

§ 1.16 Προσάρτηση κυττάρων

Σε αυτήν την ενότητα παρατίθεται μια ειδική (αλλά πολύ σημαντική, από θεωρητικής πλευράς) κατασκευή σπαικόχωρων δημιουργούμενων μέσω συνεχών απεικονίσεων $X \ni A \xrightarrow{f} Y$ (που "προσαρτούν" ή "επικολλούν" τον X στον Y , βλ. 1.10.11, σελ. 29).

1.16.1 Ορισμός Εάν ο X είναι ένας τοπολογικός χώρος και $f: S^{n-1} \rightarrow X$ μια συνεχής απεικόνιση, τότε μπορούμε να ορίσουμε τον χώρο $X \cup_f \mathbb{D}^n$ (όπως στον ορισμό 1.10.11, σελ. 29).

Εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

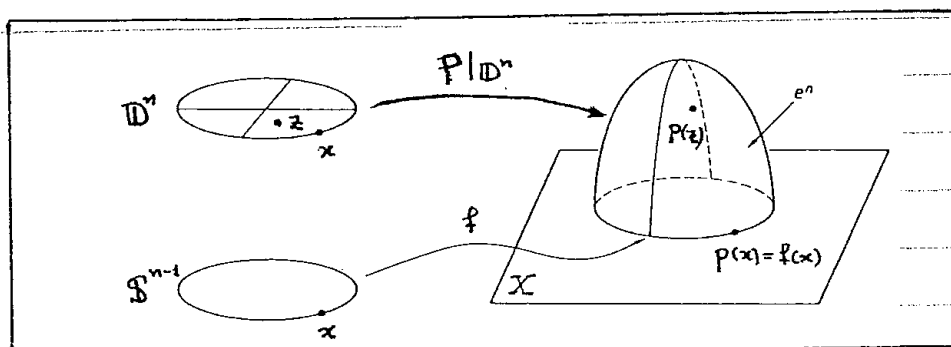
$$\begin{cases} p: \mathbb{D}^n \cup X \rightarrow X \cup_f \mathbb{D}^n & (\text{για τη συνήθη φυσική επιρροή}) \\ e^n := p(\mathring{\mathbb{D}}^n) \subseteq X \cup_f \mathbb{D}^n & (n\text{-κύτταρο}) \\ \tilde{z} := p|_X: X \hookrightarrow X \cup_f \mathbb{D}^n & (\text{συνήθης ένθεση}). \end{cases}$$

Ο $X \cup_f \mathbb{D}^n$ είναι η ένωση του X με το n -κύτταρο e^n .

(Ενίοτε, αντί του $X \cup_f \mathbb{D}^n$, γράφουμε απλώς $X \cup_f e^n$ ή $X \cup e^n$

και λέμε ότι ο $X \cup_f e^n$ προκύπτει από την προσαρτίσση του n -κύτταρου e^n μέσω της απεικόνισης f , καθώς

$X \cup_f e^n = X \cup \{p(z) \in e^n \mid z \in \mathbb{D}^n \text{ και } p(z) = f(z), \forall z \in S^{n-1}\}$,
πρβλ. 1.10.12 (i), σελ. 29.)



(Για $n=0$ η προσαρτίσση ενός 0 -κύτταρου στον X είναι η προσαρτίσση ενός και μόνον σημείου στον X .)

1.16.2 Πρόταση. Εάν η $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X$ είναι συνεχής και επιρριπτική, τότε ο περιορισμός $p|_{\mathbb{D}^n}: \mathbb{D}^n \rightarrow X \cup_f e^n$ είναι μια τοπολογική απεικόνιση. Κατά συνέπεια, ο $X \cup_f e^n$ δημιουργείται από την μπάλα \mathbb{D}^n ύστερα από την ταύτιση συνοριακών σημείων $y, z \in \mathbb{S}^{n-1}$ εάν και μόνον εάν $f(y) = f(z)$.

1.16.3. Ειδικές περιπτώσεις.

(i) Εάν $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X = \{\text{ένα σημείο}\}$, τότε $X \cup_f e^n \approx \mathbb{D}^n / \mathbb{S}^{n-1} \approx \mathbb{S}^n$ (βλ. 1.10.10(ii))

(ii) Εάν η $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X$ είναι σταθερή, τότε

$$X \cup_f e^n \approx X \vee (\mathbb{D}^n / \mathbb{S}^{n-1}) \approx X \vee \mathbb{S}^n$$

(iii) Εάν $f = \text{Id}_{\mathbb{S}^{n-1}}: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$, τότε $\mathbb{S}^{n-1} \cup_f e^n \approx \mathbb{D}^n$ (κατά τον 1.16.2).

(iv) Εάν η $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{D}^n$ είναι η συνήθης ένθεση, τότε

$$\mathbb{D}^n \cup_f e^n \approx \mathbb{S}^n$$

1.16.4. Το παράδειγμα των προβολικών χώρων. Εάν $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$

και $d = 1, 2, 4$ για $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ και $\mathbb{K} = \mathbb{H}$, αντιστοίχως,

τότε (όπως έχουμε δείξει στα 1.13.5 (v), σελ. 46) $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \approx \mathbb{S}^{d(n+1)-1} / \mathbb{S}^{d-1}$.

Η ένθεση $\mathbb{S}^{dn-1} \hookrightarrow \mathbb{S}^{d(n+1)-1}$ είναι συμβατή με τη δράση

της \mathbb{S}^{d-1} επ' αυτών. Έτσι προκύπτει το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{S}^{dn-1} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{S}^{d(n+1)-1} \\
 \downarrow p_{n-1} & \circlearrowleft & \downarrow p_n (= \text{φυσική επιρριψη}) \\
 \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n-1} & \xrightarrow{i_n} & \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \\
 & \text{(φυσική ένθεση)} &
 \end{array}$$

Για κάθε φυσικό αριθμό $k \geq 1$ ορίζουμε τη συνεχή απεικόνιση:

$$\sigma_k: \mathbb{D}^{dk} \rightarrow \mathbb{S}^{d(k+1)-1}, \quad \sigma_k(x_0, \dots, x_{k-1}) := (x_0, \dots, x_{k-1}, \sqrt{1 - \sum_{j=1}^{k-1} |x_j|^2})$$

Κατόπιν τούτου ορίζουμε την απεικόνιση:

$$\varphi_k = p_k \circ \sigma_k : \mathbb{D}^{dk} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^k$$

- Η φ_k είναι επιρριπτική. Προς τούτο αρκεί να δείχθει ότι για κάθε $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_k) \in \mathbb{S}^{d(k+1)-1}$ υπάρχει ένα $u \in \mathbb{D}^{dk}$ με $\varphi_k(u) = p_k(\xi)$.
Εάν $\xi_k = 0$, τότε επιλέγουμε το $u := (\xi_0, \dots, \xi_{k-1})$. Εάν $\xi_k \neq 0$, τότε επιλέγουμε το $u := (\xi_0 / \xi_k, \dots, \xi_{k-1} / \xi_k)$.

- Η $\varphi_k|_{\mathbb{D}^{dk}}$ είναι ενριπτική. Ας υποθέσουμε ότι $u, v \in \mathbb{D}^{dk}$ με $\|u\| < 1, \|v\| < 1$ και $\varphi_k(u) = \varphi_k(v)$. Τότε $p_k(u_0, \dots, u_{k-1}, \sqrt{1-\|u\|^2}) = p_k(v_0, \dots, v_{k-1}, \sqrt{1-\|v\|^2})$

Επειδή κάθε στοιχείο του $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^k$ διαδέχεται το πολύ έναν εκτερόσωπο, η τελευταία συντεταχμένη του οποίου είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός, έχουμε

$$(u_0, \dots, u_{k-1}, \sqrt{1-\|u\|^2}) = (v_0, \dots, v_{k-1}, \sqrt{1-\|v\|^2}),$$

οπότε $u = v$.

- Η $\varphi_k|_{\mathbb{D}^{dk}}$ είναι ομοιομορφισμός. Έστω $u \in \mathbb{D}^{dk}$. Εάν $\|u\| < 1$, τότε η τελευταία συντεταχμένη του $\sigma_k(u)$ είναι $\neq 0$ και $\varphi_k(u) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^k \setminus \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{k-1}$. Εάν $\|u\| = 1$, τότε η τελευταία συντεταχμένη του $\sigma_k(u)$ είναι $= 0$ και $\varphi_k(u) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{k-1}$. Και συνεπώς,

$$\varphi_k(\mathring{\mathbb{D}}^{dk}) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^k \setminus \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{k-1} \quad \text{και} \quad \varphi_k(\mathbb{S}^{dk-1}) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{k-1}.$$

Επειδή ο \mathbb{D}^{dk} είναι συμπαγής και ο $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^k$ χώρος Hausdorff, η φ_k είναι ταυτομική απεικόνιση (σύμφωνα με την πρόταση 1.10.8 (ii)).

Επειδή $\mathring{\mathbb{D}}^{dk} = \varphi_k^{-1}(\varphi_k(\mathring{\mathbb{D}}^{dk}))$, ο περιορισμός $\varphi_k|_{\mathring{\mathbb{D}}^{dk}} : \mathring{\mathbb{D}}^{dk} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^k \setminus \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{k-1}$

είναι ωσαύτως ταυτομική απεικόνιση και (ως αμφιριπτική)

ένας ομοιομορφισμός. Θέτουμε $e^{dk} := \mathring{\mathbb{D}}^{dk}$, λοιπόν έχουμε $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^k \setminus \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{k-1} \cong e^{dk}$

κι επομένως

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \cong e^0 \cup e^d \cup e^{2d} \cup \dots \cup e^{nd}.$$

1.16.5. Το παράδειγμα των χεικικευμένων χώρων φακού.

Έστω $\Gamma_{2n-1}(p; q_1, \dots, q_n) := \mathbb{S}^{2n-1} / \mathbb{Z}_p$ όπως στον οφ. 1.14.5, σελ. 57. Η \mathbb{Z}_p δρα επί της $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ ελεύθερα, έχουσα τη δράση $\rho(z_1, \dots, z_n) := (e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}q_1}{p}} z_1, \dots, e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}q_n}{p}} z_n)$ ως γεννητορά της (Αυτή δράζει τον j -οστό παράγοντα \mathbb{C} επί \mathbb{C} κατά $\frac{2\pi q_j}{p}$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$.)

Για τον χαρακτηρισμό του $\Gamma_{2n-1}(p; q_1, \dots, q_n) \setminus \Gamma_{2n-3}(p; q_1, \dots, q_{n-1})$ που αναλογεί σε ότι προείπαμε για τους προβολικούς χώρους στο 1.16.4. Θα καταφύγουμε στην περιγραφή των χεικικευμένων χώρων φακού που δίδεται στο σύγγραμμα του A. Hatcher: "Algebraic Topology", Cambridge University Press, 2002, σελ. 145.

Διακρίνοντας τον μοναδιαίο κύκλο $\mathbb{C} (\cong \mathbb{S}^1)$, τον ενταχμένο στον n -οστό παράγοντα \mathbb{C} του καρτεσιανού γινόμενου \mathbb{C}^n , σε p ίσα τόξα με τα σημεία $e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}j}{p}} \in \mathbb{C}$, $j \in \{1, \dots, p\}$, ως ακριστοίχει κορυφές και συνδέοντας την j -οστή κορυφή με τη μοναδιαία βφαίρα $\mathbb{S}^{2n-3} \subset \mathbb{C}^{n-1}$ μέσω τόξων μεγασκικών επί της $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$, λαμβάνουμε μια $(2n-2)$ -διάστατη πλάτα $\mathbb{D}_j^{2n-2} (\cong \mathbb{D}^{2n-2})$ με $\partial \mathbb{D}_j^{2n-2} = \mathbb{S}^{2n-3}$, $\forall j \in \{1, \dots, p\}$. Η \mathbb{D}_j^{2n-2} συνίσταται από τα σημεία

$$\cos \theta (0, 0, \dots, 0, e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}j}{p}}) + \sin \theta (z_1, \dots, z_{n-1}, 0), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Κατ' αναλογίαν, συνδέοντας το j -οστό τόξο του (υποδιαφεθέντος) κύκλου \mathbb{C} με τη μοναδιαία βφαίρα $\mathbb{S}^{2n-3} \subset \mathbb{C}^{n-1}$ λαμβάνουμε μια πλάτα $\mathbb{D}_j^{2n-1} (\cong \mathbb{D}^{2n-1})$ με $\partial \mathbb{D}_j^{2n-1} = \mathbb{D}_j^{2n-2} \cup \mathbb{D}_{j+1}^{2n-2}$ (όπου οι υποδείκτες οφείλουν να διαβάζονται "mod p ").

Η δράση ρ απεικονίζει την $\mathbb{S}^{2n-3} \subset \mathbb{C}^{n-1}$ στον εαυτό της και βφαίρα του \mathbb{C} κατά $\frac{2\pi q_n}{p}$. Μια κατάλληλη δύναμη του ρ , ήτοι ρ^r , όπου r ο μοναδικός φυσικός αριθμός με $r q_n \equiv 1 \pmod{p}$, στέλνει καθένα των \mathbb{D}_j^{2n-2} και \mathbb{D}_j^{2n-1} να απεικονισθεί στην ακριβώς επόμενη της.

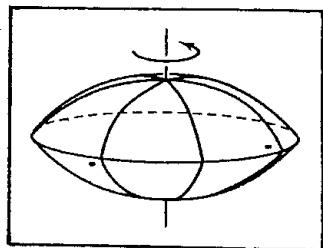
Εν είδει
ημιγραφίων
της \mathbb{S}^{2n-2}
ηφ. 1.5.3
(iv), σελ. 10

Επειδή η ρ^r είναι τάξεως p , έχουμε $\mathbb{Z}_p \cong \langle \rho^r \rangle$, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε τον $\Gamma_{2n-1}(p; q_1, \dots, q_n)$ ως τον πηλικόχωρο τον δημιουργούμενο από μια \mathbb{D}_j^{2n-1} ύστερα από ταύτιση των δύο μπαλιών $\mathbb{D}_j^{2n-2}, \mathbb{D}_{j+1}^{2n-2}$ του συνόρου του μέσω της ρ^r .

Παρατήρηση: Όταν $n=2$, η \mathbb{D}_j^3 είναι ομομορφική μιας "φακοειδούς" 3-διάστατης μπαλάς και ο $\Gamma_3(p; q_1, q_2)$

είναι ο πηλικόχωρος ο δημιουργούμενος από αυτήν ύστερα από την ταύτιση των δύο ημισφαιρίων της μέσω της ρ^r .

Η εν λόγω ταύτιση ισοδυναμεί με τη σύνθεση ενός κατοπτρισμού ως προς το επίπεδο του κυκλικού στεφανιού του φακού, ο οποίος στέλνει το ένα ημισφαίριο στο άλλο, και μιας στροφής του ενός ημισφαιρίου κατά $\frac{2\pi r q_1}{r}$. Το κάτωθι σχήμα δείχνει τον φακό όταν $p=7, r q_1=2$, με τα δύο μαρκαρισμένα επίπεδα υποδηλώνοντα την περιγραφείσα ταύτιση.



Από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}^{n-1} \supset \mathbb{S}^{2n-3} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n \\
 \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \text{(φυσική Επίρριψη)} \\
 \Gamma_{2n-3}(p; q_1, \dots, q_{n-1}) & \xrightarrow{\quad} & \Gamma_{2n-1}(p; q_1, \dots, q_n)
 \end{array}$$

βυνάχουμε (όπως στο 1.16.4) ότι

$$\Gamma_{2n-1}(p; q_1, \dots, q_n) \approx \Gamma_{2n-3}(p; q_1, \dots, q_{n-1}) \cup e^{2n-2} \cup e^{2n-1}$$

όπου $e^{2n-1} := \mathbb{D}_j^{2n-1}$ και $e^{2n-2} := \left\{ \begin{array}{l} \text{Εξωτερικό σιαβήριτο των ταυτισμένων} \\ \text{μπαλιών } \mathbb{D}_j^{2n-2}, \mathbb{D}_{j+1}^{2n-2} \end{array} \right\}$,
 οπότε:

$$\Gamma_{2n-1}(p; q_1, \dots, q_n) \approx e^0 \cup e^1 \cup e^2 \cup \dots \cup e^{2n-1}$$

1.16.6. Το παράδειγμα των συνεκτικών, κλειστών επιφανειών.

Οι συνεκτικές, κλειστές επιφάνειες μπορούν να αποκτηθούν από τη μονομοριακή ένωση (πεπερασμένοι πλήθος) μοναδιαίων κύκλων είτε από πρόσδεση ενός και μόνον 2-κυττάρου μέσω καταλλήλων απεικονίσεων, τις οποίες και θα περιγράψουμε με διεξοδικώς.

- Έστω $r \in \mathbb{N}$. Ο "j-οστός άξονας συνεκταχμένων" Δ_j εντός του χώρου γινομένου $\underbrace{\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1}_{r \text{ φορές}}$, $1 \leq j \leq r$, υπό την έννοια του 1.10.10, (iii) α), βελ. 27-28, r φορές είναι ένας κύκλος $\Delta_j = \mathbb{S}^1 (\cong \mathbb{S}^1)$ και $\Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_r \cong \underbrace{\mathbb{S}^1 \vee \dots \vee \mathbb{S}^1}_{r \text{ φορές}} \subseteq \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1}_{r \text{ φορές}}$ (με σημείο αναφοράς καθενός \mathbb{S}^1 το 1).

- Για $j=1, 2, \dots, r$ και $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε την απεικόνιση

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\} = \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{i_j^n} & \mathbb{S}^1 \vee \dots \vee \mathbb{S}^1 \\ \downarrow \Psi & & \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\quad} & i_j^n(z) := (1, 1, \dots, 1, z^n, 1, \dots, 1) \end{array}}$$

(για $n=1$, $i_j^1 = i_j = n$ ευθείας ένθεση) ↑ j-οστή θέση

- Για παχισμένο $m \in \mathbb{N}$ και $k \in \{1, \dots, m\}$ ορίζουμε

$$B_k := \left\{ \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}t}{m}\right) \mid k-1 \leq t \leq k \right\}$$

και την απεικόνιση

$$f_k : B_k \longrightarrow \mathbb{S}^1, \quad \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}t}{m}\right) \longmapsto \exp(2\pi\sqrt{-1}(t-k+1)).$$

Το B_k είναι ένα τόξο μήκους $2\pi/m$, ενώ η f_k περιελίσσει αυτό το τόξο περί τον \mathbb{S}^1 . Εν συνεχεία, για τυχόντες $1 \leq j_1, \dots, j_m \leq r$ και $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{Z}$, συμβολίζουμε ως

$$\boxed{i_{j_1}^{n_1} \cdot i_{j_2}^{n_2} \cdot \dots \cdot i_{j_m}^{n_m} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \vee \dots \vee \mathbb{S}^1} \quad (*)$$

Εκείνη την απεικόνιση, η οποία ταυτίζεται με την $i_{j_k}^{n_k} \circ f_k$ επί του B_k για κάθε $k \in \{1, \dots, m\}$, και είναι συνεχής.

Η εν λόγω απεικόνιση διαθέτει μια απλή γεωμετρική ερμηνεία:
 Εάν ένα σημείο $z \in \mathbb{S}^1$, ξεκινώντας από το $1 \in \mathbb{S}^1$, διατρέχει τον κύκλο \mathbb{S}^1 , τότε η εικόνα του μέσω της $(*)$ διατρέχει $|n_1|$ φορές τον $\mathbb{S}^1_{j_1}$, καθώς και $|n_2|$ φορές τον $\mathbb{S}^1_{j_2}$ κ.ο.κ. (και μάλιστα κατά την ίδια ή την αντίθετη φορά, αναλόγως με το κατά πόσον ο εκάστοτε n_k είναι θετικός ή αρνητικός). Μέσω της $(*)$ μπορεί κανείς να επικοληθεί στον $\mathbb{S}^1_1 \vee \dots \vee \mathbb{S}^1_r$ ένα 2-κύτταρο (βλ. 1.16.1, σελ. 61).

- Επί παραδείγματι, για $r=1$ και $g_n := z_1^n: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1_1 \approx \mathbb{S}^1$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{g_n} & \mathbb{S}^1_1 \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{g_n} & \mathbb{Z} \end{array}$$

Προσαρτώντας στον \mathbb{S}^1 ένα 2-κύτταρο μέσω της g_n λαμβάνουμε

$$\mathbb{S}^1 \cup_{g_0} e^2 \approx \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, \quad \mathbb{S}^1 \cup_{g_1} e^2 \approx \mathbb{D}^2, \quad \mathbb{S}^1 \cup_{g_n} e^2 \approx \mathbb{S}^1 \cup_{g_n} e^2.$$

(1.16.3(ii)) (1.16.3(iii))

Κατά την πρόταση 1.16.2 ο $\mathbb{S}^1 \cup_{g_n} e^2$ δημιουργείται από την πτώση \mathbb{D}^2 ύστερα από την ταύτιση δυο σημείων $x, y \in \mathbb{S}^1 = \partial \mathbb{D}^2$ εάν και μόνον εάν $x^n = y^n$. Όταν $n=2$, τούτο σημαίνει ότι εκτελείται ταύτιση των αντιποδικών σημείων του \mathbb{S}^1 , οπότε $\mathbb{S}^1 \cup_{g_2} e^2 \approx \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Αυτός ο ομοιομορφισμός δίδει το ένωμα για το ακόλουθο χέρι

1.16.7 Θεώρημα. Έστω g ένας φυσικός αριθμός ≥ 1 . Εάν προσαρτίσουμε στη μονοσημιακή ένωση $\mathbb{S}^1_1 \vee \dots \vee \mathbb{S}^1_{2g}$ (αντ., $\mathbb{S}^1_1 \vee \dots \vee \mathbb{S}^1_g$)

ένα 2-κύτταρο μέσω της απεικόνισης

$$z_1 z_2 z_1^{-1} z_2^{-1} \dots z_{2g-1} z_{2g} z_{2g-1}^{-1} z_{2g}^{-1}: \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1_1 \vee \dots \vee \mathbb{S}^1_{2g}$$

(και αντιστοίχως, μέσω της $z_1^2 z_2^2 \dots z_g^2: \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1_1 \vee \dots \vee \mathbb{S}^1_g$),

τότε αποκτούμε την F_g (βλ. 1.11.12) (και αντιστοίχως την N_g , βλ. 1.11.13).

