ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Υπομνήσεις από τη Γενική και τη Συνδυαστική Τοπολογία

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια σύντομη επισκόπηση ορισμένων βασικών εννοιών και θεωρητικών αποτελεσμάτων εντασσομένων στη Γενική και στη Συνδυαστική Τοπολογία.

§ 1.1 Τοπολογικοί χώροι

1.1.1. Ορισμός. Μια *τοπολογία* επί ενός συνόλου X είναι ένα σύνολο $\mathcal{T}$ υποσυνόλων τού X με τις εξής ιδιότητες:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(ii) Εάν $(U_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{T}$, τότε $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$

(iii) Εάν $n\in\mathbb{N}$ και $U_1,\ldots,U_n \in \mathcal{T}$, τότε $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$.

Τα στοιχεία τού $\mathcal{T}$ ονομάζονται *ανοικτά σύνολα*. Ένα υποσύνολο A τού X καλείται *κλειστό* (ως προς την $\mathcal{T}$) όταν το συμπλήρωμά του $X\setminus A$ είναι ανοικτό. Ως *τοπολογικός χώρος* νοείται ένα ζεύγος $(X,\mathcal{T})$ αποτελούμενο από ένα μη κενό σύνολο X και μια τοπολογία $\mathcal{T}$ ορισθείσα επ' αυτού. (Ορισμένες φορές, για λόγους συντομίας, αντί τού $(X,\mathcal{T})$ γράφουμε απλώς X υπονοώντας τό $\mathcal{T}$.)

1.1.2. Παραδείγματα. (i) $(\underset{\neq\emptyset}{X}, \underbrace{\{\emptyset, X\}}_{\mathcal{T}})$: *τετριμμένη τοπολογία* επί τού X.

(ii) $X=\{0,1\}$, $\mathcal{T}=\{\emptyset, X, \{0\}\}$: *τοπολογία Sierpinski* επί τού X.

(iii) Κάθε *μετρικός χώρος* $(X,\underset{\text{μετρική}}{d})$ καθίσταται τοπολογικός χώρος ως προς την τοπολογία

$$\mathcal{T}_d := \{A\subseteq X \mid \forall x\in A\ \exists \delta_x>0 : \{y\in X \mid d(x,y)<\delta_x\}\subseteq A\}.$$

(iv) Εάν το X είναι ένα απειροσύνολο, τότε η

$\mathcal{T}_{cofin} := \{A\subseteq X \mid X\setminus A \text{ πεπερασμένο σύνολο}\}\cup\{\emptyset\}$ είναι η λεγόμενη *συμπεπερασμένη τοπολογία* επί τού X.

(v) $(X, \mathcal{P}(X))$ — *διακριτή τοπολογία* επί τού X

1.1.3. Ορισμός. 'Εστω (X,τ) ένας τοπολογικός χώρος. 'Ενα $\mathbb{B}\subseteq\tau$ καλείται <u>βάση της τοπολογίας τ</u> όταν κάθε ανοικτό σύνολο γράφεται ως ένωση στοιχείων της $\mathbb{B}$.

1.1.4. Παράδειγμα. Εάν ο (X,τ_d) είναι ένας μετρικός χώρος, τότε το $\mathbb{B}=\{\{y\in X \mid d(x,y)<\frac{1}{n}\} \mid x\in X, n\in\mathbb{N}\}$ είναι μια βάση της τ_d.

1.1.5 Ορισμός. 'Εστω (X,τ) ένας τοπολογικός χώρος και έστω $x\in X$. 'Ενα $V\subseteq X$ καλείται <u>περιοχή του x</u> όταν $\exists A\in\tau : x\in A\subseteq V$.
Συμβολισμός: $\mathcal{U}(x) := \{$σύνολο περιοχών του $x\}$.

1.1.6. Πρόταση: 'Εστω (X,τ) ένας τοπολογικός χώρος. Τότε $\forall x\in X$ ισχύουν τα εξής:

(i) $V\in\mathcal{U}(x) \Longrightarrow x\in V$ $(\emptyset\notin\mathcal{U}(x))$.

(ii) $V,W\in\mathcal{U}(x) \Longrightarrow V\cap W\in\mathcal{U}(x)$.

(iii) $\left.\begin{array}{l} V\in\mathcal{U}(x) \\ V\subseteq U\in\tau \end{array}\right\} \Longrightarrow U\in\mathcal{U}(x)$.

(iv) Εάν $V\in\mathcal{U}(x)$, τότε $\exists W\in\mathcal{U}(x) : W\subseteq V$ και $V\in\mathcal{U}(y)$, $\forall y\in W$.

1.1.7 Πρόταση: Εάν το X είναι ένα μη κενό σύνολο και $\{\mathcal{U}(x) \mid x\in X\}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X που πληροί τις συνθήκες 1.1.6. (i)–(iv), τότε $\exists!$ τοπολογία τ επί του X, τέτοια ώστε το $\mathcal{U}(x)$ να είναι το σύνολο των περιοχών του x, $\forall x\in X$.

1.1.8. Ορισμός. 'Εστω (X,τ) ένας τοπολογικός χώρος και έστω $x\in X$. 'Ενα υποσύνολο $\mathbb{B}(x)\subseteq\mathcal{U}(x)$ καλείται <u>βάση περιοχών του x</u> όταν για κάθε $V\in\mathcal{U}(x)$ υπάρχει κάποιο $B\in\mathbb{B}(x) : x\in B\subseteq V$.

1.1.9. Παραδείγματα. (i) Εάν ο (X,τ_d) είναι ένας μετρικός χώρος, τότε το $\mathbb{B}(x)=\{\{y\in X \mid d(x,y)<\frac{1}{n}\} \mid n\in\mathbb{N}\}$ είναι βάση περιοχών οιουδήποτε $x\in X$.
(ii) Εάν ο (X,τ) είναι τυχών τοπολογικός χώρος, τότε το $\mathbb{B}(x):=\{A\in\mathcal{U}(x) \mid A\in\tau\}$ είναι μια βάση περιοχών οιουδήποτε $x\in X$.

1.1.10. Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος (X,τ) καλείται

- **$1^{ος}$ αριθμήσιμος** $\underset{ορσ}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x\in X$ $\exists$ αριθμήσιμη βάση περιοχών τού x.

- **$2^{ος}$ αριθμήσιμος** $\underset{ορσ}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ αριθμήσιμη βάση τής τ.

1.1.11. Παραδείγματα (i) Κάθε μετρικός χώρος είναι $1^{ος}$ αριθμήσιμος, αλλ' όχι κατ' ανάγκην και $2^{ος}$ αριθμήσιμος. Επί παραδείγματι, εάν το X είναι ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο, τότε, μιλώντας για τη διακριτή τοπολογία επί του X, ο $(X,\tau_{διακ})$ δεν είναι $2^{ος}$ αριθμήσιμος (παρότι ορίζεται από τη διακριτή μετρική

$$d(x,y):=\begin{cases}1, & \text{όταν } x\neq y\\ 0, & \text{όταν } x=y\end{cases}$$

καθόσον η μόνη βάση τής $\tau_{διακρ.}$ είναι η $\mathbb{B}=\{\{x\}\mid x\in X\}$.

(ii) Ο $\mathbb{R}^k$ (ως συνήθης μετρικός χώρος) είναι τόσον $1^{ος}$ όσον και $2^{ος}$ αριθμήσιμος, καθότι το σύνολο $\mathbb{B}:=\{\{y\in\mathbb{R}^k : \|x-y\|<\frac{1}{n}\}\mid x\in\mathbb{Q}^k, n\in\mathbb{N}\}$ αποτελεί βάση τού $\mathbb{R}^k$ (που είναι προφανώς αριθμήσιμο).

1.1.12. Πρόταση. Έστω (X,τ) ένας τοπολογικός χώρος και έστω $\mathbb{B}$ μια βάση τής τ. Τότε για κάθε $x\in X$ το $\mathbb{B}(x):=\{B\in\mathbb{B}\mid x\in B\}$ αποτελεί μια βάση περιοχών τού x.

1.1.13. Πόρισμα. Κάθε $2^{ος}$ αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος είναι και $1^{ος}$ αριθμήσιμος.

§ 1.2 Στοιχειώδεις τοπολογικές έννοιες

1.2.1. Ορισμός Έστω (X,τ) ένας τοπολογικός χώρος και έστω $A\subseteq X$. Το

$$cl_X(A):=cl_\tau(A):=\overline{A}:=\bigcap\{F\subseteq X\mid A\subseteq F,\ F \text{ κλειστό}\},$$

ήτοι το ελάχιστο κλειστό σύνολο τού X που περιέχει το A, καλείται **κλειστή θήκη** ή **κλειστό έγκλεισμα** τού A. Σημειωτέον ότι $\overline{A}=\{x\in X\mid V\cap A\neq\emptyset,\ \forall V\in\mathcal{U}(x)\}$. Επίσης, το A καλείται **πυκνό εντός τού X** όταν $\overline{A}=X$.

1.2.2. Παραδείγματα. (i) Ως προς τη συνήθη (ευκλείδεια) τοπολογία επί τού $\mathbb{R}$ έχουμε $\overline{(0,1)} = \overline{(0,1]} = \overline{[0,1)} = [0,1]$, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ και $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{(0,1]\cup\{2\}} = [0,1]\cup\{2\}$, $\overline{\{\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\}} = \{0\}\cup\{\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\}$.

(ii) Ως προς τη συνήθη (ευκλείδεια) τοπολογία επί τού $\mathbb{R}^2$:
για $A := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = \sin(\frac{1}{x}),\ x\in(0,1]\}$ έχουμε $\overline{A} = A\cup(\{0\}\times[-1,1])$

(iii) Στον χώρο Sierpinski $X = \{0,1\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{0\}\}$, έχουμε $\overline{\{0\}} = X$, $\overline{\{1\}} = \{1\}$

(iv) Στον $(X, \mathcal{T}_{\delta\iota\alpha\kappa\rho.})$ το μόνο πυκνό σύνολο εντός τού X είναι το ίδιο το X.

(v) Σε οιονδήποτε τοπολογικό χώρο $(X,\mathcal{T})$, για $A\subseteq X$ έχουμε $A\subseteq\overline{A}$ και $A = \overline{A} \Leftrightarrow A$ κλειστό.

1.2.3. Πρόταση. Εάν ο $(X,\mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος και $A, B\subseteq X$, τότε:
(i) $A\subseteq B \Longrightarrow \overline{A}\subseteq\overline{B}$,
(ii) $\overline{A\cap B} \subseteq \overline{A}\cap\overline{B}$,
(iii) $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cup\overline{B}$,
(iv) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

1.2.4. Πρόταση. Εάν ο $(X,\mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος και εάν η $(A_i)_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων τού X, τότε
$$\bigcup_{i\in I}\overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$$ (που ισχύει ως ισότητα όταν I πεπερασμένο).

1.2.5. Αντιπαράδειγμα: Εάν $A_n := [0, 1-\frac{1}{n}]\subseteq\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, τότε
$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \overline{[0,1)} = [0,1] \supsetneq [0,1) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[0, 1-\tfrac{1}{n}] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}.$$

1.2.6. Ορισμός. Έστω (X, τ) ένας τοπολογικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Το

$$\mathrm{int}_X(A) := \mathrm{int}_\tau(A) := A^\circ := \bigcup\{B \subseteq X \mid B \subseteq A \text{ και } B \text{ ανοικτό}\},$$

ήτοι το μέγιστο ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο A, καλείται <u>εσωτερικό του A</u> (εντός του X).

1.2.7. Παραδείγματα (i) Στον $(\mathbb{R}, \tau_{συν.})$: $(0,1]^\circ = [0,1)^\circ = [0,1]^\circ = (0,1)$, $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$, $\mathbb{Z}^\circ = \emptyset$, $((0,1] \cup \{2\})^\circ = (0,1)$, $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}^\circ = \emptyset$.
(ii) Στον χώρο Sierpinski: $\{0\}^\circ = \{0\}$ και $\{1\}^\circ = \emptyset$.

1.2.8. Πρόταση: Εάν ο (X, τ) είναι ένας τοπολογικός χώρος και $A, B \subseteq X$, τότε:
(i) $A^\circ = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$,
(ii) A ανοικτό $\Leftrightarrow A = A^\circ$,
(iii) $A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$,
(iv) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$,
(v) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$,
(vi) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

1.2.9. Ορισμός. Έστω (X, τ) ένας τοπολογικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Το κλειστό σύνολο $\mathrm{Fr}_X(A) := \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ καλείται <u>μεθόριος του A</u>.

1.2.10. Παραδείγματα (i) Στον $(\mathbb{R}, \tau_{συν.})$ $\mathrm{Fr}_{\mathbb{R}}((0,1]) = \{0,1\}$, $\mathrm{Fr}_{\mathbb{R}}([0,1]) = \{0,1\}$, $\mathrm{Fr}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Fr}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\mathrm{Fr}((0,1] \cup \{2\}) = \{0,1,2\}$
(ii) Στον χώρο Sierpinski: $\mathrm{Fr}_X(\{0\}) = \mathrm{Fr}_X(\{1\}) = \{1\}$.

1.2.11. Πρόταση. Εάν ο (X, τ) είναι ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$, τότε:
(i) $\mathrm{Fr}_X(A) = \mathrm{Fr}_X(X \setminus A)$,
(ii) $\mathrm{Fr}_X(A) = \overline{A} \setminus A^\circ$,
(iii) $\mathrm{Fr}_X(A) \cap A^\circ = \emptyset$,
(iv) $\overline{A} = A^\circ \cup \mathrm{Fr}_X(A)$,
(v) $X = A^\circ \amalg \mathrm{Fr}_X(A) \amalg (X \setminus A^\circ)$.

§ 1.3 Συνεχείς, ανοικτές και κλειστές απεικονίσεις

1.3.1. Ορισμός. Εάν οι (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) είναι δυο τοπολογικοί χώροι, τότε μια απεικόνιση $f: X_1 \to X_2$ καλείται <u>συνεχής απεικόνιση</u> $\overset{}{\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}}$ $f^{-1}(A) \in \tau_1$, $\forall A \in \tau_2$.

1.3.2. Πρόταση: Εάν οι (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) είναι δυο τοπολογικοί χώροι, τότε οι ακόλουθες συνθήκες για μια απεικόνιση $f: X_1 \to X_2$ είναι ισοδύναμες: (i) Η f είναι συνεχής.

