circ\mathcal{H}_q(i)$ παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_q(A,B;R) \arrow[r, "\mathcal{H}_q(i)"] \arrow[rr, bend left, "\mathcal{H}_q(j)\circ\mathcal{H}_q(i)"] \arrow[dr] & \mathcal{H}_q(X,A;R) \arrow[r, "\mathcal{H}_q(j)"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{H}_q(X,B;R), \\
& \mathcal{H}_q(A,A;R) \arrow[ur] \arrow[d, phantom, "\cong\ 2.2.6"] & \\
& \{0\} &
\end{tikzcd}$$

οπότε είναι κατ' ανάγκην ο τετριμμένος ομομορφισμός, $\forall q\in\mathbb{Z}$.

Επειδή λοιπόν η τέταρτη ακολουθία τού θεωρηθέντος μεταθετικού διαγράμματος είναι αλυσωτό σύμπλοκο, υποχρεούται να είναι και ακριβής επί τη βάσει τού λήμματος 2.5.1. □

§ 2.6 Μακρά ακριβής ακολουθία των Mayer και Vietoris

Δοθέντων δυο υποχώρων ενός τοπολογικού χώρου, είναι εύλογο το ερώτημα τού κατά πόσον κανείς μπορεί να υπολογίζει τους μοδίους ομολογίας τής ενώσεώς τους εάν θεωρήσει ως γνωστούς (ή εκ των προτέρων υπολογισθέντες) τους μοδίους ομολογίας καθενός εξ αυτών και τους μοδίους ομολογίας τής τομής τους. Το ερώτημα αυτό είχε απαντηθεί για τριγωνιζόμενους τοπολογικούς χώρους (και υποχώρους) από τους Mayer και Vietoris στα άρθρα:

- W. Mayer: *Über abstrakte Topologie*, Monatshefte Math. Phys. 36, (1929) 1-42; 219-258.
- L. Vietoris: *Über die Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe*, Monatshefte Math. Phys. 37, (1930) 159-162.

Ωστόσο, η κεντρική ιδέα τής αποδείξεως παραμένει ισχύουσα ακόμη και στο γενικότερο, πιο σύγχρονο θεωρητικό πλαίσιο των παρουσών παραδόσεων. Θα πρέπει, βεβαίως, να τονισθεί ότι η δημιουργία μιας μακράς ακριβούς ακολουθίας για την επίτευξη τού ζητούμενου υπολογισμού είναι δυνατή μόνον για υποχώρους που πληρούν κάποιες επιπρόσθετες συνθήκες.

<u>2.6.1. Ορισμός.</u> Έστω (X,A,B) μια τοπολογική τριάδα (όπως στον ορισμό 2.5.2, σελ. 137). Κατόπιν θεωρήσεως των μακρών ακριβών ακολουθιών ομολογίας για τα τοπολογικά ζεύγη (X,B) και $(A,A\cap B)$ προκύπτει το εξής μεταθετικό διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων:

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & \mathcal{H}_q(B;R) \arrow[r] & \mathcal{H}_q(X;R) \arrow[r] & \mathcal{H}_q(X,B;R) \arrow[r, "\partial_q(X,B)"] & \mathcal{H}_{q-1}(B;R) \arrow[r] & {} \\
\arrow[r] & \mathcal{H}_q(A\cap B;R) \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{H}_q(A;R) \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{H}_q(A,A\cap B;R) \arrow[r, "\partial_q(A,A\cap B)"'] \arrow[u, "\mathcal{H}_q(i_{A,B})"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{H}_{q-1}(A\cap B;R) \arrow[r] \arrow[u] & {}
\end{tikzcd}$$

(με τα κατακόρυφα βέλη υποδηλούντα ομομορφισμούς R-μοδίων επαγομένους από τις εκάστοτε συνήθεις ενθέσεις). Ονομάζουμε την τοπολογική τριάδα (X,A,B) <u>Εκτμητική</u> (<u>excisive</u>) για την θ.ο. $\mathcal{H}$, όταν οι ομομορφισμοί R-μοδίων $\mathcal{H}_q(i_{A,B}): \mathcal{H}_q(A, A\cap B; R) \longrightarrow \mathcal{H}_q(X, B; R)$ οι επαγόμενοι από τη συνήθη ένθεση $i_{A,B}: (A, A\cap B) \hookrightarrow (X,B)$ είναι ισομορφισμοί για κάθε $q\in\mathbb{Z}$.

<u>2.6.2. Σημείωση:</u> (i) Εάν οι ανωτέρω υπόχωροι είναι τέτοιοι, ώστε να ισχύει $X = A^\circ \cup B^\circ$ (όπως, π.χ. στην περίπτωση κατά την οποία οι A, B είναι ανοικτοί υπόχωροι και $X=A\cup B$), τότε από την εναλλακτική μορφή (A'3) τού αξιώματος της εκτομής (βλ. πρόταση 2.2.7, σελ. 124) έπεται ότι η τριάδα (X,A,B) είναι εκτμητική.
(ii) Ο ως άνω ορισμός δεν εξαρτάται κατ' ουσίαν από τη διάταξη των A, B στην τοπολογική τριάδα (X,A,B)! Όπως θα δούμε ευθύς παρακάτω (στην πρόταση 2.6.8) η τριάδα (X,A,B) είναι εκτμητική εάν και μόνον εάν η (X,B,A) είναι εκτμητική. (Ως εκ τούτου, η σε αρχικά βιβλία ενσωμάτωση <u>και</u> της συνθήκης: "$\mathcal{H}_q(i_{B,A})$ ισομορφισμοί, $\forall q\in\mathbb{Z}$" στον εν λόγω ορισμό είναι περιττή!)

<u>2.6.3. Θεώρημα.</u> Έστω (X,A,B) μια εκτμητική τοπολογική τριάδα (όπως στον ορσ. 2.6.1) και έστω C ένας υπόχωρος τού X με $C\subseteq A\cap B$. Εάν συμβολίσουμε ως $k_A: (A\cap B, C) \hookrightarrow (A,C)$, $k_B: (A\cap B, C) \hookrightarrow (B,C)$, $l_A: (A,C) \hookrightarrow (X,C)$, $l_B: (B,C) \hookrightarrow (X,C)$ και $m_{C,B}: (X,C) \hookrightarrow (X,B)$ τις συνήθεις ενθέσεις και ως $\Delta_q(A,B)$ τη σύνθεση των ομομορφισμών R-μοδίων:

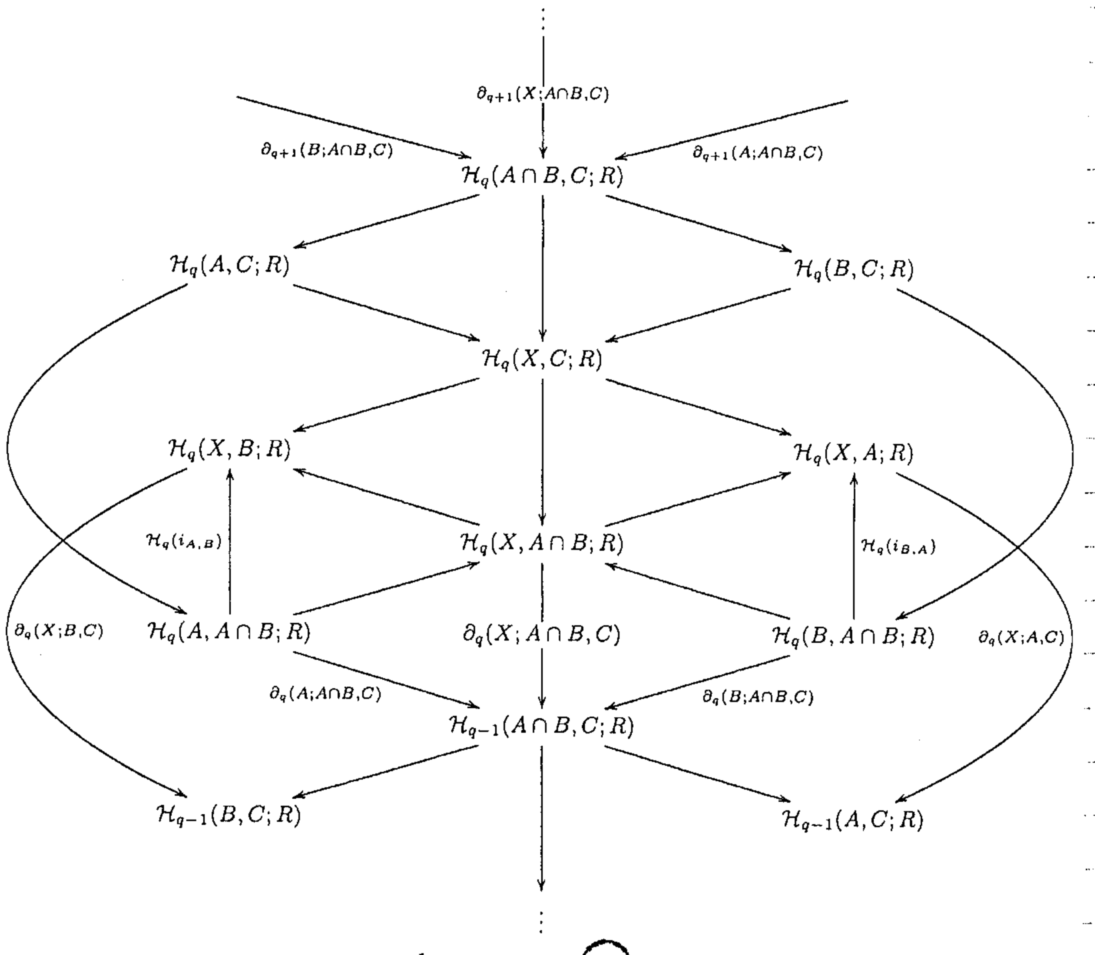
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_q(X,C;R) \arrow[r, "\mathcal{H}_q(m_{C,B})"] \arrow[rrr, bend right, "\Delta_q(A,B)"'] & \mathcal{H}_q(X,B;R) \arrow[r, "\mathcal{H}_q(i_{A,B})^{-1}"] & \mathcal{H}_q(A,A\cap B;R) \arrow[r, "\partial(A;A\cap B;C)"] & \mathcal{H}_{q-1}(A\cap B,C;R),
\end{tikzcd}$$