Απόδειξη. Έστω $h = z_1 z_2 z_1^{-1} z_2^{-1} \dots z_{2g-1} z_{2g} z_{2g-1}^{-1} z_{2g}^{-1}$ η εν λόγω απει-

κόνιση και έστω $X_g := \mathbb{S}_1^1 \vee \dots \vee \mathbb{S}_{2g}^1 \cup_{\mathbb{Z}} e^2$. Κατά την πρόταση 1.16.2 έχουμε $X_g \simeq \mathbb{D}^2/\mathcal{R}'$, όπου

$$x \mathcal{R}' y \iff \underset{\text{ορσ}}{x, y} \in \mathbb{S}^1 = \partial \mathbb{D}^2 \text{ και } h(x) = h(y).$$

Από τον ορισμό της h διαβλέπουμε ότι ο κύκλος \mathbb{S}^1 διαίρεται σε $4g$ ίσα τμήτα B_1, B_2, \dots, B_{4g} και η \mathcal{R}' ταυτίζει το B_j με το B_{j+2} , $\forall j \in \{1, 2, \dots, 4g-2\}$, και μάλιστα κατά την αντίθετη φορά. Από την άλλη μεριά,

$$F_g := E_{4g}/\mathcal{R} \quad (\text{όπως στο 1.11.12, σελ. 38}).$$

Ο ομοιομορφισμός

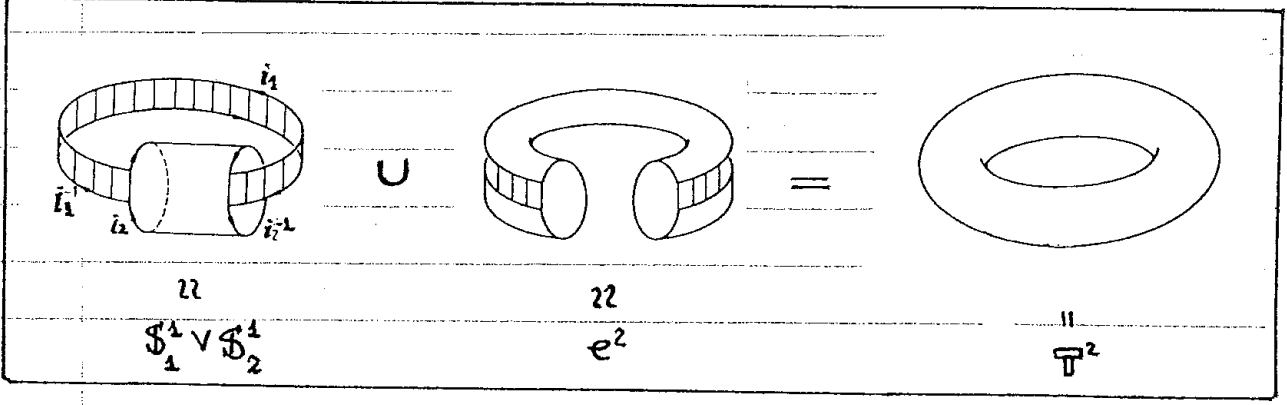
$$E_{4g} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{D}^2, \quad tx \mapsto \frac{tx}{\|x\|}, \quad \forall x \in \partial E_{4g}, \forall t \in [0, 1],$$

καθώς και ο αντίστροφός του είναι συμβατοί προς τις \mathcal{R} και \mathcal{R}' .

Κατά συνέπεια, $F_g \simeq X_g$ (βλ. πρόταση 1.10.4, σελ. 23-24).

Η απόδειξη για την N_g είναι ανάλογη και αφήνεται ως άσκηση. □

1.16.8. Σημείωση. Βάσει του θεωρήματος 1.16.7 η μονοσημιακή ένωση $\mathbb{S}_1^1 \vee \dots \vee \mathbb{S}_{2g}^1$ μπορεί να εμψυτευθεί κατά τέτοιο τρόπο εντός της F_g , ώστε το συμπλήρωμά της να είναι ένα 2-κύτταρο. Ως εκ τούτου, κατόπιν αποκοπής $2g$ (στελεζωμένων) περιγραμμάτων κύκλων από την F_g αποκότουμε ένα 2-κύτταρο. (Το ίδιο συμβαίνει και για την N_g κοινοτάς χρήση g περιγραμμάτων κύκλων.) Το κάτωθι σχήμα εζηγεί εποπτικώς αυτή τη διαδικασία για τον τόπο $\mathbb{T}^2 = F_1$:



§ 1.17 Ομοτοπία μεταξύ συνεχών απεικονίσεων και ομοτοπικός τύπος

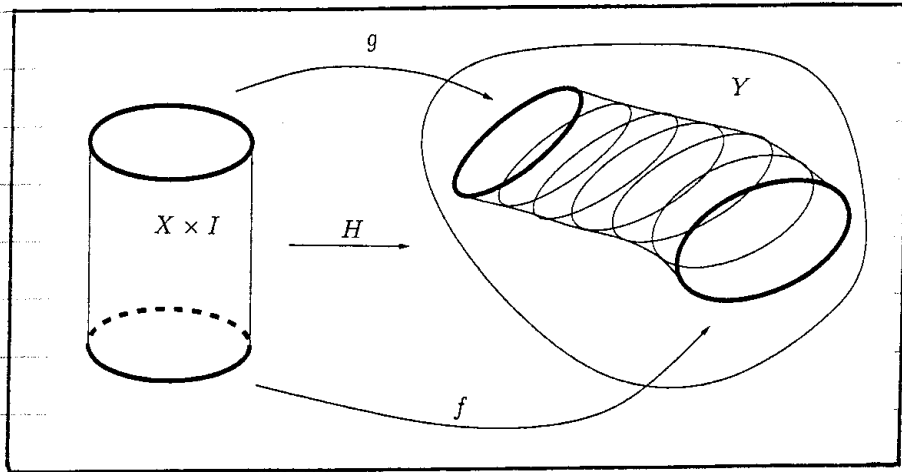
Η "ομοτοπία" αποτελεί μία από τις πλέον θεμελιώδεις έννοιες της Τοπολογίας.

1.17.1 Ορισμός. Εάν οι X, Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι και οι $f, g: X \rightarrow Y$ δυο συνεχείς απεικονίσεις, τότε μια συνεχής απεικόνιση $H: X \times I \rightarrow Y$ (όπου $I := [0, 1]$)

καλείται ομοτοπία από την f στην g (και οι f, g ομότοπες) όταν $H(x, 0) = f(x)$ και $H(x, 1) = g(x)$, $\forall x \in X$.

Κάθε ομοτοπία $H: X \times I \rightarrow Y$ ορίζει μια μονοπαραμετρική οικογένεια $H_t(x) := H(x, t)$, $0 \leq t \leq 1$, με $H_0 = f$ και $H_1 = g$.

Συμβολισμός: $f \underset{\text{ομοτοπία}}{\simeq} g \iff$ οι f, g είναι ομότοπες.



1.17.2 Πρόταση. Η " \simeq " είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί τις κλάσεις όλων των συνεχών απεικονίσεων $f: X \rightarrow Y$ μεταξύ δυο τοπολογικών χώρων.

1.17.3 Πρόταση. Η " \simeq " είναι συμβατή με τη σύνθεση συνεχών απεικονίσεων, δηλ. εάν οι $f, g: X \rightarrow Y$ και $f', g': Y \rightarrow Z$ είναι συνεχείς, τότε ισχύει συνεπαγωγή: $(f \simeq g \text{ και } f' \simeq g' \implies f' \circ f \simeq g' \circ g)$.

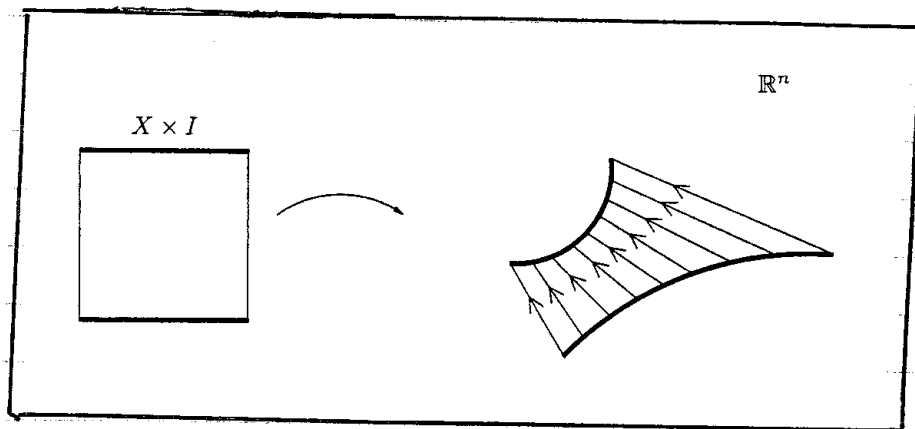
Οι αποδείξεις αφήνονται ως άσκηση.

1.17.4. Ορισμός. Μια συνεχής απεικόνιση $f: X \rightarrow Y$ μεταξύ δυο τοπολογικών χώρων καλείται μηδενομοιοτική όταν $f \simeq c$, όπου c μια σταθερή απεικόνιση (δηλ. $c(x) := y_0, \forall x \in X$ και κάποιο $y_0 \in Y$). Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται συσταλτός όταν $\text{Id}_X \simeq c$, όπου c μια σταθερή απεικόνιση, δηλαδή όταν η ταυτοτική απεικόνιση είναι μηδενομοιοτική.

1.17.5. Παραδείγματα. (i) Εάν οι $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι οι απεικονίσεις οι οριζόμενες από τους τύπους $f(x) := (x, x^2)$ και $g(x) := (x, x), \forall x \in \mathbb{R}$, τότε η $H(x, t) := (x, x^2 - tx^2 + tx)$ είναι μια ομοτοπία από την f στην g .

(ii) Έστω X τυχόν τοπολογικός χώρος. Τότε οιοσδήποτε συνεχείς απεικονίσεις $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ομότοπες. Μια συγκεκριμένη ομοτοπία από την f στην g είναι η λεγόμενη ομοτοπία των ευθύγραμμων τμημάτων που ορίζεται από τον τύπο

$$H(x, t) := (1-t)f(x) + tg(x), \quad \forall (x, t) \in X \times I.$$

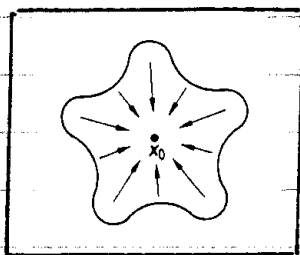


(iii) Έστω Y τυχόν τοπολογικός χώρος. Τότε κάθε συνεχής απεικόνιση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow Y$ είναι μηδενομοιοτική. (Αρκεί να θεωρηθεί η ομοτοπία $H(x, t) := f((1-t)x), \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times I$.)

(iv) Η σύνθεση μιας μηδενομοιοτικής απεικόνισης με μια τυχόν συνεχή απεικόνιση είναι μηδενομοιοτική (βλ. 1.17.3).

(v) Οι συσταλτοί τοπολογικοί χώροι είναι δρομοδυνεκτικοί (και κατ' επέκτασιν συνεκτικοί). Το να είναι ένας χώρος συσταλτός αποτελεί μια τοπολογική ιδιότητα. (Εάν ο X είναι συσταλτός, τότε και κάθε τοπολογικός χώρος ομοιομορφικός τού X είναι συσταλτός).
 Επί παραδείγματι, μέσω της ομοιομορφίας $H(x, t) := (1-t)x$ διαπιστώνουμε ότι οι χώροι \mathbb{R}^n και \mathbb{D}^n είναι συσταλτοί.
 Ως εκ τούτου, όλα τα κύτταρα και όλες οι μπάλες είναι χώροι συσταλτοί.

(vi) Ένας υπόχωρος X τού \mathbb{R}^n καλείται αστρόμορφος όταν υπάρχει ένα σημείο $x_0 \in X$, τέτοιο ώστε το ευθύγραμμο τμήμα το ορισμένο από το x_0 και το x ανήκει στον X , $\forall x \in X$. Η ομοιομορφία $H(x, t) := (1-t)x + tx_0$, $\forall (x, t) \in X \times I$, δείχνει ότι οι αστρόμορφοι (και, ιδιαίτέρως, οι κυρτοί) υπόχωροι τού \mathbb{R}^n είναι συσταλτοί.

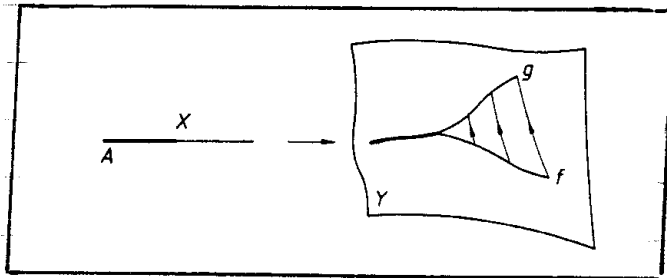


(vii) Έστω X τυχών τοπολογικός χώρος. Κάθε συνεχής, μη επιρριπτική απεικόνιση $f: X \rightarrow \mathbb{S}^n$ είναι μηδενομοτομική. Έστω $y_0 \in \mathbb{S}^n \setminus f(X)$.

Πρώτη απόδειξη: Κάθε f αυτού τού είδους είναι η σύνθεση τής $X \rightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{y_0\}$, $x \mapsto f(x)$, με την ένθεση $\mathbb{S}^n \setminus \{y_0\} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$.
 Επειδή το κύτταρο $\mathbb{S}^n \setminus \{y_0\}$ είναι συσταλτό, η f είναι μηδενομοτομική.

Δεύτερη απόδειξη: Το ευθύγραμμο τμήμα το συνδέει τα $f(x)$ και $-y_0$ εντός τού \mathbb{R}^{n+1} δεν περιέχει το $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ (διότι αλλιώς θα είχαμε $y_0 = f(x) \in f(X)$). Επομένως η $H(x, t) = \frac{(1-t)f(x) - ty_0}{\|(1-t)f(x) - ty_0\|}$ είναι μια ομοιομορφία από την f στη σταθερή απεικόνιση $x \mapsto -y_0$, $\forall x \in X$.

1.17.6. Ορισμός Εάν οι X και Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι, οι $f, g: X \rightarrow Y$ δυο συνεχείς απεικονίσεις και ο A ένας υπόχωρος του X , ζέτουμε ώστε να ισχύει $f|_A = g|_A$, τότε οι f, g ονομάζονται ομότιπες σχετικώς προς τον A (συμβ. $f \simeq g (\text{ε}x. A)$) όταν υπάρχει μια ομοτοπία $H: X \times I \rightarrow Y$ από την f στην g με $H(a, t) = f(a) = g(a), \forall a \in A$. (Τα σημεία $f(a) = g(a), a \in A$, δεν επηρεάζονται κατά την εφαρμογή της H .)



- Η " $\simeq (\text{ε}x. A)$ " είναι σχέση ισοδυναμίας όπως και η " \simeq " (βλ. 1.17.2).
- Η ομοτοπία "συμπεριφέρεται καλώς" κατά τη δόμηση πηλίκων χώρων.

1.17.7. Πρόταση. Έστω $p: X \rightarrow Y$ μια ταυτοσημική απεικόνιση (υπό την έννοια του ορισμού 1.10.7, σελ. 24) και έστω $H: Y \times I \rightarrow Z$ μια απεικόνιση, ζέτουμε ώστε η $H \circ (p \times \text{Id}_I): X \times I \rightarrow Z$ να είναι μια ομοτοπία. Τότε και η H είναι μια ομοτοπία.

Απόδειξη: Εξ υποθέσεως, η $H \circ (p \times \text{Id}_I)$ είναι συνεχής. Επειδή το I είναι συμπαγές, είναι εύκολο να δείχθει ότι η $p \times \text{Id}_I$ είναι ταυτοσημική, οπότε η H οφείλει να είναι συνεχής (επί τη βάση του 1.10.7 (iii), σελ. 24). \square

1.17.8. Πρόταση. Εάν οι X, Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι, επί των οποίων έχουν ορισθεί σχέσεις ισοδυναμίας \mathcal{R} και \mathcal{S} , αντιστοίχως, και η $H: X \times I \rightarrow Y$ μια ομοτοπία συμβατή με αυτές (δηλ. $x \sim_{\mathcal{R}} x' \Rightarrow H(x, t) \sim_{\mathcal{S}} H(x', t), \forall t \in I$), τότε η H ελέγχει μια ομοτοπία $\bar{H}: X/\mathcal{R} \times I \rightarrow Y/\mathcal{S}$.

$$([x]_{\sim_{\mathcal{R}}}, t) \mapsto [H(x)_{\sim_{\mathcal{S}}}, t]_{\sim_{\mathcal{S}}}$$

1.17.9. Παράδειγμα Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και έστω $\text{cone}(X) := X \times I / X \times \{1\}$ ο κώνος υπεράνω του X (ο ορισθείς στο 1.10.10 (ii), σελ. 26). Η απεικόνιση

$$H: (X \times I) \times I \rightarrow X \times I, \quad ((x, s), t) \mapsto (x, (1-t)s + t),$$

είναι μια ομοτοπία με $H(X \times I, t) = X \times \{1\}$, $\forall t \in I$.

Κατά συνέπεια υπάρχει μια ομοτοπία $\bar{H}: \text{cone}(X) \times I \rightarrow \text{cone}(X)$.

Επειδή $\bar{H}_0 = \text{Id}_{\text{cone}(X)}$ και $\bar{H}_1(\text{cone}(X)) = [X \times \{1\}] \sim$,

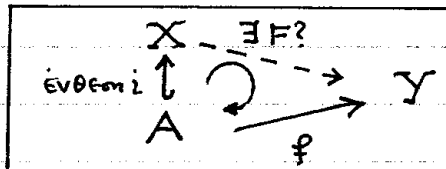
ο κώνος $\text{cone}(X)$ είναι χώρος συσταγής.

Ένα σημαντικό πρόβλημα της Τοπολογίας αποτελούν ειδικές περιπτώσεις του λεγόμενου "πρόβληματος της επέκτασης":

Εάν δοθεί ένας τοπολογικός χώρος X , ένας υπόχωρος $A \subseteq X$,

καθώς και μια συνεχής απεικόνιση $f: A \rightarrow Y$, υφίσταται

κάποια συνεχής απεικόνιση $F: X \rightarrow Y$, ούτως ώστε $f = F|_A$;



Επί παραδείγματι, δυο συνεχείς απεικονίσεις $f_0, f_1: X \rightarrow Y$

είναι ομοτοπικές εάν και μόνον εάν η απεικόνιση

$$(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \rightarrow Y, \quad \begin{aligned} (x, 0) &\mapsto f_0(x) \\ (x, 1) &\mapsto f_1(x) \end{aligned}$$

είναι (συνεχώς) επέκτασιμη επί του κυλίνδρου $X \times I$.

(Εκ τούτου, το πρόβλημα (υπάρξεως) ομοτοπίας αποτελεί ειδική περίπτωση του "πρόβληματος της επέκτασης", το οποίο είναι επιλύσιμο μόνον υπό "συγκεκριμένους περιορισμούς".)

1.17.10. Ορισμός Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Ένας

υπόχωρος $A \subseteq X$ καλείται σύμπυξη του X όταν υπάρχει μια απεικόνιση σύμπυξης $\gamma: X \rightarrow A$, ήτοι μια συνεχής απεικόνιση με $\gamma|_A = \text{Id}_A$.

74

- 1.17.11. Παραδείγματα. (i) Κάθε τ.χ. X είναι σύμπυξη τού εαυτού του. Επίσης, κάθε σημείο x ενός τ.χ. X είναι σύμπυξη τού X .
- (ii) Εάν ο B είναι σύμπυξη τού A και ο A σύμπυξη τού X , τότε και ο B είναι σύμπυξη τού X .
- (iii) Εάν δοθούν δυο τοπολογικοί χώροι X, Y , τότε ο υπόχωρος X (ή ο υπόχωρος Y) της μονοσημειακής ενώσεως $X \vee Y$ είναι σύμπυξη της $X \vee Y$. Επίσης, εάν $y_0 \in Y$, τότε ο $X \times \{y_0\}$ είναι σύμπυξη τού $X \times Y$.
- (iv) Οι συμπυξείς χώροι Hausdorff είναι πάντοτε κλειστοί υπόχωροι.

1.17.12. Πρόταση. Δοθέντων δυο τοπολογικών χώρων X, Y και ενός κλειστού υπόχωρου $A \subseteq X$ μια συνεχής απεικόνιση $f: A \rightarrow Y$ είναι (συνεχώς) επεκτάσιμη επί τού X εάν και μόνον εάν ο Y είναι σύμπυξη τού $Y \cup_f X$ (βλ. 1.10.11).

Απόδειξη: Έστω $p: X \vee Y \rightarrow Y \cup_f X$ η φυσική επίρριψη. Όταν η $F: X \rightarrow Y$ είναι μια συνεχής επέκταση της f , τότε η σύνθεση $(F + Id_Y) \circ p^{-1}: Y \cup_f X \rightarrow Y$ είναι μια απεικόνιση συμπύξεως (πρβλ. 1.10.4, σελ. 30). Και αντιστρόφως εάν η $r: Y \cup_f X \rightarrow Y$ είναι μια απεικόνιση συμπύξεως, τότε η σύνθεση $F := r \circ (p|_X)$ είναι μια συνεχής επέκταση της f . \square

1.17.13. Πρόταση. Έστω Y τυχόν τοπολογικός χώρος. Μια συνεχής απεικόνιση $f: S^n \rightarrow Y$ είναι μηδενομοτοπική εάν και μόνον εάν είναι (συνεχώς) επεκτάσιμη επί της μπάλας D^{n+1} (δηλαδή εάν και μόνον εάν ο Y είναι σύμπυξη τού $Y \cup_f e^{n+1}$).

Απόδειξη: Έστω $F: D^{n+1} \rightarrow Y$ μια συνεχής επέκταση της f .

Τότε η $H: S^n \times I \rightarrow Y$, $(x, t) \mapsto H(x, t) := F(tx)$,

είναι μια ομοτοπία με $H_0 = \text{σταθερά}$ και $H_1 = f$. Εάν αντιστρόφως η $H: \mathbb{S}^n \times I \rightarrow Y$ είναι μια ομοτοπία με $H(\mathbb{S}^n \times \{0\}) = y_0 \in Y$ και $H(x, 1) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{S}^n$, τότε η απεικόνιση

$$p: \mathbb{S}^n \times I \rightarrow \mathbb{D}^{n+1}, \quad p(x, t) := tx, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{S}^n \times I,$$

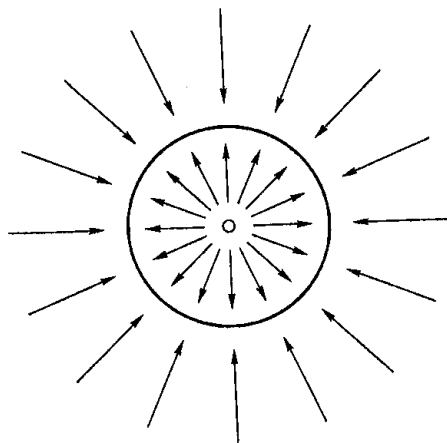
είναι ταυτιστική, οπότε η $F := H \circ p^{-1}$ είναι συνεχής (πρβλ. 1.10.4, βελ. 30) και $F|_{\mathbb{S}^n} = f$. \square

Μια συνεχής απεικόνιση $f: X \rightarrow Y$ μεταξύ τοπολογικών χώρων είναι ομοιομορφισμός όταν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $g: Y \rightarrow X$ με $g \circ f = \text{Id}_X$ και $f \circ g = \text{Id}_Y$. Εάν κανείς αντικαταστήσει τις ισότητες "=" με τη σχέση ομοτοπίας " \simeq ", τότε προκύπτει η ακόλουθη σημαντική έννοια (της "ομοτοπικής ισοδυναμίας"):

1.17.14 Ορισμός. Μια συνεχής απεικόνιση $f: X \rightarrow Y$ μεταξύ τοπολογικών χώρων καλείται ομοτοπική ισοδυναμία όταν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $g: Y \rightarrow X$ με $g \circ f \simeq \text{Id}_X$ και $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$. Λέμε ότι δύο τοπολογικοί χώροι X, Y είναι ομοτοπικώς ισοδύναμοι ή ότι διαδέχονται τον ίδιο ομοτοπικό τύπο (συμβ. $X \simeq Y$) όταν υπάρχει μια ομοτοπική ισοδυναμία $f: X \rightarrow Y$.