(ii) $f^{-1}(F)$ κλειστό για κάθε κλειστό $F \subseteq X_2$.

(iii) $\forall x \in X_1$ και $\forall W \in \mathcal{U}(f(x))$ $\exists V \in \mathcal{U}(x)$: $f(V) \subseteq W$.

(iv) $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, $\forall A \subseteq X_1$.

(v) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\bar{B})$, $\forall B \subseteq X_2$.

1.3.3. Πρόταση: Η σύνθεση συνεχών απεικονίσεων μεταξύ τοπολογικών χώρων είναι μια συνεχής απεικόνιση.

1.3.4. Ορισμός. Μια απεικόνιση $f: X \to Y$ μεταξύ (των υποκειμένων συνόλων) δυο τοπολογικών χώρων καλείται <u>ανοικτή</u> (και αντιστοίχως, <u>κλειστή</u>) όταν απεικονίζει ανοικτά (και αντιστοίχως, κλειστά) υποσύνολα τού X σε ανοικτά (και αντιστοίχως, σε κλειστά) υποσύνολα τού Y.

1.3.5. Πρόταση. Για μια απεικόνιση $f: X \to Y$ μεταξύ (των υποκειμένων συνόλων) δυο τοπολογικών χώρων οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) Η f είναι ανοικτή απεικόνιση.

(ii) $f(A^\circ) \subseteq f(A)^\circ$, $\forall A \subseteq X$.

(iii) Η f απεικονίζει τα στοιχεία μιας βάσεως τού X σε ανοικτά υποσύνολα τού Y.

(iv) $\forall x \in X$ και $\forall V \in \mathcal{U}(x)$ $\exists W \in \mathcal{U}(f(x))$: $f(x) \in W \subseteq f(V)$.

1.3.6. Πρόταση. Για μια απεικόνιση $f: X \to Y$ μεταξύ (των υποκειμένων συνόλων) δυο τοπολογικών χώρων οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) Η f είναι κλειστή απεικόνιση.

(ii) $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$, $\forall A \subseteq X$.

1.3.7. Παραδείγματα: (i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^x \cos(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής (προφανώς), αλλά δεν είναι ούτε ανοικτή ούτε κλειστή, καθότι $\underbrace{f((-\infty,0))}_{=[0,1)}$ μη ανοικτό και $\underbrace{f(\{-n\pi \mid n \in \mathbb{N}\}) = \{\pm e^{-n\pi} \mid n \in \mathbb{N}\}}_{\text{μη κλειστό!}}$

(ii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\} =: X \xrightarrow{f} Y := [0,2\pi)$, $f((x,y)) := \theta$, όταν $x = \cos\theta$ και $y = \sin\theta$ $(\theta \in [0,2\pi))$. Η f^{-1} είναι συνεχής, οπότε η f είναι και ανοικτή και κλειστή. Ωστόσο η f δεν είναι συνεχής, διότι θέτοντας $x_n := \cos(2\pi - \frac{1}{n})$, $y_n := \sin(2\pi - \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (1,0)$ με $\lim_{n\to\infty} f((x_n,y_n)) = 2\pi \neq 0 = f((1,0))$.

(iii) $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} (2n, 2n+1]$ (με τη συνήθη τοπολογία),

$$f: X \to X \quad \text{με} \quad f(x) := \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{όταν } 0<x<1 \\ \frac{x-1}{2}, & \text{όταν } 2<x\leq 3 \\ x-2, & \text{εν εναντία περιπτώσει.} \end{cases}$$

Η εν λόγω f είναι αμφιρριπτική, συνεχής, αλλά όχι ανοικτή, διότι $f(\underbrace{(0,1]}_{\text{ανοικτό}}) = (0,\frac{1}{2}]$ (μη ανοικτό).

§ 1.4 Υπόχωροι

1.4.1. Ορισμός. Έστω (X,τ) ένας τοπολογικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Το $\tau_A := \{A \cap U \mid U \in \tau\}$ ορίζει μια τοπολογία επί τού A, τη λεγομένη <u>σχετική τοπολογία επί τού A</u>, ενώ κάθε τοπολογικός χώρος της μορφής (A, τ_A) καλείται <u>τοπολογικός υπόχωρος τού X</u>.

1.4.2. Πρόταση: Έστω (X,τ) ένας τοπολογικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $G \in \tau_A \Leftrightarrow \exists H \in \tau: \ G = H \cap A$.

(ii) $F \subseteq A$ κλειστό (ως προς την τ_A) $\Leftrightarrow \exists K$ κλειστό εντός τού X: $F = K \cap A$.

(iii) Εάν το $\mathbb{B}$ είναι μια βάση τής τ, τότε το $\mathbb{B}_A := \{B \cap A \mid B \in \mathbb{B}\}$ είναι μια βάση τής τ_A.

(iv) Εάν το $\mathbb{B}(x)$ είναι μια βάση περιοχών τού $x \in A$ εντός τού X, τότε η $\mathbb{B}_A(x) := \{B \cap A \mid B \in \mathbb{B}(x)\}$ είναι μια βάση περιοχών τού x εντός τού A.

(v) $cl_A(B) = cl_X(B) \cap A, \ \forall B \subseteq A$.

(vi) $int_A(B) \supseteq int_X(B) \cap A, \ \forall B \subseteq A$.

(vii) $Fr_A(B) \subseteq Fr_X(B) \cap A, \ \forall B \subseteq A$.

1.4.3. Πρόταση. Εάν η $f: X \to Y$ είναι μια απεικόνιση μεταξύ (των υποκειμένων συνόλων) δυο τοπολογικών και το $A \subseteq X$ ένας υπόχωρος τού X, τότε

$$(f: X \to Y \text{ συνεχής}) \Longrightarrow (f|_A : A \to Y \text{ συνεχής}).$$

§ 1.5 Ομοιομορφισμοί τοπολογικών χώρων

1.5.1. Ορισμός. Εάν οι (X, τ), (Y, S) είναι δυο τοπολογικοί χώροι, τότε κάθε αμφιρριπτική απεικόνιση $f: X \to Y$ καλείται ομοιομορφισμός (και οι X, Y ονομάζονται ομοιόμορφοι, συμβ. $X \approx Y$) όταν η f είναι συνεχής και διαθέτει συνεχή αντίστροφο $f^{-1}: Y \to X$.

1.5.2. Πρόταση. Εάν οι (X, τ), (Y, S) είναι δυο τοπολογικοί χώροι και η $f: X \to Y$ μια αμφιρριπτική απεικόνιση, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Η f είναι ένας ομοιομορφισμός.

(ii) Η f είναι συνεχής και ανοικτή.

(iii) Η f είναι συνεχής και κλειστή.

(iv) $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}, \ \forall A \subseteq X$.

1.5.3. Παραδείγματα: (i) Έστω $n \in \mathbb{N}_0$. Ορίζουμε για κάθε $n \geq 2$:

το $\mathbb{D}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ ως την n-διάστατη μοναδιαία μπάλα,
το $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ ως την (n-1)-διάστατη μοναδιαία σφαίρα,
το $\mathring{\mathbb{D}}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ ως το n-διάστατο μοναδιαίο κύτταρο (ανοικτή μπάλα)
και το $I^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ ως τον n-διάστατο μοναδιαίο κύβο (όπου $I := [0,1]$)
και για $n = 0, 1$:

$$\mathbb{R}^0 := \{0\}, \quad \mathbb{S}^{-1} := \emptyset, \quad \mathbb{S}^0 := \{\pm 1\}, \quad \mathbb{D}^1 := [-1, 1], \quad \mathring{\mathbb{D}}^1 := (-1, 1).$$

Ένας τοπολογικός χώρος καλείται n-μπάλα και, αντιστοίχως, (n-1)-σφαίρα, n-κύτταρο, n-κύβος όταν είναι ομοιομορφικός τού $\mathbb{D}^n$ και, αντιστοίχως, τής $\mathbb{S}^{n-1}$, τού $\mathring{\mathbb{D}}^n$ και τού I^n.

(ii) Εάν η $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι μια συσχετική απεικόνιση:

$$f(x_1, \ldots, x_n) := A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + b, \quad A \in GL(n, \mathbb{R}), \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \text{ τότε}$$

$X \approx f(X)$ για κάθε υπόχωρο X τού $\mathbb{R}^n$.

(iii) Ορίζοντας την $f: \mathring{\mathbb{D}}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) := \dfrac{x}{1 - \|x\|}$,

η οποία απεικονίζει κάθε διάμετρο τού $\mathring{\mathbb{D}}^n$ στην ευθεία την οριζομένη μέσω αυτής, διαπιστώνεται εύκολα ότι η f είναι συνεχής με την

$$f^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathring{\mathbb{D}}^n, \quad f(y) := \frac{y}{1 + \|y\|}, \text{ συνεχή.}$$

Άρα το $\mathbb{R}^n \approx \mathring{\mathbb{D}}^n$ είναι ένα n-κύτταρο. Επιπροσθέτως, το $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ είναι ένα (n+m)-κύτταρο, οπότε εν γένει ισχύει:

$$(n\text{-κύτταρο}) \times (m\text{-κύτταρο}) \approx ((n+m)\text{-κύτταρο}).$$

(iv) Εντός τής $\mathbb{S}^n$ ορίζουμε το $\mathbb{S}^n_+ := \{x \in \mathbb{S}^n \mid x_{n+1} \geq 0\}$ ως το βόρειο και το $\mathbb{S}^n_- := \{x \in \mathbb{S}^n \mid x_{n+1} \leq 0\}$ ως το νότιο ημισφαίριο τής $\mathbb{S}^n$.
Προφανώς,

$$\mathbb{S}^n_+ \cup \mathbb{S}^n_- = \mathbb{S}^n, \quad \mathbb{S}^n_+ \cap \mathbb{S}^n_- = \mathbb{S}^{n-1} = \text{ο ισημερινός τής } \mathbb{S}^n.$$

Εν συνεχεία, ορίζουμε το $P_+ := (\overbrace{0,0,\dots,0}^{n\text{-φορές}},1)$ ως τον βόρειο πόλο και το $P_- := (\overbrace{0,0,\dots,0}^{n\text{-φορές}},-1)$ ως τον νότιο πόλο της $\mathbb{S}^n$, καθώς και την ορθογώνια προβολή $p_\pm : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^n_\pm$, $p_\pm(x_1,x_2,\dots,x_{n+1}) := (x_1,x_2,\dots,x_n,\sqrt{1-(x_1^2+\dots+x_n^2)})$.

Η $p_\pm$ είναι ομοιομορφισμός, οπότε καθένα των ημισφαιρίων είναι μια n-μπάλα (δηλ. $\mathbb{S}^n_\pm \approx \mathbb{D}^n$). Από την άλλη μεριά, η λεγόμενη στερεογραφική προβολή $p : \mathbb{S}^n \setminus \{P_+\} \to \mathbb{R}^n$, $p(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}},\dots,\frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right)$

$= \left\{ \begin{array}{l} \text{το σημείο τομής της ευθείας της διερχομένης από τα } P_+ \text{ και } x=(x_1,\dots,x_{n+1}) \\ \text{με το υπερεπίπεδο } \mathbb{R}^n \approx \{(x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1}=0\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \end{array} \right.$

είναι ωσαύτως ομοιομορφισμός, με αντίστροφό του την $p^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \setminus \{P_+\}$ την οριζόμενη μέσω του τύπου:

$$\mathbb{R}^n \ni (y_1,\dots,y_n) =: y \mapsto p^{-1}(y) := \left(\frac{2y_1}{1+\|y\|^2},\dots,\frac{2y_n}{1+\|y\|^2},\frac{\|y\|^2-1}{1+\|y\|^2}\right).$$

Επειδή για κάθε σημείο $x_0 \in \mathbb{S}^n$ υπάρχει ομοιομορφισμός $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ που απεικονίζει το x_0 στο P_+ (π.χ. μια κατάλληλη στροφή) έχουμε

$$\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\} \approx \mathbb{S}^n \setminus \{P_+\} \approx \mathbb{R}^n \approx \mathring{\mathbb{D}}^n \quad (\text{δηλ. ένα } n\text{-κύτταρο}).$$

(v) $\mathbb{R}^n \setminus \{(0,0,\dots,0)\} = \bigcup_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} \underbrace{\{\gamma x \mid \gamma \in \mathbb{R}_{>0}\}}_{\text{ημιευθείες}} \approx \mathbb{S}^{n-1} \times (0,\infty)$

$\gamma x \leftrightarrow (x,\gamma)$

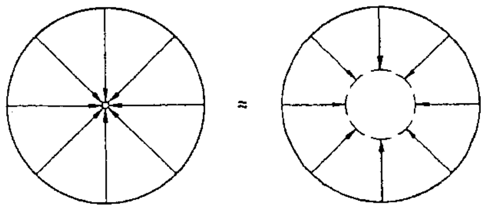
Κι επειδή $(0,\infty) \approx \mathbb{R}$, $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0,\dots,0)\}$.

(π.χ. απευθείας μέσω του $(x,t) \mapsto e^t x$)

(vi) $\mathbb{D}^n \setminus \{(0,\dots,0)\} = \bigcup_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} \{\gamma x \mid 0 < \gamma \leq 1\} \approx \mathbb{S}^{n-1} \times (0,1]$

Επίσης, για $0 < r < 1$ έχουμε $(0,1] \approx (r,1]$, οπότε $\mathbb{D}^n \setminus \{(0,\dots,0)\} \approx \{y \in \mathbb{D}^n \mid r < \|y\| \leq 1\}$

$\gamma x \mapsto ((1-\gamma)r + \gamma x)$



("μεγέθυνση της τρύπας")

Παρομοίως αποδεικνύεται ότι $\mathbb{S}^n \setminus \{P_+\} \approx \mathring{\mathbb{D}}^n$.