τότε υφίσταται μια μακρά ακριβής ακολουθία

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_{q+1}(A,B)} \mathcal{H}_q(A\cap B, C; R) \xrightarrow{(\mathcal{H}_q(k_A),\mathcal{H}_q(k_B))} \mathcal{H}_q(A,C;R)\oplus\mathcal{H}_q(B,C;R) \xrightarrow{\mathcal{H}_q(\ell_A)-\mathcal{H}_q(\ell_B)} \mathcal{H}_q(X,C;R) \xrightarrow{\Delta_q(A,B)} \mathcal{H}_{q-1}(A\cap B,C;R) \xrightarrow{(\mathcal{H}_{q-1}(k_A),\mathcal{H}_{q-1}(k_B))} \cdots$$

(η λεγόμενη ακριβής ακολουθία των Mayer και Vietoris (για τους A, B).

Απόδειξη: Εντάσσουμε τις μακρές ακριβείς ακολουθίες των τοπολογικών τριάδων $(A, A\cap B, C)$, $(B, A\cap B, C)$, (X, A, C), (X, B, C) και $(X, A\cap B, C)$ στο ακόλουθο διάγραμμα:



Διάγραμμα 1

Λαμβάνοντας υπ' όψιν το γεγονός ότι οι $\mathcal{H}_q(i_{A,B})$ είναι εξορισμού ισομορφισμοί, $\forall q\in\mathbb{Z}$, η απόδειξη προκύπτει άμεσα από την άσκηση 23 του 4ου φυλλαδίου των [ΣΟΑ]. □

2.6.4. Σημείωση: (i) Εάν $C=\emptyset$, τότε από το Θεώρημα 2.6.3 προκύπτει η <u>συνήθης ακριβής ακολουθία των Mayer και Vietoris:</u>

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_{q+1}(A,B)} \mathcal{H}_q(A\cap B;R) \xrightarrow{(\mathcal{H}_q(k_A),\,\mathcal{H}_q(k_B))} \mathcal{H}_q(A;R)\oplus\mathcal{H}_q(B;R) \xrightarrow{\mathcal{H}_q(\ell_A)-\mathcal{H}_q(\ell_B)} \mathcal{H}_q(X;R) \xrightarrow{\Delta_q(A,B)} \mathcal{H}_{q-1}(A\cap B;R) \xrightarrow{(\mathcal{H}_{q-1}(k_A),\,\mathcal{H}_{q-1}(k_B))} \cdots$$

(ii) Εάν $C=\{pt\}$ και $A\cap B\neq\emptyset$, τότε από το Θ. 2.6.3 και το πόρισμα 2.2.5 προκύπτει η <u>ανηγμένη ακριβής ακολουθία των Mayer και Vietoris:</u>

$$\cdots \xrightarrow{\tilde{\Delta}_{q+1}(A,B)} \tilde{\mathcal{H}}_q(A\cap B;R) \xrightarrow{(\tilde{\mathcal{H}}_q(k_A),\,\tilde{\mathcal{H}}_q(k_B))} \tilde{\mathcal{H}}_q(A;R)\oplus\tilde{\mathcal{H}}_q(B;R) \xrightarrow{\tilde{\mathcal{H}}_q(\ell_A)-\tilde{\mathcal{H}}_q(\ell_B)} \tilde{\mathcal{H}}_q(X;R) \xrightarrow{\tilde{\Delta}_q(A,B)} \tilde{\mathcal{H}}_{q-1}(A\cap B;R) \xrightarrow{(\tilde{\mathcal{H}}_{q-1}(k_A),\,\tilde{\mathcal{H}}_{q-1}(k_B))} \cdots$$

2.6.5. Θεώρημα. Έστω ότι ο X είναι ένας τοπολογικός χώρος και οι A,B δυο υπόχωροί του.

Εάν υποθέσουμε ότι η τοπολογική τριάδα $(A\cup B, A, B)$ είναι εκτμητική (όπως στον ορσ. 2.6.1) και εάν συμβολίσουμε ως

$\nu_A : (X, A\cap B)\hookrightarrow(X,A)$, $\nu_B : (X, A\cap B)\hookrightarrow(X,B)$,

$\xi_A : (X,A)\hookrightarrow(X,A\cup B)$, $\xi_B : (X,B)\hookrightarrow(X,A\cup B)$ και

$\rho_A : (A, A\cap B)\hookrightarrow(X,A\cap B)$ τις συνήθεις ενθέσεις, και ως

$\hat{\Delta}_q(A,B)$ τη σύνθεση των ομομορφισμών R-μοδίων

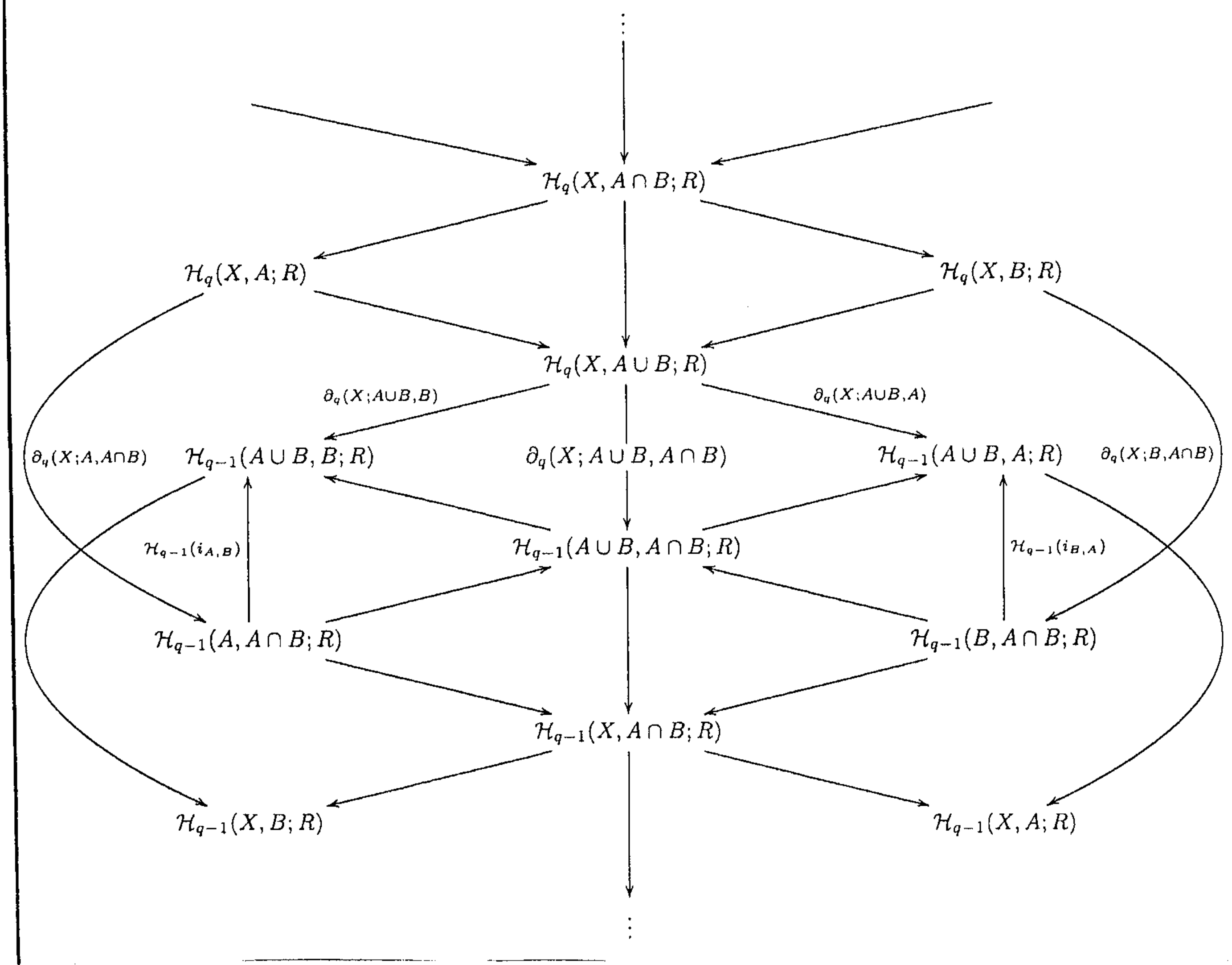
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_q(X,A\cup B;R) \arrow[r, "\partial_q(X{,}A\cup B)"] \arrow[drr, "\hat{\Delta}_q(A{,}B)"'] & \mathcal{H}_{q-1}(A\cup B,B;R) \arrow[r, "\mathcal{H}_{q-1}(i_{A,B})^{-1}"] & \mathcal{H}_{q-1}(A,A\cap B;R) \arrow[d, "\mathcal{H}_{q-1}(\rho_A)"] \\
 & & \mathcal{H}_{q-1}(X,A\cap B;R),
\end{tikzcd}$$