1.17.15 Παράδειγμα. Ο $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ έχει τον ομοτοπικό τύπο της σφαίρας \mathbb{S}^{n-1} . Πράγματι εάν $i: \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ είναι η συνήθης ένθεση και $g: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$, $g(x) := \frac{x}{\|x\|}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, τότε $g \circ i \simeq \text{Id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ και $f \circ g \simeq \text{Id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ μέσω της $H(x, t) := (1-t)x + tg(x)$.

Η περίπτωση, κατά την οποία $n=2$, εικονογραφείται στο παραπλευρό σχήμα. Τα βέλη υποδεικνύουν το πώς τα σημεία κινούνται κατά τη σταδιακή εφαρμογή της ομοτοπίας H .



Φυσικά, ομοιομορφικοί χώροι διαθέτουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο. Για τις συνεκτικές, καλειστές επιφάνειες ισχύει κάτι ακόμη πιο ισχυρό:

1.17.16. Θεώρημα Δυο συνεκτικές, καλειστές επιφάνειες είναι ομοιομορφικές εάν και μόνον εάν είναι ομοτοπικώς ισοδύναμες.

Ωστόσο, υπάρχουν πάμπολλα συνεκτικά, συμπαγή τοπολογικά πολυπλάγια (χωρίς όνομα) διαστάσεως ≥ 3 , τα οποία είναι ομοτοπικώς ισοδύναμα αλλά όχι ομοιομορφικά.

1.17.17. Θεώρημα (J.H.C. Whitehead, 1941) Δυο χώροι φανών $\mathbb{L}(p, q)$ και $\mathbb{L}(p', q')$ είναι ομοτοπικώς ισοδύναμοι εάν και μόνον εάν $p = p'$ και $qq' \equiv \pm 1 \pmod{p}$ για κάποιον $n \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη: βλ. P.J. Hilton & S. Wylie: "Homology Theory", Cambridge University Press, 1953, σελ. 223. \square

1.17.18. Εφαρμογή. Τα 3-διάστατα (συνεκτικά, συμπαγή) τοπολογικά πολυπλάγια (χωρίς όνομα) $\mathbb{L}(\mathbb{Z}, 1)$ και $\mathbb{L}(\mathbb{Z}, 2)$ είναι ομοτοπικώς ισοδύναμα (βάσει του θεωρήματος 1.17.17, διότι $-2 \equiv 3^2 \pmod{\mathbb{Z}}$) αλλά $\mathbb{L}(\mathbb{Z}, 1) \not\cong \mathbb{L}(\mathbb{Z}, 2)$, καθόσον $2 \not\equiv \pm 1 \pmod{\mathbb{Z}}$ (βλ. Θεώρημα 1.14.4, σελ. 56).

1.17.19. Πρόταση Ένας τοπολογικός χώρος X είναι ευσταγτός εάν και μόνον εάν έχει τον ομοτοπικό τύπο ενός σημείου.

Απόδειξη: Δοθέντος ενός σημείου $x_0 \in X$, σημειώνουμε ως $c: X \rightarrow \{x_0\}$ τη σταθερή απεικόνιση και ως $i: \{x_0\} \hookrightarrow X$ τη συνήθη ένθεση. Εάν $\text{Id}_X \cong c$, τότε οι απεικονίσεις $X \xrightarrow{c} \{x_0\}$ δείχνουν ότι $X \cong \{x_0\}$. Και αντιστρόφως: Εάν μας δοθούν συνεχείς απεικονίσεις $X \xrightarrow{f} \{x_0\}$, με $g \circ f \cong \text{Id}_X$ και $f \circ g \cong \text{Id}_{\{x_0\}}$, τότε η Id_X είναι ομότοπη ως $x \mapsto g(x_0)$. \square

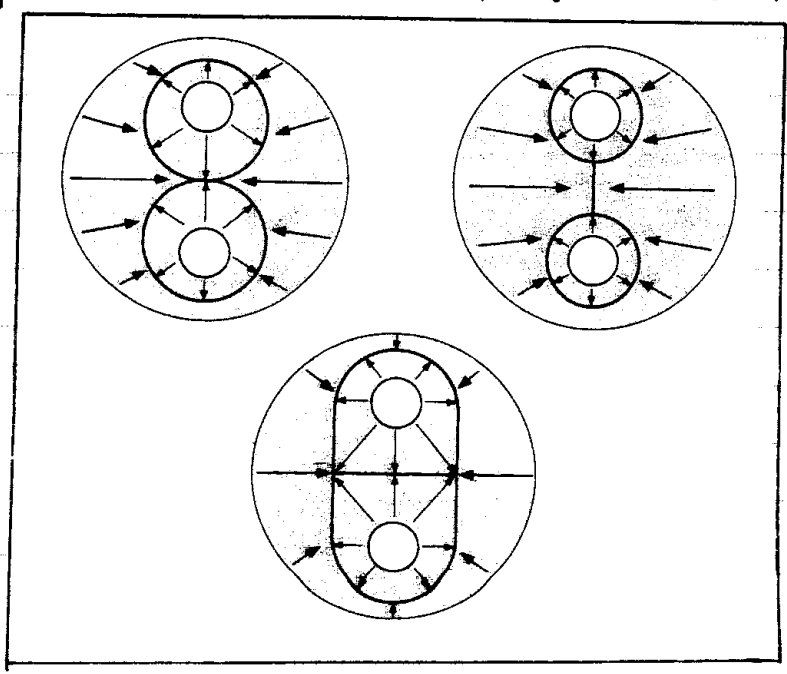
1.17.20. Ορισμός. Έστω A ένας υπόχωρος ενός τοπολογικού χώρου X και έστω $i: A \hookrightarrow X$ η βνήθησ ένθεσθ. Τότε ο A καλείται παραμορφωτική σύμπτυξη τού X όταν $r|_A = Id_A$ ($\Leftrightarrow r \circ i = Id_A$) και $i \circ r \simeq Id_X$.
 Εάν, επιπροσθέτως, ισχύει $i \circ r \simeq Id_X$ (σχ. A) (βλ. 1.17.6, σελ. 72), τότε ο A καλείται ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη τού X .

1.17.21. Σημείωση. Εάν ο A είναι παραμορφωτική σύμπτυξη τού X , τότε προφανώς $A \simeq X$.

1.17.22. Παράδειγματα. (i) Η σφαίρα S^{n-1} είναι ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη των $D^n \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (ή ακόμα και τού $D^n \setminus \{x_0\}$, όπου $x_0 \in \overset{\circ}{D}^n$). Η απόδειξη κάνει χρήση τής φηοτοσίας τής ορισθίσεσ στο παράδειγμα 1.17.15.

(ii) Εάν ο B είναι (ισχυρή) παραμορφωτική σύμπτυξη τού A και ο A (ισχυρή) παραμορφωτική σύμπτυξη τού X , τότε και ο B είναι (ισχυρή) παραμορφωτική σύμπτυξη τού X .

(iii) Το κάτωθι σχήμα δείχνει (κατά εσρήν) τις ακόλουθες παραμορφωτικές σύμπτύσεις ενός κλειστού δίσκου ($\simeq D^2$) που φέρει δύο τρύπες: τη μοχοσημειακή ένωση δύο κύκλων (χνησεή και ως "περίγραμμα τού αριθμού 8"), δύο κύκλους συνδεδμένους μέσω ενός ενθυγράμμου τμήματος και έναν χώρο που ομοιάζει με το γράμμα 0.

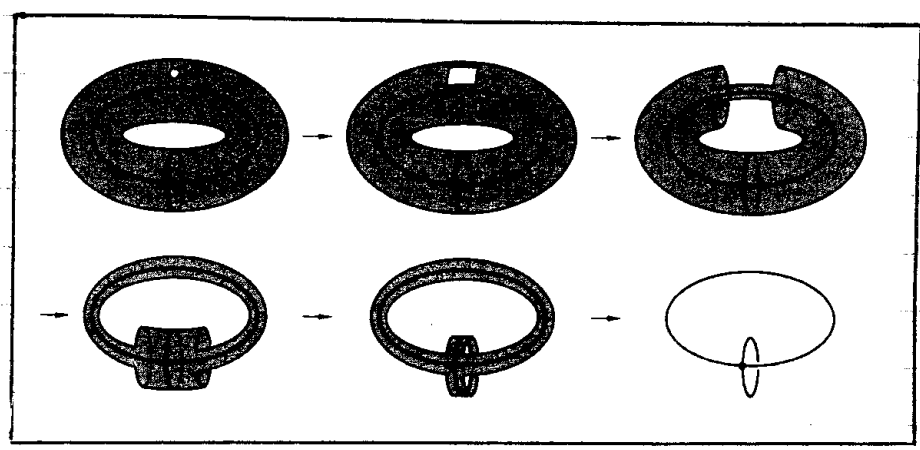


- (iv) Εάν ο X είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε τόσο το "δάπεδο" $X \times \{0\}$ όσο και η "οροφή" $X \times \{1\}$ του (μοναδιαίου) κυλίνδρου $X \times I$ (βλ. 1.10.10 (ii), σελ. 26) είναι ισχυρές παραμορφωτικές σύμπτυξεις του $X \times I$. Επίσης, η κορυφή του $\text{cone}(X)$ είναι ισχυρή παρ. σύμπτυξη αυτού.
- (v) Εάν X, Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι και $\{y_0\}$ ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη του Y (όπου $y_0 \in Y$), τότε ο $X \times \{y_0\}$ είναι ισχυρή παρ. σύμπτυξη του $X \times Y$ και ο X ισχυρή παρ. σύμπτυξη του $X \vee Y$.

1.17.23. Πρόταση. Έστω A ένας κλειστός υπόχωρος ενός τ.χ. X και έστω $f: A \rightarrow Y$ μια συνεχής απεικόνιση. Εάν ο A είναι ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη του X , τότε ο Y είναι ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη του $Y \cup_f X$.

Απόδειξη: Έστω $H: X \times I \rightarrow X$ μια ομοτοπία σχετικής γερσ στο A (βλ. 1.17.6) με $H_0 = \text{Id}_X$ και $H_1(X) = A$. Τότε η επαχόμενη ομοτοπία: $(X+Y) \times I \rightarrow X+Y$ είναι σύμβατη με τη σχέση ισοδυναμίας $a \sim f(a)$, $a \in A$, και λόγω του πορίσματος 1.17.8 η ομοτοπία $\bar{H}: (Y \cup_f X) \times I \rightarrow Y \cup_f X$ με $\bar{H}_0 = \text{Id}_{Y \cup_f X}$ και $\bar{H}_1(Y \cup_f X) = Y$ μας οδηγεί στην επαλήθευση του ισχυρισμού. \square

1.17.24. Παράδειγμα. Εάν κανείς απομακρύνει ένα σημείο από την F_g (αντ., από την N_g), τότε αποκτά έναν χώρο ο οποίος έχει τη μονοσημιακή ένωση $S^1 \vee \dots \vee S^1$ με $k=2g$ (αντ., με $k=g$) ως ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη του (πρβλ. 1.16.7, σελ. 67). Το κάτωθι σχήμα εικονογραφεί αυτήν την ιδιότητα για τον χώρο $F_2 = \mathbb{T}^2$.



§ 1.18 Γενικεύσεις θεμελιωδών εννοιών για τοπολογικά ζεύγη

1.18.1. Ορισμός. Ένα τοπολογικό ζεύγος (X, A) είναι ένα (διατεταγμένο) ζεύγος αποτελούμενο από έναν τοπολογικό χώρο X και έναν υπόχωρο του A . (Σύμβολα: Όταν $A = \emptyset$, τότε το (X, \emptyset) ταυτίζεται με τον ίδιον τον X .) Λέμε ότι ένα τοπολογικό ζεύγος (X, A) είναι υποζεύγος ενός τοπολογικού ζεύγους (X', A') όταν ο X είναι υπόχωρος του X' και ο A υπόχωρος του A' . (Συμβολ. $(X, A) \subseteq (X', A')$)

1.18.2. Ορισμός. Μια συνεχής απεικόνιση $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ μεταξύ τοπολογικών ζευγών είναι μια συνεχής απεικόνιση $f: X \rightarrow Y$ για την οποία ισχύει ο εχθλασμός $f(A) \subseteq B$. Όταν μια τέτοια απεικόνιση f συμβαίνει να είναι ομοιομορφισμός μεταξύ των X και Y , και $f(A) = B$, τότε η f καλείται ομοιομορφισμός τοπολογικών ζευγών (και χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $(X, A) \approx (Y, B)$).

1.18.3. Παράδειγμα. Έστω X ένα συμπαγές κυρτό υποένοστο του \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) με $\text{int}(X) \neq \emptyset$. Τότε υπάρχει ένας ομοιομορφισμός τοπολογικών ζευγών $(X, \text{Fr}(X)) \approx (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$. Πράγματι: θεωρώντας ένα $x_0 \in \text{int}(X)$,



οποιοδήποτε $x \in \text{Fr}(X)$ αποσπασί το μοναδικό μεθωριακό σημείο του X , το οποίο ανήκει στην ημιευθεία με αφετηρία το x_0 και διέρχεται από το x . (Αλλιώς είτε το X δεν θα ήταν κυρτό είτε το x_0 δεν θα ήταν εσωτερικό σημείο του X .)

Κατά συνέπεια ορίζεται καλώς η απεικόνιση $\text{Fr}(X) \ni x \mapsto \frac{x-x_0}{\|x-x_0\|} \in \mathbb{S}^{n-1}$ και κατ'επέκταση ο ομοιομορφισμός

$$f: X \xrightarrow{\approx} \mathbb{D}^n, \quad f((1-t)x_0 + tx) := t \frac{(x-x_0)}{\|x-x_0\|}, \quad \forall t \in I,$$

$$\text{με } f(\text{Fr}(X)) = \mathbb{S}^{n-1}.$$

$$\text{Π.χ. } (I^n, \text{Fr}(I^n)) \approx (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}).$$

1.18.4. Πρόταση. Κάθε συνεχής απεικόνιση τοπολογικών ζευγών $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$, όπου A κλειστό $\subseteq X$ και B κλειστό $\subseteq Y$, επάγει μια συνεχή απεικόνιση $\bar{f}: X/A \rightarrow Y/B$. Εάν μάλιστα f είναι ομομορφισμός τοπολογικών ζευγών, τότε η \bar{f} είναι ομομορφισμός τοπολογικών χώρων.

Απόδειξη: Έπεται άμεσα από την πρόταση 1.10.4 και τον ορισμό 1.10.9. \square

1.18.5. Ορισμός. Μια συνεχής απεικόνιση τοπολογικών χώρων

$$f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$$

καλείται εχτικός ομομορφισμός όταν ο περιορισμός $f|_{X \setminus A}$ απεικονίζει το $X \setminus A$ ομομορφικώς επί του $Y \setminus B$.

Από την 1.10.2 (ii) έπεται η ακόλουθη

1.18.6. Πρόταση. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και έστω A ένας κλειστός υπόχωρός του. Εάν ως $p: X \rightarrow X/A$ συμβολιστούμε τη φυσική επίρριψη επί του X/A (βλ. 1.10.9, σελ. 25), τότε η $p: (X, A) \rightarrow (X/A, p(A))$ είναι εχτικός ομομορφισμός.

1.18.7. Πρόβλημα. Εάν ο X είναι ένας τοπολογικός χώρος, ο A ένας κλειστός υπόχωρός του, $f: A \rightarrow Y$ μια συνεχής απεικόνιση με πεδίο τιμών του έναν τοπολογικό χώρο Y , $Y \cup_f X$ ο πηλακώ-χωρος ο δημιουργούμενος μέσω της f (βλ. 1.10.11, σελ. 29), $p: X \cup_f Y \rightarrow Y \cup_f X$ η φυσική επίρριψη και $p|_X: X \rightarrow Y \cup_f X$ ο περιορισμός της επί του X , τότε η $p|_X: (X, A) \rightarrow (Y \cup_f X, Y)$ είναι εχτικός ομομορφισμός.

1.18.8. Παράδειγμα. Εάν ο X είναι ένας τοπολογικός χώρος, η $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X$ μια συνεχής απεικόνιση και $p: \mathbb{D}^n \cup_f X \rightarrow X \cup_f \mathbb{D}^n$, $e^n = p(\mathbb{D}^n) \subseteq X \cup_f \mathbb{D}^n$ (συμβολισμοί όπως στον ορισμό 1.16.1), τότε η $p|_{\mathbb{D}^n}: (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow (X \cup_f e^n, X)$ είναι εχτικός ομομορφισμός.

1.18.9 Παράδειγμα. Εάν $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ και $d := \begin{cases} 1, & \text{όταν } K = \mathbb{R} \\ 2, & \text{όταν } K = \mathbb{C} \\ 4, & \text{όταν } K = \mathbb{H} \end{cases}$ όπως στην §1.12 και $p_n: \mathbb{S}^{d(n+1)-1} \rightarrow \mathbb{P}_{K^n}^n$, $\varphi_n: \mathbb{D}^{dn} \rightarrow \mathbb{P}_{K^n}^n$, όπως στο 1.16.4, βελ. 62-63, τότε η $\varphi_n: (\mathbb{D}^{dn}, \mathbb{S}^{d(n+1)-1}) \rightarrow (\mathbb{P}_{K^n}^n, \mathbb{P}_{K^n}^{n-1})$ (ιδιωμένη ως συνεχής απεικόνιση τοπολογικών ζευγών) είναι σχετικός ομομορφισμός.

Και' αναλογίαν ορίζεται και η έννοια της "ομοτοπίας" σε "επίπεδο των ζευγών".

1.18.10. Σημείωση: Το καρτεσιανό γινόμενο δυο τοπολογικών ζευγών (X, A) και (Y, B) ορίζεται ως εξής: $(X, A) \times (Y, B) := (X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$. Ως εκ τούτου (μοναδιαίο) κώνδυρος $(X, A) \times I$ υπέρνω ενός τοπολογικού ζεύγους (X, A) είναι το τοπολογικό ζεύγος $(X \times I, A \times I)$ (ταυτίζοντας το I με το (I, \emptyset)).

1.18.11. Ορισμός. Εάν οι $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ είναι δυο συνεχείς απεικονίσεις τοπολογικών ζευγών, τότε μια ομοτοπία από την f στην g είναι μια συνεχής απεικόνιση τοπολογικών ζευγών $H: (X, A) \times I \rightarrow (Y, B)$, όπου η $H: X \times I \rightarrow Y$ είναι (συνήθως) ομοτοπία από την f στην g (υπό την έννοια του ορισμού 1.17.1, σελ. 69) για την οποία ισχύει $H(A \times I) \subseteq B$. (Σε αυτήν την περίπτωση οι f, g λέγονται ομότοπες και σημειώνονται ως $f \simeq g$. Η " \simeq " αποτελεί σχέση ισοδυναμίας.)
Μια σημαντική, ειδική περίπτωση του 1.18.11 είναι αυτή κατά την οποία καθένας των A, B αποτελείται από ένα και μόνον σημείο.

1.18.12. Ορισμός. Ένα τοπολογικό ζεύγος της μορφής $(X, \{x_0\})$, όπου $x_0 \in X$, ονομάζεται τοπολογικός χώρος με σημείο αναφοράς (ή βαθικό σημείο του) το x_0 . (Πολλές φορές ένας τέτοιος X καλείται επισημασμένος χώρος (pointed space)).

Λέμε πως μια συνεχής απεικόνιση της μορφής $f: (X, \{x_0\}) \rightarrow (Y, \{y_0\})$ (ή μια ομοτοπία της μορφής $H: (X, \{x_0\}) \times I \rightarrow (Y, \{y_0\})$) διατηρεί το σημείο αναφοράς. Επίσης, για δυο συνεχείς απεικονίσεις τοπολογικών ζευγών $f, g: (X, \{x_0\}) \rightarrow (Y, \{y_0\})$ έχουμε $f \simeq g: (X, \{x_0\}) \rightarrow (Y, \{y_0\}) \iff f \simeq g$ (σ.χ. $\{x_0\}$) (υπό την έννοια του ορ. 1.18.11) (υπό την έννοια του ορ. 1.17.6).

1.18.13. Ορισμός Μια συνεχής απεικόνιση τοπολογικών ζευγών $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$

καλείται ομοτοπικά ισοδύναμα τοπολογικών ζευγών όταν υπάρχει μια

συνεχής απεικόνιση τοπολογικών ζευγών $g: (Y, B) \rightarrow (X, A)$ με

$$g \circ f \simeq \text{Id}_{(X, A)}: (X, A) \rightarrow (X, A) \text{ και } f \circ g \simeq \text{Id}_{(Y, B)}: (Y, B) \rightarrow (Y, B)$$

(υπό την έννοια του ορισμού 1.18.11). Εν τω μεταξύ περιπτώσει λέμε ότι

τα τοπολογικά ζεύγη (X, A) και (Y, B) είναι ομοτοπικά ισοδύναμα.

(Συνήθως συμβολίζουμε: $f: (X, A) \xrightarrow{\simeq} (Y, B)$ ή απλώς $(X, A) \simeq (Y, B)$.)

1.18.14. Σημείωση Εάν $f: (X, A) \xrightarrow{\simeq} (Y, B)$, τότε προφανώς

$f: X \xrightarrow{\simeq} Y$ και $f|_A: A \xrightarrow{\simeq} B$. Ωστόσο, το αντίστροφο ΔΕΝ είναι πάντοτε αληθές!

1.18.15. Παράδειγμα Έστω $X := \{x\} \cup \{x\} \times I \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times I \right) \subset \mathbb{R}^2$

ο λεγόμενος χώρος τής χτένας και έστω $x_0 := (0, 1)$. Το $\{x_0\}$ είναι

παραμορφωτική σύμπτυξη του X (Αρκεί κανείς να παραμορφώσει συνεχώς

τη "χτένα" X αρχικώς επί του $\{x\} \times I$, κατόπιν το $\{x\} \times I$ επί του $\{x_1\}$, όπου

$x_1 := (0, 0)$, και τέλος το $\{x_1\}$ (κατά μήκος του $\{x\} \times I$) επί του $\{x_0\}$.)

Το $\{x_0\}$ ΔΕΝ είναι ιεχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη του X (Τούτο

έγκειται στο ότι τα σημεία του X , τα οποία είναι γειτονικά του $\{x_0\}$,

οφείλουν σε κάθε παραμόρφωση του X επί του $\{x_0\}$ να διανύουν τον

δρόμο τον διερχόμενος από το x_1 , οπότε το x_0 ΔΕΝ είναι δυνατόν

(μέσω μιας τέτοιας διαδικασίας) να παραμείνει σταθερό.)

Έστω $c_{x_0}: X \rightarrow X$ η σταθερή απεικόνιση $c_{x_0}(x) := x_0, \forall x \in X$. Τότε

αμφότερες οι c_{x_0} και $c_{x_0}|_{\{x_0\}}$

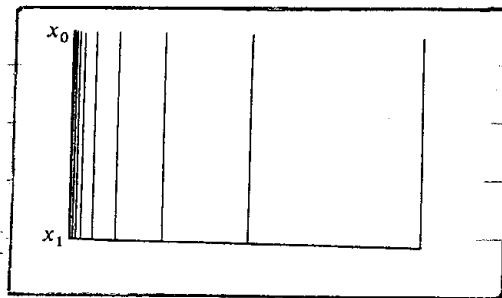
είναι ομοτοπικές ισοδυναμίες, ενώ

$$\eta \quad c_{x_0}: (X, \{x_0\}) \rightarrow (X, \{x_0\})$$

ΔΕΝ είναι ομοτοπική ισοδυναμία

τοπολογικών ζευγών (υπό την έννοια

του ορισμού 1.18.13.)