(vii) $$\mathbb{D}^n \setminus \{P_+\} = \bigcup_{x \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{P_+\}} \{(1-t)x + tP_+ \mid 0 \le t < 1\} \approx \left(\mathbb{S}^{n-1} \setminus \{P_+\}\right) \times [0,1)$$

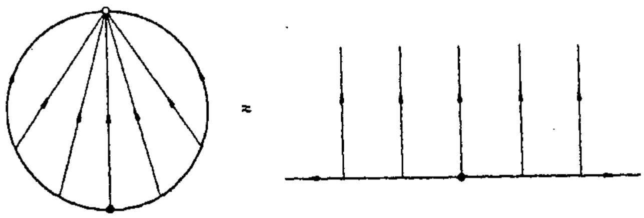
$$(1-t)x + tP_+ \longleftarrow\!\shortmid\ (x,t)$$

Επειδή η αντίστροφος $p^{-1}: \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{P_+\}$ είναι ομοιομορφισμός, λαμβάνουμε έναν ομοιομορφισμό

$$\mathbb{R}^{n-1} \times [0,1) \longrightarrow \mathbb{D}^n \setminus \{P_+\}$$

$$(y,t) \longmapsto (1-t)\,p^{-1}(y) + t\,P_+,$$

κι επειδή $[0,1) \approx [0,\infty)$, προκύπτει ένας ομοιομορφισμός μεταξύ τού $\mathbb{D}^n \setminus \{P_+\}$ και τού ευκλείδειου ημιχώρου $\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty)$:



1.5.4. Θεώρημα τού αναλλοίωτου των περιοχών: Εάν οι X, Y είναι δυο υπόχωροι τού $\mathbb{R}^n$, ο X ανοικτός και $X \approx Y$, τότε και ο Y οφείλει να είναι ανοικτός.

1.5.5. Πόρισμα (Αναλλοίωτο διαστάσεως) Εάν $m, n \in \mathbb{N}$ και $m \neq n$, τότε

(i) $\mathbb{R}^m \not\approx \mathbb{R}^n$,

(ii) $\mathbb{S}^m \not\approx \mathbb{S}^n$,

(iii) $\mathbb{D}^m \not\approx \mathbb{D}^n$.

Απόδειξη: (i) Εάν $m < n \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \mathbb{R}^m \subsetneq \mathbb{R}^n \text{ μη ανοικτός στον } \mathbb{R}^n \\ \mathbb{R}^n \text{ ανοικτός στον } \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \underset{1.5.4}{\Longrightarrow} \mathbb{R}^m \not\approx \mathbb{R}^n$.

(ii) Εάν $\exists f: \mathbb{S}^m \xrightarrow[\text{ομοιομ.}]{} \mathbb{S}^n$, τότε $\underbrace{\mathbb{S}^m \setminus \{x_0\}}_{\overset{1.5.3\,(iv)}{\approx}\ \mathbb{R}^m} \approx \underbrace{\mathbb{S}^n \setminus \{f(x_0)\}}_{\overset{1.5.3\,(iv)}{\approx}\ \mathbb{R}^n} \underset{(i)}{\Longrightarrow} m = n$.

(iii) Εάν $m < n$ και $\exists f: \mathbb{D}^m \xrightarrow[\text{ομοιομ}]{} \mathbb{D}^n$, τότε $\mathbb{R}^n \approx \mathring{\mathbb{D}}^n \approx f^{-1}(\mathring{\mathbb{D}}^n) \subseteq \mathbb{D}^m \subsetneq \mathbb{R}^m \subsetneq \mathbb{R}^n$ άτοπο βάσει τού 1.5.4! $\square$

1.5.6. Θεώρημα (Αναλλοίωτο τού συνόρου) Κάθε ομοιομορφισμός $f:\mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ απεικονίζει την $\mathbb{S}^{n-1}$ $(=\partial\mathbb{D}^n)$ επί τής $\mathbb{S}^{n-1}$.

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ και έστω $z := f(x)$. Ας υποθέσουμε ότι $z \in \mathring{\mathbb{D}}^n$. Τότε για αρκούντως μικρό $\varepsilon > 0$ προσδιορίζουμε ένα $U := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - z\| < \varepsilon\}$, το οποίο είναι ένα ανοικτό υποσύνολο τού $\mathbb{R}^n$ κείμενο καθ' ολοκληρίαν εντός τής $\mathbb{D}^n$. Η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ τού U μέσω τής f είναι ομοιομορφική τού ιδίου τού U, αλλά επειδή $f^{-1}(U) \subseteq \mathbb{D}^n$ και ταυτοχρόνως $f^{-1}(U) \cap \mathbb{S}^{n-1} \neq \emptyset$, δεν είναι ανοικτή εντός τού $\mathbb{R}^n$. Τούτο αντιφάσκει προς το Θεώρημα 1.5.4. $\square$

§ 1.6 Χώροι Hausdorff

1.6.1. Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος (X, τ) καλείται χώρος Hausdorff όταν $\forall x, y \in X$ με $x \neq y$, $\exists$ ανοικτά $V \in \mathcal{U}(x)$ και $W \in \mathcal{U}(y)$: $V \cap W = \emptyset$.

1.6.2. Σημείωση: Η ιδιότητα τού να είναι ένας τοπολογικός χώρος, χώρος Hausdorff, είναι τοπολογική (δηλ. $X \approx Y$, X Hausdorff $\Rightarrow Y$ Hausdorff).

1.6.3. Πρόταση. Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο ενός χώρου Hausdorff είναι κλειστό.

1.6.4. Παραδείγματα. (i) Κάθε μετρικός τ. χώρος (X, τ_d) με τουλάχιστον δύο στοιχεία είναι χώρος Hausdorff.

(ii) Ο τοπολογικός χώρος $(X, \tau_{συμπ})$ που ορίσθηκε στο 1.1.2 (iv) δεν είναι χώρος Hausdorff. Πράγματι: εάν $x, y \in X$ με $x \neq y$ και υποθέσουμε ότι $\exists V \in \mathcal{U}(x)$ και ότι $\exists W \in \mathcal{U}(y)$: $V \cap W = \emptyset$, τότε $V \subseteq \underbrace{X \setminus W}_{\text{πεπερασμένο}} \Longrightarrow X \setminus V$ άπειρο $\Longrightarrow V \notin \tau_{συμπ}$. Άτοπο!

§ 1.7 Χώροι γινομένου

1.7.1. Ορισμός. (i) Εάν $n \in \mathbb{N}$ και $X_1, \ldots, X_n$ είναι τοπολογικοί χώροι, τότε ορίζεται μια τοπολογία επί του $X_1 \times \ldots \times X_n$, η λεγομένη τοπολογία γινομένου, έχουσα ως βάση της το σύνολο

$$\mathbb{B} := \{U_1 \times \ldots \times U_n \mid U_i \text{ ανοικτό} \subseteq X_i,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

(ii) Εάν η $(X_i)_{i \in I}$ είναι μια τυχούσα οικογένεια τοπολογικών χώρων και $pr_i : \prod_{j \in I} X_j \to X_i$, $i \in I$, οι συνήθεις προβολές, τότε η τοπολογία γινομένου καθορίζεται μέσω της βάσεως:

$$\mathbb{B} := \left\{ \prod_{i \in I} U_i \;\middle|\; \begin{array}{l} U_i \text{ ανοικτό} \subseteq X_i,\ \forall i \in I, \text{ και } U_i = X_i,\ \forall i \in I - S, \\ \text{όπου } S \text{ ένα τοπολ. πεπερασμένο σύνολο} \end{array} \right\}.$$

1.7.2. Πρόταση. Εάν η $(X_i)_{i \in I}$ είναι τυχούσα οικογένεια τοπολογικών χώρων, τότε ισχύουν τα εξής:

(i) Η pr_i είναι συνεχής και ανοικτή, $\forall i \in I$, και

(ii) Για κάθε τοπολογικό χώρο X και κάθε απεικόνιση $f : X \to \prod_{i \in I} X_i$ η f είναι συνεχής $\Longleftrightarrow$ οι $pr_i \circ f : X \to X_i$ είναι συνεχείς, $\forall i \in I$.

1.7.3. Πρόταση. Ένας τοπολογικός χώρος X είναι χώρος Hausdorff $\Longleftrightarrow$ η "διαγώνιος" $\{(x,x) \mid x \in X\}$ του X είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times X$.

1.7.4. Θεώρημα. Έστω $(X_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια τοπολογικών χώρων. Τότε ο χώρος γινομένου $\prod_{i \in I} X_i$ είναι χώρος Hausdorff εάν και μόνον εάν ο X_i είναι χώρος Hausdorff για κάθε $i \in I$.

§ 1.8 Συμπαγείς χώροι

1.8.1. Ορισμός. Ένα χώρος Hausdorff X καλείται συμπαγής όταν για κάθε ανοικτό κάλυμμα $(U_i)_{i\in I}$ του X (δηλ. $U_i \subseteq X$ ανοικτό, $\forall i \in I$, και $\bigcup_{i\in I} U_i = X$) υπάρχει κάποιο πεπερασμένο υποκάλυμμά του, δηλαδή $\exists \{j_1, \dots, j_n\} \subseteq I : \bigcup_{\ell=1}^{n} U_{j_\ell} = X$.

1.8.2. Παραδείγματα: (i) Κάθε πεπερασμένος χώρος Hausdorff είναι συμπαγής.
(ii) Ο $\mathbb{R}$, εφοδιασμένος με τη συνήθη τοπολογία, δεν είναι συμπαγής.

1.8.3. Πρόταση: Εάν ένας τοπολογικός χώρος X είναι συμπαγής, τότε και κάθε κλειστό υποσύνολό του είναι συμπαγές.

1.8.4. Πρόταση: Κάθε συμπαγές υποσύνολο ενός χώρου Hausdorff είναι κλειστό.

1.8.5. Θεώρημα των Heine και Borel. Ένας υπόχωρος X του $\mathbb{R}^n$ (ως προς τη συνήθη τοπολογία) είναι συμπαγής $\Longleftrightarrow$ [το X είναι κλειστό και φραγμένο]

1.8.6. Παραδείγματα (i) Κάθε κλειστό διάστημα εντός του $\mathbb{R}$ είναι συμπαγές.
(ii) Η μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^{n-1}$ και η μοναδιαία μπάλα $\mathbb{D}^n$ είναι συμπαγείς χώροι (ως κλειστοί και φραγμένοι).
(iii) Το σύνολο $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \in \mathbb{R}\}$ είναι κλειστό εντός του $\mathbb{R}^2$, αλλά δεν είναι συμπαγές (αφού δεν είναι φραγμένο).
(iv) Το σύνολο $B := \{(x, \sin(\frac{1}{x})) : 0 < x \leq 1\}$ είναι φραγμένο εντός του $\mathbb{R}^2$, αλλά δεν είναι συμπαγές (αφού δεν είναι κλειστό).

1.8.7. Πρόταση. Εάν οι X, Y είναι χώροι Hausdorff, ο X συμπαγής και η $f : X \to Y$ συνεχής, τότε η εικόνα $f(X)$ του X μέσω της f είναι συμπαγής (εντός του Y).

1.8.8. Πρόταση. Εάν το X είναι ένα συμπαγές υποσύνολο τού $\mathbb{R}^n$ (εφοδιασμένο με τη συνήθη τοπολογία) και η $f: X \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε η f λαμβάνει μέγιστο και ελάχιστο εντός τού X, δηλαδή $\exists\, x_1, x_2 \in X:\quad f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2),\ \forall x \in X$.

<u>Απόδειξη:</u> Επειδή η f είναι συνεχής, το $A := f(X)$ είναι συμπαγές (βλ. 1.8.7). Εάν το A δεν διέθετε μέγιστο στοιχείο (ας πούμε $M := f(x_2)$ για κάποιο $x_2 \in X$), τότε η οικογένεια

$\{(-\infty, a) : a \in A\}$ θα ήταν ένα ανοικτό κάλυμμα τού A.

Λόγω τής συμπάγειας τού A, θα υπήρχαν $a_1, \ldots, a_n \in A$, τέτοια ώστε $\bigcup_{j=1}^{n} (-\infty, a_j) = A$. Εάν $a_k := \max\{a_j \mid 1 \leq j \leq n\}$, τότε $a_k \notin (-\infty, a_j)$, $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, δηλ. $a_k \notin A$. Άτοπο! Αναλόγως επιχειρηματολογεί κανείς και για την ύπαρξη ελαχίστου. $\square$

1.8.9. Ορισμός. Έστω $(X, \mathcal{T}_d)$ ένας μετρικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε ως <u>απόσταση τού x από το A</u> το

$d(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$. (Για σταθερό A, η $x \mapsto d(x, A)$ είναι συνεχής.) Εάν το A είναι ένα φραγμένο υποσύνολο, ορίζουμε τη <u>διάμετρο</u> <u>$\mathrm{diam}(A)$ τού A</u> ως εξής:

$$\mathrm{diam}(A) := \sup\{d(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in A\}.$$

1.8.10. Λήμμα τού Lebesgue: Έστω $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ ένα ανοικτό κάλυμμα ενός μετρικού χώρου $(X, \mathcal{T}_d)$. Εάν ο X είναι συμπαγής, τότε υπάρχει $\delta > 0$ (που καλείται, ιδιαιτέρως, <u>αριθμός Lebesgue τού $\mathcal{U}$</u>) τέτοιος ώστε για κάθε μη κενό $B \subseteq X$ με $\mathrm{diam}(B) < \delta$ να υπάρχει κάποιο $j \in I$ για το οποίο να ισχύει $B \subseteq U_j$.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω τυχόν $x \in X$. Επειδή το $\mathcal{U}$ είναι κάλυμμα, υπάρχει $j \in I$, τέτοιο ώστε $x \in U_j$. Επειδή το U_j είναι εξ υποθέσεως ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon(x) > 0$ με $S(x; \varepsilon(x)) \subset U_j$, όπου $S(x; \varepsilon(x)) := \{y \in X : \|y - x\| < \varepsilon(x)\}$.

Το $\{S(x, \frac{\varepsilon(x)}{2}) : x \in X\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα τού X.

Επειδή ο X είναι συμπαγής, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ με $X = \bigcup_{\nu=1}^{n} S(x_\nu; \frac{\varepsilon(x_\nu)}{2})$. Θα δείξουμε ότι ο

$$\delta := \min\left\{\frac{\varepsilon(x_1)}{2}, \ldots, \frac{\varepsilon(x_n)}{2}\right\} > 0$$

είναι ο (ζητούμενος) αριθμός Lebesgue τού $\mathcal{U}$. Έστω B ένα υποσύνολο του X με $\operatorname{diam}(B) < \delta$. Έστω τυχόν $w \in B$. Προφανώς υπάρχει κάποιο $\xi \in \{1, \ldots, n\}$ με $w \in S(x_\xi; \frac{\varepsilon(x_\xi)}{2})$. Αρκεί να αποδειχθεί ότι <u>κάθε</u> $z \in B$ ανήκει στο $S(x_\xi; \varepsilon(x_\xi))$ (διότι τότε – εκ κατασκευής – θα έχουμε $B \subseteq U_j$, για κάποιο $j \in I$).