τότε υφίσταται μια μακρά ακριβής ακολουθία

$$\cdots \xrightarrow{\hat{\Delta}_{q+1}(A,B)} \mathcal{H}_q(X, A\cap B; R) \xrightarrow{(\mathcal{H}_q(v_A),\, \mathcal{H}_q(v_B))} \mathcal{H}_q(X,A;R)\oplus\mathcal{H}_q(X,B;R) \xrightarrow{\mathcal{H}_q(\xi_A)-\mathcal{H}_q(\xi_B)} \mathcal{H}_q(X, A\cup B;R) \xrightarrow{\hat{\Delta}_q(A,B)} \mathcal{H}_{q-1}(X,A\cap B;R) \xrightarrow{(\mathcal{H}_{q-1}(v_A),\, \mathcal{H}_{q-1}(v_B))} \cdots$$

(η λεγομένη σχετική ακριβής ακολουθία των Mayer και Vietoris του X ως προς τους A, B).

Απόδειξη: Εντάσσουμε τις μακρές ακριβείς ακολουθίες των τοπολογικών τριάδων $(X, A\cup B, A)$, $(X, A\cup B, B)$, $(X, A, A\cap B)$, $(X, B, A\cap B)$ και $(X, A\cup B, A\cap B)$ στο ακόλουθο διάγραμμα:



Διάγραμμα 2

Λαμβάνοντας υπ' όψιν το γεγονός ότι οι $\mathcal{H}_q(i_{A,B})$ είναι εξ ορισμού ισομορφισμοί, $\forall q \in \mathbb{Z}$, η απόδειξη προκύπτει άμεσα από την άσκηση 23 του 4ου φυλλαδίου των [ΣΟΑ]. □

2.6.6. Λήμμα: Έστω

$$\begin{tikzcd} M_1 & & M_2 \\ & L \arrow[ul, "j_1"'] \arrow[ur, "j_2"] & \\ N_1 \arrow[uu, "k_1", "\cong"'] \arrow[ur, "i_1"'] & & N_2 \arrow[uu, "k_2"', "\cong"] \arrow[ul, "i_2"] \end{tikzcd}$$

ένα μεταθετικό διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, τέτοιο ώστε οι k_1, k_2 να είναι ισομορφισμοί και οι ακολουθίες
$N_1 \xrightarrow{i_1} L \xrightarrow{j_2} M_2$, $N_2 \xrightarrow{i_2} L \xrightarrow{j_1} M_1$ ακριβείς.
Τότε οι απεικονίσεις
$\phi: N_1 \oplus N_2 \longrightarrow L$, $(x_1, x_2) \longmapsto i_1(x_1) + i_2(x_2)$, $\psi: L \longrightarrow M_1 \times M_2$, $x \longmapsto (j_1(x), j_2(x))$,
είναι ισομορφισμοί R-μοδίων (με σύνθεσή τους την $k_1 \times k_2$).

<u>Απόδειξη:</u> Επειδή η σύνθεση $j_1 \circ i_1 = k_1$ είναι εξ υποθέσεως ένας ισομορφισμός R-μοδίων, έχουμε $L = \mathrm{Im}(i_1) \oplus \mathrm{Ker}(j_1)$ (βλ. άσκηση 9 τού 1ου φυλλαδίου των [ΖΟΑ]). Κατά συνέπειαν, $\mathrm{Ker}(j_1) \cap \mathrm{Ker}(j_2) = \mathrm{Ker}(j_1) \cap \mathrm{Im}(i_1) = \{0\}$.
Έστω $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}(\phi)$. Τότε

$$\left\{\begin{array}{l} k_1(x_1) = j_1(i_1(x_1)) = j_1(i_1(x_1) + i_2(x_2)) = j_1(\phi(x_1, x_2)) = j_1(0) = 0 \\ k_2(x_2) = j_2(i_2(x_2)) = j_2(i_1(x_1) + i_2(x_2)) = j_2(\phi(x_1, x_2)) = j_2(0) = 0 \end{array}\right\}$$

και επειδή οι k_1, k_2 είναι ισομορφισμοί, έχουμε $x_1 = 0, x_2 = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$
$\Longrightarrow \phi$ μονομορφισμός. Για να αποδείξουμε ότι ο ϕ είναι και επιμορφισμός θεωρούμε τυχόν στοιχείο $x \in L$ και θέτουμε $x_1 := k_1^{-1}(j_1(x))$, $x_2 := k_2^{-1}(j_2(x))$.
Το (x_1, x_2) είναι ένα στοιχείο τού $N_1 \oplus N_2$. Θέτοντας
$y := \phi(x_1, x_2) - x = i_1(x_1) + i_2(x_2) - x$ λαμβάνουμε

$$\left\{\begin{array}{l} j_1(y) = j_1(i_1(x_1) + i_2(x_2) - x) \underset{\text{ακρίβεια}}{=} (j_1 \circ i_1)(x_1) - j_1(x) = \underbrace{k_1(x_1)}_{= j_1(x)} - j_1(x) = 0 \\ j_2(y) = j_2(i_1(x_1) + i_2(x_2) - x) \overset{\uparrow}{=} (j_2 \circ i_2)(x_2) - j_2(x) = 0 \end{array}\right\}$$

$\Longrightarrow y \in \mathrm{Ker}(j_1) \cap \mathrm{Ker}(j_2) = \{0\} \Longrightarrow \phi(x_1, x_2) = x \Longrightarrow \phi$ επιμορφισμός.
Εν συνεχεία θεωρούμε τυχόν $x \in \mathrm{Ker}(\psi)$. Τότε
$\psi(x) = (j_1(x), j_2(x)) = (0,0) \Longrightarrow j_1(x) = 0, j_2(x) = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(j_1) \cap \mathrm{Ker}(j_2) = \{0\}$
$\Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow \psi$ μονομορφισμός.

Για να αποδείξουμε ότι ο ψ είναι και επιμορφισμός θεωρούμε τυχόν στοιχείο $(z_1,z_2)\in M_1\times M_2$. Θέτοντας $x:=i_1(k_1^{-1}(z_1))+i_2(k_2^{-1}(z_2))$ λαμβάνουμε

$$\left\{\begin{array}{l} j_1(x)=j_1(i_1(k_1^{-1}(z_1))+i_2(k_2^{-1}(z_2)))\overset{\text{ακρ.}}{=}\underbrace{(j_1\circ i_1)}_{k_1}(k_1^{-1}(z_1))=z_1 \\ j_2(x)=j_2(i_1(k_1^{-1}(z_1))+i_2(k_2^{-1}(z_2)))\overset{\downarrow}{=}\underbrace{(j_2\circ i_2)}_{k_2}(k_2^{-1}(z_2))=z_2 \end{array}\right\}$$

$\Longrightarrow \psi(x)=(z_1,z_2)\Longrightarrow \psi$ επιμορφισμός. $\square$

2.6.7. Λήμμα. Έστω

$$\begin{tikzcd}
M_1 & & M_2 \\
& L \arrow[ul, "j_1"'] \arrow[ur, "j_2"] & \\
N_1 \arrow[uu, "k_1"] \arrow[ur, "i_1"] & & N_2 \arrow[uu, "k_2"'] \arrow[ul, "i_2"']
\end{tikzcd}$$

ένα μεταθετικό διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, τέτοιο ώστε οι βραχείες ακολουθίες

$$0\to N_1\xrightarrow{i_1}L\xrightarrow{j_2}M_2\to 0\ ,\quad 0\to N_2\xrightarrow{i_2}L\xrightarrow{j_1}M_1\to 0$$

να είναι ακριβείς και η $\varphi: N_1\oplus N_2\to L,\ (x_1,x_2)\mapsto i_1(x_1)+i_2(x_2)$ ισομορφισμός R-μοδίων. Τότε αμφότεροι οι ομομορφισμοί k_1, k_2 είναι ισομορφισμοί.

Απόδειξη: Έστω τυχόν $z\in M_1$. Επειδή ο j_1 είναι επιμορφισμός, $\exists\, y\in L: j_1(y)=z$. Επειδή ο φ είναι επιμορφισμός, $\exists\,(x_1,x_2)\in N_1\oplus N_2$: $y=i_1(x_1)+i_2(x_2)$. Άρα

$$z=j_1(y)=j_1(i_1(x_1)+i_2(x_2))=\underbrace{(j_1\circ i_1)}_{k_1}(x_1)+\underbrace{(j_1\circ i_2)}_{0}(x_2)=k_1(x_1)$$

$\Longrightarrow k_1$ επιμορφισμός.