§ 1.19 Η θεμελιώδης ομάδα

Επειδή οι παρούσες παραδόσεις έπονται των παραδόσεων του μαθήματος Γ' 20 ("Αλγεβρική Τοπολογία - Ομοτοπία"), ένα μεγάλο μέρος των σποίων ήταν αφιερωμένο στη μελέτη των θεμελιωδών ομάδων, θα παρατεθούν εδώ μόνον οι απαραίτητοι ορισμοί και κάποια σημαντικά παραδείγματα, και θα γίνει μια σύντομη σύνοψη γνωστών αποτελεσμάτων.

1.19.1. Ορισμός. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Εάν οι $\alpha, \beta: I \rightarrow X$ ($I := [0,1]$) είναι δύο δρόμοι εντός του X (υπό την έννοια του ορισ. 1.9.15, σελ. 19), για τους οποίους ισχύει $\alpha(1) = \beta(0)$, τότε ως χινομένο των α, β ορίζεται ο δρόμος:

$$\alpha * \beta(t) := \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

1.19.2. Ορισμός. Δύο δρόμοι $\alpha, \beta: I \rightarrow X$ εντός ενός τοπολογικού χώρου X ονομάζονται ισοδύναμοι (και σημειώνονται ως $\alpha \sim \beta$) όταν $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \exists \gamma: \{0,1\} \rightarrow X$. (Πρβλ. ορισ. 1.17.6, σελ. 72.)

1.19.3. Λήμμα. Η " \sim " η ορισθείσα στον 1.19.2. αποτελεί σχέση ισοδυναμίας επί της κλάσης όλων των δρόμων του X .

1.19.4. Λήμμα. Εάν οι $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1: I \rightarrow X$ είναι δρόμοι εντός ενός τοπολογικού χώρου X με $\alpha_0(1) = \beta_0(0)$ και $\alpha_1(1) = \beta_1(0)$, τότε ισχύει η συνεπαγωγή:

$$(\alpha_0 \sim \alpha_1 \text{ και } \beta_0 \sim \beta_1 \implies \alpha_0 * \beta_0 \sim \alpha_1 * \beta_1)$$

1.19.5. Λήμμα. Εάν οι $\alpha, \beta, \gamma: I \rightarrow X$ είναι δρόμοι εντός ενός τοπολογικού χώρου X με $\alpha(1) = \beta(0)$ και $\beta(1) = \gamma(0)$, τότε

$$(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$$

1.19.6. Λήμμα. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και έστω $x \in X$. Ορίζουμε ως $c_x: I \rightarrow X$ τον σταθερό δρόμο $c_x(t) := x, \forall t \in I$. Εάν $\alpha: I \rightarrow X$ είναι ένας δρόμος εντός του X με $\alpha(0) = x$ και $\alpha(1) = y$, τότε

$$c_x * \alpha \sim \alpha \quad \text{και} \quad \alpha * c_y \sim \alpha$$

1.19.7 Λήμμα. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και έστω $\alpha: I \rightarrow X$ ένας δρόμος εντός αυτού. Ορίζουμε ως $\bar{\alpha}: I \rightarrow X$ τον δρόμο $\bar{\alpha}(t) := \alpha(1-t), \forall t \in I$. Εάν $\alpha(0) = x$ και $\alpha(1) = y$, τότε

$$\alpha * \bar{\alpha} \sim c_x \quad \text{και} \quad \bar{\alpha} * \alpha \sim c_y$$

1.19.8. Ορισμός. Έστω $\alpha: I \rightarrow X$ ένας δρόμος εντός ενός τοπολογικού χώρου X . Με το $[\alpha]$ θα συμβολίσουμε την κλάση ισοδυναμίας του α ως προς την " \sim " (βλ. λήμμα 1.19.3). Επίσης, για δύο δρόμους α, β εντός του X με $\alpha(1) = \beta(0)$ ορίζουμε το γινόμενο $[\alpha] \cdot [\beta]$ των $[\alpha]$ και $[\beta]$ ως εξής: $[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha * \beta]$ (Το ότι η " \cdot " είναι καλώς ορισμένη πράξη έπεται από το λήμμα 1.19.4.)

1.19.9. Ορισμός. Ένας δρόμος $\alpha: I \rightarrow X$ εντός ενός τοπολογικού χώρου X καλείται κλειστός δρόμος όταν $\alpha(0) = \alpha(1)$.

1.19.10. Πρόταση και Ορισμός: Έστω $(X, \{x_0\})$ ένας εσχυμένος τοπολογικός χώρος (με το $x_0 \in X$ ως βασικό σημείο του, βλ. ορσ. 1.18.12) και έστω

$$\pi_1(X, x_0) := \{[\alpha] \mid \alpha: I \rightarrow X \text{ κλειστός δρόμος με } \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}$$

Τότε το σύνολο $\pi_1(X, x_0)$, εφοδιασμένο με την πράξη " \cdot " τών παραλληλ-διαθετών την ορισθείσα στο 1.19.8, αποτελεί ομάδα, τη λεγόμενη θεμελιώδη ομάδα τού X στο x_0 .

Απόδειξη: Πρόφανως η $\pi_1(X, x_0)$ είναι ομάδα, καθότι διαθέτει ουδέτερο στοιχείο (το $[c_{x_0}]$, βλ. λήμμα 1.19.6), αντιστρόφο οποιδήποτε στοιχείου της $[\alpha]$ (το $[\alpha]^{-1} := [\bar{\alpha}]$, βλ. λήμμα 1.19.7) και η " \cdot " είναι πράξη προσεταιριστική (βλ. λήμμα 1.19.5). \square

1.19.11. Πρόταση. Εάν ο $\beta: I \rightarrow X$ είναι ένας δρόμος εντός ενός τοπολογικού χώρου X με $\beta(0) = x_0$, $\beta(1) = x_1$, τότε η απεικόνιση

$$\pi_2(X, x_1) \ni [\alpha] \mapsto [\beta] \cdot [\alpha] \cdot [\beta]^{-1} \in \pi_2(X, x_0)$$

είναι ισομορφισμός ομάδων. Ως εκ τούτου, εάν τα x_0, x_1 ανήκουν στην ίδια δρομοσυνεχτική συνιστώσα του X , τότε ισχύει $\pi_2(X, x_0) \cong \pi_2(X, x_1)$. Ιδιαίτερος, όταν ο ίδιος ο X είναι δρομοσυνεχτικός, αυτό είναι αληθές για οιαδήποτε $x_0, x_1 \in X$. (Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε $\pi_2(X)$ αντί του $\pi_2(X, x_0)$ και δεν κάνουμε μνεία του σημείου αναφοράς.)

1.19.12. Παραδείγματα. Ο κάτωθι κατάλογος περιέχει τις θεμελιώδεις ομάδες πολλών (δρομοσυνεχτικών) τοπολογικών χώρων που έχουμε συναντήσει μέχρι τώρα.

Τοπολογικοί χώροι	Θεμελιώδης ομάδα
Ένα αστρόμορφο υποσύνολο του \mathbb{R}^n	Η τετριμμένη ομάδα
Ο κύκλος S^1	\mathbb{Z}
Η σφαίρα S^n , $n \geq 2$ (ή η S^∞)	Η τετριμμένη ομάδα
Ο n -διάστατος τόρος $T^n := S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$ (n παράγοντες)	\mathbb{Z}^n
Ο προβολικός χώρος $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ (ή $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^\infty$)	\mathbb{Z}_2
Ο προβολικός χώρος $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ (ή $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^\infty$)	Η τετριμμένη ομάδα
Ο προβολικός χώρος $\mathbb{P}_{\mathbb{H}}^n$ (ή $\mathbb{P}_{\mathbb{H}}^\infty$)	Η τετριμμένη ομάδα
Ο (γενικευμένος) χώρος φακού $L_{2n-1}(p; q_1, \dots, q_n)$	\mathbb{Z}_p
Η επιφάνεια F_g , $g \geq 1$	$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{j=1}^g a_j b_j a_j^{-1} b_j^{-1} = 1 \rangle$
Η επιφάνεια N_g , $g \geq 1$	$\langle a_1, \dots, a_g \mid \prod_{j=1}^g a_j^2 = 1 \rangle$
Η τοπολογική ομάδα $SO(3, \mathbb{R})$	\mathbb{Z}_2

1.19.13. Ορισμός. Κάθε δρομοσυνεχτικός τοπολογικός χώρος με τετριμμένη θεμελιώδη ομάδα καλείται απλά συνεκτικός.

(Π.χ. κάθε αστρόμορφο υποσύνολο του \mathbb{R}^n , η σφαίρα S^n , $n \geq 2$, καθώς και οι προβολικοί χώροι $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, $\mathbb{P}_{\mathbb{H}}^n$, είναι χώροι απλά συνεκτικοί.)

1.19.14. Πρόταση και ορισμός. Εάν η $f: (X, \{x_0\}) \rightarrow (Y, \{y_0\})$ είναι μια συνεχής απεικόνιση (μεταξύ εστιασμένων τοπολογικών χώρων),

τότε η απεικόνιση

$$\pi_1(f): \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0), \quad [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha],$$

είναι ομομορφικός ομάδων, ο μέσω της f επαγόμενος ομομορφικός μεταφυσών θεμελιωδών ομάδων.

1.9.15. Πρόταση. (i) Εάν $f = \text{Id}_X$, τότε $\pi_1(f) = \text{Id}_{\pi_1(X, x_0)}$.

(ii) Εάν οι $f: (X, \{x_0\}) \rightarrow (Y, \{y_0\})$ και $g: (Y, \{y_0\}) \rightarrow (Z, \{z_0\})$

είναι συνεχείς απεικονίσεις, τότε

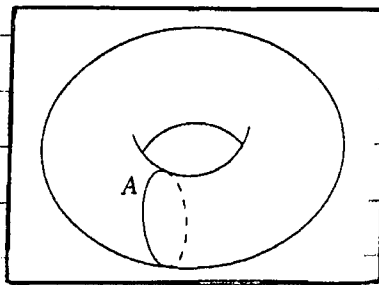
$$\pi_1(g) \circ \pi_1(f) = \pi_1(g \circ f).$$

(iii) Εάν $f \circ g: (X, \{x_0\}) \rightarrow (Y, \{y_0\})$, τότε $\pi_1(f) = \pi_1(g)$.

1.9.16. Σημείωση. Εάν η f (όπως στην 1.9.14) είναι ομομορφικός, τότε η $\pi_1(f)$ είναι ισομορφικός ομάδων. Πιο στόχο, μόνον η ευρυπτικότητα (αντ, μόνον η ευρυπτικότητα) της (συνεχούς) f δεν είναι ιδιότητα μεταφερόμενη πάντοτε στην $\pi_1(f)$.

1.9.17. Πρόταση. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και A μια συμπίεση του X (βλ. 1.17.10, σελ. 73). Εάν η $r: X \rightarrow A$ είναι μια απεικόνιση συμπίεσης και $i: A \hookrightarrow X$ η φυσική ένθεση, τότε $\forall a \in A$ η $\pi_1(i): \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$ είναι ομομορφικός και η $\pi_1(r): \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(A, a)$ επιμορφικός ομάδων.

1.9.18 Παράδειγμα. Ο τόπος $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ περιέχει τον $A = \mathbb{S}^1 \times \{1\}$ ως συμπίεση του (και η $r: \mathbb{T}^2 \rightarrow A$, $r(x, y) := (x, 1)$ είναι απεικόνιση συμπίεσης.)



Κατά συνέπεια, η εικόνα $\text{Im}(\pi_1(i))$ της $\pi_1(i)$ αποτελεί μια άπειρη κυκλική υποομάδα της θεμελιώδους ομάδας $\pi_1(\mathbb{T}^2)$.

1.9.19. Σημείωση. (i) Για κάθε παραμορφωτική συμπίεση $A \subseteq X$ ενός τ.χ. X (βλ. 1.17.20)

η ένθεση $i: A \hookrightarrow X$ επαγεί έναν ισομορφισμό ομάδων $\pi_1(i): \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$, $\forall a \in A$.

(ii) Εάν η $f: X \rightarrow Y$ είναι ομοτοπικά ισοδυναμία, τότε η $\pi_1(f): \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ είναι ισομορφικός, $\forall x_0 \in X$.

§ 1.20 Μονοπλεκτικά συμπλέγματα και πολύεδρα

Στην παρούσα ενότητα εισάγεται η έννοια των "μονοπλεκτικού συμπλέγματος", με τη βοήθεια των οποίων ορίζονται τα λεγόμενα (τοπολογικά) "Πολύεδρα" (ή "τριγωνιζόμενοι" τοπολογικοί χώροι).

1.20.1 Ορισμός (i) Ένα υποσύνολο A ενός Ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^n καλείται συνδεδεμένο (affine) όταν για κάθε $x, x' \in A, x \neq x'$, η ευθεία η οποία προσδιορίζεται από τα x και x' περιέχεται στο A .

(ii) Ως κυρτή θήκη ενός $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ορίζεται το σύνολο

$$\text{Conv}(A) := \bigcap \{ B \subseteq \mathbb{R}^n \mid B \text{ κυρτό και } A \subseteq B \}$$

(iii) Ένα σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ καλείται συνδεδεμένος συνδυασμός των σημείων

$x_0, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ όταν μπορεί να γραφεί υπό την μορφή

$$(*) \quad x = t_0 x_0 + t_1 x_1 + \dots + t_m x_m, \quad \text{όπου } t_j \in \mathbb{R}, \forall j \in \{0, \dots, m\} \text{ και } \sum_{j=0}^m t_j = 1.$$

(iv) Ένα σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ καλείται κυρτός συνδυασμός των σημείων $x_0, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ όταν μπορεί να γραφεί ως συνδεδεμένος συνδυασμός (*) αυτών, όπου το t_j είναι μη αρνητικός πραγματικός αριθμός για κάθε $j \in \{0, 1, \dots, m\}$.

1.20.2 Πρόταση Εάν $x_0, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$, τότε η $\text{Conv}(x_0, \dots, x_m)$ ισοδύναμο με το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών τους.

Απόδειξη: Έστω \mathbb{F} το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών τους.

► $\text{Conv}(x_0, \dots, x_m) \subseteq \mathbb{F}$: Προς τούτο αρκεί να δείχθει ότι το \mathbb{F} είναι ένα κυρτό

σύνολο περιέχον το $\{x_0, \dots, x_m\}$. Πραγματικά, $x_j = 0 \cdot x_0 + \dots + 0 \cdot x_{j-1} + 1 \cdot x_j + 0 \cdot x_{j+1} + \dots + 0 \cdot x_m$,

οπότε $x_j \in \mathbb{F}, \forall j \in \{0, \dots, m\}$. Επιπροσθέτως, εάν $x = \sum_{j=0}^m t_j x_j, x' = \sum_{j=0}^m t'_j x_j \in \mathbb{F}$,

όπου $t_j, t'_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \forall j \in \{0, \dots, m\}$, και $\sum_{j=0}^m t_j = \sum_{j=0}^m t'_j = 1$, τότε για κάθε $s \in [0, 1]$

έχουμε

$$sx + (1-s)x' = \sum_{j=0}^m (s t_j + (1-s) t'_j) x_j$$

με

$$\sum_{j=0}^m (s t_j + (1-s) t'_j) = s \left(\sum_{j=0}^m t_j \right) + (1-s) \left(\sum_{j=0}^m t'_j \right) = s + (1-s) = 1$$

και $s t_j + (1-s) t'_j \geq 0$, διότι καθένας εκ των προσθετέων είναι μη αρνητικός.

Κατά συνέπεια, το $sx + (1-s)x'$ είναι ένας κυρτός συνδυασμός των x_0, \dots, x_m ανήκων στο \mathbb{F} .

► $\Xi \subseteq \text{Conv}(\{x_0, \dots, x_m\})$: Εάν το X είναι ελαττωτέ κυρτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n περιέχον το $\{x_0, \dots, x_m\}$, τότε αρκεί να αποδειχθεί ότι $\Xi \subseteq X$. Προς τούτο θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή επί του $m \geq 0$. Για $m=0$ έχουμε $\Xi = \{x_0\}$, οπότε $\Xi \subseteq X$. Έστω $m > 0$. Θεωρώντας $m+1$ μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς t_0, t_1, \dots, t_m , για τους οποίους ισχύει $\sum_{j=0}^m t_j = 1$, θα αποδείξουμε ότι το $x = \sum_{j=0}^m t_j x_j$ ανήκει στο X . Δίχως βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $t_0 \neq 1$ (διότι εναντίω περίπτωση θα ήταν $x = x_0 \in X$).

Επιπρόσθετο

$$y := 0 \cdot x_0 + \left(\frac{t_1}{1-t_0}\right)x_1 + \dots + \left(\frac{t_m}{1-t_0}\right)x_m$$

είναι ένας κυρτός συνδυασμός των $x_0, x_1, \dots, x_m, y \in X$, οπότε και το $x = t_0 x_0 + (1-t_0)y$ ανήκει στο X (καθώς το X υπερέχει κυρτό $\subseteq \mathbb{R}^n$). \square

1.20.3. Ορισμός. Εάν $A \subseteq \mathbb{R}^n$, τότε ορίζουμε ως συσχετικώς θύκη του A το σύνολο $\text{aff}(A) := \bigcap \{B \subseteq \mathbb{R}^n \mid B \text{ συσχετικό και } A \subseteq B\}$.

Η απόδειξη της κατωτέρω προτάσεως είναι παρόμοια εκείνης της 1.20.2.

1.20.4. Πρόταση. Εάν $x_0, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$, τότε η $\text{aff}(\{x_0, \dots, x_m\})$ ισοδύναμο με το σύνολο όλων των συσχετικών συνδυασμών τους (βλ. 1.20.1 (iii)).

1.20.5. Ορισμός. Ένα (διατεταγμένο) σύνολο σημείων $\{x_0, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται συσχετικώς ανεξάρτητο όταν το $\{x_1 - x_0, \dots, x_m - x_0\}$ είναι \mathbb{R} -γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του (διαανυσματικού χώρου) \mathbb{R}^n .

1.20.6. Πρόταση. Για ένα (διατεταγμένο) σύνολο σημείων $\{x_0, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ακολουθεί να είναι ισοδύναμο:

- (i) Το $\{x_0, \dots, x_m\}$ είναι συσχετικώς ανεξάρτητο.
- (ii) Εάν $s_0, \dots, s_m \in \mathbb{R}^n$ με $\sum_{j=0}^m s_j x_j = 0$ και $\sum_{j=0}^m s_j = 0$, τότε $s_0 = \dots = s_m = 0$.
- (iii) Κάθε σημείο $x \in \text{aff}(\{x_0, \dots, x_m\})$ γράφεται μονοσήμαντως ως συσχετικώς συνδυασμός $x = \sum_{j=0}^m t_j x_j$ (με $\sum_{j=0}^m t_j = 1$) των x_0, \dots, x_m .

Απόδειξη: (i) \Rightarrow (ii): Υποθέτουμε ότι $\sum_{j=0}^m s_j x_j = 0$ και $\sum_{j=0}^m s_j = 0$ λαμβάνουμε

$$\sum_{j=0}^m s_j x_j = \sum_{j=0}^m s_j x_j - \left(\sum_{j=0}^m s_j \right) x_0 = \sum_{j=0}^m s_j (x_j - x_0) = \sum_{j=1}^m s_j (x_j - x_0)$$

Επειδή το $\{x_1 - x_0, \dots, x_m - x_0\}$ είναι (εξ υποθέσεως) \mathbb{R} -γραμμικώς ανεξάρτητο, $s_1 = \dots = s_m = 0$. Επιπροσθέτως, $s_0 = 0$, καθόσον $\sum_{j=0}^m s_j = 0$.

(ii) \Rightarrow (iii): Ας υποθέσουμε ότι $x \in \text{aff}(\{x_0, \dots, x_m\})$. Κατά την πρόταση 1.20.4

το x γράφεται ως εξής: $x = \sum_{j=0}^m t_j x_j$, όπου $t_0, \dots, t_m \in \mathbb{R}$ και $\sum_{j=0}^m t_j = 1$.

Εάν το x εκφραστεί υπό τη μορφή $x = \sum_{j=0}^m t'_j x_j$, για κάποιες $t'_0, \dots, t'_m \in \mathbb{R}$, για τα οποία ισχύει $\sum_{j=0}^m t'_j = 1$, τότε $0 = \sum_{j=0}^m (t_j - t'_j) x_j$ και $\sum_{j=0}^m (t_j - t'_j) = 1 - 1 = 0$, οπότε $t_j - t'_j = 0 \Rightarrow t_j = t'_j, \forall j \in \{0, \dots, m\}$.

(iii) \Rightarrow (i): Ας υποθέσουμε ότι κάθε $x \in \text{aff}(\{x_0, \dots, x_m\})$ γράφεται μονοσημάντως ως συνεχτικός συνδυασμός των x_0, \dots, x_m και ότι το $\{x_1 - x_0, \dots, x_m - x_0\}$ είναι \mathbb{R} -γραμμικώς εξαρτημένο. Τότε υπάρχουν $r_0, \dots, r_m \in \mathbb{R}$, με τολάχιστος ένα εξ αυτών διαφορετικό από μηδέν, τέτοια ώστε να ισχύει η ισότητα $0 = \sum_{j=0}^m r_j (x_j - x_0)$.

Έστω $k \in \{0, \dots, m\}$ με $r_k \neq 0$. Πολλαπλασιάζοντας -εν ανάγκη- την ανωτέρω ισότητα με r_k^{-1} μπορούμε να υποθέσουμε ότι $r_k = 1$. Το x_k γράφεται

ως εξής: $x_k = 1 \cdot x_k = - \sum_{j \in \{0, \dots, m\} \setminus \{k\}} r_j x_j + \left(1 + \sum_{j \in \{0, \dots, m\} \setminus \{k\}} r_j \right) x_0$, δηλαδή

Κατά δύο διαφορετικούς τρόπους. Άρα! \square

1.20.7 Πρόταση. Η συνεχτική ανεξαρτησία είναι μια ιδιότητα επί συνόλων $\{x_0, \dots, x_m\}$ που δεν εξαρτάται από την (όποια δοθείσα) διάταξη των x_0, \dots, x_m .

1.20.8 Ορισμός. Εάν το $\{x_0, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα συνεχτικώς ανεξάρτητο σύνολο, τότε, σύμφωνα με την πρόταση 1.20.6, για κάθε $x \in \text{aff}(\{x_0, \dots, x_m\})$ υπάρχουν μονοσημάντως ορισμένα $t_0, \dots, t_m \in \mathbb{R}$, για τα οποία ισχύουν οι ισότητες $\sum_{j=0}^m t_j = 1$ και $x = \sum_{j=0}^m t_j x_j$. Αυτά τα t_0, \dots, t_m καλούνται βαρυκεντρικές συντεταγμένες επί x (ως προς το διατεταγμένο σύνολο $\{x_0, \dots, x_m\}$).

1.20.9. Ορισμός Εάν το $\{x_0, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα συνεχώς ανεξάρτητο σύνολο, τότε το $[x_0, \dots, x_m] := \text{conv}(\{x_0, \dots, x_m\})$ καλείται m-διάστατο (κλειστό) μονόπλοκο (ή συντομογραφία = m-μονόπλοκο) με κορυφές του τα σημεία x_0, \dots, x_m .