Η τριγωνική ανισότητα μας πληροφορεί ότι

$$d(z, x_\xi) \leqslant d(z,w) + d(w, x_\xi) \underset{(z, w \in B)}{\leqslant} \delta + \frac{\varepsilon(x_\xi)}{2} \leqslant \frac{\varepsilon(x_\xi)}{2} + \frac{\varepsilon(x_\xi)}{2} = \varepsilon(x_\xi)$$

$$\Longrightarrow z \in S(x_\xi; \varepsilon(x_\xi)) \subseteq U_j, \text{ για κάποιο } j \in I. \quad \square$$

<u>1.8.11. Θεώρημα Tychonoff</u> Ένας (μη κενός) χώρος γινομένου $\prod_{i \in I} X_i$ είναι συμπαγής $\Longleftrightarrow$ (καθένας των X_i είναι συμπαγής, $\forall i \in I$)

§ 1.9 Συνεκτικότητα και δρομοσυνεκτικότητα

<u>1.9.1. Ορισμός.</u> Ένας τοπολογικός χώρος (X, τ) ονομάζεται <u>συνεκτικός</u> όταν $\nexists\, A, B \in \tau \setminus \{\emptyset\} : A \cap B = \emptyset$ και $X = A \cup B$.

<u>1.9.2. Παραδείγματα.</u> (i) Στον $(X, \tau_{\delta\iota\alpha\kappa\rho.})$ (βλ. 1.1.11 (i)) τα μονοσύνολα είναι τα μόνα συνεκτικά υποσύνολα τού X.

(ii) Εντός τού $\mathbb{R}$ (εφοδιασμένου με τη συνήθη τοπολογία) οι μόνοι συνεκτικοί υπόχωροί του (πέραν τού ιδίου τού $\mathbb{R}$) είναι τα (ανοικτά, κλειστά, ημιανοικτά ή ημίκλειστα) διαστήματα τού $\mathbb{R}$.

1.9.3. Πρόταση. Έστω (X, τ) ένας τοπολογικός χώρος. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο X είναι συνεκτικός.

(ii) Τα μόνα υποσύνολα τού X, τα οποία είναι ταυτοχρόνως και ανοικτά και κλειστά, είναι τα $\emptyset$, X.

(iii) Δεν υφίσταται επιρριπτική συνεχής απεικόνιση $f: X \to Y$, όπου ο Y είναι εφοδιασμένος με τη διακριτή τοπολογία και περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία.

1.9.4. Πόρισμα. Εάν ο X είναι ένας συνεκτικός τοπολογικός χώρος και ο Y ένας διακριτός χώρος (δηλαδή εφοδιασμένος με τη διακριτη τοπολογία), τότε κάθε συνεχής απεικόνιση $f: X \to Y$ είναι σταθερή.

1.9.5. Πρόταση: Εάν τα A και B είναι δυο υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου X και $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$, τότε

$$(A \text{ συνεκτικό}) \Rightarrow (B \text{ συνεκτικό}).$$

1.9.6. Πρόταση: Εάν η $f: X \to Y$ είναι μια συνεχής, επιρριπτική απεικόνιση μεταξύ τοπολογικών χώρων και ο X συνεκτικός, τότε και ο Y είναι συνεκτικός.

1.9.7. Πρόταση: Έστω $(X_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια τοπολογικών χώρων. Τότε

$$\left(\begin{array}{l}\text{ο χώρος γινομένου} \\ \prod_{i\in I} X_i \text{ είναι συνεκτικός}\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l}\text{καθένας των } X_i \\ \text{είναι συνεκτικός, } \forall i \in I\end{array}\right).$$

1.9.8. Παράδειγμα. $\mathbb{R}$ συνεκτικός $\underset{1.9.7}{\Longrightarrow}$ $\mathbb{R}^n$ συνεκτικός

$$\underset{\substack{1.9.6 \\ 1.5.3.(iii),(vi) \\ n\geq 1}}{\Longrightarrow} \underset{\substack{(\text{για } x_0 \in \mathbb{S}^n) \\ \cap \\ \mathbb{R}^{n+1}}}{\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\}} \approx \mathbb{R}^n \text{ συνεκτικός} \Longrightarrow \text{η σφαίρα } \mathbb{S}^n = \overline{\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\}}$$

είναι συνεκτική επί τη βάσει της προτάσεως 1.9.5.

<u>1.9.9. Ορισμός</u>: Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Επί τού X ορίζουμε τη διμελή σχέση $\underset{\text{συν}}{\sim} \subseteq X \times X$ ως ακολούθως:

$$x_1 \underset{\text{συν}}{\sim} x_2 \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} (\exists \text{ συνεκτικό υποσύνολο } A \subseteq X \text{ με } x_1, x_2 \in A).$$

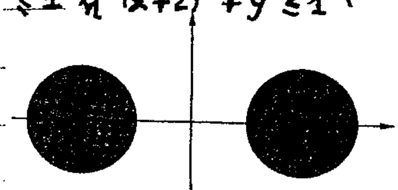
<u>1.9.10. Λήμμα.</u> Η $\underset{\text{συν}}{\sim}$ αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας.

Οι αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας καλούνται <u>συνεκτικές συνιστώσες τού τοπολογικού χώρου X</u>.

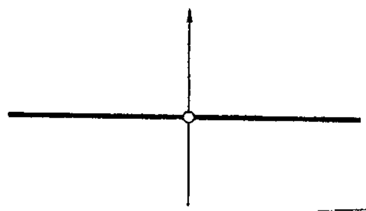
<u>1.9.11. Λήμμα.</u> Οι συνεκτικές συνιστώσες ενός τοπολογικού χώρου X είναι ακριβώς τα μεγιστοτικά συνεκτικά υποσύνολα τού X, ήτοι τα συνεκτικά υποσύνολά του τα οποία δεν περιέχονται σε οιοδήποτε μεγαλύτερο συνεκτικό (υπο)σύνολο.

<u>1.9.12. Παραδείγματα</u>: (i) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 \leq 1 \text{ ή } (x+2)^2 + y^2 \leq 1\}$

διαθέτει δύο (κλειστούς) δίσκους ως συνεκτικές συνιστώσες



(ii) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \setminus \{(0,0)\} = \{(x,0) \mid x > 0\} \amalg \{(x,0) \mid x < 0\}$



δύο συνεκτικές συνιστώσες

(iii) $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{S}^n = \begin{cases} (-\infty,-1) \amalg (-1,1) \amalg (1,+\infty), & \text{όταν } n = 0, \\ \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| > 1\}, & \text{όταν } n \geq 1. \end{cases}$

(iv) $X = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (συν. τοπολογία)

Κάθε μονοσύνολο $\{x\}$, $x \in \mathbb{Q}$, αποτελεί μια συνεκτική συνιστώσα τού $X = \mathbb{Q}$.

1.9.13. Πρόταση. Έστω X τυχών τοπολογικός χώρος. Τότε ισχύουν τα εξής: (i) Κάθε συνεκτική συνιστώσα τού X είναι κλειστό υποσύνολο τού X. (ii) Κάθε συνεκτικό υποσύνολο τού X ανήκει σε μία και μόνον συνεκτική συνιστώσα τού X.

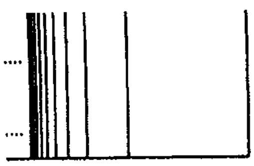
1.9.14. Πρόταση: Έστω $f: X \to Y$ μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ τοπολογικών χώρων. Η εικόνα κάθε συνεκτικής συνιστώσας τού X μέσω τής f εμπεριέχεται σε μία (και μόνον) συνεκτική συνιστώσα τού Y. Μάλιστα, εάν η f είναι ομοιομορφισμός, τότε υπάρχει μια αμφίρριψη:
{συνεκτικές συνιστώσες τού X} $\longleftrightarrow$ {συνεκτικές συνιστώσες τού Y}.

1.9.15. Ορισμός. Ένας δρόμος εντός ενός τοπολογικού χώρου X είναι μια συνεχής απεικόνιση $\gamma: [0,1] \to X$. Τα $\gamma(0)$ και $\gamma(1)$ καλούνται σημείο αρχής και σημείο απολήξεως ενός δρόμου γ, αντιστοίχως. (Επίσης λέμε ότι ο γ συνδέει το $\gamma(0)$ με το $\gamma(1)$ και ορίζουμε τον γ^{-1} μέσω τού τύπου $\gamma^{-1}(t) := \gamma(1-t)$, $\forall t \in [0,1]$)

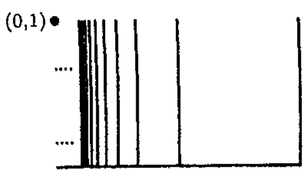
1.9.16. Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος καλείται δρομοσυνεκτικός όταν δυο οιαδήποτε σημεία του είναι συνδέσιμα μέσω ενός δρόμου.

1.9.17. Θεώρημα. Κάθε δρομοσυνεκτικός τοπολογικός χώρος είναι συνεκτικός.

1.9.18. Παραδείγματα: (i) Θεωρούμε εντός τού $\mathbb{R}^2$ (ως προς τη συνήθη τοπολογία) τα ακόλουθα υποσύνολα: $A := (0,1] \times \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\frac{1}{n}\} \times [0,1]\right)$, $B := A \cup \{(0,1)\}$.
Το A είναι δρομοσυνεκτικό και κατ' επέκταση συνεκτικό (βλ. 1.9.17).
Το B είναι συνεκτικό, διότι $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ (βλ. 1.9.5), χωρίς, ωστόσο, να είναι δρομοσυνεκτικό, καθότι δεν υφίσταται δρόμος, ο οποίος να συνδέει το $(0,1)$ με τα άλλα σημεία τού B.



A: δρομοσυνεκτικό



B: συνεκτικό, αλλά όχι δρομοσυνεκτικό

(ii) Η σφαίρα $\mathbb{S}^n$ είναι δρομοσυνεκτική όταν $n \geq 1$. Πράγματι: Θεωρούμε δυο σημεία $x, y \in \mathbb{S}^n$. Εάν $x \neq -y$, τότε η απεικόνιση

$$f_{xy}(t) := \frac{(1-t)x+ty}{\|(1-t)x+ty\|}, \quad \forall t \in [0,1],$$

είναι ένας δρόμος συνδέων το x με το y. (Ο παρονομαστής μηδενίζεται μόνον όταν $x=-y$ και $t=\frac{1}{2}$). Εάν $x=-y$, επιλέγουμε ένα $z \in \mathbb{S}^n$ με $z \neq x$ και $z \neq y$. Τότε η απεικόνιση

$$g(t) := \begin{cases} f_{xz}(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f_{zy}(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

είναι (και πάλι) ένας δρόμος συνδέων το x με το y.

<u>1.9.19 Ορισμός.</u> Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Επί τού X ορίζουμε τη διμελή σχέση $\underset{\text{δρομ.}}{\sim} \subseteq X \times X$ ως ακολούθως:

$$x_1 \underset{\text{δρομ.}}{\sim} x_2 \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \left(\exists \text{ δρόμος συνδέων το } x_1 \text{ με το } x_2.\right)$$

<u>1.9.20 Λήμμα.</u> Η "$\underset{\text{δρομ.}}{\sim}$" αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας.

Οι αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας καλούνται <u>δρομοσυνεκτικές συνιστώσες</u> τού τοπολογικού χώρου X.

<u>1.9.21 Πρόταση.</u> Εάν ο X είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε ισχύουν τα ακόλουθα: (i) Κάθε δρομοσυνεκτική συνιστώσα τού X περιέχεται σε μία (και μόνον) συνεκτική συνιστώσα τού X και κάθε συνεκτική συνιστώσα τού X είναι μια αποσυνδετή ένωση (κάποιων) δρομοσυνεκτικών συνιστωσών του.

(ii) Εάν το $A \subseteq X$ είναι δρομοσυνεκτικό, τότε το A περιέχεται σε μία (και μόνον) δρομοσυνεκτική συνιστώσα τού X.

1.9.22. Πρόταση. Εάν η $f: X \to Y$ είναι μια συνεχής, επιρριπτική απεικόνιση μεταξύ τοπολογικών χώρων και ο X δρομοσυνεκτικός, τότε και ο Y είναι δρομοσυνεκτικός.

1.9.23. Πρόταση. Έστω $(X_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια τοπολογικών χώρων. Τότε

$$\left\{\begin{array}{l}\text{ο χώρος γινομένου } \prod_{i\in I} X_i \\ \text{είναι δρομοσυνεκτικός}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{καθένας των } X_i \\ \text{είναι δρομοσυνεκτικός, } \forall i\in I\end{array}\right\}$$

1.9.22. Ορισμός. Λέμε πως ένας τοπολογικός χώρος X είναι *τοπικά συνεκτικός* (και αντιστοίχως, *τοπικά δρομοσυνεκτικός*) όταν διαθέτει μια βάση αποτελούμενη από συνεκτικά (και αντιστοίχως, από δρομοσυνεκτικά) υποσύνολα.

1.9.23 Πρόταση: Εάν ο X είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε ισχύουν τα ακόλουθα: (i) Εάν ο X είναι τοπικά συνεκτικός, τότε κάθε συνεκτική συνιστώσα του X είναι ανοικτή.
(ii) Εάν ο X είναι τοπικά δρομοσυνεκτικός, τότε κάθε δρομοσυνεκτική συνιστώσα του X είναι ανοικτή, οι δρομοσυνεκτικές συνιστώσες του ταυτίζονται με τις συνεκτικές συνιστώσες, ενώ ο X είναι συνεκτικός εάν και μόνον εάν είναι δρομοσυνεκτικός.

1.9.24. Παραδείγματα (i) Προφανώς κάθε τοπικά δρομοσυνεκτικός τοπολογικός χώρος είναι τοπικά συνεκτικός.
(ii) Ένας συνεκτικός χώρος μπορεί να μην είναι τοπικά συνεκτικός, όπως π.χ. ο $X = A\cup B$, όπου $A := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0 \text{ και } y\in[-1,1]\}$

$$B := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=\sin(\tfrac{1}{x}) \text{ και } x\in(0,1]\}.$$

(iii) Ένας τοπικά συνεκτικός χώρος μπορεί να μην είναι συνεκτικός, όπως π.χ. η ένωση δύο (ξένων) κλειστών δίσκων που αναφέραμε στο 1.9.12(i).