Παρομοίως (κατόπιν εναλλαγής των ρόλων των j_1, j_2) αποδεικνύεται ότι ο k_2 είναι επιμορφισμός. Εν συνεχεία θεωρούμε τυχόν $x\in Ker(k_1)$. Τότε $j_1(i_1(x))=0_{N_1}\Rightarrow i_1(x)\in Ker(j_1)\overset{\text{ακρίβεια}}{=}Im(i_2)\Rightarrow \exists\, x'\in N_2: i_1(x)=i_2(x')$

$\Longrightarrow \exists\, x'\in N_2: i_1(-x)+i_2(x')=\varphi(x,x')=0_L \xRightarrow{Ker(\varphi)=\{0_{N_1\oplus N_2}\}} x=0_{N_1}, x'=0_{N_2}$

$\Longrightarrow k_1$ μονομορφισμός. Κατ' αναλογίαν και ο k_2 είναι μονομορφισμός. $\square$

2.6.8. Πρόταση. Έστω ότι ο X είναι ένας τοπολογικός χώρος και ότι οι A, B είναι δυο υπόχωροί του, τέτοιοι ώστε να ισχύει $A\cup B\subseteq X$. Τότε οι κάτωθι συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) Η τοπολογική τριάδα $(A\cup B, A, B)$ είναι εκτμητική.

(ii) Η τοπολογική τριάδα $(A\cup B, B, A)$ είναι εκτμητική.

(iii) Η (φυσικώς οριζόμενη) απεικόνιση

$$\mathcal{H}_q(A, A\cap B;R)\oplus \mathcal{H}_q(B, A\cap B;R)\longrightarrow \mathcal{H}_q(A\cup B, A\cap B;R)$$

είναι ισομορφισμός για κάθε $q\in\mathbb{Z}$.

(iv) Η (φυσικώς οριζόμενη) απεικόνιση

$$\mathcal{H}_q(A\cup B, A\cap B;R)\longrightarrow \mathcal{H}_q(A\cup B, A;R)\oplus \mathcal{H}_q(A\cup B, B;R)$$

είναι ισομορφισμός για κάθε $q\in\mathbb{Z}$.

Απόδειξη: (i) $\Longrightarrow$ (iii): Εάν η $(A\cup B, A, B)$ είναι εκτμητική, τότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.6.3 (με τους σε αυτό εισαχθέντες συμβολισμούς) για $X:=A\cup B$ και $C:=A\cap B$ λαμβάνουμε ισομορφισμούς

$$0\longrightarrow \mathcal{H}_q(A, A\cap B;R)\oplus \mathcal{H}_q(B, A\cap B;R)\xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_q(A\cup B, A\cap B;R)\xrightarrow{\Delta_q(A,B)} 0$$

για κάθε $q\in\mathbb{Z}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Εάν η τριάδα $(A\cup B, B, A)$ είναι εκτμητική, τότε εναλλάσσοντας τους ρόλους των A και B και χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα (σε συνδυασμό με την -μέχρις ισομορφισμού- μεταθετικότητα του ευθέος αθροίσματος R-μοδίων) καταλήγουμε εκ νέου στην ύπαρξη των ανωτέρω ισομορφισμών.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) και (ii): Εάν $\mathcal{H}_q(A, A\cap B;R)\oplus \mathcal{H}_q(B, A\cap B;R)\cong \mathcal{H}_q(A\cup B, A\cap B;R)$, για κάθε $q\in\mathbb{Z}$, τότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.6.3 (με τους σε αυτό εισαχθέντες συμβολισμούς) για $X:=A\cup B$ και $C:=A\cap B$ λαμβάνουμε από το διάγραμμα ① της σελ. 141 το εξής:

$$\begin{tikzcd}
& & \mathcal{H}_q(A\cup B, A\cap B;R) \arrow[dll] \arrow[drr] \arrow[dd, equal] & & \\
\mathcal{H}_q(A\cup B, B;R) & & & & \mathcal{H}_q(A\cup B, A;R) \\
& & \mathcal{H}_q(A\cup B, A\cap B;R) \arrow[ull] \arrow[urr] \arrow[dd] & & \\
\mathcal{H}_q(A, A\cap B;R) \arrow[uu, "\mathcal{H}_q(i_{A,B})"] \arrow[urr] \arrow[drr] & & & & \mathcal{H}_q(B, A\cap B;R) \arrow[uu, "\mathcal{H}_q(i_{B,A})"'] \arrow[ull] \arrow[dll] \\
& & 0 & &
\end{tikzcd}$$

και οι $\left.\begin{cases} \mathcal{H}_q(A, A\cap B; R) \longrightarrow \mathcal{H}_q(A\cup B, A\cap B; R) \\ \mathcal{H}_q(B, A\cap B; R) \longrightarrow \mathcal{H}_q(A\cup B, A\cap B; R) \end{cases}\right\}$ είναι μονομορφισμοί, $\forall q \in \mathbb{Z}$,

ενώ στη μακρά ακριβή ακολουθία των τοπολογικών τριάδων $(A\cup B, A, A\cap B)$ και $(A\cup B, B, A\cap B)$ οι συνδετικοί ομομορφισμοί είναι τετριμμένοι.

Τούτο σημαίνει ότι οι

$$\left.\begin{cases} \mathcal{H}_q(A\cup B, A\cap B; R) \longrightarrow \mathcal{H}_q(A\cup B, A; R) \\ \mathcal{H}_q(A\cup B, A\cap B; R) \longrightarrow \mathcal{H}_q(A\cup B, B; R) \end{cases}\right\} \text{ είναι επιμορφισμοί, } \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Βάσει λοιπόν του λήμματος 2.6.7 διαπιστώνουμε ότι αμφότεροι οι $\mathcal{H}_q(i_{A,B})$ και $\mathcal{H}_q(i_{B,A})$ είναι ισομορφισμοί, $\forall q \in \mathbb{Z}$.

<u>(i) $\Longrightarrow$ (iv):</u> Εάν η τριάδα $(A\cup B, A, B)$ είναι εκτμητική, τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα 2.6.5 (με τους σε αυτό εισαχθέντες συμβολισμούς) για $X := A\cup B$ λαμβάνουμε ισομορφισμούς

$$0 \xrightarrow{\hat{\Delta}_{q+1}(A,B)} \mathcal{H}_q(A\cup B, A\cap B; R) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_q(A\cup B, A; R) \oplus \mathcal{H}_q(A\cup B, B; R) \longrightarrow 0$$

για κάθε $q \in \mathbb{Z}$.

<u>(ii) $\Longrightarrow$ (iv):</u> Εάν η τριάδα $(A\cup B, B, A)$ είναι εκτμητική, τότε εναλλάσσοντας τους ρόλους των A και B και χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα (σε συνδυασμό με την -μέχρις ισομορφισμού- μεταθετικότητα του ευθέος αθροίσματος R-μοδίων) καταλήγουμε εκ νέου στην ύπαρξη των ανωτέρω ισομορφισμών.

<u>(iv) $\Longrightarrow$ (i) και (ii):</u> Εάν $\mathcal{H}_q(A\cup B, A\cap B; R) \cong \mathcal{H}_q(A\cup B, A; R) \oplus \mathcal{H}_q(A\cup B, B; R)$, για κάθε $q \in \mathbb{Z}$, τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα 2.6.5 (με τους σε αυτό εισαχθέντες συμβολισμούς) για $X := A\cup B$ λαμβάνουμε από το διάγραμμα ② της σελ. 143 το εξής:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[dll] \arrow[drr] \arrow[dd] & & \\
\mathcal{H}_q(A\cup B, B; R) & & & & \mathcal{H}_q(A\cup B, A; R) \\
 & & \mathcal{H}_q(A\cup B, A\cap B; R) \arrow[ull] \arrow[urr] \arrow[dd, equal] & & \\
\mathcal{H}_q(A, A\cap B; R) \arrow[uu, "\mathcal{H}_q(i_{A,B})"] \arrow[urr] \arrow[drr] & & & & \mathcal{H}_q(B, A\cap B; R) \arrow[uu, "\mathcal{H}_q(i_{B,A})"'] \arrow[ull] \arrow[dll] \\
 & & \mathcal{H}_q(A\cup B, A\cap B; R) & &
\end{tikzcd}$$

Και οι $\left\{\begin{array}{l} \mathcal{H}_q(A\cup B, A\cap B; R) \longrightarrow \mathcal{H}_q(A\cup B, A; R) \\ \mathcal{H}_q(A\cup B, A\cap B; R) \longrightarrow \mathcal{H}_q(A\cup B, B; R) \end{array}\right\}$ είναι επιμορφισμοί, $\forall q \in \mathbb{Z}$,

ενώ στη μακρά ακριβή ακολουθία των τοπολογικών τριάδων $(A\cup B, A, A\cap B)$ και $(A\cup B, B, A\cap B)$ είναι τετριμμένοι. Τούτο σημαίνει ότι οι $\left\{\begin{array}{l} \mathcal{H}_q(A, A\cap B; R) \to \mathcal{H}_q(A\cup B, A\cap B; R) \\ \mathcal{H}_q(B, A\cap B; R) \to \mathcal{H}_q(A\cup B, A\cap B; R) \end{array}\right\}$ είναι μονομορφισμοί, $\forall q \in \mathbb{Z}$.