1.20.10. Πρόταση Κάθε σημείο x ενός (κλειστού) m-μονόπλοκου (με κορυφές του τα x_0, \dots, x_m) γράφεται μονοσημάντως υπό τη μορφή

$$x = \sum_{j=0}^m t_j x_j, \text{ όπου } t_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \forall j \in \{0, \dots, m\}, \text{ και } \sum_{j=0}^m t_j = 1.$$

Απόδειξη: Βάσει της προτάσεως 1.20.2 κάθε σημείο $x \in \text{conv}(\{x_0, \dots, x_m\})$ είναι κυρτός συνδυασμός αυτών της μορφής. Εάν ένα $x \in \text{conv}(\{x_0, \dots, x_m\})$ εγγραφεί κατά δύο διαφορετικούς τρόπους ως κυρτός συνδυασμός των x_0, \dots, x_m , τότε οι βαρυκέντρικα συντελεστές του δεν θα ήταν μονοσημάντως ορισμένοι, κάτι το οποίο θα αντίκειτο προς ότι αποδείχθη μέσω της προτάσεως 1.20.6. \square

1.20.11. Συμβολισμοί και εχόδα Εάν το $\{x_0, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα συνεχώς ανεξάρτητο σύνολο και ως

$$\delta := \delta_m := [x_0, \dots, x_m] := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{j=0}^m t_j x_j \text{ με } \sum_{j=0}^m t_j = 1 \text{ και } t_0, \dots, t_m \in \mathbb{R}_{\geq 0}\},$$

και αντιστοιχώς = δ

$$\delta := \delta_m := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in \sum_{j=0}^m t_j x_j \text{ με } \sum_{j=0}^m t_j = 1 \text{ και } t_0, \dots, t_m \in \mathbb{R}_{> 0}\}$$

συμβολίζουμε

το (κλειστό) m-μονόπλοκο και αντιστοιχώς = το άνοιχτο m-μονόπλοκο με κορυφές τα x_0, \dots, x_m , τότε το δ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , ενώ το δ

δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , με μόνη εξαιρεση την περίπτωση κατά την οποία $m=0$.

Εάν αντί του \mathbb{R}^n χρησιμοποιήσουμε τον υπόχωρο του $\text{aff}(\{x_0, \dots, x_m\})$, τότε το δ είναι ένα συμπαγές, κυρτό υποσύνολο του $\text{aff}(\{x_0, \dots, x_m\})$ έχον το δ ως εσωτερικό του (βλ. 1.2.6, σελ. 5) και το $\delta := \delta \setminus \delta$ ως μεθόριό του (βλ. 1.2.11 (ii), σελ. 5). Επειδή

το $\text{aff}(\{x_0, \dots, x_m\})$, ως συνεχώς χίρας, είναι ισομορφος του \mathbb{R}^m , μπορεί κανείς να εφαρμόσει το 1.18.3, σελ. 79, προκειμένου να αποδείξει την ύπαρξη ενός ομοιομορφου τοπολογικών ζευγών: $(\delta, \delta) \approx (\mathbb{D}^m, \mathbb{S}^{m-1})$.

1.20.12. Ορισμός. Εάν το $\{x_0, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$ είναι συσχετικώς ανεξάρτητο σύνολο και $\Delta := [x_0, \dots, x_m]$, τότε το σημείο

$$\text{bar}(\Delta) := \frac{1}{m+1} (x_0 + x_1 + \dots + x_m)$$

καλείται βαρύκεντρο του Δ .

Η πρόταση που ακολουθεί θα χρησιμοποιηθεί κατά τρόπο αυθαίρετο για την απόδειξη ενός θεμελιώδους θεωρήματος (που αφορά στις ιδιότητες της ιδιόσυναρτησίας) και περιέχεται στο Κεφάλαιο 3.

1.20.13. Πρόταση. Εάν το $\{x_0, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$ είναι συσχετικώς ανεξάρτητο σύνολο και $\Delta := [x_0, \dots, x_m]$, τότε ισχύουν τα εξής:

(i) Εάν $u, v \in \Delta$, τότε

$$\|u - v\| \leq \max \{ \|u - x_j\| : 0 \leq j \leq m \}.$$

(ii) Η διάμετρος του Δ (πρβλ. ορισ. 1.8.9, σελ. 15) δίδεται από τον τύπο

$$\text{diam}(\Delta) = \max \{ \|x_i - x_j\| : 0 \leq i, j \leq m \}.$$

(iii) Για το βαρύκεντρο $\text{bar}(\Delta)$ του Δ ισχύει η εξής ανισοτότητα:

$$\| \text{bar}(\Delta) - x_j \| \leq \frac{m}{m+1} \text{diam}(\Delta), \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, m\}.$$

Απόδειξη: (i) Το v γράφεται μονοσήμαντως υπό τη μορφή

$$v = \sum_{j=0}^m t_j x_j, \quad \text{για κάποιους } t_0, \dots, t_m \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ με } \sum_{j=0}^m t_j = 1 \quad (\text{βλ. 1.20.10}).$$

Επομένως,

$$\|u - v\| = \left\| u - \sum_{j=0}^m t_j x_j \right\| = \left\| \left(\sum_{j=0}^m t_j \right) u - \sum_{j=0}^m t_j x_j \right\|$$

$$= \left\| \sum_{j=0}^m t_j (u - x_j) \right\| \leq \sum_{j=0}^m \underbrace{|t_j|}_{t_j} \|u - x_j\| \leq \underbrace{\left(\sum_{j=0}^m t_j \right)}_1 \max \{ \|u - x_j\| : 0 \leq j \leq m \}.$$

(ii) Εφαρμόζοντας το (i), αλλά αυτών τη φορά θέλοντας το x_i στην θέση του u , λαμβάνουμε $\|x_i - v\| \leq \max \{ \|x_i - x_j\| : 0 \leq j \leq m \}$

$$\Rightarrow \text{diam}(\Delta) = \max \{ \|x_i - x_j\| : 0 \leq i, j \leq m \}.$$

(iii) Προφανώς,

$$\begin{aligned} \|x_j - \text{bar}(\Delta)\| &= \left\| x_j - \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m x_k \right\| = \left\| \frac{1}{m+1} \sum_{k \neq j} (x_j - x_k) \right\| \leq \frac{1}{m+1} \sum_{k \neq j} \|x_j - x_k\| \\ &\leq \frac{m}{m+1} \max \{ \|x_j - x_k\| : 0 \leq j, k \leq m \} \stackrel{(ii)}{=} \frac{m}{m+1} \text{diam}(\Delta). \quad \square \end{aligned}$$

1.20.14. Ορισμός. Έστω $\{x_0, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$ ένα συσχετικώς ανεξάρτητο σύνολο. Κάθε απεικόνιση $\Theta: \text{aff}(\{x_0, \dots, x_m\}) \rightarrow \mathbb{R}^k$ ($k \geq 1$) που πληροί τη συνθήκη

$$\Theta\left(\sum_{j=0}^m t_j x_j\right) = \sum_{j=0}^m t_j \Theta(x_j), \quad \text{για οιαδήποτε } t_0, \dots, t_m \in \mathbb{R} \\ \mu\epsilon \quad t_0 + t_1 + \dots + t_m = 1,$$

καλείται συσχετική απεικόνιση. (Ο περιορισμός $\Theta|_{[t_0, \dots, t_m]}$ μιας τέτοιας F καλείται ωσαύτως συσχετική απεικόνιση.)

Οι συσχετικές απεικονίσεις στέλλουν συσχετικούς (και αντιστοιχώς, κυρτούς) συνδυασμούς να απεικονισθούν σε συσχετικούς (και αντιστοιχώς, κυρτούς) συνδυασμούς. Είναι, μάλιστα, προφανές ότι κάθε συσχετική απεικόνιση προσδιορίζεται πλήρως όταν είναι γνωστές οι τιμές της σε καθένα των στοιχείων ενός συσχετικώς ανεξάρτητου συνόλου. Επαποδοθώς, από τη μοναδικότητα των βαρυκεντρικών συντεταγμένων (βλ. 1.20.6 και 1.20.8) ως προς ένα (συσχετικώς ανεξάρτητο) σύνολο $\{x_0, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$ έπεται άμεσα η ύπαρξη μιας συσχετικής απεικονίσεως Θ όπως στον ορ. 1.20.14.

1.20.15. Πρόταση. Εάν το $[x_0, \dots, x_m]$ είναι ένα m -μονόπλοκο, το $[y_0, \dots, y_k]$ ένα k -μονόπλοκο και η $f: [x_0, \dots, x_m] \rightarrow [y_0, \dots, y_k]$ οιαδήποτε απεικόνιση, τότε υπάρχει μια μονοσήμαντως ορισμένη συσχετική απεικόνιση $\Theta: [x_0, \dots, x_m] \rightarrow [y_0, \dots, y_k]$ η οποία πληροί τη συνθήκη $\Theta(x_j) = f(x_j)$, $\forall j \in \{0, 1, \dots, m\}$.

Απόδειξη: Κάθε $x \in [x_0, \dots, x_m]$ γράφεται, σύμφωνα με την πρόταση 1.20.10, μονοσήμαντως υπό τη μορφή

$$x = \sum_{j=0}^m t_j x_j, \quad \text{όπου } t_0, \dots, t_m \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{και} \quad \sum_{j=0}^m t_j = 1.$$

Αρκεί λοιπόν η Θ να ορισθεί μέσω τού τύπου:

$$\Theta(x) = \Theta\left(\sum_{j=0}^m t_j x_j\right) := \sum_{j=0}^m t_j f(x_j). \quad \square$$

1.20.16. Ορισμός. Έστω $\Delta = [x_0, \dots, x_m]$ ένα m -μονόπλοκο. Συμβολίζουμε ως $\text{vert}(\Delta) := \{x_0, \dots, x_m\}$ το σύνολο των κορυφών του. Ονομάζουμε πλευρά του Δ κάθε μονόπλοκο Δ' με $\text{vert}(\Delta') \subseteq \text{vert}(\Delta)$.

Συμβολισμός: $\Delta' \leq \Delta \iff$ το Δ' είναι μια πλευρά του Δ .

$\Delta' < \Delta \iff \Delta' \leq \Delta$ και $\Delta' \neq \Delta$

(Όταν $\Delta' < \Delta$, τότε λέμε ότι το Δ' είναι μια χνήσια πλευρά του Δ .)

1.20.17 Σημειώσεις. (i) Εάν το Δ είναι ένα m -μονόπλοκο, τότε το πλήθος των k -μονοπλόκων, τα οποία αποτελούν πλευρές του Δ , ισούται με $\binom{m+1}{k+1}$.

(ii) Εάν $\Delta' \leq \Delta$ και $\Delta'' \leq \Delta'$, τότε $\Delta'' \leq \Delta$.

(iii) Το $\partial \Delta$ ενός μονοπλόκου Δ ισούται με την αποσυνδεδετή ένωση $\coprod_{\Delta' < \Delta} (\Delta')^\circ$.

1.20.18. Ορισμός. Ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα K (εντός του \mathbb{R}^n) είναι ένα στεπερασμένο σύνολο μονοπλόκων εντός του \mathbb{R}^n με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Εάν $\Delta \in K$, τότε και κάθε πλευρά του Δ ανήκει στο K .

(ii) Εάν $\Delta_1, \Delta_2 \in K$, τότε η τομή $\Delta_1 \cap \Delta_2$ είναι είτε κενή είτε μια κοινή πλευρά των Δ_1, Δ_2 .

1.20.19. Ορισμός. Έστω K ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα (εντός του \mathbb{R}^n).

Το σύνολο $|K| := \bigcup_{\Delta \in K} \Delta \subseteq \mathbb{R}^n$, εφοδιασμένο με τη σχετική τοπολογία (βλ. 1.4.1, σελ. 7), ονομάζεται τοπολογικός χώρος ο υποκείμενος στο K .

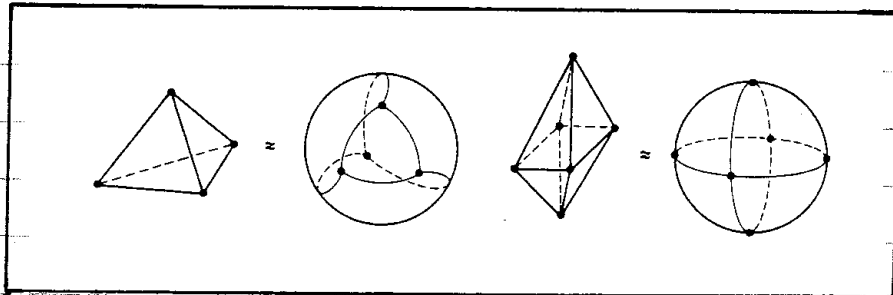
1.20.20. Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται τριγωνιζόμενος χώρος ή (τοπολογικό) πολύεδρο όταν υπάρχει κάποιο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα K και ένας ομοιομορφισμός $h: |K| \xrightarrow{\sim} X$.

Ενίοτε, ένα τέτοιο ζεύγος (K, h) καλείται τριγωνισμός του X .

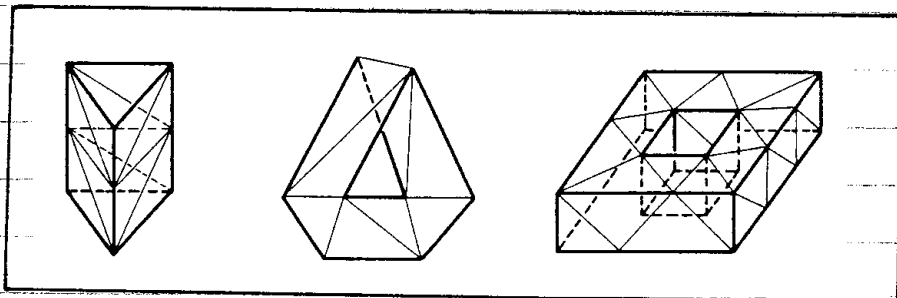
1.20.21. Σημειώσεις. (i) Πρόσοχή! Το K είναι σύνολο, ενώ το $|K|$ είναι τοπολογικός χώρος. Επίσης, ως διάσταση του K ορίζουμε τον αριθμό $\max\{\dim(\Delta) : \Delta \in K\}$.

- (ii) Βάσει των ορισμών 1.20.19 και 1.20.20 οι δομικοί λίθοι, από τους οποίους κατασκευάζονται τα (τοπολογικά) πολύεδρα, είναι εικόνες μονοπλόκων μέσω ομοιομορφιών.
- (iii) Το σε ποιον ακριβώς Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^n ανήκουν τα μονόπλοκα ενός K δεν είναι κάτι το ουσιώδες για την τοπολογία του $|K|$.
- (iv) Κάθε πολύεδρο είναι ένα συμπαγές υποδύναμο ενός \mathbb{R}^n , ήτοι ένας συμπαγής, μετριοποιήσιμος τοπολογικός χώρος.

1.20.22. Παραδείγματα. (i) Οι κορυφές, οι ακμές και οι έδρες ενός τετραέδρου ή ενός οκταέδρου αποτελούν ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα, ο υποκείμενος χώρος του οποίου είναι ομοιομορφικός της σφαίρας \mathbb{S}^2 . Ως εκ τούτου, η \mathbb{S}^2 είναι ένα πολύεδρο. Επιπροσθέτως, τριγωνιδιαίμοι τοπολογικοί χώροι μπορούν να διαθέτουν διαφορετικούς τριγωνισμούς.



- (ii) Στο κάτωθι σχήμα δίδονται (κατά σειράν) τριγωνισμοί του (μοναδιαίου) κυλίνδρου του οριζόμενου υπεράνω του κύκλου \mathbb{S}^1 , της ταινίας του Möbius (βλ. 1.11.15 (iii), σελ. 33-34) και του τόρου $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.



(iii) Το 1924 ο Rado απέδειξε ότι κάθε συμπαγής επιφάνεια είναι τριγωνίσιμη. Βλ.

- T. Rado: *Über den Begriff der Riemannschen Fläche*, Acta Univ. Szeged Sci. Math. 2 (1924), 101-121.
- E.E. Moise: *Geometric Topology in Dimension 2 and 3*, GTM, Vol. 47, Springer-Verlag, 1977, Chapter 8.
- H.D. Coldeway, E. Vogt and H. Zieschang: *Surfaces and Planar Discontinuous Groups*, Lecture Notes in Math., Vol. 835, Springer-Verlag, 1980, § 7.5.
- P.H. Doyle and D.R. Moran: *A short proof that compact 2-manifolds can be triangulated*, Inventiones Math. 5 (1968), 160-162.

(iv) Το 1952 ο Moise απέδειξε ότι κάθε συμπαγές 3-διάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα είναι τριγωνίσιμο. (Βλ. Κεφ. 35 τού προαναφερθέντος συγγράμματος τού ιδίου.) Ωστόσο, υπάρχουν μη τριγωνίσιμα συμπαγή τοπολογικά πολύπυγμα διαστάσεως 4, πρβλ.

- A.A. Ranicki: *On the Hauptvermutung*. In "The Hauptvermutung Book I" Kluwer Acad. Pub., 1996, pp. 3-31.

(v) Το 1935 ο Cairns απέδειξε ότι κάθε συμπαγές, διαφορίσιμο πολύπτυγμα (οιασδήποτε διαστάσεως) είναι τριγωνίσιμο. (Ένα τοπολογικό πολύπτυγμα καλείται διαφορίσιμο όταν οι απεικονίσεις μεταβάσεως που αντιστοιχούν σε οιαδήποτε ζεύγη χαρτών τους είναι C^∞ -απεικονίσεις. Βλ. 1.11.2 (ii) και 1.11.4 (ii), σελ. 31-32.) Για την απόδειξη αυτή οι ενδιαφερόμενοι αναγνώστες παραπέμπονται στο σύγγραμμα:

- J.M. Munkres: *Elementary Differential Topology*, Princeton University Press, 3rd reprinting, 1973, Chapter II.

Επί παραδείγματι, οι προβολικοί χώροι που εισήχθησαν στην § 1.12, σελ. 42-43, είναι τριγωνίσιμοι, καθόσον οι απεικονίσεις μεταβάσεώς τους είναι C^∞ -απεικονίσεις, πρβλ. 1.12.3 (i).

(vi) Το είνολο $K(\delta_m)$ όλων των πλευρών ενός m -μονοπλάκου $\delta = \delta_m$ είναι αφραυτού ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα με την ιδιότητα: $|K(\delta_m)| = \delta_m \approx \mathbb{D}^m$. Εξ τούτου, όλες οι μπάλες (οιασδήποτε διαστάσεως) είναι τριγωνίσιμες (χωρίς, εν προκειμένω, να χρειάζεται να καταφύγουμε στο (v)).

(vii) Το είνολο $K(\partial\delta_m)$ όλων των γυφτίων πλευρών ενός m -μονοπλάκου $\delta = \delta_m$ είναι ωσαύτως ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα με την ιδιότητα: $|K(\partial\delta_m)| = \partial\delta_m \approx \mathbb{S}^{m-1}$. Κατά συνέπεια, και όλες οι σφαιρές (οιασδήποτε διαστάσεως) είναι τριγωνίσιμες.

1.20.23. Σημείωση: Ενώστε η συγκεκριμένη κατασκευή τριγωνισμών ορισμένων χώρων (με κάποια επιπρόσθετα χαρακτηριστικά) είναι πολύ δυσκολότερη από την απόδειξη υπάρξεώς τους.

Ιδιαίτερα ενδιαφέρων είναι ο τρόπος προσδιορισμού τριγωνισμών χώρων με το μικρότερο δυνατό πλήθος μονοπλόκων.

Εάν η F είναι μια συμπαγής επιφάνεια, $|K| \approx F$ ένας τριγωνισμός, $\alpha_j := \# \{j\text{-μονόπλοκα του } K\}$, $j \in \{0, 1, 2\}$, και $\chi(K) := \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$,

τότε

$$\begin{cases} 3\alpha_2 = 2\alpha_1 \\ \alpha_1 = 3(\alpha_0 - \chi(K)) \\ \alpha_0 \geq \frac{1}{2} (7 + \sqrt{49 - 24\chi(K)}) \end{cases}$$

Επί παραδείγματι, επειδή

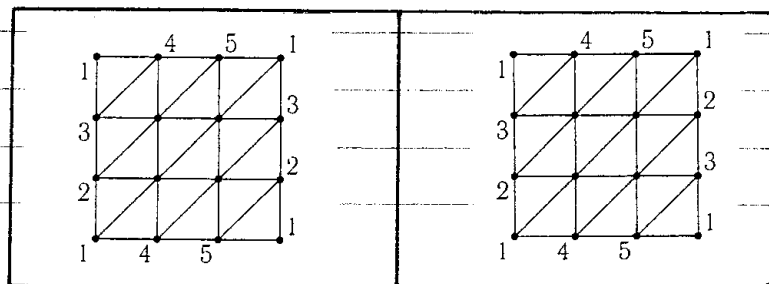
F	S^2	$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$	\mathbb{T}^2	Φιάλη του Klein
$\chi(K)$	2	1	0	0

έχουμε

$$\begin{cases} \alpha_0 \geq 4, \alpha_1 \geq 6, \alpha_2 \geq 4 & \text{για } F = S^2, \\ \alpha_0 \geq 6, \alpha_1 \geq 15, \alpha_2 \geq 10 & \text{για } F = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \\ \alpha_0 \geq 7, \alpha_1 \geq 21, \alpha_2 \geq 14 & \text{για } F = \mathbb{T}^2 \text{ ή τη φιάλη του Klein.} \end{cases}$$

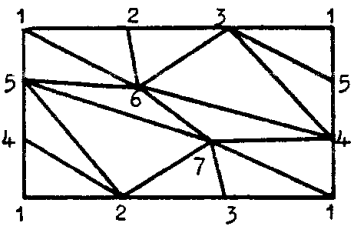
(Πρβλ. F.H. Croom: "Basic Concepts of Algebraic Topology", WTM, Springer-Verlag, 1978, σελ. 32-33.)

- ▶ Ο "ελαχιστοτικός" τριγωνισμός της S^2 επιτυγχάνεται ύστερα από τη θείωση του συνφακού συμπλεγματος ενός τετραέδρου (βλ. 1.20.22(ii)).
- ▶ Ένας "ελαχιστοτικός τριγωνισμός" για το πραγματικό προβολικό επίπεδο $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ δίδεται στο 1.20.28, σελ. 98-99.
- ▶ Στο κάτωθι σχήμα δίδονται (οι συνθέτες αλλά μη "ελαχιστοτικοί") τριγωνισμοί του τόρου \mathbb{T}^2 και της φιάλης του Klein, αντιστοίχως,



Ιδωμένων ως ταυτοτικών χώρων, με $\alpha_0 = 9$.

Αντιθέτως, το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα του παραπλευρού σχήματος οδηγεί σε "ελάχιστο" τριγωνισμό του \mathbb{F}^2 με $\kappa_0 = 7$, $\kappa_1 = 21$ και $\kappa_2 = 14$. Τέτοιου είδους τριγωνισμοί δεν υφίσταται για τη φιάλη του Κλείν!



Για την περιγραφή μιας κατηγορίας έχοντας τα μονοπλεκτικά συμπλέγματα ως αντικείμενα απαιτείται η εισαγωγή της έννοιας που θα παίξει τον ρόλο του "μορφισμού".

1.20.24. Ορισμός. Έστω ότι τα K και L είναι δυο μονοπλεκτικά συμπλέγματα. Μια μονοπλεκτική απεικόνιση $\varphi: K \rightarrow L$ είναι μια απεικόνιση που στέλνει κάθε κορυφή (= 0-μονόπλοκο) του K να απεικονισθεί σε μια κορυφή (= 0-μονόπλοκο) του L και έχει την εξής ιδιότητα: Για κάθε $\lambda = [x_0, \dots, x_m] \in K$, η εικόνα $\varphi(\lambda) \in L$ του λ μέσω της φ ισούται με $\varphi(\lambda) = [\varphi(x_0), \dots, \varphi(x_m)]$.