§ 1.10 Πηλικοτοπολογία και ταυτισμικές απεικονίσεις

1.10.1 Ορισμός. Έστω (X,τ) ένας τοπολογικός χώρος και έστω $\mathcal{R}\subseteq X\times X$ μια σχέση ισοδυναμίας επί τού X. [Συνήθως αντί τού $(x,y)\in\mathcal{R}$ γράφουμε $x\sim_{\mathcal{R}} y$ ή -απλούστερα- $x\sim y$, ενώ για την κλάση ισοδυναμίας ενός $x\in X$ χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $[x]_{\mathcal{R}}$ ή -απλούστερα- $[x]$.] Επί τού συνόλου $X/_{\mathcal{R}}=\{[x]_{\mathcal{R}} : x\in X\}$ των κλάσεων ισοδυναμίας ορίζεται η πηλικοτοπολογία $\tau_{\mathcal{R}}$ ως εξής:

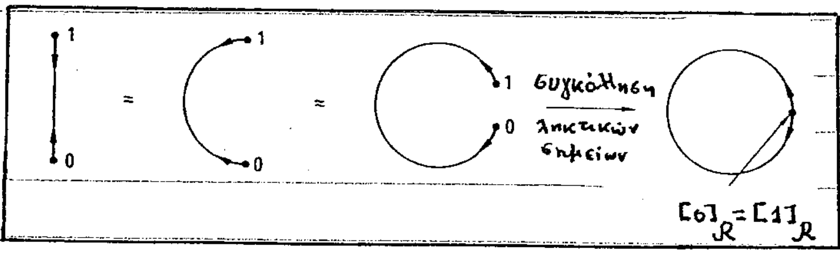
$$U\in\tau_{\mathcal{R}} \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} p^{-1}(U)\in\tau, \quad \text{όπου } p: \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X/_{\mathcal{R}} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longmapsto & [x]_{\mathcal{R}} \end{array}$$

είναι η φυσική επιρριψη.

1.10.2 Σημείωση: (i) Η p είναι συνεχής.
(ii) Η p είναι ανοικτή (και αντιστοίχως, κλειστή) $\Longleftrightarrow$ το σύνολο $p^{-1}(p(A))=\{x\in X \mid x\sim_{\mathcal{R}} a,$ για κάποιο $a\in A\}$ είναι ανοικτό (και αντιστοίχως, κλειστό) για κάθε ανοικτό (αντ., κλειστό) $A\subseteq X$.
(iii) Συνήθως λέμε πως ο $X/_{\mathcal{R}}$ προκύπτει από τον X "κατόπιν συγκολλήσεως" των $\mathcal{R}$-ισοδυνάμων στοιχείων τού X. Είθισται μια τέτοια $\mathcal{R}$ να περιγράφεται μέσω "συστημάτων σχέσεων" (ενώ για τα υπόλοιπα $(x,y)\in\mathcal{R}\subseteq X\times X$ υπονοείται ότι $x\not\sim_{\mathcal{R}} y$).

1.10.3 Παραδείγματα (i) $X=I=[0,1]$, $\mathcal{R}: 0\sim 1$

$$X/_{\mathcal{R}}=\{[0]_{\mathcal{R}}\}\amalg\{[t]_{\mathcal{R}} : 0<t<1\}$$



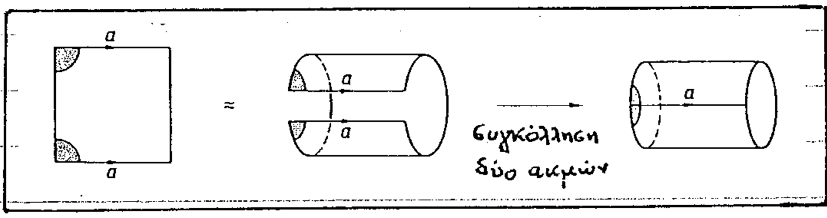
Η απεικόνιση
$$f: \begin{array}{ccc} I/_{\mathcal{R}} & \longrightarrow & S^1 (\subset\mathbb{C}) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ [t]_{\mathcal{R}} & \longmapsto & e^{2\pi\sqrt{-1}\,t} \end{array}$$
είναι ομοιομορφισμός.

(Περιοχές των $0,1\in I$ συντίθενται, για να δομήσουν μια περιοχή τού $f([0]_{\mathcal{R}})=f([1]_{\mathcal{R}}$

(ii) Επί του $X=I^2=I\times I$ ορίζεται μια σχέση ισοδυναμίας R ως εξής: $(s,0)\sim(s,1)$, $\forall s\in I(=[0,1])$. Η απεικόνιση

$$I^2/_R \longrightarrow \mathbb{S}^1\times I,\quad [(s,t)]_R \longmapsto (s, e^{2\pi\sqrt{-1}t}),$$

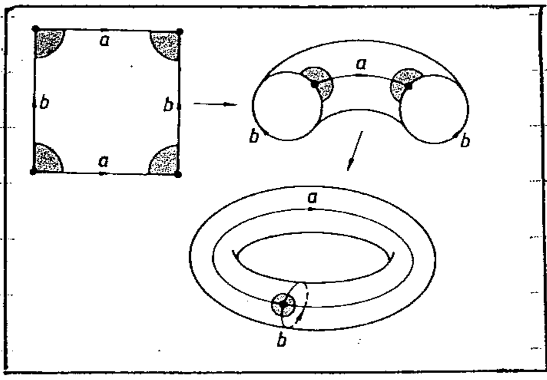
είναι ομοιομορφισμός μεταξύ του $I^2/_R$ και του κυλίνδρου $\mathbb{S}^1\times I$ του δημιουργούμενου ύστερα από τη συγκόλληση της άνω και της κάτω ακμής του (μοναδιαίου) τετραγώνου I^2.



(iii) Επί του $X=I^2=I\times I$ μπορεί να ορισθεί και μια άλλη σχ. ισοδ. R' ως εξής: $(s,0)\sim(s,1)$, $(0,t)\sim(1,t)$, για κάθε $t,s\in I$. Εν προκειμένω συγκολλούμε την άνω με την κάτω ακμή, και κατόπιν την δεξιά με την αριστερή ακμή του I^2. Μέσω του ομοιομορφισμού

$$f: I^2/_{R'} \longrightarrow \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1,\quad [(s,t)]_{R'} \longmapsto (e^{2\pi\sqrt{-1}s}, e^{2\pi\sqrt{-1}t}),$$

διαπιστώνουμε ότι
ο πηλικόχωρος $I^2/_{R'}$ είναι ομοιομορφικός του τόρου $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$.



1.10.4. Πρόταση. Εάν η $f: X\to Y$ είναι μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ δυο τοπολογικών χώρων X και Y, η R (και αντιστοίχως, η S) μια σχέση ισοδυναμίας επί του X (και αντιστοίχως, επί του Y), και η f συμβατή με τις R και S (δηλαδή,

$x \sim_{\mathcal{R}} x' \Rightarrow f(x) \sim_{\mathcal{S}} f(x')$), τότε ορίζεται καλώς η συνεχής απεικόνιση $\bar{f} : X/\mathcal{R} \to Y/\mathcal{S}$, $[x]_{\mathcal{R}} \mapsto [f(x)]_{\mathcal{S}} =: \bar{f}([x]_{\mathcal{R}})$. Επιπροσθέτως, εάν η f είναι ομοιομορφισμός, τότε και η $\bar{f}$ είναι ομοιομορφισμός.

1.10.5. Ειδική περίπτωση: Εάν η $f : X \to Y$ είναι συνεχής, η $\mathcal{R}$ μια σχέση ισοδυναμίας επί τού X και $(x \sim_{\mathcal{R}} x' \Rightarrow f(x) = f(x'))$, τότε η $\bar{f} : X/\mathcal{R} \to Y$, $\bar{f}([x]_{\mathcal{R}}) := f(x)$, είναι συνεχής.

1.10.6. Παρατήρηση: Εάν ο X είναι ένας τοπολογικός χώρος, $\mathcal{R}$ μια σχέση ισοδυναμίας επί τού X, $p : X \to X/\mathcal{R}$ η (συνεχής) φυσική επίρριψη και $A \subseteq X$, τότε το σύνολο $p^{-1}(p(A)) \subseteq X$ είναι ανοικτό (και αντιστοίχως, κλειστό), τότε ο υπόχωρος $p(A)$ τού $X/\mathcal{R}$ ταυτίζεται με τον $p^{-1}(p(A))/\mathcal{R}$.

1.10.7. Ορισμός: Έστω $f : X \to Y$ μια συνεχής, επιρριπτική απεικόνιση μεταξύ δυο τοπολογικών χώρων X και Y. Επί τού X ορίζεται η σχέση ισοδυναμίας

$$\mathcal{R}_f : \quad x \sim_{\mathcal{R}_f} x' \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} f(x) = f(x').$$

Η f ονομάζεται <u>ταυτισμική απεικόνιση</u> όταν ισχύει μία (και, ως εκ τούτου, και οι τρεις) εκ των κάτωθι ισοδυνάμων συνθηκών:

(i) Η $\bar{f} : X/\mathcal{R}_f \to Y$ (όπως στην 1.10.5) είναι ομοιομορφισμός.

(ii) Ένα $A \subseteq Y$ είναι ανοικτό (αντ. κλειστό) $\Longleftrightarrow$ $f^{-1}(A) \subseteq X$ ανοικτό (αντ. κλειστό).

(iii) Μια απεικόνιση $g : Y \to Z$, όπου Z τυχών τοπολογικός χώρος, είναι συνεχής $\Longleftrightarrow$ η σύνθεση $g \circ f : X \to Z$ είναι συνεχής.

Σε αυτήν την περίπτωση, η τοπολογία επί τού Y είναι μονοσημάντως ορισμένη μέσω τής f και τής τοπολογίας τού X και καλείται <u>ταυτισμική τοπολογία</u> (ως προς την f).

1.10.8. Πρόταση. (i) Κάθε συνεχής, επιρριπτική και ανοικτή (αντ., κλειστή) απεικόνιση μεταξύ δυο τοπολογικών χώρων είναι ταυτισμική.
(ii) Κάθε συνεχής, επιρριπτική απεικόνιση από έναν συμπαγή τοπολογικό χώρο επί ενός χώρου Hausdorff είναι κλειστή και κατ' επέκτασιν ταυτισμική απεικόνιση.
(iii) Εάν η $f: X \to Y$ είναι ταυτισμική και η $g: Y \to Z$ συνεχής και επιρριπτική, τότε η $g \circ f$ είναι ταυτισμική $\Leftrightarrow$ η g είναι ταυτισμική.
(iv) Εάν η $f: X \to Y$ είναι ταυτισμική, το $B \subseteq Y$ ανοικτό (αντ., κλειστό) και $A := f^{-1}(B)$, τότε και η $f|_A : A \to B$ είναι ταυτισμική.

Εν συνεχεία θα παρατεθούν διάφοροι μέθοδοι κατασκευής πηλικόχωρων.

1.10.9. Ορισμός Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και έστω $A \subseteq X$ ένας κλειστός υπόχωρός του. Επί τού X ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας

$$\mathcal{R}_A: \quad x \sim_{\mathcal{R}_A} x' \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \text{είτε } x = x' \\ \text{είτε } x, x' \in A \end{array} \right\}$$

(δηλαδή $\mathcal{R}_A := \{(x,x) \in X \setminus A\} \cup \{(x,x') \mid x, x' \in A\}$).

Ο $\boxed{X/A := X/\mathcal{R}_A}$ είναι <u>ο πηλικόχωρος ο δημιουργούμενος ύστερα από την ταύτιση όλων των σημείων τού A</u>

(ή <u>ύστερα από συρρίκνωση όλων των σημείων τού A σε ένα και μόνον σημείο</u>).

(Εάν η $p = p_A : X \to X/A$ είναι η φυσική επίρριψη, τότε

$$p_A(x) = [x]_{\mathcal{R}_A}, \ \forall x \in X.)$$

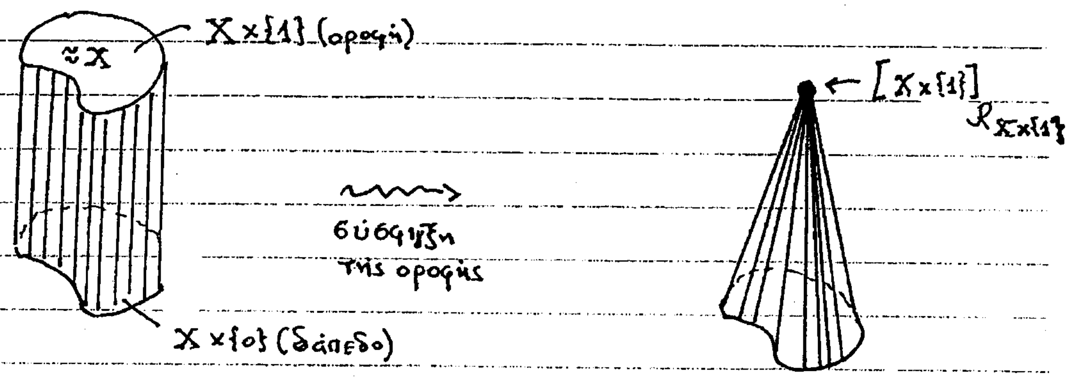
1.10.10. Παραδείγματα. (i) Εάν ορίσουμε την απεικόνιση

$$\lambda_n : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^n, \quad \lambda_n(tx) := (\cos(\pi(1-t)), x_1 \sin(\pi(1-t)), \ldots, x_n \sin(\pi(1-t)))$$

για κάθε $t \in [0,1]$ και κάθε $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{S}^{n-1}$ (ταυτίζοντας την μπάλα $\mathbb{D}^n$ με την ένωση $\bigcup_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} \{tx \mid 0 \leq t \leq 1\}$), τότε η λ_n είναι συνεχής με $\lambda_n(\mathbb{S}^{n-1}) = \{P_+\}$, ενώ η επαγομένη απεικόνιση (βλ. 1.10.5)

$$\overline{\lambda_n} : \mathbb{D}^n / \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^n \text{ είναι ένας ομοιομορφισμός.}$$

(ii) Εάν ο X είναι τυχών τοπολογικός χώρος και $cyl(X) := X\times I$ ο (μοναδιαίος) <u>κύλινδρος υπεράνω τού X</u> (εφοδιασμένος με την τοπολογία γινομένου), τότε ο <u>κώνος</u> $cone(X)$ <u>υπεράνω τού X</u> ορίζεται ως ο πηλικοχώρος $\boxed{cone(X) := cyl(X)/_{X\times\{1\}}}$



<u>Κύλινδρος</u> <u>Κώνος</u>

Σημειωτέον ότι η

$$\begin{array}{ccc} cone(\mathbb{S}^n) & \longrightarrow & \mathbb{D}^{n+1} \\ \| & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \mathbb{S}^n\times I/_{\mathbb{S}^n\times\{1\}} \ni [(x,t)] & \longmapsto & (1-t)x \end{array}$$

αποτελεί έναν ομοιομορφισμό.