Βάσει λοιπόν τού λήμματος 2.6.7 διαπιστώνουμε ότι αμφότεροι οι $\mathcal{H}_q(i_{A,B})$ και $\mathcal{H}_q(i_{B,A})$ είναι ισομορφισμοί, $\forall q \in \mathbb{Z}$. □

2.6.9. Πρόταση: Ύστερα από εναλλαγή των ρόλων των A και B στα Θεωρήματα 2.6.3 και 2.6.5 οι συνοριακοί τελεστές αλλάζουν πρόσημο, δηλαδή ισχύει:

$$\Delta_q(A,B) = -\Delta_q(B,A) \quad \text{και} \quad \hat{\Delta}_q(A,B) = -\hat{\Delta}_q(B,A),\ \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Απόδειξη: Αρκεί η εφαρμογή τού λεγομένου "λήμματος τού Εξαγώνου" (βλ. άσκηση 22 (iii) τού 4ου φυλλαδίου των [ΣΟΑ]) στα εξάγωνα των διαγραμμάτων ① και ②. Η απόδειξη τού εν λόγω λήμματος έπεται από το λήμμα 2.6.6. □

2.6.10. Σημείωση: (i) Εάν οι X_1, X_2 είναι δυο τοπολογικοί χώροι και X_1+X_2 το τοπολογικό άθροισμα αυτών (βλ. 1.10.10(iii), σελ. 26), τότε η τριάδα (X_1+X_2, X_1, X_2) είναι εκτμητική (βάσει τού αξιώματος τής εκτομής), ενώ η συνήθης ακριβής ακολουθία των Mayer και Vietoris 2.6.4 (i) μας δίδει ισομορφισμούς

$$\mathcal{H}_q(X_1+X_2; R) \cong \mathcal{H}_q(X_1; R) \oplus \mathcal{H}_q(X_2; R),\ \forall q \in \mathbb{Z}.$$

(ii) Εάν οι $X_1, \ldots, X_n$, $n \geq 2$, είναι τοπολογικοί χώροι, τότε χρησιμοποιώντας το (i) και πλήρη επαγωγή επί τού n έχουμε σε θέση να αποδείξουμε τους ισομορφισμούς:

$$\mathcal{H}_q\Big(\sum_{j=1}^{n} X_j;R\Big) \cong \bigoplus_{j=1}^{n} \mathcal{H}_q(X_j;R),\quad \forall q\in\mathbb{Z}.$$

(iii) Εν αντιθέσει προς τα (i), (ii), εάν κανείς θεωρήσει το τοπολογικό άθροισμα $\sum_{j\in J} X_j$ μιας μη πεπερασμένης οικογένειας $(X_j)_{j\in J}$ (τοπολογικών χώρων), τότε οι αντίστοιχοι ισομορφισμοί είναι αδύνατον να συναχθούν από τα αξιώματα (A1) – (A4), εξ ου προέκυψε και η ανάγκη εισαγωγής του αξιώματος (A5).

2.6.11. Σχόλιο: Η χρήση της μακράς ακριβούς ακολουθίας των Mayer και Vietoris είναι θεμελιώδους σημασίας στο πλαίσιο της Αλγεβρικής Τοπολογίας (όπως συμβαίνει με το θεώρημα των Seifert και Van Kampen όταν κανείς εργάζεται με τη θεμελιώδη ομάδα). Με τη βοήθειά της μπορεί κανείς να υπολογίσει τους μοδίους ομολογίας ενός τοπολογικού χώρου, αρκεί να τον έχει διασπάσει σε κατάλληλους "δομικούς λίθους". Ωστόσο, απαιτείται προσοχή προκειμένου να διασφαλίζεται αυτή η "καταλληλότητα". Επί παραδείγματι, θεωρώντας τη μη εκτμητική τοπολογική τριάδα (X,A,B), $X:=A\cup B$ $(\supsetneqq A^\circ\cup B^\circ)$, όπου

$$\begin{cases} A:=\{(0,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geq -1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x\leq \frac{\pi}{2},\ y\geq \sin(\frac{1}{x})\}, \\ B:=\{(0,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\leq 1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x\leq \frac{\pi}{2},\ y\leq \sin(\frac{1}{x})\} \\ X=\left\{\begin{array}{l}\text{κλειστή κατακόρυφη λωρίδα εντός του } \mathbb{R}^2 \text{ κείμενη} \\ \text{μεταξύ του άξονα των } y \text{ και της ευθείας } x=\frac{\pi}{2}\end{array}\right\} \\ A\cap B = \text{ο χώρος του γραφήματος της } y=\sin(\frac{1}{x}) \end{cases}$$

(με τους A, B κλειστούς υπόχωρους του X), δεν υφίσταται ακριβής ακολουθία τύπου Mayer–Vietoris όταν R είναι μια Π.Κ.Ι.! Πράγματι, εάν η

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{H}_1(X;R)\longrightarrow \mathcal{H}_0(A\cap B;R)\longrightarrow \mathcal{H}_0(A;R)\oplus\mathcal{H}_0(B;R)\longrightarrow \mathcal{H}_0(X;R)\to 0$$

ήταν ακριβής, τότε, επειδή οι X, A, B είναι συσταλτοί και

$\mathcal{H}_1(X;R)\cong\{0\}$, $\mathcal{H}_0(X;R)\cong\mathcal{H}_0(A;R)\cong\mathcal{H}_0(B;R)\cong R$ (βλ. 2.2.3, σελ. 122),

θα προέκυπτε η

$$0\longrightarrow R\oplus R\longrightarrow R\oplus R\longrightarrow R\to 0,$$

οπότε $3=\mathrm{rank}_R((R\oplus R)\oplus R)=\mathrm{rank}_R(R\oplus R)=2$. Άτοπο!

Μια πολύ χρήσιμη μακρά ακριβής ακολουθία τύπου Mayer–Vietoris είναι αυτή που εφαρμόζεται στην περίπτωση θεωρήσεως "Εξωθήσεων".

2.6.12. Ορισμός. Ένα μεταθετικό διάγραμμα τοπολογικών χώρων και συνεχών απεικονίσεων τοπολογικών χώρων της μορφής:

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X_2 \arrow[d, "j_2"] \\
X_1 \arrow[r, "j_1"'] & X
\end{tikzcd}$$

ονομάζεται εξώθηση (pushout) όταν πληροί την ακόλουθη "καθολική" συνθήκη: Για κάθε τοπολογικό χώρο Y και οιεσδήποτε συνεχείς απεικονίσεις $f_1: X_1 \to Y$, $f_2: X_2 \to Y$ με $f_1 \circ i_1 = f_2 \circ i_2$ υπάρχει μία μονοσημάντως ορισμένη συνεχής απεικόνιση $f: X \to Y$ που καθιστά το διάγραμμα

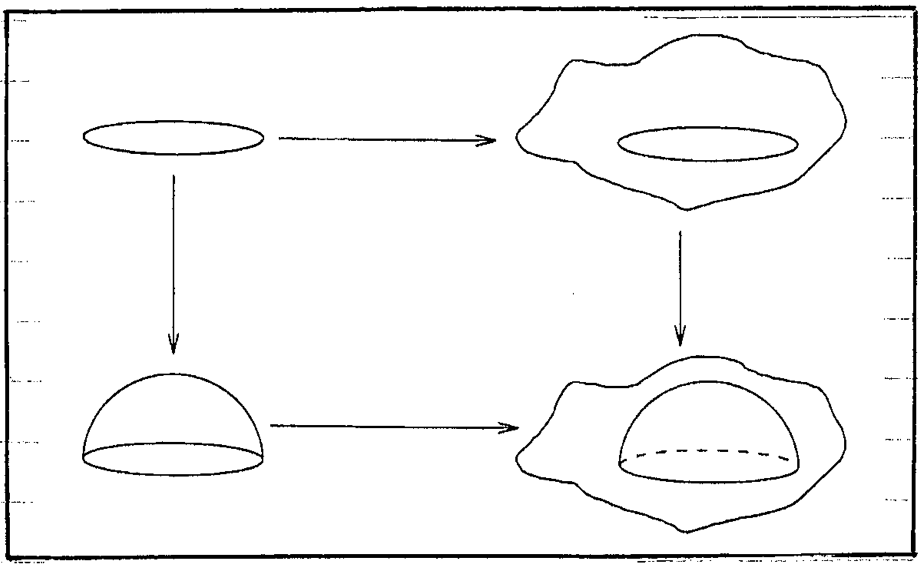
$$\begin{tikzcd}
 & X_0 \arrow[dl, "i_1"'] \arrow[dr, "i_2"] \arrow[dd, phantom, "\circlearrowright"] & \\
X_1 \arrow[dr, "j_1"'] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "j_2"] \arrow[ddl, bend left, "f_2"] \\
 & X \arrow[d, dashed, "f"] & \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό, δηλαδή: $f \circ j_1 = f_1$, $f \circ j_2 = f_2$.