1.20.25. Σημειώσεις. (i) Κάθε μονοπλεκτική απεικόνιση $\varphi: K \rightarrow L$ επάγει μια συνεχή απεικόνιση $|\varphi|: |K| \rightarrow |L|$, η οποία ορίζεται ως ακολούθως: Για κάθε $\lambda \in K$ έστω $f_\lambda: \lambda \rightarrow |L|$ η συσχετική απεικόνιση η προδeterminισμένη μέσω της $\varphi|_{\text{vert}(\lambda)}$ (βλ. 1.20.15, σελ. 92). Βάσει της συνθήκης 1.20.18 (ii) οι απεικονίσεις f_λ ταυτίζονται στο κοινό τμήμα του πεδίου ορισμού τους, οπότε μπορούν να συγχωληθούν παρέχοντάς μας την $|\varphi|$.

(ii) Εάν η $\varphi: K \rightarrow L$ είναι μονοπλεκτική και αμφιρριπτική, τότε και η αντιστροφή της $\varphi^{-1}: L \rightarrow K$ είναι μονοπλεκτική και η επαχόμενη συνεχής απεικόνιση $|\varphi|: |K| \rightarrow |L|$ ομομορφισμός.

(iii) Εάν συμβολίσουμε ως \mathcal{SComp} την κατηγορία των μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων (με $\text{Ob}(\mathcal{SComp}) =$ η κλάση των μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων και μορφισμούς τις μονοπλεκτικές απεικονίσεις) και ως Top την κατηγορία των τοπολογικών χώρων, τότε με τη βοήθεια των (i), (ii) ορίζεται ένας συναρτησιμότητα

$$| \cdot |: \mathcal{SComp} \rightsquigarrow \text{Top}, \quad K \mapsto |K| \\ (\varphi: K \rightarrow L) \mapsto (|\varphi|: |K| \rightarrow |L|).$$

Η έννοια τού "πολυέδρου" γενικεύεται για τοπολογικά ζεύγη ως εξής:

1.20.26. Ορισμός. Έστω K ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα. Ένα υπο-σύνολο $K' \subseteq K$ καλείται υποσύμπλεγμα τού K όταν ισχύει η συνεπταγωγία: ($s \in K'$ και $s' \prec s \Rightarrow s' \in K'$). Ένας υπόχωρος X' ενός (τοπολογικού) πολυέδρου καλείται (τοπολογικό) υποπολύεδρο τού X όταν υπάρχει ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα K , καθώς και ένα υποσύμπλεγμα τού K' , ούτως ώστε να ισχύει $(|K|, |K'|) \cong (X, X')$ (υπό την έννοια τού ορθ. 1.18.2, βελ. 79). Εν τωιαύτη περίπτωσηε το (X, X') καλείται πολυεδρικό (τοπολογικό) ζεύχος.

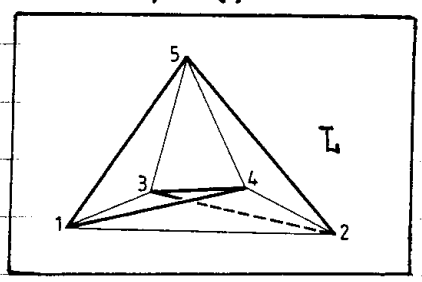
1.20.27. Σημείωση. Αναλόγως προς την 1.20.25 (iii) μπορεί κανείς να ορίσει έναν δυναλλοιώτε συναρτησι $SComp^{(2)} \rightsquigarrow Top^{(2)}$

$$(K, K') \mapsto (|K|, |K'|)$$

$$\left(\begin{array}{c} \varphi: (K, K') \rightarrow (L, L') \\ \varphi(K') \subseteq L' \end{array} \right) \longmapsto \left(|\varphi|: (|K|, |K'|) \rightarrow (|L|, |L'|) \right)$$

από την κατηγορία των ζευγών των μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων στην κατηγορία των τοπολογικών ζευγών.

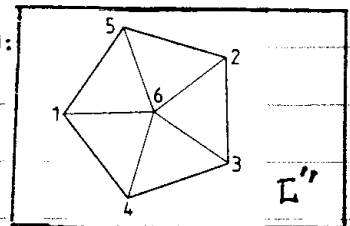
1.20.28. Παράδειγμα. Έστω $L \subset \mathbb{R}^3$ το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα που εικόνο γραφείται στο παράσπλερο σχήμα. Το L απαρτίζεται από 5 κορυφές, 10 ακμές και τα 5 τρίγωνα (:έδρες) 123, 124, 135, 245 και 345. Έστω $L' \subset L$ το υποσύμπλεγμα τού L το αποτελούμενο από τις 5 κορυφές



και τις ακμές 15, 52, 23, 34 και 41. Προφανώς, ο $|L|$ είναι μια ταινία τού Möbius και ο $|L'|$ το δύνarό της. Θεωρούμε ένα $x_0 \in \mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^3$

και τον κώνo $cone_{x_0}(L') = \{ \text{μονόπλοκα } s \text{ με } \text{vert}(s) = \{x_0\} \cup \text{vert}(L') \}$

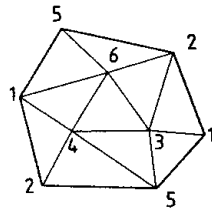
Ο $cone_{x_0}(L')$ διαθέτει έναν τριγωνικό L'' (βλ. σχήμα): (Το x_0 αντιστοιχεί στην κορυφή 6.) Τα L, L'' έχουν



το υποσύμπλεγμα κοινό (εντός τού \mathbb{R}^4). Έστω $K := L \cup L''$. Το K είναι μονοπλεκτικό σύμπλεγμα

(εντός τού \mathbb{R}^4) με 6 κορυφές, 15 ακμές και 10 τρίγωνα, και $|K| \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$.

Βάσει των όσων προαναφέρθηκαν
στη σημείωση 1.20.23, αυτός
ο τριγωνισμός είναι "ελαχιστοτικός".



κ

§ 1.21 CW-χώροι

Η κλάση όλων των τοπολογικών χώρων παρὰ είναι "αχανής" για να μπορεί κανείς να εργασθεί παραγωγικά με αυτών σε μια σειρά σημαντικών θεωρητικών ερωτημάτων. Από την άλλη πλευρά, τα (τοπολογικά) πολύεδρα είναι πολύ "ειδικοί" χώροι (και η κατασκευή συγκεκριμένων τριγωνισμών αρκούντως δύσκολη). Γι' αυτόν τον λόγο κρίνεται αναγκαία η εισαγωγή μιας επιπρόσθετης, "ενδιάμεσης" κλάσεως τοπολογικών χώρων, των λεγομένων "CW-χώρων". Οι δομικοί λίθοι αυτών των χώρων δεν είναι (κατ' ανάγκην) μονόηχοα αλλά κύτταρα (καταλλήτως συχκολλούμενα).

1.21.1. Ορισμός. Λέμε ότι ένας τοπολογικός χώρος X επιδέχεται μια κύτταρική διάσπαση (ή διάσπαση σε κύτταρα) όταν υπάρχει ένα σύνολο \mathcal{X} υποχώρων του X που πληροί την ακόλουθη συνθήκη: Κάθε στοιχείο $e \in \mathcal{X}$ είναι ένα κύτταρο και $X = \bigcup \{e \mid e \in \mathcal{X}\}$.
 Ως n -διάστατο σκελετό ορίζουμε τον υποχώρο $X^{(n)} := \bigcup \{e \in \mathcal{X} \mid \dim(e) \leq n\}$ (ενός τέτοιου X). Κατ' αυτόν τον τρόπο λαμβάνουμε μια ακολουθία
$$\emptyset = X^{(-1)} \subset X^{(0)} \subset X^{(1)} \subset \dots \subset X^{(n-1)} \subset X^{(n)} \subset \dots \subset X$$
 υποχώρων με $\bigcup_{n \geq 0} X^{(n)} = X$. Για κάθε $e \in \mathcal{X}$ συμβολίζουμε ως \bar{e} την κλειστή θήκη του e εντός του X (βλ. 1.2.1, σελ. 3) και ως $\partial e := \bar{e} - e$ το "όριο" (ή "μεθόριο") του e . (Επίστε, για να δηλώσαμε μια κύτταρική διάσπαση, αντί του \mathcal{X} γράφουμε (X, \mathcal{X}) .)

1.21.2. Ορισμός και Πρόταση. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος που επιδέχεται κύτταρική διάσπαση και έστω $e = e^n$ ένα n -κύτταρο $\subset X$. Μια συνεχής απεικόνιση $\varphi = \varphi_e : \mathbb{D}^n \rightarrow X$, για την οποία ισχύει

$\varphi(\mathbb{S}^{n-1}) \subseteq X^{(n-1)}$, με την $\varphi|_{\mathbb{D}^n}: \mathbb{D}^n \rightarrow X$ απεικονίζουσα το \mathbb{D}^n ομοιομορφικώς επί του e , καλείται χαρακτηριστική απεικόνιση του e . Ο περιορισμός $\varphi|_{\mathbb{S}^{n-1}}: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X^{(n-1)}$ καλείται (λόγω της 1.21.11) απεικόνιση επικολαμβέως (ή προβαρτίσεως) του e . Εάν ο X είναι χώρος Hausdorff, τότε $\bar{e} = \varphi(\mathbb{D}^n) \subseteq X^{(n-1)}$ και $\partial e = \varphi(\mathbb{S}^{n-1}) \subseteq X^{(n-1)}$. Ιδιαίτερως, τα \bar{e} και ∂e είναι συμπαγή, η $\varphi: \mathbb{D}^n \rightarrow \bar{e}$ ταυτοτική απεικόνιση (βλ. 1.10.7, σελ. 24) και η συνεχής απεικόνιση τοπολογικών γευγών $\varphi: (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow (\bar{e}, \partial e)$ σχετικός ομοιομορφισμός (βλ. 1.18.5 σελ. 80).

Απόδειξη: Λόγω της συνέχειας της φ έχουμε $\varphi(\mathbb{D}^n) \subseteq \bar{e}$. Επειδή το $\varphi(\mathbb{D}^n)$ είναι συμπαγές (βλ. 1.8.7, σελ. 14), εάν ο X είναι χώρος Hausdorff, τότε το $\varphi(\mathbb{D}^n)$ είναι κλειστό (βλ. 1.8.4, σελ. 14). Συνεπώς $e \subseteq \varphi(\mathbb{D}^n) \implies \bar{e} \subseteq \varphi(\mathbb{D}^n) \implies \bar{e} = \varphi(\mathbb{D}^n)$.

$\begin{matrix} (1.2.3 \text{ ii}) \\ (1.2.2 \text{ iv}) \\ \text{σελ. 4} \end{matrix} \qquad \qquad \qquad \begin{matrix} (1.2.1) \\ \text{σελ. 3} \end{matrix}$

(Διεξοδικότερα μπορούμε να γράψουμε $\varphi(\mathbb{D}^n \cup \mathbb{S}^{n-1}) = e \cup \partial e$.)

Επειδή $\varphi(\mathbb{D}^n) = e$ έχουμε $\partial e \subseteq \varphi(\mathbb{S}^{n-1})$. Επίσης, επειδή $\varphi(\mathbb{S}^{n-1}) \subseteq X^{(n-1)}$ και $e \cap X^{(n-1)} = \emptyset$, έχουμε $\varphi(\mathbb{S}^{n-1}) \subseteq \partial e$. Άρα $\varphi(\mathbb{S}^{n-1}) = \partial e$. \square

1.21.3 Ορισμός. Ένας GW-χώρος (ή ένα GW-σύμπλεγμα) είναι ένας τοπολογικός χώρος X επιδεχόμενος κυτταρική διάσπαση ($X = \cup \{e \mid e \in \mathcal{X}\}$) και εφοδιασμένος με μια οικογένεια $\{\varphi_e \mid e \in \mathcal{X}\}$ χαρακτηριστικών απεικονίσεων (και κατ'επέκτασιν με σχετικούς ομοιομορφισμούς $\varphi_e: (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow (\bar{e}, \partial e)$ για κάθε n -κύτταρο $e \in \mathcal{X}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$), ούτως ώστε να πληρούνται οι κάτωθι συνθήκες:

(C) [= closure finiteness]: Για κάθε $e \in \mathcal{X}$, το \bar{e} έχει μη κενή τομή με πεπερασμένου πλήθους κύτταρα του \mathcal{X} .

(W) [= weak topology]: Κάθε υπόχωρος A του X , για τον οποίον η τομή $A \cap \bar{e}$ είναι κλειστή εντός του \bar{e} , $\forall e \in \mathcal{X}$, είναι κλειστός υπόχωρος του X . (Τούτη η συνθήκη ισοδυναμεί με το ότι ο X είναι εφοδιασμένος με την αδελφή τοπολογία ως προς την οικογένεια $\{\bar{e} \mid e \in \mathcal{X}\}$. Βλ. 1.15.1, σελ. 58.)

Ένας CW-χώρος X ονομάζεται

$\left\{ \begin{array}{l} \underline{n\text{-διάστατος}} \\ \underline{\text{απειροδιάστατος}} \\ \underline{\text{πεπερασμένος CW-χώρος}} \\ \underline{\text{άπειρος CW-χώρος}} \end{array} \right.$	\iff	$X^{(n-1)} \subsetneq X^{(n)} = X,$
	$\overset{\text{ορσ}}{\iff}$	$X^{(n)} \subsetneq X, \forall n \in \mathbb{N}_0,$
	$\overset{\text{ορσ}}{\iff}$	$\#(\mathcal{K}) < \infty,$
	$\overset{\text{ορσ}}{\iff}$	$\#(\mathcal{K}) = \infty.$

[Σημειώστεν ότι εάν ο X επιδέχεται μια άλλη κυτταρική διάσπαση, ας πούμε $X = \cup \{e_i \mid e_i \in \mathcal{K}'\}$, τότε οι διαστάσεις των CW-χώρων (X, \mathcal{K}) και (X, \mathcal{K}') είναι ίσες.]

1.21.4 Σημείωση. Η έννοια των «CW-χώρων» πρωτοεισηγήθη το 1949 από τον J.H.C. Whitehead στο περιώνυμο άρθρο του

- J.H.C. Whitehead: *Combinatorial Homotopy I*, Bulletin of the American Mathematical Society 55 (1949), 213-245,

και σύντομα καθιερώθηκε στη διεθνή βιβλιογραφία. Ειδικά συγγράμματα αφιερωμένα στην ενδελεχή μελέτη αυτών των χώρων είναι τα ακόλουθα:

- G.E. Cooke & R.S. Finney: *Homology of Cell Complexes*. (Based on Lectures by N.E. Steenrod). Math. Notes, Princeton University Press, 1967.
- A.T. Lundell & S. Weingram: *The Topology of CW Complexes*, Van Nostrand Reinhold Co., 1969.
- R. Fritsch & R.A. Piccinini: *Cellular structures in Topology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 19, Cambridge University Press, 1990.

1.21.5 Παραδείγματα. (i) Όταν το πλήθος των διαθέσιμων κυττάρων είναι πεπερασμένο, τότε οι συνθήκες (C) και (W) πληρούνται αυτομάτως. Πως εκ τούτου, κάθε χώρος Hausdorff που επιδέχεται διάσπαση σε πεπερασμένους πλήθους κύτταρα, καθεύα των οποίων είναι εφοδιασμένο με μια χαρακτηριστική απεικόνιση, είναι CW-χώρος.

(ii) Κάθε (τοπολογικό) πολύεδρο X είναι CW-χώρος. Εάν το ζεύγος (K, h) είναι ένας τριγωνικός τού X (βλ. 1.20.20, σελ. 93) και εάν ορίσουμε ως \mathcal{K} το σύνολο $\mathcal{K} := \{h(\Delta^0) \mid \Delta \in K\}$, τότε ο X γράφεται προφανώς ως ένωση των στοιχείων τού \mathcal{K} . Έστω $K^{(n)}$ το υποσύνμπλεγμα τού K το απαρτιζόμενο από όλα τα μονάτοκα $\Delta \in K$ με $\dim(\Delta) \leq n$.

Έστω Δ τυχόν n -μονόπλοκο του \mathbb{K} . Θέτοντας $\varphi_\Delta := (h|_\Delta) \circ \alpha_\Delta$, όπου $\alpha_\Delta : (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow (\Delta, \partial\Delta)$ οιοσδήποτε ομοιομορφισμός τοπολογικών ζευγών, τότε η φ_Δ είναι χαρακτηριστική απεικόνιση για το Δ και (επειδή τα μονόπλοκα του \mathbb{K} είτε δεν τέμνονται είτε τέμνονται κατά μήκος κοινών τους πλευρών) μπορεί να θεωρηθεί ως βχρτικός ομοιομορφισμός

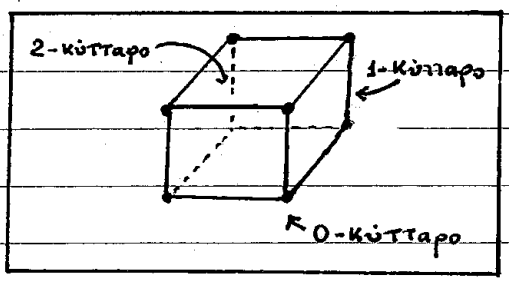
$$(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\quad} (\Delta, \partial\Delta) \xrightarrow{\quad} (h(\Delta) \cup |\mathbb{K}^{(n-1)}|, |\mathbb{K}^{(n-1)}|)$$

\uparrow
 φ_Δ

(καθότι η $\varphi_\Delta : \mathbb{D}^n \rightarrow \varphi_\Delta(\mathbb{D}^n)$ είναι ομοιομορφισμός). Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το \mathbb{K} είναι πεπερασμένο σύνολο, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο $X \approx |\mathbb{K}|$ είναι όντως CW-χώρος.

(iii) Η επιφάνεια ενός κύβου, ενός δωδεκαέδρου κ.λπ. είναι CW-χώροι.

Αρκεί να θεωρήσουμε τις κορυφές ως τα 0-κύτταρα, τις ανοικτές ακμές ως τα 1-κύτταρα και τις ανοικτές έδρες ως τα 2-κύτταρα του χώρου μας. Εν προκειμένω τα 2-κύτταρα δεν είναι (ανοικτά) μονόπλοκα!



(iv) Η σφαίρα \mathbb{S}^n είναι CW-χώρος @ Έστω $e^0 := p_+$ ο βόρειος πόλος (δηλ. ένα 0-κύτταρο) της \mathbb{S}^n . Τότε το συμπλήρωμα $e^n := \mathbb{S}^n \setminus \{e^0\}$ είναι ένα n -κύτταρο (πρβλ 1.5.3 (iv), σελ 10). Η \mathbb{S}^n διασπάται σε δύο κύτταρα: $\mathbb{S}^n = \{e^0, e^n\}$. Θέτοντας

$$\begin{cases} \varphi_{e^0} : \mathbb{D}^0 \rightarrow \mathbb{S}^n, & x \mapsto \varphi_{e^0}(x) := e^0 \quad \text{και} \\ \varphi_{e^n} : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^n, & x \mapsto \varphi_{e^n}(x) := (2\|x\|^2 - 1, 2x_1\sqrt{1-\|x\|^2}, \dots, 2x_n\sqrt{1-\|x\|^2}) \\ & (x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Την καθιστούμε CW-χώρο με τις $\varphi_{e^0}, \varphi_{e^n}$ ως χαρακτηριστικές απεικονίσεις. $(\emptyset = \mathbb{S}^n \setminus \{e^0\} \subsetneq \mathbb{S}^n \setminus \{e^0, e^n\} = \dots = \mathbb{S}^n \setminus \{e^0, e^n, \dots, e^{n-1}\} \subsetneq \mathbb{S}^n \setminus \{e^0, e^n, \dots, e^{n-1}, e^{n-2}\} \subsetneq \dots \subsetneq \mathbb{S}^n)$

(β) Ένας δεύτερος τρόπος εφοδιασμού της \mathbb{S}^n με τη δομή ενός CW-χώρου είναι ο εξής: θεωρούμε την ακολουθία σφαιρών $\mathbb{S}^0 \subset \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^2 \subset \dots \subset \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$

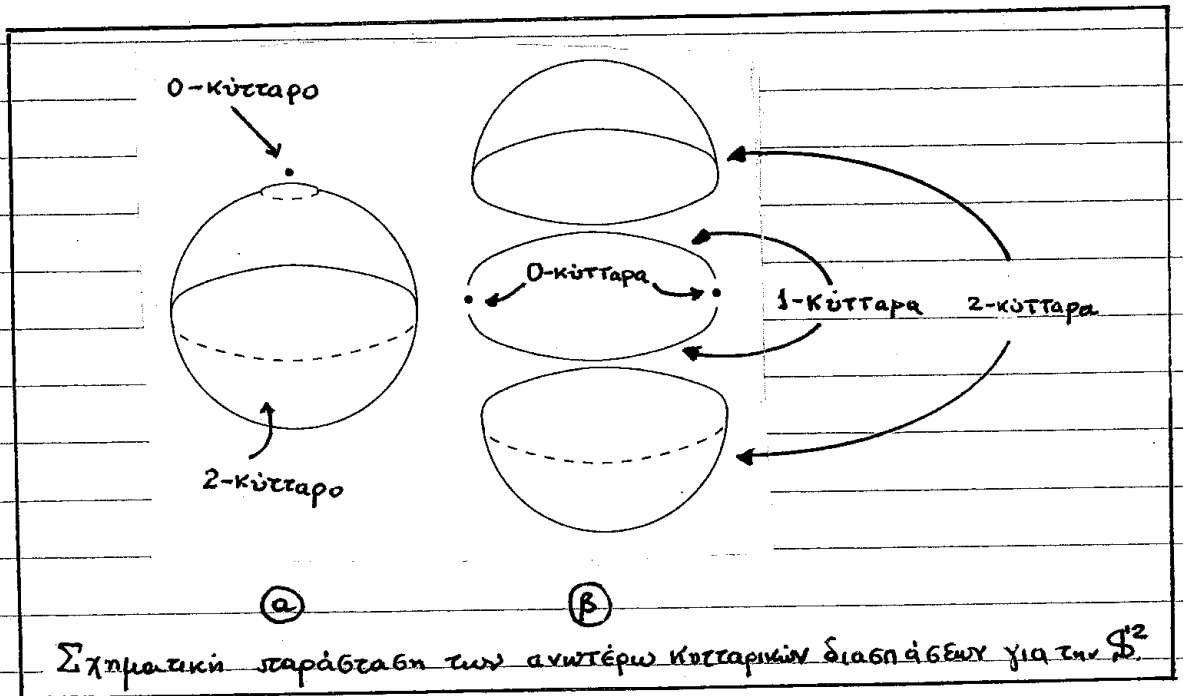
εκλαμβάνοντας καθεμιά εξ αυτών ως τον "ισομερινό" της επαμένης (πρβλ. 1.5.3 (iv), σελ 9-10), καθώς και τα κύτταρα (= ανοικτά ημισφαίρια)

$$e_+^j := \mathbb{S}_+^j := \{x \in \mathbb{S}^j \mid x_{j+1} > 0\}, \quad e_-^j := \mathbb{S}_-^j := \{x \in \mathbb{S}^j \mid x_{j+1} < 0\}$$

για $j=0, 1, \dots, n$. Οι ορθογώνιες προβολές

$$\begin{aligned} \varphi_{e_\pm^j} : \mathbb{D}^j &\rightarrow \mathbb{S}^n \\ (x_1, \dots, x_j) = x &\mapsto \varphi_{e_\pm^j}(x) := (x_1, \dots, x_j, \pm\sqrt{1-\|x\|^2}, 0, \dots, 0), \end{aligned}$$

με $\varphi_{e_\pm^j}(\mathbb{D}^j) \approx \mathbb{S}_\pm^j \subseteq \mathbb{S}^n$, μπορούν να στείξουν τον ρόλο χαρακτηριστικών απεικονίσεων, ούτως ώστε η \mathbb{S}^n να καταστεί εκ νέου CW-χώρος.