(iii) Εαν η $(X_j,\tau_j)_{j\in J}$ είναι μια οικογένεια τοπολογικών χώρων και $X := \coprod_{j\in J} X_j := \bigcup_{j\in J} X_j'$ (με $X_j' := X_j\times\{j\}$) η <u>αποσυνδετή ένωση</u> των μελών της εν λόγω οικογενείας, τότε επί τού X ορίζεται η τοπολογία τ έχουσα ως βάση της το σύνολο $\mathcal{B}=\{U\times\{j\} \mid j\in J,\ U\in\tau_j\}$. Ο τοπολογικός χώρος (X,τ) καλείται <u>τοπολογικό άθροισμα</u> των X_j, $j\in J$. Αντί τού X γράφουμε συνήθως $\sum_{j\in J} X_j$. (Όταν $J=\{1,2\}$, τότε γράφουμε απλώς X_1+X_2.)

Εάν η $(X_j,\tau_j)_{j\in J}$ είναι μια οικογένεια τοπολογικών χώρων και εάν σταθερώσουμε στοιχεία $x_j^0\in X_j$ (θεωρώντας τα ως "σημεία αναφοράς" και τους X_j ως "εστιγμένους χώρους") και υποθέσουμε ότι το μονοσύνολο $\{x_j^0\}$ είναι κλειστό $\subseteq X_j$, $\forall j\in J$, όπως π.χ. στην περίπτωση κατά την οποία ο X_j είναι Hausdorff, τότε ορίζουμε τη μονοσημειακή ένωση των X_j, $j\in J$, ως τον πηλικόχωρο

$$\boxed{\bigvee_{j\in J} X_j := \sum_{j\in J} X_j \Big/ A}\,, \quad \text{όπου } A := \{x_j^\circ \mid j\in J\}.$$

(Όταν $J=\{1,\dots,k\}$, τότε γράφουμε $X_1\vee\dots\vee X_k$.)

Εάν η $p_A : \sum_{j\in J} X_j \longrightarrow \bigvee_{j\in J} X_j$ είναι η φυσική επίρριψη, τότε

$$p_A(x_j^\circ) = x^\circ := \{[y]_{R_A} : y\in A\},\ \forall j\in J, \text{ και ισχύουν τα εξής:}$$

(a) ο περιορισμός $p_A|_{X_j} : X_j \hookrightarrow \bigvee_{j\in J} X_j$ είναι μια (τοπολογική) εμφύτευση

και ο χώρος $\bigvee_{j\in J} X_j$ είναι η ένωση των υποχώρων $p_A(X_j)\approx X_j$

(με $p_A(X_j)\cap p_A(X_{j'}) = \{x^\circ\}$ για $j\neq j'$).

(b) Για $J=\{1,2,\dots,n\}$ συνεχείς απεικονίσεις $f_j : X_j \to X_j'$ με $f_j(x_j^\circ) = x_j'^{\circ}$, $\forall j\in J$, επάγουν μια συνεχή απεικόνιση:

$$f_1\vee f_2\vee\dots\vee f_n : X_1\vee X_2\vee\dots\vee X_n \longrightarrow X_1'\vee X_2'\vee\dots\vee X_n'$$
$$[x_j]_{R_A} \longmapsto [f_j(x_j)]_{R_{A'}},$$

ενώ συνεχείς απεικονίσεις $g_j : X_j \to Y$ με $g_j(x_j^\circ) = g_{j'}(x_{j'}^\circ)$, $\forall j, j'\in J$, επάγουν μια συνεχή απεικόνιση:

$$(g_1, g_2, \dots, g_n) : X_1\vee X_2\vee\dots\vee X_n \longrightarrow Y$$
$$[x_j]_{R_A} \longmapsto g_j(x_j).$$

(c) Εάν ως $i_j : X_j \to X_1\times\dots\times X_n$ συμβολίσουμε την ένθεση:

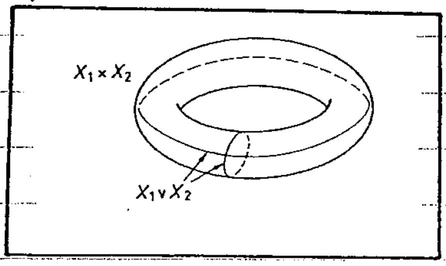
$$x_j \mapsto (x_1^\circ,\dots,x_{j-1}^\circ, x_j, x_{j+1}^\circ,\dots,x_n^\circ),\quad \forall j\in J=\{1,\dots,n\},$$

τότε

$$\Delta_j := \mathrm{Im}(i_j) = \{x_1^\circ\}\times\dots\times\{x_{j-1}^\circ\}\times X_j\times\{x_{j+1}^\circ\}\times\dots\times\{x_n^\circ\}, \text{ ήτοι}$$

ο j-οστός "άξονας των συντεταγμένων" (εντός τού $\prod_{j=1}^{n} X_j$).

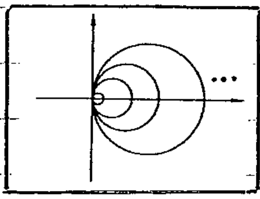
Εν προκειμένω, η απεικόνιση $(i_1,\ldots,i_n): \bigvee_{j=1}^{n} X_j \longrightarrow \prod_{j=1}^{n} X_j$ στέλνει τον χώρο $\bigvee_{j=1}^{n} X_j$ να απεικονισθεί ομοιομορφικώς επί τής ενώσεως $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \ldots \cup \Lambda_n$ των "αξόνων συντεταγμένων" (βλ. σχήμα, όπου $n=2$, $X_1 = X_2 = \mathbb{S}^1$).



Προσοχή! Τούτο δεν είναι αληθές για απειροπληθή σύνολα δεικτών J!
Ας θεωρήσουμε, επί παραδείγματι, τη μονοσημειακή ένωση

$X = \mathbb{S}_1^1 \vee \mathbb{S}_n^1 \vee \ldots$ απείρων (αριθμησίμων) σφαιρών $\mathbb{S}_j^1 \approx \mathbb{S}^1$, όπου $x_j^\circ = 1$, $\forall j \in \mathbb{N} (= J)$. Οι περιοχές τού $x^\circ \in X$ είναι τής μορφής $U_1 \cup U_2 \cup \ldots$, όπου (δ.β.γ.) οι U_j είναι κύκλοι περί το 1 εντός τής $\mathbb{S}_j^1$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Ιδιαιτέρως, το $\{x^\circ\}$ δεν διαθέτει καμία συμπαγή περιοχή ούτε κάποια αριθμήσιμη βάση περιοχών. Άρα ο X δεν είναι ούτε (τοπικά) συμπαγής ούτε μετρικοποιήσιμος. Αντιθέτως ο $\prod_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{S}_j^1$ είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος, κάτι που σημαίνει ότι ο X δεν μπορεί να εμφυτευθεί εντός τού $\prod_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{S}_j^1$. Προφανώς ο X δεν είναι ομοιομορφικός τού υπόχωρου $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - \frac{1}{n})^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}\}$ τού $\mathbb{R}^2$

(που καλείται
χαβανέζικο σκουλαρίκι)



καθότι κάθε περιοχή τού σημείου $(0,0)$ εντός τού Y περιέχει "σχεδόν όλους" τους μετέχοντες κύκλους (δηλαδή δεν περιέχει το πολύ πεπερασμένου πλήθους κύκλους).

Μια πιο γενικευμένη μέθοδος κατασκευής πηλικόχωρων περιλαμβάνει τη λεγομένη διαδικασία "προσαρτήσεως" ή "συγκολλήσεως χώρων."

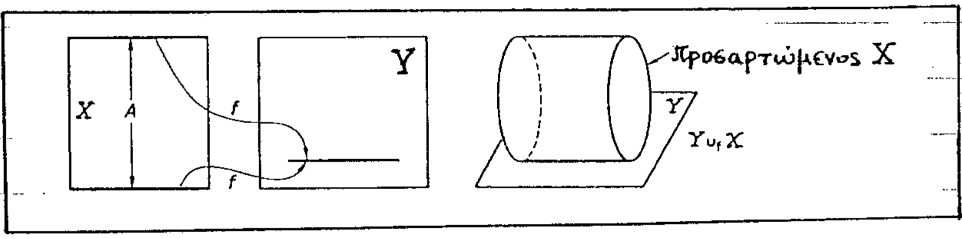
<u>1.10.11. Ορισμός</u> Ας υποθέσουμε ότι δίδονται δυο τοπολογικοί χώροι X και Y, ένας κλειστός υπόχωρος $A \subseteq X$, καθώς και μια συνεχής απεικόνιση $f: A \to Y$. Επί τού τοπολογικού αθροίσματος $X+Y$ ορίζεται μια σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}_{A,f}$ ως ακολούθως:

$$(w,z) \in \mathcal{R}_{A,f} \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \text{είτε} \quad w \notin A \amalg f(A) \text{ και } w = z, \\ \text{είτε} \quad w, z \in A \text{ και } f(w) = f(z), \\ \text{είτε} \quad w \in A,\ z \in f(A) \text{ και } z = f(w), \\ \text{είτε} \quad z \in A,\ w \in f(A) \text{ και } w = f(z). \end{array} \right\}$$

(Ώς εκ τούτου, η $\mathcal{R}_{A,f}$ ορίζεται μέσω τής ταυτίσεως των a και $f(a)$, για κάθε $a \in A$.)

Λέμε ότι ο προκύπτων πηλικόχωρος $\boxed{Y \cup_f X := {}^{X+Y}/_{\mathcal{R}_{f,A}}}$

<u>είναι ο πηλικόχωρος ο δημιουργούμενος μέσω τής απεικονίσεως f, η οποία "προσαρτά" ή "επικολλά" τον X στον Y.</u>



<u>1.10.12. Σημείωση:</u> Επί τη βάσει τής παρατηρήσεως 1.10.6 συνάγουμε για τη φυσική επίρριψη $p: X+Y \to Y \cup_f X$ τα ακόλουθα:

(i) Ο περιορισμός $p|_Y : Y \hookrightarrow Y \cup_f X$ αποτελεί μια (τοπολογική) εμφύτευση (οπότε κανείς μπορεί να εκλαμβάνει τον Y ως κλειστό υπόχωρο τού $Y \cup_f X$).

(ii) Ο περιορισμός $p|_X : X \to Y \cup_f X$ απεικονίζει το $X \setminus A$ ομοιομορφικώς επί τού $(Y \cup_f X) \setminus Y$.

(iii) Βάσει των (i),(ii) ο $Y \cup_f X$ απαρτίζεται από δύο τμήματα: Το πρώτο είναι ομοιομορφικό τού $X \setminus A$, το δεύτερο ομοιομορφικό τού Y.

Το τι υφής είναι ο τοπολογικός χώρος $Y \cup_f X$ εκεί που τα δύο αυτά τμήματα συναντώνται, εξαρτάται από την απεικόνιση επικολλήσεως f.

1.10.13. Ειδικές περιπτώσεις:

(i) Εάν $X \supseteq A \xrightarrow[f]{} Y = \{\text{ένα σημείο}\}$, τότε $Y \cup_f X = X/A$ (βλ. 1.10.9).

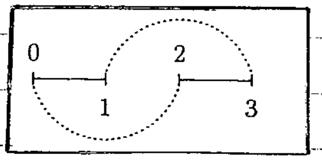
(ii) Εάν $X \supseteq A = \{\text{ένα σημείο}\} \xrightarrow[f]{} Y$, τότε $Y \cup_f X \approx X \vee Y$.

(iii) Εάν $X \supseteq A \xrightarrow[f]{} f(A) = \{\text{ένα σημείο}\}$, τότε $Y \cup_f X \approx (X/A) \vee Y$.

Ένας τρόπος κατασκευής συνεχών απεικονίσεων επί τού $Y \cup_f X$ υποδεικνύεται από την εξής:

1.10.14. Πρόταση. Ας υποθέσουμε ότι δίδονται τοπολογικοί χώροι X, Y και Z, ένας κλειστός υπόχωρος $A \subseteq X$ και συνεχείς απεικονίσεις $X \supseteq A \xrightarrow{f} Y$, $\varphi : X \to Z$ και $\psi : Y \to Z$ με $\varphi|_A = \psi \circ f$. Εάν η $\varphi + \psi : X + Y \to Z$ είναι η απεικόνιση που ταυτίζεται με την φ επί X και με την ψ επί τού Y, τότε η σύνθεση $(\varphi + \psi) \circ p^{-1} : Y \cup_f X \to Z$ είναι καλώς ορισμένη και συνεχής.

1.10.15. Παραδείγματα. (i) Εάν $X = [0,1]$, $A = \{0,1\}$, $Y = [2,3]$ και $f(0) = 2$, $f(1) = 3$, τότε $Y \cup_f X \approx S^1$.

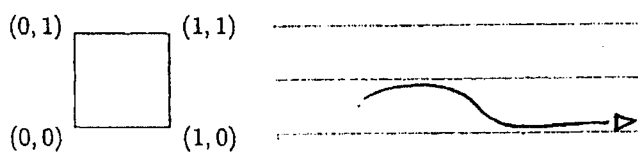


(ii) Εάν $X = \mathbb{D}^2 \supseteq S^1 = A$ και $Y = \{(2,2)\}$ με $f(x,y) = (2,2)$, για κάθε $(x,y) \in A$, τότε $Y \cup_f X = X/A = \mathbb{D}^2/S^1 \approx S^2$ (πρβλ. 1.10.10).