2.6.13. Σημείωση: (i) Η μοναδικότητα της ως άνω f (μέχρις ομοιομορφισμού) έπεται άμεσα από την "καθολική" συνθήκη.

(ii) Η ύπαρξη μιας τριάδας (X, j_1, j_2) με την εν λόγω ιδιότητα αποδεικνύεται θέτοντας: $X := (X_1 + X_2)/R$, όπου R $(\sim)$ η σχέση ισοδυναμίας $i_1(x_0) \sim i_2(x_0)$, $\forall x_0 \in X_0$, $p: X_1 + X_2 \to X$ η φυσική επίρριψη και $j_1 := p|_{X_1}$, $j_2 := p|_{X_2}$.

(iii) Στην περίπτωση κατά την οποία η $i_1: X_0 \to X_1$ παριστά μια ένθεση (τού X_0 εντός τού X_1), τότε κανείς μπορεί να εκλάβει εποπτικώς την αντίστοιχη εξώθηση ως τον χώρο, ο οποίος ορίζεται για κάθε $x_0 \in X_0$ ύστερα από συγκόλληση των σημείων $i_1(x_0) \in X_1$ και $i_2(x_0) \in X_2$ (πρβλ. κάτωθι σχήμα).



<u>2.6.14. Ορισμός.</u> Έστω (X, A) ένα τοπολογικό ζεύγος. Ο υπόχωρος A τού X καλείται <u>περιοχική παραμορφωτική σύμπτυξη τού X</u> όταν υπάρχει ανοικτή περιοχή U τού A εντός τού X, τέτοια ώστε ο A να είναι παραμορφωτική σύμπτυξη της U (βλ. 1.7.20, σελ. 77).

<u>2.6.15. Θεώρημα.</u> Έστω

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X_2 \arrow[d, "j_2"] \\ X_1 \arrow[r, "j_1"'] & X \end{tikzcd}$$

η εξώθηση των τ.χ. X_1, X_2 (μέσω τού X_0). Εάν υποθέσουμε ότι η $i_1 : X_0 \hookrightarrow X_1$ παριστά την ένθεση ενός κλειστού υπόχωρου X_0 τού X_1 και ότι ο X_0 είναι περιοχική παραμορφωτική σύμπτυξη τού X_1, τότε η $j_2 : X_2 \to X$ είναι κατ' ανάγκην η ένθεση ενός κλειστού υπόχωρου X_2 τού X, ο X_2 περιοχική παραμορφωτική σύμπτυξη τού X, οι ομομορφισμοί R-μοδίων

$$H_q(j_1, i_2) : H_q(X_1, X_0; R) \longrightarrow H_q(X, X_2; R)$$

ισομορφισμοί, $\forall q \in \mathbb{Z}$, ενώ για κάθε υπόχωρο A τού X_0

υφίσταται μια μακρά ακριβής ακολουθία:

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_{q+1}} \mathcal{H}_q(X_0,A;R) \xrightarrow{\mathcal{H}_q(i_1)\oplus \mathcal{H}_q(i_2)} \mathcal{H}_q(X_1,A;R)\oplus \mathcal{H}_q(X_2,A;R)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{H}_q(j_1)-\mathcal{H}_q(j_2)} \mathcal{H}_q(X,A;R) \xrightarrow{\Delta_q} \mathcal{H}_{q-1}(X_0,A;R) \xrightarrow{\mathcal{H}_{q-1}(i_1)\oplus \mathcal{H}_{q-1}(i_2)} \cdots$$

(η λεγομένη <u>μακρά ακριβής ακολουθία των Mayer και Vietoris για την εν λόγω εξώθηση</u>). [Προσοχή! Γράφουμε $\mathcal{H}_q(j_1, i_2)$ αντί $\mathcal{H}_q(j_1)$ απλώς για να υποδηλώσουμε με έμφαση την ταύτιση τού X_0 με το $i_1(X_0)$.]

<u>Απόδειξη:</u> Το ότι ο X_0 είναι περιοχική παραμορφωτική σύμπτυξη τού X_1 σημαίνει ότι υπάρχει ανοικτή περιοχή U τού X_0 εντός τού X_1, μια απεικόνιση συμπτύξεως $r: U\to X_0$ και μια ομοτοπία $h: U\times I\to U$ (σχ. X_0) με $i_1'\circ r \underset{h}{\simeq} \mathrm{Id}_U$, όπου $i_1': X_0 \hookrightarrow U$ η συνήθης ένθεση. Έστω $V := j_1(U)\cup j_2(X_2) \subseteq X$. Τότε η $j_2: X_2\to X$ είναι η ένθεση ενός κλειστού υποχώρου τού X και το V αποτελεί μια ανοικτή περιοχή τού X_2 εντός τού X. Έστω $j_2': X_2 \hookrightarrow V$ η μέσω της j_2 επαγομένη ένθεση. Τότε προκύπτουν οι εξωθήσεις

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1'"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X_2 \arrow[d, "j_2'"] \\ U \arrow[r, "j_1'"'] & V \end{tikzcd} \quad \text{και} \quad \begin{tikzcd} X_0\times I \arrow[r, "i_2\times \mathrm{Id}_I"] \arrow[d, "i_1'\times \mathrm{Id}_I"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X_2\times I \arrow[d, "j_2'\times \mathrm{Id}_I"] \\ U\times I \arrow[r, "j_1'\times \mathrm{Id}_I"'] & V\times I \end{tikzcd} .$$

Οι απεικονίσεις $i_2\circ r: U\to X_2$ και $\mathrm{Id}_{X_2}: X_2\to X_2$ ορίζουν (λόγω της πρώτης εξ αυτών των εξωθήσεων) μια απεικόνιση συμπτύξεως $\bar{r}: V\to X_2$ για την ένθεση $j_2': X_2\hookrightarrow V$. Οι απεικονίσεις $j_1'\circ h: U\times I\to V$ και $X_2\times I \xrightarrow{pr_1} X_2 \xrightarrow{j_2'} V$ ορίζουν (λόγω της δεύτερης εξωθήσεως) μια ομοτοπία $H: V\times I\to V$. Μέσω των $\bar{r}$ και H διαπιστώνουμε ότι ο X_2 αποτελεί παραμορφωτική σύμπτυξη τού V και περιοχική παραμορφωτική σύμπτυξη τού X. Ιδιαιτέρως, οι ενθέσεις $i_1': X_0\hookrightarrow U$ και $j_2': X_2\hookrightarrow V$ αποτελούν ομοτοπικές ισοδυναμίες.

Μέσω των μακρών ακριβών ακολουθιών των τοπολογικών ζευγών

(X_1, X_0), (X_1, U), (X, X_2) και (X, V)

(η ύπαρξη των οποίων διασφαλίζεται από το αξίωμα (A1), βλ. σελ. 120)
λαμβάνουμε τα μεταθετικά διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_q(X_0;R) \arrow[r] \arrow[d, "\cong", "(\beta\lambda.\ 2.2.2)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_q(X_1;R) \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_q(X_1,X_0;R) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "H_q(Id_{X_1}, i_1')"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_{q-1}(X_0;R) \arrow[r] \arrow[d, "(\beta\lambda.\ 2.2.2)", "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_{q-1}(X_1;R) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_q(U;R) \arrow[r] & H_q(X_1;R) \arrow[r] & H_q(X_1,U;R) \arrow[r] & H_{q-1}(U;R) \arrow[r] & H_{q-1}(X_1;R) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_q(X_2;R) \arrow[r] \arrow[d, "\cong", "(\beta\lambda.\ 2.2.2)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_q(X;R) \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_q(X,X_2;R) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "H_q(Id_X, j_2')"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_{q-1}(X_2;R) \arrow[r] \arrow[d, "(\beta\lambda.\ 2.2.2)", "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_{q-1}(X;R) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_q(V;R) \arrow[r] & H_q(X;R) \arrow[r] & H_q(X,V;R) \arrow[r] & H_{q-1}(V;R) \arrow[r] & H_{q-1}(X;R) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Βάσει του "λήμματος των πέντε" (βλ. [ΣΟΑ, λήμμα 2.2.2, σελ. 81]) οι

$$\left\{ \begin{array}{l} H_q(Id_{X_1}, i_1') : H_q(X_1, X_0;R) \longrightarrow H_q(X_1, U;R) \\ H_q(Id_X, j_2') : H_q(X, X_2;R) \longrightarrow H_q(X, V;R) \end{array} \right\}$$

είναι ισομορφισμοί R-μοδίων, $\forall q \in \mathbb{Z}$.