(γ) Βεβαίως, ένας άλλος τρόπος εφοδιασμού της \mathbb{S}^n με τη δομή ενός CW-χώρου είναι να θεωρήσουμε οιοδήποτε τριγωνισμό της \mathbb{S}^n και να εφαρμόσουμε γι' αυτόν ό,τι προείπαμε στο (ii). Ένας κλασικός, "όμορφος" τριγωνισμός της \mathbb{S}^n επιτυγχάνεται με τη χρήση του λεγόμενου $(n+1)$ -διάστατου σταυρωτού πολυέδρου (cross polytope)

$$P_{n+1} := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{j=1}^{n+1} |x_j| \leq 1\},$$

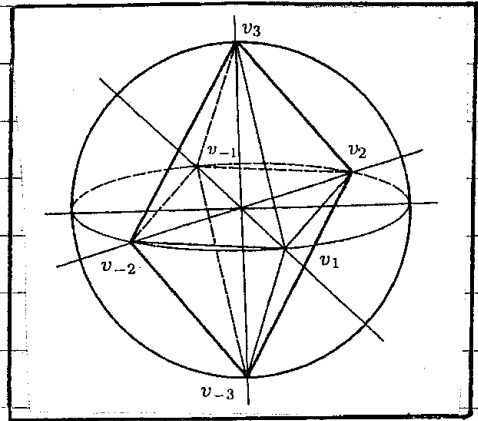
το οποίο αποτελεί την άμεση γενίκευση του γνωστού μας "εξέρου"

οκταέδρου P_3 . Σημειώνεται ότι το P_{n+1} αναπαριστάται ως διπλή πυραμίδα υπέρνω και P_n . (Πρβλ. G.M. Ziegler: "Lectures on Polytopes", G.T.M., Vol. 152, Springer-Verlag, 1995, σελ. 8-9.)

Επίσης, $P_{n+1} = \text{conv}(\{v_{\pm j} \mid 1 \leq j \leq n+1\})$, όπου $v_{\pm j} := (0, \dots, \pm 1, 0, \dots, 0)$, και $\partial P_{n+1} := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{j=1}^{n+1} |x_j| = 1\}$.
↑
j-οστό θέση

Ο εν λόγω τριγωνισμός της \mathbb{S}^n (ο οποίος εικονογραφείται για $n=2$ στο παράλληλο σχήμα) ορίζεται μέσω κλασικών ακτινικών προβολών:

$$\begin{array}{ccc} |\partial P_{n+1}| & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{S}^n \\ \psi & & \psi \\ x & \longmapsto & \frac{x}{\|x\|} \end{array}$$



(v) Εάν $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ και $d=1, 2, 4$ για $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ και $\mathbb{K}=\mathbb{H}$, τότε οι προβολικοί χώροι $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ (βλ. §1.12 και 1.13.5 (v)) είναι CW-χώροι.

Όπως έχουμε ήδη δείξει στο 1.16.4, σελ. 62-63, ο $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ γράφεται ως ένωση $n+1$ κυττάρων $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \approx e^0 \cup e^d \cup e^{2d} \cup \dots \cup e^{nd}$, ενώ οι εκεί ορισθείσες απεικονίσεις $f_k = f_{e^{dk}} : \mathbb{D}^{dk} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^k \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ μπορούν να διαδραματίσουν τον ρόλο των απαιτούμενων χαρακτηριστικών απεικονίσεων για κάθε $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

(vi) Οι γενικευμένοι χώροι φακεί $\Gamma_{2n-1}(p; q_1, \dots, q_n) := \mathbb{S}^{2n-1} / \mathbb{Z}_p$ (όπως ορίστηκαν στο 1.14.5, σελ. 57) είναι CW-χώροι. Για την απόδειξη ταυτίζουμε (ως είθιςται) την \mathbb{S}^{2n-1} με το $\{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = 1\}$, συμβολίζουμε ως $\eta : \mathbb{S}^{2n-1} \rightarrow \Gamma_{2n-1}(p; q_1, \dots, q_n)$ τη φυσική επίρριψη και θεωρούμε τη ακόλουθη διάσπαση της \mathbb{S}^{2n-1} σε $p(n+1)$ κύτταρα:

$$\begin{cases} e_\nu^{2j-2} := \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{S}^{2n-1} \mid z_k = 0 \text{ για } k > j \text{ και } \arg(z_j) = \frac{2\pi\nu}{p}\} \\ e_\nu^{2j-1} := \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{S}^{2n-1} \mid z_k = 0 \text{ για } k > j \text{ και } \frac{2\pi\nu}{p} < \arg(z_j) < \frac{2\pi(\nu+1)}{p}\} \end{cases}$$

για $\nu \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ και $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Κατόπιν τούτου, εισάγοντας τον συμβολισμό $\mathbb{D}_{\mathbb{C}}^{2s} := \{(z_1, \dots, z_s) \in \mathbb{C}^s \mid \sum_{j=1}^s |z_j|^2 \leq 1\}$,
 ορίζουμε την απεικόνιση

$$\begin{aligned} \varphi_{e_y}^{z_j-2} : \mathbb{D}_{\mathbb{C}}^{2j-2} &\longrightarrow \mathbb{S}^{2n-1} \left[\mu \in \mathbb{D}_{\mathbb{C}}^{2j-2} \xrightarrow{\varphi_{e_y}^{z_j-2}} e_y^{z_j-1} \right] \\ (z_1, \dots, z_{j-1}) = \underline{z} &\longmapsto \varphi_{e_y}^{z_j-2}(\underline{z}) := (z_1, \dots, z_{j-1}, \left(\sqrt{1 - \sum_{p=1}^{j-1} |z_p|^2} \right) e^{\frac{2n\sqrt{-1}y}{p}}, 0, \dots, 0), \end{aligned}$$

καθώς και την απεικόνιση

$$\begin{aligned} \varphi'_{e_y}^{z_j-1} : \mathbb{D}_{\mathbb{C}}^{2j-2} \times \mathbb{D}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^{2n-1} \\ (z_1, \dots, z_{j-1}, x) &\longmapsto (z_1, \dots, z_{j-1}, \left(\sqrt{1 - \sum_{p=1}^{j-1} |z_p|^2} \right) e^{\frac{2n\sqrt{-1}(x+2ny+1)}{p}}, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Εν συνεχεία, θεωρώντας μια συνεχή απεικόνιση

$$h_{j-1} : \mathbb{D}_{\mathbb{C}}^{2j-2} \times \mathbb{D}^1 \longrightarrow \mathbb{D}_{\mathbb{C}}^{2j-2} \times \mathbb{D}^1 \quad \text{με τιν ιδιότητα}$$

$h_{j-1}(z_1, \dots, z_{j-1}, x) = (z_1, \dots, z_{j-1}, 1)$ όταν $|z_1|^2 + \dots + |z_{j-1}|^2 = 1$,
 έχουμε

$h_{j-1}(\mathbb{D}_{\mathbb{C}}^{2j-2} \times \partial \mathbb{D}^1) = \partial(\mathbb{D}_{\mathbb{C}}^{2j-2} \times \mathbb{D}^1)$, οπότε υπάρχει

$$\varphi'_{e_y}{}^{z_j-1} : \mathbb{D}_{\mathbb{C}}^{2j-2} \times \mathbb{D}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^{2n-1}$$

με

$$\varphi'_{e_y}{}^{z_j-1} = \varphi_{e_y}{}^{z_j-1} \circ h_{j-1} \quad \text{και} \quad (\mathbb{D}_{\mathbb{C}}^{2j-2} \times \mathbb{D}^1)^{\circ} \xrightarrow{\varphi_{e_y}{}^{z_j-1}} e_y^{z_j-1}$$

Μέσω των ανωτέρω χαρακτηριστικών συναρτήσεων $\varphi_{e_y}{}^{z_j-2}, \varphi_{e_y}{}^{z_j-1}$
 η \mathbb{S}^{2n-1} καθίσταται CW-χώρος. Σημειωτέον ότι

$$\partial e_y^{z_j-1} = e_y^{z_j-2} \cup e_{y+1}^{z_j-2}$$

Κατόπιν εφαρμογής της η διαπιστώνουμε ότι τα $e_y^{z_j-2}$ (και
 αντιστοίχως, τα $e_y^{z_j-1}$) ταυτίζονται μεταξύ τους για κάθε $y \in \{0, 1, \dots, p-1\}$.

Ος εκ τούτου, ο $\Gamma_{2n-1}(p; q_1, \dots, q_n)$ είναι CW-χώρος έχων
 ακριβώς ένα κύτταρο σε κάθε διάσταση $\leq 2n-1$, ήτοι

$$\Gamma_{2n-1}(p; q_1, \dots, q_n) = \eta(e_0^0) \cup \eta(e_0^1) \cup \dots \cup \eta(e_0^{2n-1})$$

(με τις $\eta^k := \eta \circ \varphi_{e_0^k}$, $k \in \{0, 1, \dots, 2n-1\}$ ως χαρακτηρι-
 στικές απεικονίσεις. Πρβλ. με τα σχόλια της βελ. 65.)

(vii) Οι (συνεκτικές, κλειστές) προβανακαλιζόμενες επιφάνειες $F_g, g \geq 1$, είναι CW-χώροι. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό 1.11.12

(σπα.38) για την F_g , παρουσιάζοντας την ως τον πλαικόχωρο

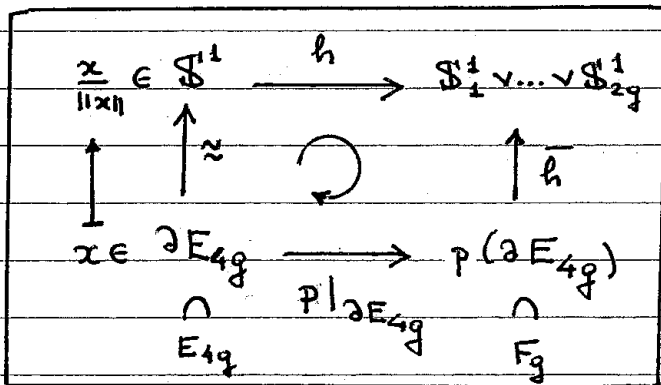
E_{4g}/\mathbb{R} , καθώς και ότι αποδείξαμε στο θεώρημα 1.16.7, βελ. 67-68.

Έστω $p: E_{4g} \rightarrow F_g$ η φυσική επίρριψη και έστω

$$h := i_1 i_2 i_1^{-1} i_2^{-1} \dots i_{2g-1} i_{2g} i_{2g-1}^{-1} i_{2g}^{-1}: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}_1^1 \vee \dots \vee \mathbb{S}_{2g}^1$$

η απεικόνιση η ορισθείσα στο προαναφερθέν θεώρημα.

Τότε η απεικόνιση \bar{h} του διαγράμματος:



με $\bar{h}(p(x)) := h(\frac{x}{\|x\|})$, $\forall x \in \partial E_{4g}$, είναι ομομορφισμός.

Έτσι, ταυτίζοντας το E_{4g} με τον \mathbb{D}^2 , μπορούμε να χράψουμε την F_g ως εξής:

$$F_g \approx p(\partial E_{4g}) \cup_{p|_{\partial E_{4g}}} E_{4g} \quad (\text{πρβλ. 1.16.1 βελ. 61})$$

Η F_g επιδέχεται την ακόλουθη κυτταρική διάσπαση:

- ▶ Ένα 0-κύτταρο: $p(z_1) (= p(z_2) = \dots = p(z_{4g}))$
- ▶ $2g$ 1-κύτταρα: $\begin{cases} p(\overline{z_{4j-3} z_{4j-2}}) \setminus p(z_{4j-3}), \\ p(\overline{z_{4j-2} z_{4j-1}}) \setminus p(z_{4j-2}), \quad 1 \leq j \leq g, \end{cases}$
- ▶ Ένα 2-κύτταρο: $F_g \setminus p(\partial E_{4g}) (= p(\overset{\circ}{E}_{4g}))$.

Η F_g καθίσταται CW-χώρος μέσω των ακόλουθων χαρακτηριστικών

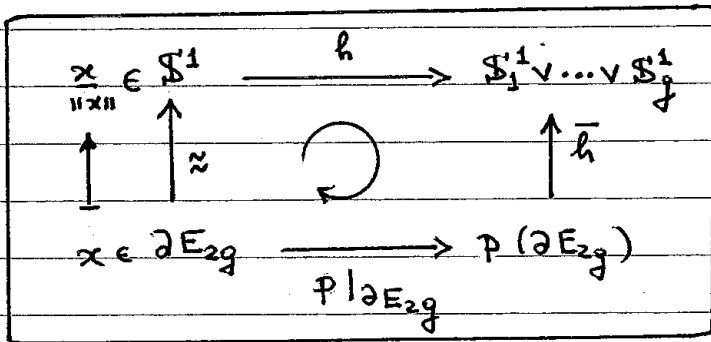
απεικονίσεων: ▶ $\varphi_{p(z_1)} = \eta$ συνήθως ένθεση.

▶ φ για το $p(\overline{z_{4j-3} z_{4j-2}}) \setminus p(z_{4j-3})$

$$\varphi: \underbrace{[-1, 1]}_{\mathbb{D}^1} \rightarrow F_g, t \mapsto \varphi(t) := p\left(\frac{1}{2}(1-t)z_{4j-3} + \frac{1}{2}(1+t)z_{4j-2}\right)$$

- ▶ φ για το $\overline{p(Z_{4j-2}, Z_{4j-1})} \setminus p(Z_{4j-2})$
 $\varphi: [-1, 1] \rightarrow E_g, t \mapsto \varphi(t) := p(\frac{1}{2}(1-t)Z_{4j-2} + \frac{1}{2}(1+t)Z_{4j-1})$.
- ▶ $\varphi_{F_g \setminus p(\partial E_{4g})} := p$.

(viii) Οι (δυναμικές, κλειστές) μη προσανατολιζόμενες επιφάνειες $N_g, g \geq 1$, είναι CW-χώροι. Για $g=1$, $N_1 := \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ (που είναι CW-χώρος επί τη βάση του (v)). Έστω $g \geq 2$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό 1.11.13 (σελ. 39) για την N_g , παρουσιάζοντας την ως τον σπαικό-χωρο E_{2g}/\mathcal{G} , καθώς και το θεώρημα 1.16.4, σελ. 67-68. Έστω $p: E_{2g} \rightarrow N_g$ η φυσική επιρριψη και έστω $h := i_1^2 i_2^2 \dots i_g^2: S^1 \rightarrow S^1 \vee \dots \vee S^1$ η απεικόνιση η ορισθείσα στο προαναφερθέν θεώρημα. Τότε η απεικόνιση του διαγράμματος



με $\bar{h}(p(x)) := h(\frac{x}{\|x\|})$, $\forall x \in \partial E_{2g}$, είναι ομομορφισμός.

Έτσι, ταυτίζοντας το E_{2g} με τον \mathbb{D}^2 , μπορούμε να γράψουμε την N_g ως εξής:

$$N_g \cong p(E_{2g}) \cup_{p|_{\partial E_{2g}}} E_{2g} \quad (\text{πρβλ. 1.16.1, σελ. 61}).$$

Η N_g επιδέχεται την ακόλουθη κυτταρική διάσπαση:

- ▶ Ένα 0-κύτταρο: $p(z_1) (= p(z_2) = \dots = p(z_{2g}))$
- ▶ g 1-κύτταρα: $\overline{p(Z_{2j-1}, Z_{2j})} \setminus p(Z_{2j-1}), 1 \leq j \leq g$.
- ▶ Ένα 2-κύτταρο: $N_g \setminus p(\partial E_{2g}) (= p(\overset{\circ}{E}_{2g}))$.

Η N_g καθίσταται CW-χώρος μέσω των ακόλουθων χαρακτηρι-

ΕΤΙΚΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ: $\triangleright \varphi_{z_j} := \eta$ συνήθως ένθετος.

$\triangleright \varphi$ για το $p(z_{2j-1}, z_{2j}) \setminus p(z_{2j-1})$

$$\varphi: [-1, 1] \rightarrow N_g, t \mapsto \varphi(t) := p\left(\frac{1}{2}(1-t)z_{2j-1} + \frac{1}{2}(1+t)z_{2j}\right).$$

$\triangleright \varphi_{N_g \setminus p(\partial E_{2g})} := p.$

(ix) Ένας τοπ. χώρος ονομάζεται διαχωρίσιμος όταν διαθέτει ένα αριθμητικό πυκνό υποσύνολο. Βάσει ενός θεωρήματος του O. Hanner (βλ. "Some theorems on absolute neighborhood retracts, Ark. Math. 1 (1951), 389-408) αποδεικνύεται ότι κάθε διαχωρίσιμο τοπολογικό πολύπτυχα είναι ομοτοπικά ισοδύναμο με κάποιον CW-χώρο (βλ. A.T. Gundlell & S. Weingram: "The Topology of CW complexes", Van Nostrand, 1969, Cor. 5.7, sec. 135).

1.21.6. Ορισμός. Έστω X ένας CW-χώρος και έστω A ένας υπόχωρος του, ο οποίος γράφεται ως ένωση κυττάρων του X .

Ο A ονομάζεται CW-υπόχωρος του X (και το ζεύγος (X, A) CW-ζεύγος) όταν ισχύει μια (και κατ'επέκταση και οι τρεις) εκ των κάτωθι ισοδυνάμων συνθηκών:

- (i) Ο A , με τα εντός του A ανήκοντα κύτταρα του X , είναι CW-χώρος.
- (ii) Ο A είναι κλειστός υπόχωρος του X .
- (iii) Για κάθε κύτταρο $e \subseteq A$ έχουμε $\bar{e} \subseteq A$.

1.21.7. Σχόλια. (i) Τομές και ενώσεις CW-υπόχωρων αποτελούν CW-υπόχωρους (λόγω του 1.21.6 (ii) και (iii), αντιστοίχως).

(ii) Οι έκθετοι CW-χώροι είναι CW-υπόχωροι αυτών (λόγω του 1.21.6 (iii) και της προτάσεως 1.21.2). Γενικότερα, εάν η $(e^j)_{j \in J}$ είναι μια οικογένεια n -κυττάρων ανήκοντων σε έναν CW-χώρο X , τότε η ένωση $X^{(n-1)} \cup \bigcup_{j \in J} e^j$ αποτελεί έναν CW-υπόχωρο του X . Για τον ίδιο λόγο, οι συνεκτικές γενιστώβες οποιδήποτε CW-χώρου X

είναι CW -υπόχωροι αυτού και ο X γράφεται ως το τοπολογικό άθροισμα των συνεκτικών συνιστωσών του (με καθεμία EJ σελών να είναι το συμπλήρωμα των υπολοίπων ανοικτών). Εν προκειμένω, κάθε συνεκτική συνιστώσα του X είναι δρομογενετική του δικτύου G , και αντιστρόφως!

Μια επιπρόσθετη διαφορά μεταξύ των CW -χώρων και των (τοπολογικών) πολυέδρων έγκειται στο ότι οι CW -χώροι είναι δυνατόν να διαθέτουν απείρου πλήθους κύτταρα. Εν τω μεταξύ, περίπτωθε οι συνθήκες (G) και (W) του 1.21.3 είναι αποφασιστικής σημασίας για τη δομή των θεωρημένων χώρων. Κατ' αρχάς, τα διαθέσιμα κύτταρα δεν μπορούν να "δυσωρεώνονται", όπως δείχνει η ακόλουθη:

1.21.8. Πρόταση. Έστω X ένας CW -χώρος και έστω $A \subseteq X$ ένας υπόχωρός του, η τομή του οποίου με καθενα των κυττάρων του X αποτελείται το πολύ από ένα σημείο. Τότε ο A είναι διακριτός υπόχωρος του X .

Απόδειξη: Για κάθε $B \subseteq A$ και για κάθε κύτταρο $e \subseteq X$ η τομή $B \cap e$ είναι είτε κενή είτε ένα μονοκύτταρο. Λόγω της συνθήκης 1.21.3 (G) η τομή $B \cap \bar{e}$ αποτελείται το πολύ από πεπεραμένον πλήθος σημείων, οπότε είναι κλειστή εντός του \bar{e} . Έτσι, λόγω της συνθήκης 1.21.3 (W), το B είναι κλειστό εντός του X . Επειδή λοιπόν κάθε υποσύνολο του A είναι κλειστό εντός του X , ο A είναι διακριτός υπόχωρος του X . \square

1.21.9. Παραδείγματα. (i) Όλοι οι μηδενδιάστατοι CW -χώροι είναι διακριτοί.
(ii) Το "χαβανέζικο βουλιγγιό"

$$Y := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{n^2} \right\}$$

που ορίσαμε στη βελ. 2B επιδέχεται κυτταρική διάσπαση (με ένα 0-κύτταρο και άπειρα-αριθμήσιμα 1-κύτταρα), αλλά δεν

είναι $\mathcal{C}\mathcal{W}$ -χώρος, καθότι τα 1-κύτταρα του σκευαυρύνονται πλῆθως τοῦ 0-διάστατου κύτταρου του, κάτι που παραβιάζει τη συνθήκη 1.21.3(β).
 (iii) Η πραγματική ευθεία \mathbb{R} , διασπῶμενη σε κύτταρα, και συμμετρήσιμα στους ακέραιους αριθμούς (0-κύτταρα) και στα μέσα \mathbb{Z} αυτῶν ευρισκόμενα (ανοικτά) διαστήματα (1-κύτταρα), είναι ένας $\mathcal{C}\mathcal{W}$ -χώρος. (Η συνθήκη 1.21.3(β) πληροῖται βάσει τῆς προτάσεως 1.15.3).
 Κατ' επέκτασιν, ο \mathbb{R}^n είναι $\mathcal{C}\mathcal{W}$ -χώρος ἔχων ως κύτταρά του τα καρτεσιανὰ γινόμενα των ως ἄνω 0- και 1-κυττάρων.

1.21.10 Πρόταση. Ἐστω X ἕνας $\mathcal{C}\mathcal{W}$ -χώρος. Τότε κάθε συμπαγὲς $A \subseteq X$ περιέχεται σε ἕναν πεπερασμένο $\mathcal{C}\mathcal{W}$ -υπόχωρο τοῦ X .

Ἰδιαιτέρως, ἕνας $\mathcal{C}\mathcal{W}$ -χώρος είναι συμπαγὴς εἰς καὶ μόνον εἰς διαθέτει μίαν κυτταρικήν διάσπαση αποτελούμενη ἀπὸ πεπερασμένους πλῆθους κύτταρα.