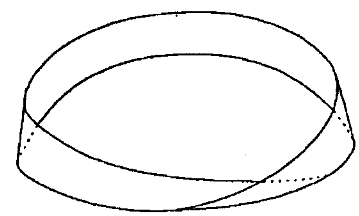
(iii) Εάν $X = [0,1] \times [0,1]$, $A = \{(x,y) \in X \mid \text{είτε } x=0 \text{ είτε } x=1\}$, $Y = [0,1]$ και η $f : A \to Y$ ορίζεται από τον τύπο:

$$f(x,y) := \begin{cases} y, & \text{εάν } x=0, \\ 1-y, & \text{εάν } x=1, \end{cases}$$

τότε ο $Y \cup_f X$ είναι ομοιομορφικός με την περιώνυμη <u>ταινία τού Möbius</u>



η άνω ακμή
επικολλάται στην κάτω
ύστερα από εκτέλεση μιας συστροφής



§ 1.11 Τοπολογικά πολυπτύγματα

<u>1.11.1. Ορισμός.</u> Ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff X, ο οποίος είναι $2^{ος}$ αριθμήσιμος, καλείται <u>n-διάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα</u> όταν κάθε $x \in X$ διαθέτει μια περιοχή U_x ομοιομορφική ενός ανοικτού υποσυνόλου τού $\mathbb{R}^n$.

<u>1.11.2. Σημείωση.</u> (i) στον ορισμό 1.11.1 η συνθήκη για την U_x μπορεί να αντικατασταθεί από την: $U_x \approx \mathring{\mathbb{D}}^n$ ή την: $U_x \approx \mathbb{R}^n$.
Για κάθε ομοιομορφισμό $f: \mathbb{R}^n \xrightarrow{\approx} U_x$ το ζεύγος (U_x, f) ονομάζεται <u>σύστημα συντεταγμένων</u> ή <u>(τοπολογικός) χάρτης</u> εντός τού X. Σε έναν τέτοιο "χάρτη" τα σημεία $f(y_1,\dots,y_n) \in U_x$ περιγράφονται μονοσημάντως μέσω των "συντεταγμένων" τους $y_1,\dots,y_n$. (Κάθε σύστημα χαρτών που αποτελεί κάλυμμα τού X καλείται <u>άτλας τού X</u>.)
(ii) Εάν οι (U,f), (V,g) είναι δυο χάρτες εντός τού X και $U \cap V \neq \emptyset$, τότε η απεικόνιση $g^{-1} \circ f : f^{-1}(U \cap V) \longrightarrow g^{-1}(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n$ ονομάζεται <u>αλλαγή χάρτη</u> ή <u>απεικόνιση μεταβάσεως</u> (από τον έναν χάρτη στον άλλον). Το $f^{-1}(U \cap V)$ είναι ανοικτό στον $\mathbb{R}^n$.
(και $g^{-1}(U \cap V)$)

(iii) Κάθε ανοικτό σύνολο ενός n-διαστάτου τοπολογικού πολυπτύγματος είναι ένα n-διάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα.

1.11.3. Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff X, ο οποίος είναι 2ος αριθμήσιμος, καλείται <u>n-διάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα με σύνορο</u> όταν κάθε $x \in X$ διαθέτει μια περιοχή U_x ομοιομορφική ενός ανοικτού υποσυνόλου τού "άνω ημιχώρου" $\mathbb{R}^{n-1} \times [0,+\infty)$.

1.11.4. Σημείωση. (i) Στον ορισμό 1.11.3 η συνθήκη για την U_x μπορεί να αντικατασταθεί από την: $U_x \approx \mathbb{D}^n$. Εάν $f: U_x \xrightarrow{\approx} \mathbb{D}^n$ είναι ομοιομορφισμός, τότε το x καλείται:

- <u>σημείο συνόρου</u> ή <u>συνοριακό σημείο τού X</u> $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ $f(x) \in \partial\mathbb{D}^n (= \mathbb{S}^{n-1})$
- <u>εσωτερικό σημείο τού X</u> $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ $f(x) \in \mathring{\mathbb{D}}^n$.

$\partial X := \{x \in X \mid x$ συνοριακό σημείο τού $X\} =:$ <u>σύνορο τού X</u>.
$\mathrm{int}(X) := \{x \in X \mid x$ εσωτερικό σημείο τού $X\} =:$ <u>εσωτερικό τού X</u>.

(Προσοχή! Εν γένει οι όροι "σύνορο" και "εσωτερικό" χρησιμοποιούνται διαφορετικά από τους αντίστοιχους τοπολογικούς όρους "μεθόριος" και "εσωτερικό" (υποσυνόλων τοπολογικών χώρων) που συναντήσαμε στους ορισμούς 1.2.6 και 1.2.9. Επί παραδείγματι, για κάθε τοπολογικό πολύπτυγμα με σύνορο X έχουμε $Fr_X(X) = \overline{X} \cap \emptyset = \emptyset$!)

(ii) Για κάθε ομοιομορφισμό $f: \mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty) \xrightarrow{\approx} U_x$ το ζεύγος (U_x, f) ονομάζεται σύστημα συντεταγμένων ή (τοπολογικός) χάρτης εντός τού X. Κατ' αναλογίαν ορίζονται οι έννοιες άτλας και απεικόνιση μεταβάσεως.

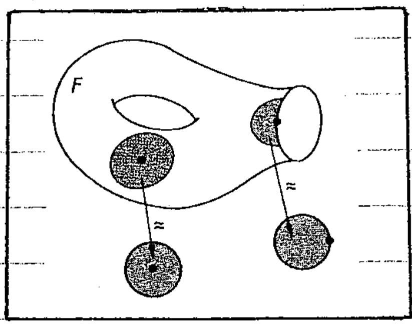
(iii) Επειδή κάθε ανοικτή μπάλα (κύτταρο) εντός του $\mathbb{R}^n$ είναι ομοιομορφική ενός ανοικτού υποσυνόλου τού $\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty)$, κάθε n-διάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα X (υπό την έννοια τού ορσ. 1.11.1) είναι n-διάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα με σύνορο $\partial X = \emptyset$ (υπό την έννοια τού ορσ. 1.11.4).

(iv) Κάθε τοπολογικό πολύπτυγμα (με ή χωρίς σύνορο) είναι τοπικά δρομοσυνεκτικό (βλ. ορσ. 1.9.22, σελ. 21).

1.11.5. Παραδείγματα (i) Τα μηδενοδιάστατα τοπολογικά πολυπτύγματα (με ή χωρίς σύνορο) είναι διακριτοί χώροι αποτελούμενοι από πεπερασμένα ή το πολύ αριθμήσιμα σύνολα σημείων.

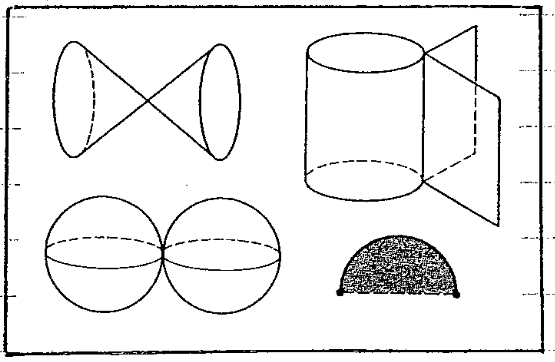
(ii) Κάθε συνεκτικό 1-διάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα (με ή χωρίς σύνορο) είναι ομοιομορφικό με έναν εκ των χώρων: $\mathbb{R}$, $\mathbb{S}^1$, $[0,1]$, $[0,\infty)$.
(Για μια απόδειξη βλ. D.B. Fuks & V.A. Rohlin: "Beginner's Course in Topology", Universitext, Springer-Verlag, 1984, Ch.3, §1.15.)

(iii) Τα 2-διάστατα τοπολογικά πολυπτύγματα (με ή χωρίς σύνορο) καλούνται επιφάνειες.

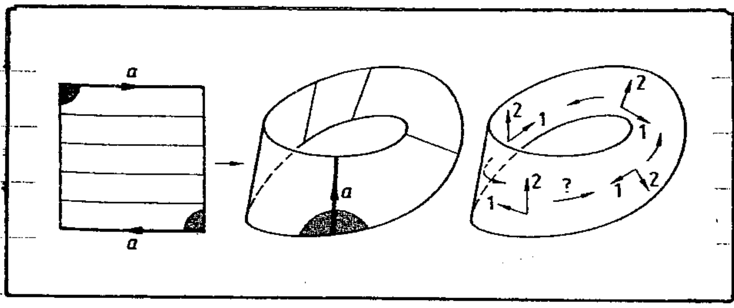


(Βασιζόμενος στο Θεώρημα 1.5.6 κανείς αποδεικνύει ότι κάθε ομοιομορφισμός $f: F \xrightarrow{\approx} F'$ μεταξύ δυο επιφανειών απεικονίζει το σύνορο ∂F της F επί του συνόρου $\partial F'$ της F'.)

Προσοχή! Υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ (ή του $\mathbb{R}^2$), εφοδιασμένα με τη σχετική τοπολογία, όπως αυτά που δείχνονται στο κάτωθι σχήμα, δεν είναι επιφάνειες (υπό την ως άνω έννοια), καθότι περιέχουν σημεία τα οποία δεν διαθέτουν περιοχές $\approx \mathbb{D}^2$ (ή $\approx \mathring{\mathbb{D}}^2$).

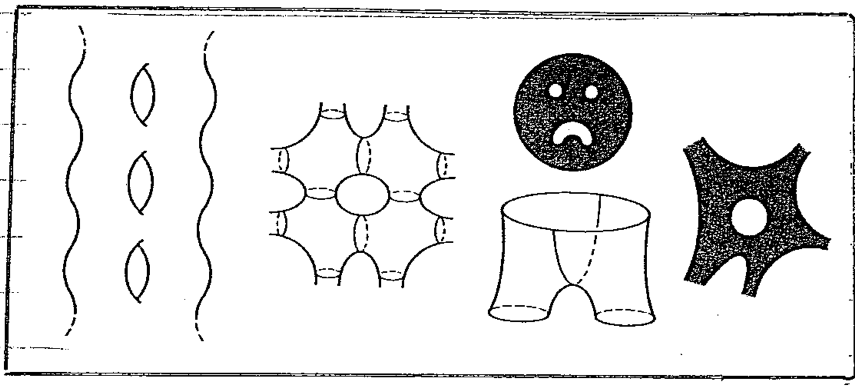


Απλά παραδείγματα επιφανειών με σύνορο είναι οι $\mathbb{D}^2$ ($\partial \mathbb{D}^2 = \mathbb{S}^1$), $\mathbb{R} \times [0,+\infty)$ (με το $\mathbb{R}$ ως σύνορό της), $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ (κύλινδρος με δυο κύκλους ως σύνορό του), καθώς και η ταινία του Möbius (πρβλ. 1.10.15 (iii)):



(Πρόκειται περί παραδείγματος μη προσανατολίσιμης επιφανείας: Όταν οδεύουμε με το εφαπτόμενο και το ορθόθετο διάνυσμα μία φορά γύρω από τον κεντρικό της κύκλο, τότε το ορθόθετο διάνυσμα επανέρχεται αντεστραμμένο!)

(iv) Οι συμπαγείς επιφάνειες χωρίς σύνορο καλούνται κλειστές επιφάνειες. Παραδείγματα επιφανειών χωρίς σύνορο που δεν είναι κλειστές είναι το $\mathbb{R}^2$, ο "άπειρος κύλινδρος" $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ και (εντός του $\mathbb{R}^3$) τα μονόχωνα υπερβολοειδή (που είναι $\approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$), τα δίχωνα υπερβολοειδή (που είναι $\approx \mathbb{R}^2 + \mathbb{R}^2$), τα παραβολοειδή (που είναι $\approx \mathbb{R}^2$), καθώς και οι επιφάνειες του κάτωθι σχήματος:



(v) Η $\mathbb{S}^n$ είναι ένα n-διάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα χωρίς σύνορο, ενώ η μπάλα $\mathbb{D}^n$ είναι ένα n-διάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα με σύνορο $\partial \mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$.

(vi) Εάν το X είναι ένα n-διάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα με σύνορο και το Y ένα m-διάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα με σύνορο, τότε το $X \times Y$ είναι ένα $(n+m)$-διάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα με
$$\partial(X \times Y) = (X \times \partial Y) \cup (\partial X \times Y).$$

Μέχρι το τέλος της παρούσας ενότητας θα υπενθυμίσουμε ορισμένα βασικά αποτελέσματα που αφορούν στις επιφάνειες.

1.11.6. Πρόταση. (Πώς διανοίγουμε τρύπες σε μια επιφάνεια)

Έστω F μια επιφάνεια. Ας υποθέσουμε ότι οι $f_1, \dots, f_k : \mathbb{D}^2 \to F$ είναι διαχωρισμένες εμφυτεύσεις (δηλαδή $f_j(\mathbb{D}^2) \cap f_{j'}(\mathbb{D}^2) = \emptyset$, $\forall j, j' \in \{1, \dots, k\}$, $j \neq j'$).

Θέτουμε

$$\begin{cases} \mathring{\mathbb{D}}_j := \{ f_j(x) \mid 0 \le \|x\| < \frac{1}{2} \} \ (\approx \mathring{\mathbb{D}}^2) \\ \mathbb{S}_j := \{ f_j(x) \mid \|x\| = \frac{1}{2} \} \ (\approx \mathbb{S}^1) \end{cases} \quad \forall j \in \{1, \dots, k\}.$$

Τότε η $F^* := F \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k} \mathring{\mathbb{D}}_j \right)$ είναι μια επιφάνεια με σύνορό της το

$$\partial F^* = \partial F \cup \left(\bigcup_{j=1}^{k} \mathbb{S}_j \right).$$

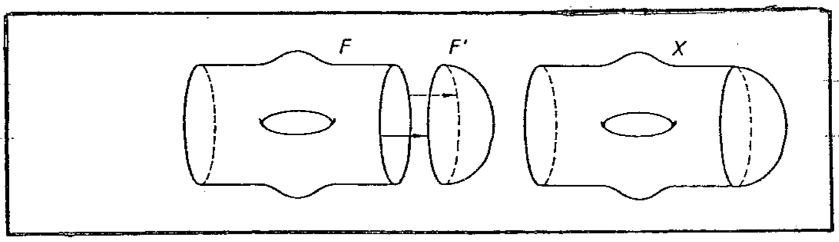
Εν συνεχεία, ας θεωρήσουμε δυο επιφάνειες F και F' και $\Xi \subseteq F$ (αντ., $\Xi' \subseteq F'$) μια συνεκτική συνιστώσα του ∂F (αντ., του $\partial F'$). Επιπροσθέτως, ας υποθέσουμε την ύπαρξη ομοιομορφισμού $g : \Xi \xrightarrow{\approx} \Xi'$. Εκλαμβάνοντας την g ως απεικόνιση $F \supseteq \Xi \xrightarrow{g} F'$, έχουμε τη δυνατότητα δομήσεως του χώρου $F' \cup_g F$ (βλ. 1.10.11, σελ. 29). Έστω $p : F + F' \to F' \cup_g F$ η αντίστοιχη φυσική επιρρίψη.