Οι μέσω των $j_1 : X_1 \to X$ και $j_2' : U \to V$ επαγόμενες απεικονίσεις $j_1'' : X_1 \setminus X_0 \to X \setminus X_2$ και $j_1''' : U \setminus X_0 \to V \setminus X_2$ είναι αμφιρριπτικές ταυτισμικές απεικονίσεις και — ως εκ τούτου — ομοιομορφισμοί (βλ. 1.5.2, σελ. 8, και 1.10.7, σελ. 24). Συνεπώς προκύπτουν ισομορφισμοί R-μοδίων:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_q(j_1'') : H_q(X_1 \setminus X_0) \xrightarrow{\cong} H_q(X \setminus X_2) \\ H_q(j_1''') : H_q(U \setminus X_0) \xrightarrow{\cong} H_q(V \setminus X_2) \end{array} \right\}, \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Μέσω των μακρών ακριβών ακολουθιών των τοπολογικών ζευγών $(X_1 \setminus X_0, U \setminus X_0)$ και $(X \setminus X_2, V \setminus X_2)$ (και έχοντας ταυτίσει το X_0 με το $i_1(X_0)$ και το X_2 με το $j_2(X_2)$) λαμβάνουμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[r] & \mathcal{H}_q(U\setminus X_0;R) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{H}_q(j_1''')"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{H}_q(X_1\setminus X_0;R) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{H}_q(j_1'')"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{H}_q(X_1\setminus X_0, U\setminus X_0;R) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\mathcal{H}_q(j_1'',j_1''')"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{H}_{q-1}(U\setminus X_0;R) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{H}_{q-1}(j_1''')"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{H}_{q-1}(X_1\setminus X_0;R) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{H}_{q-1}(j_1'')"', "\cong"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{H}_q(V\setminus X_2;R) \arrow[r] & \mathcal{H}_q(X\setminus X_2;R) \arrow[r] & \mathcal{H}_q(X\setminus X_2, V\setminus X_2;R) \arrow[r] & \mathcal{H}_{q-1}(V\setminus X_2;R) \arrow[r] & \mathcal{H}_{q-1}(X\setminus X_2;R) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Με εκ νέου εφαρμογή τού "λήμματος των πέντε" προκύπτουν οι ισομορφισμοί R-μοδίων:

$$\mathcal{H}_q(j_1'',j_1'''):\ \mathcal{H}_q(X_1\setminus X_0,\ U\setminus X_0;R) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_q(X\setminus X_2, V\setminus X_2;R)$$

για κάθε $q\in\mathbb{Z}$. Εν συνεχεία, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι ενθέσεις $k:(X_1\setminus X_0, U\setminus X_0)\hookrightarrow (X,U)$ και $\ell:(X\setminus X_2, V\setminus X_2)\hookrightarrow(X,V)$ επάγουν ισομορφισμούς R-μοδίων

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{H}_q(k):\mathcal{H}_q(X_1\setminus X_0,U\setminus X_0;R)\cong \mathcal{H}_q(X,U;R) \\ \mathcal{H}_q(\ell):\mathcal{H}_q(X\setminus X_2, V\setminus X_2;R)\cong\mathcal{H}_q(X,V;R)\end{array}\right\},\ \forall q\in\mathbb{Z},$$

(Επί τη βάσει τού αξιώματος (A3) της εκτομής, σελ. 120) καταλήγουμε στο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_q(X_1,X_0;R) \arrow[r, "\mathcal{H}_q(Id_{X_1},i_1')", "\cong"'] \arrow[d, "\mathcal{H}_q(j_1,i_2)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{H}_q(X_1,U;R) \arrow[d, "\mathcal{H}_q(j_1,j_1')"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{H}_q(X_1\setminus X_0,U\setminus X_0;R) \arrow[l, "\mathcal{H}_q(k)"', "\cong"] \arrow[d, "\mathcal{H}_q(j_1'',j_1''')"', "\cong"] \\
\mathcal{H}_q(X,X_2;R) \arrow[r, "\mathcal{H}_q(Id_X,j_2')", "\cong"'] & \mathcal{H}_q(X,V;R) & \mathcal{H}_q(X\setminus X_2, V\setminus X_2;R) \arrow[l, "\mathcal{H}_q(\ell)"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

απ' όπου έπεται ότι τόσον οι $\mathcal{H}_q(j_1,j_1')$ όσον και οι

$$\mathcal{H}_q(j_1,i_2):\mathcal{H}_q(X_1,X_0;R)\to\mathcal{H}_q(X,X_2;R)$$

είναι ισομορφισμοί R-μοδίων για κάθε $q\in\mathbb{Z}$. Για την αποπεράτωση της αποδείξεως αρκεί κανείς να επαναλάβει τα επιχειρήματα που χρησιμοποιήθηκαν στην απόδειξη του θεωρήματος 2.6.3 (Εν προκειμένω, τα X_1, X_2 θα παίζουν τον ρόλο των A, B και το X_0 τον ρόλο τού $A\cap B$, παρότι δεν έχουμε προϋπόθεση ότι $X_1\cap X_2 = X_0$!). □

2.7.1. Ορισμός. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και έστω $\mathrm{cone}(X) := X\times I/_{X\times\{1\}}$ ο κώνος υπεράνω του X (βλ. 1.10.10 (ii), σελ. 26). Ως ανάρτηση του X (ή διπλό κώνο επί του X) ορίζουμε τον πηλικόχωρο $\Sigma X := X\times[-1,1]/\sim$ ως προς μια σχέση ισοδυναμίας "$\sim$" με: $(x,1)\sim(y,1)$ και $(x,-1)\sim(y,-1)$, $\forall x,y\in X$. (Ο X θα ταυτίζεται εφεξής με τον υπόχωρο $X\times\{0\}$ των $\mathrm{cone}(X)$ και ΣX.) Σημειωτέον ότι κάθε συνεχής απεικόνιση $f: X\to Y$ μεταξύ δυο τοπολογικών χώρων επάγει συνεχείς απεικονίσεις

$$\mathrm{cone}(f): \mathrm{cone}(X)\to\mathrm{cone}(Y) \quad \text{και} \quad \Sigma f: \Sigma X\to\Sigma Y$$

(βλ. πρόταση 1.10.4, σελ. 23-24).

2.7.2. Παραδείγματα: (i) $\Sigma X \approx \mathrm{cone}(X)\cup_{\mathrm{Id}_X}\mathrm{cone}(X)$.

(ii) Για τη σφαίρα $X=\mathbb{S}^n$ υφίσταται ένας ομοιομορφισμός: $\Sigma\,\mathbb{S}^n \approx \mathbb{S}^{n+1}$. Τούτος μπορεί να κατασκευασθεί ως εξής: Έστω P_+ ο βόρειος πόλος της $\mathbb{S}^n$. Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^{n+1}$ εμφυτευμένον εντός του $\mathbb{R}^{n+2}$ ως το σύνολο των σημείων του $\mathbb{R}^{n+2}$, η $(n+2)$-οστή συντεταγμένη των οποίων είναι 0. Τότε η $\mathbb{S}^n$ εμφυτεύεται ως ισημερινός της $\mathbb{S}^{n+1}$:

$$\mathbb{S}^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+2}\mid \|x\|=1 \text{ και } x_{n+2}=0\}$$

και ο $\mathbb{D}^{n+1}$ εμφυτεύεται εντός του $\mathbb{D}^{n+2}$:

$$\mathbb{D}^{n+1}=\{x\in\mathbb{R}^{n+2}\mid \|x\|\leq 1 \text{ και } x_{n+2}=0\}.$$

Επειδή $\mathbb{S}^{n+1}=\mathbb{S}^{n+1}_+\cup\mathbb{S}^{n+1}_-$, $\mathbb{S}^n=\mathbb{S}^{n+1}_+\cap\mathbb{S}^{n+1}_-$ και υπάρχουν ομοιομορφισμοί (ορθογώνιες προβολές, βλ. σελ. 10) $p_\pm: \mathbb{S}^{n+1}_\pm \xrightarrow{\approx} \mathbb{D}^{n+1}$, αρκεί η $f: \Sigma\,\mathbb{S}^n\longrightarrow\mathbb{S}^{n+1}$ να ορισθεί μέσω του τύπου

$$f(x,t) := \begin{cases} p_-^{-1}((1+t)x - tP_+), & \text{όταν } -1\leq t\leq 0,\\ p_+^{-1}((1-t)x+tP_+), & \text{όταν } 0\leq t\leq 1.\end{cases}$$

Η f είναι προφανώς ομοιομορφισμός.

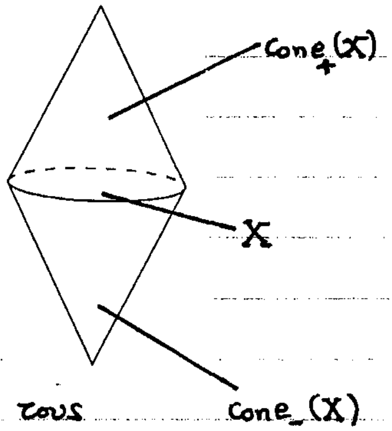
2.7.3. Θεώρημα. Έστω $(X,\{x\})$ ένας εστιγμένος τοπολογικός χώρος. Τότε υφίσταται ένας ισομορφισμός R-μοδίων

$$\Theta_q(X): \mathcal{H}_q(X,\{x\};R) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_{q+1}(\Sigma X,\{x\};R)$$

(ο λεγόμενος ισομορφισμός αναρτήσεως) για κάθε $q\in\mathbb{Z}$.