Ἀπόδειξη: Ἀπὸ κάθε κύτταρο $e \subseteq X$, γιὰ το οποίο ἰσχύει $e \cap A \neq \emptyset$, ἐπιλέγομε ἕνα σημεῖο τοῦ $e \cap A$. Κατὰ τὴν πρόταση 1.21.8 το σύνολο αὐτῶν των σημείων είναι διακριτὸ καὶ κατ' επέκτασιν πεπερασμένο (αφοῦ ἀνῆκει στο A). Ἄρα το A διαθέτει μὴ κενὴ τμή με πεπερασμένους πλῆθους κύτταρα τοῦ X . Ἐπειδὴ κάθε κύτταρο ἀνῆκει σε ἕναν πεπερασμένο $\mathcal{C}\mathcal{W}$ -υπόχωρο τοῦ X (ὅπως κανεὶς μπορεῖ εὐκόλα να ἀποδείξει κάποιος χρῆσιν επαγωγῆς εἰς τὴν διαστάσεως τοῦ κύτταρου μέσω τῆς προτάσεως 1.21.2 καὶ τῆς συνθήκης 1.21.3(α)), το ἴδιο ἰσχύει καὶ γιὰ το A . \square

1.21.11 Πρόταση: (i) Κάθε $\mathcal{C}\mathcal{W}$ -χώρος X είναι εφοδιασμένος με τὴν αβθηνὴν τοπολογία ως πρὸς τὰς διαιρέσεις $\{X^{(n)} \mid n \geq 0\}$, δηλ. $X = \varinjlim_{n \rightarrow \infty} X^{(n)}$.
 (ii) Ἐστω (X, A) ἕνα $\mathcal{C}\mathcal{W}$ -ζεύγος. Ἐὰν υποτεθεῖ ὅτι γιὰ κάθε n -κύτταρο ἐντὸς τοῦ $X \setminus A$ ἔχει εἰσαχθεῖ μίαν παχυμετρήν ἀπεικόνισιν $f_j: \mathbb{D}^{n-1} \rightarrow X^{(n-1)}$ ($j \in J_n = \text{σύνολο δεικτῶν}$), τότε ἡ ἔνωσις $A \cup X^{(n)}$ δημιουργεῖται ἀπὸ το $A \cup X^{(n-1)}$ ὑπὲρ ἀπὸ προσάρτησιν n -κυττάρων μέσω αὐτῶν των ἀπεικονίσεων.

Απόδειξη: Το (i) έπεται άμεσα από τη συνθήκη 1.21.3 (W).

(ii) Εάν η $(e_j)_{j \in J_n}$ είναι η συλλογή των n -κυττάρων των ανηκόντων στο $X \setminus A$ και η φ_j μια χαρακτηριστική απεικόνιση τύπου με $\varphi_j|_{S^{n-1}} = f_j$, τότε θεωρούμε τις ακόλουθες απεικονίσεις:

$$\begin{aligned}
f &: S^{n-1} \times J_n \longrightarrow A \cup X^{(n-1)}, & f(x, j) &:= f_j(x), \\
\varphi &: D^n \times J_n \longrightarrow A \cup X^{(n)}, & \varphi(z, j) &:= \varphi_j(z), \\
\rho &: (A \cup X^{(n-1)}) + (D^n \times J_n) \longrightarrow (A \cup X^{(n-1)}) \cup_\varphi (D^n \times J_n) =: Y_n \\
& \text{(φυσική επίρριψη) και} \\
h &:= (\text{Id}_{A \cup X^{(n-1)}} + \varphi) \circ \rho^{-1}: Y_n \longrightarrow A \cup X^{(n)}.
\end{aligned}$$

Εν προκειμένω, το J_n είναι εφοδιασμένο με τη διακριτή τοπολογία και η ρ είναι ταυτοθμική απεικόνιση. Επίσης, η h είναι καλά ορισμένη και συνεχής (βλ. πρόταση 1.10.14, σελ. 30), και προφανώς ομομορφική. Έστω $e \subseteq A \cup X^{(n)}$ ένα κύτταρο. Εάν $e \subseteq X^{(n-1)}$, τότε η $h^{-1}|_e$ είναι η ταυτοθμική. Εάν $e = e_j$, τότε η $h^{-1}|_e = \rho \circ \varphi^{-1}$ είναι συνεχής, διότι η φ_j είναι ταυτοθμική. Κατά συνέπεια, η $h^{-1}|_e$ είναι συνεχής για κάθε κύτταρο e . Από τη συνθήκη 1.21.3 (W) έπεται η συνέχεια της h^{-1} . Ως εκ τούτου, η h είναι ομομορφισμός. \square

Στην περίπτωση κατά την οποία $A = \emptyset$ η ανωτέρω πρόταση μας δείχνει ότι κάθε GW-χώρος λαμβάνεται ως εφής: Κάποις εκκινεί από τον $X^{(0)}$ (έναν διακριτό χώρο), λαμβάνει τον $X^{(1)}$ εφ'αυτού ύστερα από προσάρτηση 1-κυττάρων, τον $X^{(2)}$ εφ'αυτού ύστερα από προσάρτηση 2-κυττάρων κ.ο.κ. Ο X είναι το όριο της ακολουθίας $X^{(0)} \subset X^{(1)} \subset X^{(2)} \subset \dots \subset X^{(n)} \subset X^{(n+1)} \subset \dots$

Και αντιστρόφως: μια τέτοια είδους κατασκευή μας παρέχει έναν GW-χώρο:

1.21.12. Πρόταση. Έστω $X^{(0)} \subset X^{(1)} \subset X^{(2)} \subset \dots$ μια ακολουθία τοπολογικών χώρων, ούτως ώστε ο $X^{(0)}$ να είναι διακριτός και ο $X^{(n)}$ να δημιουργείται από τον $X^{(n-1)}$ ύστερα από προσάρτηση n -κυττάρων ($n \geq 1$). Τότε ο $X := \lim_{n \rightarrow \infty} X^{(n)}$ (με τα 0-κύτταρα από τον $X^{(0)}$ και τα n -κύτταρα από τον $X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}$) είναι GW-χώρος.

Απόδειξη: Ο X είναι χώρος Hausdorff. (Υπόδειξη: Για $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχει $n \geq 0$ και ανοικτά υποσύνολα U_n, V_n του $X^{(n)}$, για τα οποία ισχύει: $x \in U_n, y \in V_n$ και $U_n \cap V_n = \emptyset$. Το U_n μπορεί να επεκταθεί σε ένα ανοικτό υποσύνολο U_{n+1} του $X^{(n+1)}$ ύστερα από προσάρτηση σε κάθε $(n+1)$ -κύτταρο e με $U_n \cap \partial e \neq \emptyset$ των σημείων της μορφής $\varphi_e(\lambda z)$, $\frac{1}{2} < \lambda \leq 1$, με $\varphi_e(z) \in U_n \cap \partial e$ (όπου φ_e η χαρακτηριστική απεικόνιση του e). Κατ' αναλογία κατασκευάζεται και το V_{n+1} . Κατόπιν επαναλαμβάνεται αυτής της διαδικασίας προκύπτουν ανοικτά υποσύνολα $U = U_n \cup U_{n+1} \cup \dots, V = V_n \cup V_{n+1} \cup \dots$ του X με $U \cap V = \emptyset$.)

Προφανώς, ο X διαθέτει κυτταρική διάσπαση και κάθε κύτταρο μια χαρακτηριστική απεικόνιση (= τον περιορισμό της ταυτοθικής απεικόνισης κατά την προσάρτηση των κυττάρων). Κάνοντας χρήση επαγωγής επί του n αποδεικνύεται εύκολα ότι κάθε $X^{(n)}$ είναι ένας GW -χώρος. Τέλος, οι συνθήκες 1.21.3 (G) και (W) πληρούνται και για τον X , καθώς ο X είναι EF υποθέτως εφοδιασμένος με την αβθενή τοπολογία ως προς το $\{X^{(n)} \mid n \geq 0\}$. \square

1.21.13. Παραδείγματα (i) Οι απεριοδιάστατοι προβολικοί χώροι $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{\infty} (\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\})$, βλ. 1.15.6 (iii), σελ. 60, είναι GW -χώροι. Μάλιστα, λαμβάνοντας υπ' όψιν τα 1.16.4, σελ. 62-63, και 1.21.5 (v), σελ. 104, συμπεραίνουμε ότι αυτοί μπορούν να γραφούν υπό τη μορφή:

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{\infty} = e^0 \cup e^1 \cup e^2 \cup \dots$$

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{\infty} = e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup \dots$$

$$\mathbb{P}_{\mathbb{H}}^{\infty} = e^0 \cup e^4 \cup e^8 \cup \dots$$

(ii) Βάσει της κυτταρικής διάσπασης 1.21.5 (iv) \textcircled{B} της \mathbb{S}^m συμπεραίνουμε ότι και η $\mathbb{S}^{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{S}^m$ είναι GW -χώρος.

(iii) Το ίδιο συμβαίνει και με τους απεριοδιάστατους γενικευμένους χώρους φασού $T_{\infty}(\rho; \varphi_1, \varphi_2, \dots)$, βλ. 1.15.6 (iv), σελ. 60. Μάλιστα, κατά τα 1.21.5 (vi), σελ. 104-105, αυτοί γράφονται ως EF ς: $e^0 \cup e^1 \cup e^2 \cup \dots$ (με ως αντίστοιχες φ_e).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι X, Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι, ο A κλειστός υπόχωρος του X , η $f: A \rightarrow Y$ μια συνεχής απεικόνιση, το (X, A) ένα GW -ζεύγος και ο Y ένας GW -χώρος. Θα μελετήσουμε το κατά πόσον ο $Y \cup_f X$ είναι GW -χώρος. Η μόνη δυσκολία για να συμπεράνει από καθίσταται ελαφρώς μέσω του ακόλουθου παραδείγματος: Προσαρτώντας στην \mathbb{S}^2 ένα 2-κύτταρο μέσω μιας επιφανειακής, συνεχούς απεικόνισης $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2$, ο χώρος $\mathbb{S}^2 \cup e^2$ επιδέχεται κυτταρική διάσπαση αλλά (αδελφώς με το πως διασπάται η \mathbb{S}^2) το $\mathbb{Z}e^2$ δεν ανήκει στον 1-ελευθό. Ως εκ τούτου, βλέπουμε ότι υπάρχει "ανάγκη" εισαγωγής μιας επιπρόσθετης συνθήκης για τις απεικονίσεις προσαρτίσεως.

1.21.14. Ορισμός. Μια συνεχής απεικόνιση $f: X \rightarrow Y$ μεταξύ GW -χώρων καλείται κυτταρική απεικόνιση όταν $f(X^{(n)}) \subseteq Y^{(n)}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$.

1.21.15. Παρατήρηση. Εάν η $f: K \rightarrow L$ είναι μια μονογενική απεικόνιση (βλ. 1.20.24, βελ. 9f), τότε η $|f|: |K| \rightarrow |L|$ είναι κυτταρική. Ωστόσο, αυτό το παράδειγμα είναι παύ ειδικό. Εν γένει, οι κυτταρικές απεικονίσεις δεν απεικονίζουν κατ' ανάγκην κύτταρα σε κύτταρα.

1.21.16. Θεώρημα. Έστω $X \supseteq A \xrightarrow{f} Y$ μια συνεχής απεικόνιση, όπου το (X, A) είναι ένα GW -ζεύγος και ο Y ένας GW -χώρος. Εάν η f είναι κυτταρική απεικόνιση και η $p: X \cup_f Y \rightarrow Y \cup_f X$ η ταυτική απεικόνιση, τότε ο $Y \cup_f X$ είναι GW -χώρος με το $\{p(e) \mid e \text{ κύτταρο} \subseteq X \setminus A\} \cup \{e' \mid e' \text{ κύτταρο} \subseteq Y\}$ ως το σύνολο των κυττάρων του. Επιπροσθέτως, ο Y είναι GW -υπόχωρος του $Y \cup_f X$.

Απόδειξη: Επειδή η f είναι κυτταρική, ορίζεται η $f_n := f|_{A^{(n)}}: A^{(n)} \rightarrow Y^{(n)}$

Καθώς και ο χώρος $Z_n := Y^{(n)} \cup_p X^{(n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Και εἰς
 δείχνει εύκολα τα ακόλουθα:

- (i) $Z_n = p(X^{(n)} + Y^{(n)}) \subseteq Y \cup_p X$ και η πηλικοτοπολογία και η βχετική τοπολογία επί τῶν Z_n ταυτίζονται.
- (ii) Η πηλικοτοπολογία επί τῶν $Y \cup_p X$ είναι η αθηνής τοπολογία ως προς το $\{Z_n \mid n \geq 0\}$ (επί τη βάση τῶν (i) και τῆς 1.21.11 (i)).
- (iii) Ο Z_n δημιουργείται ἀπὸ τὸν Z_{n-1} βετέρα ἀπὸ ἰσοσάρτηση n -κυττάρων (επί τη βάση τῶν (i) και τῆς 1.21.11 (ii)).

Ἐπειδὴ ὁ Z_0 εἶναι διακριτὸς z - x οὐρεὶ νὰ ἐφαρμοσθεῖ ἡ 1.21.12. \square

1.21.17. Πρόταση. Ἐάν τὸ (X, A) εἶναι GW -ζεύγος με $A \neq \emptyset$, τότε ὁ X/A εἶναι GW -χώρος με τὸ $\{p(A)\} \cup \{p(e) \mid e \text{ κύτταρο} \in X \setminus A\}$, ὅπου $p: X \rightarrow X/A$ ἡ ταυτισμικὴ ἀπεικόνιση. \leftarrow ἓνα οὐρεὶο

Ἀπόδειξη: Ἐπεταί ἀμέσως ἀπὸ τὸ θεώρημα 1.21.16 και τὴν 1.10.13 (i). \square

1.21.18. Πρόταση. Κάθε μονοσημειακὴ ἔνωση ἀσυνδέητων GW -χώρων (δοσούμενη με τὴν βούδια 0-κυττάρων) εἶναι GW -χώρος.

Ἀπόδειξη: Ἐπεταί ἀμέσως ἀπὸ τὸ θεώρημα 1.21.16 και τὸ 1.10.10 (iii). \square

1.21.19. Πρόταση. Ἐάν οἱ X, Y εἶναι GW -χώροι, τότε τὸ καρτεσιανὸ γινόμενὸ τους ἐπιδέχεται τὸ $\mathcal{X} = \{exe' \mid e \text{ κύτταρο} \in X, e' \text{ κύτταρο τῶν } Y\}$ ως κυτταρική διάσπαση του, για τὴν οποία ἰσχύουν τὰ ἑξῆς:

(i) $(X \times Y)^{(n)} = (X^{(0)} \times Y^{(n)}) \cup (X^{(1)} \times Y^{(n-1)}) \cup \dots \cup (X^{(n)} \times Y^{(0)})$.

(ii) $\overline{exe'} = \bar{e} \times \bar{e}'$, $\partial(exe') = (\partial e) \times \bar{e}' \cup \bar{e} \times (\partial e')$, $\forall exe' \in \mathcal{X}$.

(iii) Τα κύτταρα τῶν \mathcal{X} πληροῦν τὴν συνθήκη 1.21.3. (c).

(iv) Ἐάν τὸ $e = e^m$ εἶναι ἓνα κύτταρο τῶν X και τὸ $e' = e'^n$ ἓνα κύτταρο τῶν Y με τὰς $\varphi_e, \varphi_{e'}$ ως χαρακτηριστικὲς ἀπεικονίσεις τους, τότε ἡ $(\varphi_e \times \varphi_{e'}) \circ h: \mathbb{D}^{m+n} \rightarrow X \times Y$ εἶναι χαρακτηριστικὴ ἀπεικόνιση για τὸ $exe' \in \mathcal{X}$, ὅπου $h: \mathbb{D}^{m+n} \rightarrow \mathbb{D}^m \times \mathbb{D}^n$ οἰοσδήποτε ομομορφισμὸς.

(v) Ἐάν εἴτε ὁ X εἴτε ὁ Y εἶναι τοπικὰ συμπαγῆ, τότε ὁ $(X \times Y, \mathcal{X})$ εἶναι GW -χώρος.

Απόδειξη: Τα (i) - (iv) είναι εύκολα διαπιστώσιμα. Για το (v) αρκεί να ληφθεί υπ' όψιν η γενική πρόταση: για τ.χ. X, X', Y :

$$\left. \begin{array}{l} f: X \rightarrow X' \text{ ταυτοσφικη} \\ Y \text{ τοπικά συμπαγής} \end{array} \right\} \implies f \times \text{Id}_Y: X \times Y \rightarrow X' \times Y. \\ \text{ταυτοσφικη.} \quad \square$$

1.21.20. Θεώρημα. Κάθε GW -χώρος είναι τοπικά δρομοσφικητός (βλ. 1.9.22, 6εσ. 21).

Απόδειξη: Βλ. π.χ. J.I. Rotman: "An Introduction to Algebraic Topology", GTM, Vol. 119, Springer-Verlag, 1988, Theorem 8.25, pp. 207-208. \square

Έστω (X, \mathcal{X}) ένας GW -χώρος. Ας συμβολίσουμε ως $\mathbb{F}_X := \bigcup_{e \in \mathcal{X}} (\mathbb{D}^{\dim(e)} \times \{e\})$
 $= \sum_{e \in \mathcal{X}} \mathbb{D}^{\dim(e)}$ το τοπολογικό άθροισμα της οικογένειας $(\mathbb{D}^{\dim(e)})_{e \in \mathcal{X}}$ και

ως $\Phi: \mathbb{F}_X \rightarrow X$ την απεικόνιση: $\Phi(x, e) := \varphi_e(x)$, όπου $\varphi_e: \mathbb{D}^{\dim(e)} \rightarrow X$ η χαρακτηριστική απεικόνιση οποιδήποτε $e \in \mathcal{X}$.

Λόγω τών ορισμών της τοπολογίας επί τού X , η Φ είναι ταυτοσφικη.

Για την απόδειξη τού επομένου θεωρήματος θα χρειασθούμε κάποιους επιπρόσθετους συμβολισμούς: Για κάθε $p \in \mathbb{N}_0$ θέτουμε

$$\mathbb{F}_X^{(p)} := \bigcup_{e \in \mathcal{X}^{(p)}} \mathbb{D}^{\dim(e)} \times \{e\}$$

$$\text{και } \mathbb{F}_X^{(p)} := \mathbb{F}_X^{(p-1)} \cup \bigcup_{\substack{e \in \mathcal{X} \\ \dim(e)=p}} (\mathbb{D}^{\dim(e)} \setminus \{0\}) \times \{e\}.$$

Τότε προφανώς $\Phi(\mathbb{F}_X^{(p)}) = X^{(p)}$ και

$$\Phi(\mathbb{F}_X^{(p)}) = X^{(p-1)} \cup \bigcup_{\substack{e \in \mathcal{X} \\ \dim(e)=p}} (e \setminus \{\varphi_e(0)\}) = X^{(p)} \setminus \{\varphi_e(0) \mid e \in \mathcal{X} \text{ και } \dim(e)=p\}.$$

1.21.21. Θεώρημα. Έστω (X, \mathcal{X}) ένας GW -χώρος, $p \in \mathbb{N}$, και για κάθε $e \in \mathcal{X}$ έστω $x_e := \varphi_e(0)$. Τότε ο $(p-1)$ -διάστατος σκελετός $X^{(p-1)}$ αποτελεί μια ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη τού $X^{(p)}$, όπου $X^{(p)} := X^{(p)} \setminus \{x_e \mid e \in \mathcal{X} \text{ και } \dim(e)=p\}$.

Απόδειξη: Ο χώρος $\mathbb{F}'_{\mathcal{X}}^{(p-1)} \cup \bigcup_{e \in \mathcal{X}} \mathbb{F}^{p-1} \times \{e\}$ αποτελεί μια ισχυρή παραμορφωτική συμπίεση του $\mathbb{F}'_{\mathcal{X}}^{(p)}$. $\dim(e) = p$ (βλ. ορ. 1.17.20, βλ. 1.17.20, βλ. 1.17.20).

Τούτο έπεται από την ύπαρξη της ομομορφίας:

$$\tilde{H}: \mathbb{F}'_{\mathcal{X}}^{(p)} \times I \rightarrow \mathbb{F}'_{\mathcal{X}}^{(p)}$$

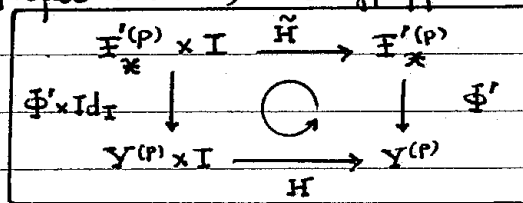
με

$$\tilde{H}((x, e), t) := \begin{cases} (x, e), & \text{όταν } \dim(e) \leq p-1, \\ ((1-t)x + t \frac{x}{\|x\|}, e), & \text{όταν } \dim(e) = p. \end{cases}$$

Ορίζουμε την $H: Y^{(p)} \times I \rightarrow Y^{(p)}$ μέσω του τύπου: $H(y, t) := (\Phi \circ \tilde{H})(x, e, t)$.

► Η H είναι καλώς ορισμένη: Πράγματι: εάν $(x_1, e_1), (x_2, e_2) \in \Phi^{-1}(y)$, τότε εξετάζουμε δύο περιπτώσεις: Εάν $y \in X^{(p-1)}$, τότε είτε $\dim(e_j) < p$ είτε $\dim(e_j) = p$ και $x_j \in \mathbb{F}^{p-1}$, $j=1,2$. Εξ αυτού έπεται ότι $\tilde{H}((x_j, e_j), t) = (x_j, e_j)$, $\forall j \in \{1,2\}$. Εάν $y \in Y^{(p)} \setminus X^{(p-1)}$, τότε $\dim(e_1) = \dim(e_2) = p$ και $y \in e_1 \cap e_2$. Επειδή τα κύτταρα εντός του \mathcal{X} είναι ξένα μεταξύ τους, έχουμε $e_1 = e_2$ και $x_1 = x_2$.

► Λόγω του ορισμού της H , το διάγραμμα



είναι μεταθετικό, όπου $\Phi' := \Phi|_{\mathbb{F}'_{\mathcal{X}}^{(p)}}$

Λόγω της 1.21.11 (i) η $\Phi|_{\mathbb{F}'_{\mathcal{X}}^{(p)}}: \mathbb{F}'_{\mathcal{X}}^{(p)} \rightarrow X^{(p)}$ είναι ταυτοθμική.

Επειδή το $\mathbb{F}'_{\mathcal{X}}^{(p)}$ είναι ανοικτό εντός του $\mathbb{F}_{\mathcal{X}}^{(p)}$ και $\mathbb{F}'_{\mathcal{X}}^{(p)} = (\Phi|_{\mathbb{F}'_{\mathcal{X}}^{(p)}})^{-1}(\Phi|_{\mathbb{F}'_{\mathcal{X}}^{(p)}}(\mathbb{F}'_{\mathcal{X}}^{(p)}))$, αποδεικνύεται εύκολα ότι η ίδια η Φ' είναι ταυτοθμική απεικόνιση.

Επικαλούμενοι την πρόταση που είχαμε επικαλεσθεί στην απόδειξη της

1.21.19 (v) διαπιστώνουμε ότι και η $\Phi' \times Id_I$ είναι ταυτοθμική.

Άρα μέσω του ανωτέρω μεταθετικού διαγράμματος συμπεραίνουμε τη συνέχεια της H από τη συνέχεια της \tilde{H} (βλ. 1.10.7 (iii), βλ. 2.4).

► Προφανώς, θέτοντας $H_t = H(\cdot, t)$ έχουμε $H_0 = Id_{Y^{(p)}}$,

$H_1: Y^{(p)} \rightarrow X^{(p-1)}$ μια απεικόνιση συμπίεσης και

$$H_t|_{X^{(p-1)}} = Id_{X^{(p-1)}}, \quad \forall t \in I.$$

Άρα ο $X^{(p-1)}$ είναι όπως μια ισχυρή παραμορφωτική συμπίεση του $Y^{(p)}$. □