Απόδειξη: Έχουμε τη δυνατότητα θεωρήσεως της ΣX ως την εξώθηση $\mathrm{cone}_+(X)\cup_X \mathrm{cone}_-(X)$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{cone}_+(X) \arrow[d] \\ \mathrm{cone}_-(X) \arrow[r] & \Sigma X, \end{tikzcd}$$



όπου οι X, $\mathrm{cone}_+(X)$ και $\mathrm{cone}_-(X)$ ταυτίζονται με τους υπόχωρους της ΣX που δημιουργούνται από τις εικόνες του $X\times\{0\}$, $X\times[0,1]$ και $X\times[-1,0]$ μέσω της φυσικής επιρρίψεως. Επειδή $\mathrm{cone}_+(X)\approx\mathrm{cone}_-(X)\approx\mathrm{cone}(X)$ και ο $\mathrm{cone}(X)$ είναι συσταλτός $\left(\text{μέσω της } \begin{array}{c}\mathrm{cone}(X)\times I\to\mathrm{cone}(X)\\ ((x,t),s)\mapsto(x,st)\end{array}\right)$ μπορούμε να εκλάβουμε τις ενθέσεις $\{x\}\hookrightarrow\mathrm{cone}_+(X)$ και $\{x\}\hookrightarrow\mathrm{cone}_-(X)$ ως ομοτοπικές ισοδυναμίες. Βάσει του πορίσματος 2.3.5 (i),

$$\mathcal{H}_q(\mathrm{cone}_+(X),\{x\};R)\cong\mathcal{H}_q(\mathrm{cone}_-(X),\{x\};R)\cong\{0\},$$

για κάθε $q\in\mathbb{Z}$, οπότε θεωρώντας τη μακρά ακριβή ακολουθία των Mayer και Vietoris για την ανωτέρω εξώθηση (βλ. θεώρημα 2.6.15) διαπιστώνουμε ότι

$$\mathcal{H}_q(X,\{x\};R)\xrightarrow[\cong]{\Theta_q(X)=\Delta_q^{-1}}\mathcal{H}_{q+1}(\Sigma X,\{x\};R)$$

για κάθε $q\in\mathbb{Z}$. □

2.7.4. Σημείωση: Λόγω του πορίσματος 2.2.5 και της σημειώσεως 2.3.2, οι ανωτέρω ισομορφισμοί δίδουν (σε επίπεδο "ανηγμένων" μοδίων ομολογίας) τους ισομορφισμούς: $\tilde{\mathcal{H}}_q(X;R)\cong\tilde{\mathcal{H}}_{q+1}(\Sigma X;R)$, $\forall q\in\mathbb{Z}$.

2.7.5. Εφαρμογή: Ένας δεύτερος τρόπος υπολογισμού των μοδίων ομολογίας της σφαίρας (πρβλ. §2.4) στηρίζεται στην ύπαρξη ομοιομορφισμού $\Sigma \mathbb{S}^{n-1} \approx \mathbb{S}^n$ (βλ. 2.7.2 (ii)) και στη σημείωση 2.7.4.

• **Βήμα 1ο:** Επειδή $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$, η εφαρμογή των αξιωμάτων (A5) (αθροίσματος) και (A4) (διαστάσεως), βλ. σελ. 121, μας δίδει:

$$\mathcal{H}_q(\mathbb{S}^0;R) \cong \mathcal{H}_q(\{1\};R) \oplus \mathcal{H}_q(\{-1\};R) \cong \mathcal{H}_q(\{pt\};R) \oplus \mathcal{H}_q(\{pt\};R)$$

$$\cong \begin{cases} R\oplus R, & \text{όταν } q=0, \\ \{0\}, & \text{όταν } q\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}, \end{cases} \quad \text{οπότε} \quad \tilde{\mathcal{H}}_q(\mathbb{S}^0;R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } q=0, \\ \{0\}, & \text{όταν } q\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}. \end{cases}$$

• **Βήμα 2ο:** Για κάθε $q\in\mathbb{Z}$ έχουμε $\tilde{\mathcal{H}}_q(\mathbb{S}^n;R) \cong \tilde{\mathcal{H}}_q(\Sigma\mathbb{S}^{n-1};R)$

$$\underset{2.7.4}{\cong} \tilde{\mathcal{H}}_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1};R)$$

Εργαζόμενοι επαγωγικώς επί του n θα αποδείξουμε ότι

$$\tilde{\mathcal{H}}_q(\mathbb{S}^n;R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } q=n, \\ \{0\}, & \text{όταν } q\in\mathbb{Z}\setminus\{n\}. \end{cases}$$

Για $n=0$ τούτο είναι αληθές (βάσει του 1ου βήματος).

Για $n>0$:

$$\tilde{\mathcal{H}}_q(\mathbb{S}^n;R) \cong \tilde{\mathcal{H}}_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1};R) \underset{\substack{\text{επαγ.}\\ \text{υπόθ.}}}{\cong} \begin{cases} R, & \text{όταν } q-1=n-1 (\Leftrightarrow q=n), \\ \{0\}, & \text{όταν } q\in\mathbb{Z}\setminus\{n\}. \end{cases}$$

• **Βήμα 3ο:** Από το βήμα 2, τη σημείωση 2.3.2 (iii) και το αξίωμα (A4) της διαστάσεως (σελ. 121) λαμβάνουμε

$$\boxed{\mathcal{H}_q(\mathbb{S}^n;R) \cong \begin{cases} \{0\}, & \text{όταν } q\in\mathbb{Z}\setminus\{0,n\} \\ R, & \text{όταν } q\in\{0,n\} \text{ και } n>0 \\ R\oplus R, & \text{όταν } q=n=0 \end{cases}}$$

2.7.6. Θεώρημα: Εάν $n \in \mathbb{N}_0$ και ο X τυχών τοπολογικός χώρος, τότε υφίσταται ένας ισομορφισμός R-μοδίων
$$\mathcal{H}_q(pr) \times u_q : \mathcal{H}_q(\mathbb{S}^n \times X; R) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_q(X;R) \times \mathcal{H}_{q-n}(X;R),$$
για κάθε $q \in \mathbb{Z}$, όπου
$$pr: \mathbb{S}^n \times X \longrightarrow X \text{ η συνήθης προβολή.}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε την εξώθηση
$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^{n-1} \times X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{S}^n_+ \times X \arrow[d] \\ \mathbb{S}^n_- \times X \arrow[r] & \mathbb{S}^n \times X. \end{tikzcd}$$
Επιχειρηματολογώντας όπως στην απόδειξη τού Θεωρήματος 2.7.3 λαμβάνουμε ισομορφισμούς R-μοδίων:
$$u^n_q : \mathcal{H}_q((\mathbb{S}^n, \{P_+\}) \times X; R) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_{q-1}((\mathbb{S}^{n-1}, \{P_+\}) \times X; R), \forall q \in \mathbb{Z}. \ (1)$$

Η ένθεση $X \hookrightarrow (\mathbb{S}^0, \{1\}) \times X$ δίδει ισομορφισμούς
$\mathcal{H}_q(X;R) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_q((\mathbb{S}^0, \{1\}) \times X; R), \forall q \in \mathbb{Z}$. (2)
Η χρήση των (1), (2) και πλήρους επαγωγής επί τού n δίδει ισομορφισμούς $u_q : \mathcal{H}_q((\mathbb{S}^n, \{P_+\}) \times X; R) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_{q-n}(X;R), \forall q \in \mathbb{Z}$.
Επειδή η σύνθεση $\mathcal{H}_q(X;R) \to \mathcal{H}_q(\mathbb{S}^n \times X; R) \xrightarrow{\mathcal{H}_q(pr)} \mathcal{H}_q(X;R)$ είναι η ταυτοτική $Id_{\mathcal{H}_q(X;R)}$,
η μακρά ακριβής ακολουθία τού $(\mathbb{S}^n, \{P_+\}) \times X$ καταλήγει να είναι μια βραχεία, διασπώμενη ακολουθία
$$0 \to \mathcal{H}_q(X;R) \to \mathcal{H}_q(\mathbb{S}^n \times X; R) \xrightarrow{\mathcal{H}_q(pr)} \mathcal{H}_q((\mathbb{S}^n, \{P_+\}) \times X; R) \to 0$$
απ' όπου επαληθεύεται ο αρχικός ισχυρισμός. □

2.7.7. Εφαρμογή: Έστω $\mathbb{T}^m := \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1}_{m \text{ φορές}}$, $m \geq 1$, ο m-διάστατος τόρος.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν το ποιοι είναι οι μόδιοι ομολογίας τού κύκλου, καθώς και το Θεώρημα 2.7.6 (για $n=1$ και $X = \mathbb{T}^{m-1}$) λαμβάνουμε επαγωγικώς
$$\mathcal{H}_q(\mathbb{T}^m; R) \cong \bigoplus_{j=0}^{m} \left(\bigoplus_{k=0}^{\binom{m}{j}} \mathcal{H}_{q-k}(\{pt\}; R) \right) \Longrightarrow \boxed{\mathcal{H}_q(\mathbb{T}^m; R) \cong \begin{cases} R^{\binom{m}{q}}, & 0 \leq q \leq m \\ \{0\}, & \text{αλλιώς.} \end{cases}}$$

A4