1.11.7. Πρόταση. Ο χώρος $X := F' \cup_g F$ είναι μια επιφάνεια, οι απεικονίσεις $p|_F$, $p|_{F'}$ κλειστές εμφυτεύσεις και

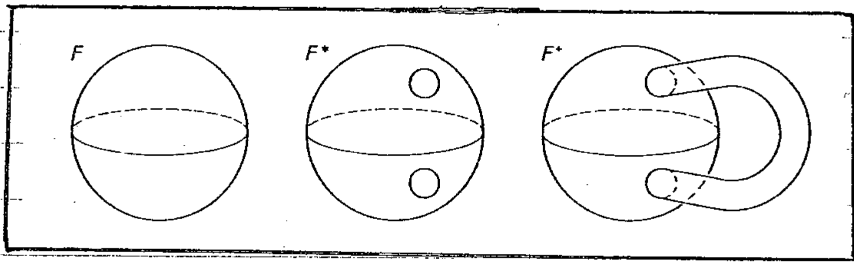
$$X = p(F) \cup p(F') \quad \text{με} \quad p(F) \cap p(F') = p(\Xi) = p(\Xi').$$

Επίσης,

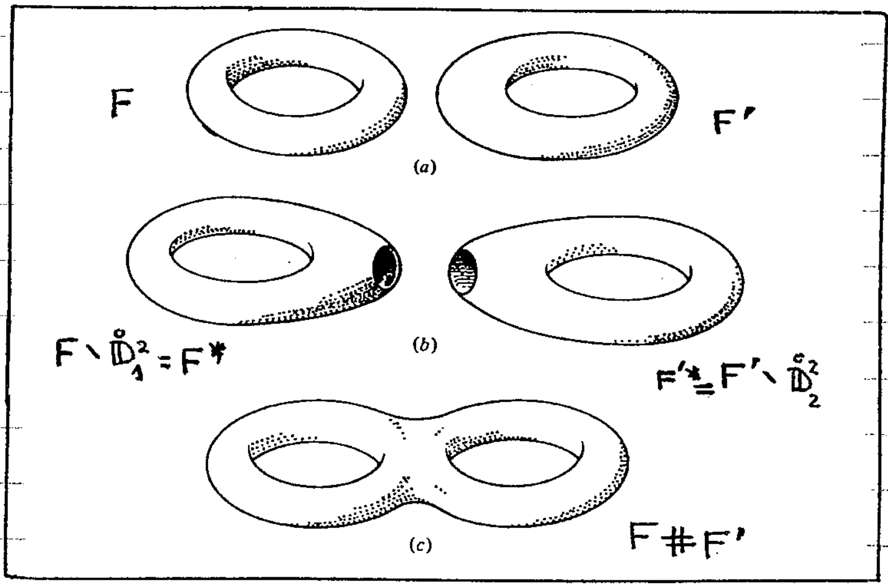
$$\partial X = p(\partial F \setminus \Xi) \cup p(\partial F' \setminus \Xi').$$



1.11.8. Παράδειγμα. Έστω F μια επιφάνεια. Εάν διανοίξουμε σε αυτήν δύο τρύπες (βλ. 1.11.6 για $k=2$) και συμβολίσουμε ως F^* την προκύπτουσα επιφάνεια, έχουμε $\partial F^* = \partial F \cup \mathbb{S}_1 \cup \mathbb{S}_2$. Επικολλώντας τον κύλινδρο $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ στην F^* (όπως στην πρόταση 1.11.7) μέσω των ομοιομορφισμών $\mathbb{S}^1 \times \{0\} \xrightarrow{\approx} \mathbb{S}_1$ και $\mathbb{S}^1 \times \{1\} \xrightarrow{\approx} \mathbb{S}_2$, λαμβάνουμε μια επιφάνεια F^+, η οποία δημιουργείται κατόπιν προσθέσεως (επικολλήσεως) μιας χειρολαβής στην F^*.



1.11.9 Παράδειγμα. Θεωρούμε δυο επιφάνειες F και F' και διανοίγουμε (μέσω της 1.11.6) μια τρύπα σε καθεμιά εξ αυτών. Κατόπιν συγκολλούμε τις F^* και F'^* μέσω ενός ομοιομορφισμού που απεικονίζει το σύνορο της μιας τρύπας επί του συνόρου της άλλης τρύπας (βλ. 1.11.7). Η κατ' αυτόν τον τρόπο δημιουργούμενη επιφάνεια συμβολίζεται ως $F \# F'$ και καλείται συνεκτικό άθροισμα των F και F'. ($\mathring{\mathbb{D}}_j^2 \approx \mathring{\mathbb{D}}^2$, $j=1,2$.)



1.11.10. Παράδειγμα. Έστω F μια επιφάνεια με $\partial F \neq \emptyset$. Το γινόμενο $F \times \mathbb{S}^0$ συνίσταται από τα δύο "αντίγραφα" $F \times \{1\}$ και $F \times \{-1\}$ της F. Ταυτίζοντας εντός του $F \times \mathbb{S}^0$ για κάθε $x \in \partial F$ τα σημεία $(x,1)$ και $(x,-1)$ λαμβάνουμε (μέσω εφαρμογής της προτάσεως 1.11.7) έναν πηλικόχωρο ο οποίος αποτελεί μια επιφάνεια χωρίς σύνορο. Η εν λόγω επιφάνεια καλείται διπλασιασμός της F, συμβολιζόμενη ως $2F$. (Π.χ. $2\mathbb{D}^2 \approx \mathbb{S}^2$ και $2(\mathbb{S}^1 \times [0,1]) \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$).

1.11.11. Σχόλιο. Έστω g ένας φυσικός αριθμός ≥ 1. Παραθέτουμε διαφορετικούς τρόπους δομήσεως μιας επιφάνειας (χωρίς σύνορο) εξαρτώμενης από τον g:

(i) Έστω $\mathbb{D}^2_g \subset \mathbb{R}^2$ ένας κλειστός δίσκος με g διακεκριμένες τρύπες (βλ. 1.11.6). Ορίζουμε την επιφάνεια $\boxed{A_g := \partial(\mathbb{D}_g \times [0,1])}$

(ii) Ορίζουμε την επιφάνεια $\boxed{B_g := 2\,\mathbb{D}_g}$ (βλ. 1.11.10).

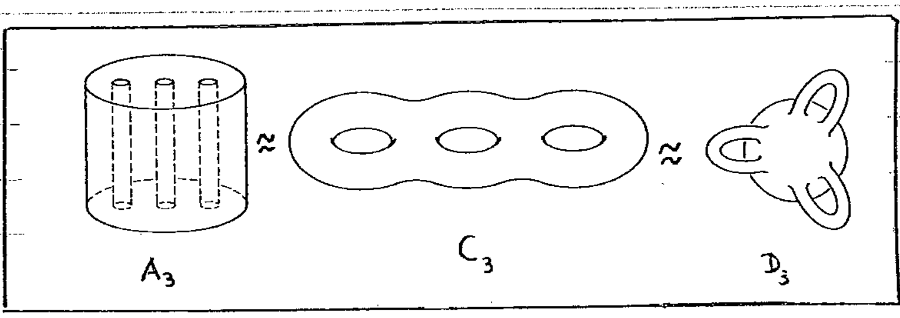
(iii) Έστω $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ ο 2-διάστατος τόρος. Ορίζουμε ως

$$\boxed{C_g := \underbrace{\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \cdots \# \mathbb{T}^2}_{g\text{-φορές}}}$$

το g φορές επαναλαμβανόμενο συνεκτικό άθροισμα επιφανειών $\approx \mathbb{T}^2$.

(iv) Ορίζουμε ως D_g την πρόσθεση g "χειρολαβών" στη σφαίρα $\mathbb{S}^2$ κατά τέτοιο τρόπο, ώστε η προκύπτουσα επιφάνεια να μη περιέχει κάποια ταινία του Möbius.

Αποδεικνύεται ότι: $\boxed{A_g \approx B_g \approx C_g \approx D_g, \ \forall g \geq 1}$.



(σχήμα για $g=3$.)

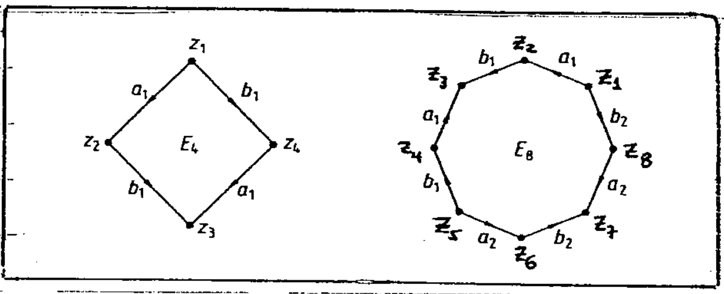
Εν συνεχεία θα παραθέσουμε έναν ακόμη ορισμό αυτών των επιφανειών. Το μειονέκτημά του είναι το ότι δεν είναι γεωμετρικώς αρκούντως διαισθητικός (όπως οι προηγηθέντες).
Το πλεονέκτημά του είναι ότι μέσω αυτού διευκολυνόμαστε σε διάφορες υπολογιστικές διαδικασίες.

1.11.12. Ορισμός και Πρόταση. Έστω g ένας φυσικός αριθμός ≥ 1 και έστω E_{4g} το κανονικό $4g$-γωνο με κορυφές του τα σημεία : $z_n := e^{2\pi\sqrt{-1}/4g}$, $n = 1, 2, \dots, 4g$.
Τότε το E_{4g} είναι ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{C}(=\mathbb{R}^2)$.
Ορίζοντας επί του E_{4g} μια σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}(\sim)$ ως ακολούθως:

$$\left\{\begin{array}{l} (1-t)z_{4j-3} + t\, z_{4j-2} \sim (1-t)z_{4j} + t\, z_{4j-1} \\ \text{και} \\ (1-t)z_{4j-2} + t\, z_{4j-1} \sim (1-t)z_{4j+1} + t\, z_{4j} \end{array}\right\}, \quad \begin{array}{l} \text{όπου} \\ 0 \leq t \leq 1 \\ j \in \{1, \dots, g\} \\ z_{4g+1} := z_1. \end{array}$$

Θεωρούμε τον πηλικόχωρο $\boxed{F_g := E_{4g}/\mathcal{R}}$, ο οποίος αποτελεί μια κλειστή επιφάνεια.
Καλούμε οποιαδήποτε επιφάνεια, η οποία είναι ομοιόμορφική της F_g, προσανατολίσιμη επιφάνεια γένους g, και επεκτείνουμε τον ορισμό και για $g=0$ θέτοντας $\boxed{F_0 := \mathbb{S}^2}$.

Σχήματα για $g=1,2$.



- Η $\mathcal{R}$ ταυτίζει ανά ζεύγη τις ακμές του E_{4g}.
- Σύμβαση στο σχήμα: Ταυτιζόμενες ακμές συμβολίζονται με το ίδιο γράμμα.

Επίσης, κάθε ακμή θεωρείται εφοδιασμένη με έναν προσανατολισμό κατά τέτοιον τρόπο, ώστε σημεία αρχής να ταυτίζονται με σημεία αρχής και σημεία τέλους σε σημεία τέλους.

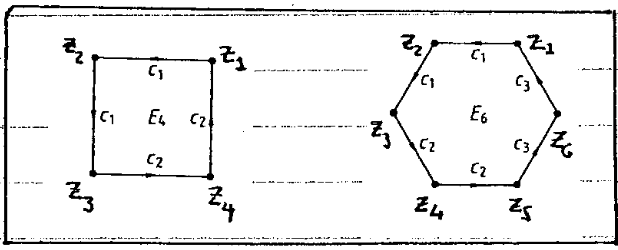
Αναλόγως εργάζεται κανείς και με τις μη προσανατολίσιμες, συνεκτικές, κλειστές επιφάνειες.

1.11.13. Ορισμός και Πρόταση. Έστω g ένας φυσικός αριθμός ≥ 2 και έστω E_{2g} το κανονικό $2g$-γωνο με κορυφές του τα σημεία $z_n := e^{2\pi\sqrt{-1}/2g}$, $n = 1, 2, \ldots, 2g$.
Τότε το E_{2g} είναι ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{C}(=\mathbb{R}^2)$.
Ορίζοντας επί του E_{2g} μια σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{S}\,(\sim)$ ως εξής:

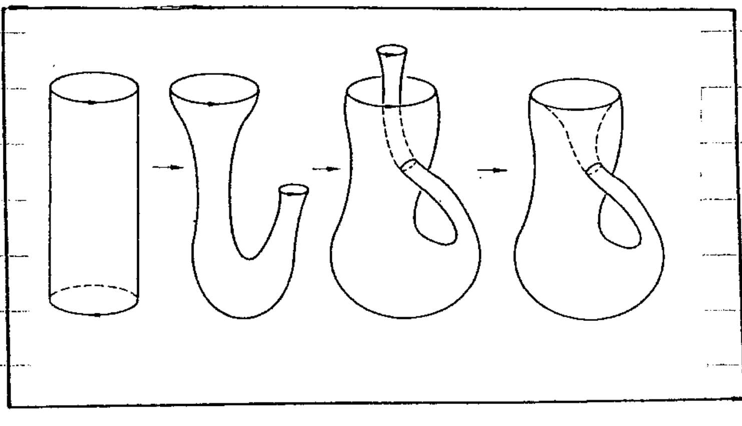
$$(1-t)\,z_{2j-1} + t\,z_{2j} \sim (1-t)\,z_{2j} + t\,z_{2j+1}\,,\quad 0 \leq t \leq 1,\ j \in \{1, \ldots, g\}$$

(με $z_{2g+1} := z_1$)
δημιουργούμε τον πηλικόχωρο $\boxed{N_g := E_{2g}/\mathcal{S}}$, ο οποίος αποτελεί μια κλειστή επιφάνεια.
Καλούμε οιαδήποτε επιφάνεια, η οποία είναι ομοιομορφική της N_g, μη προσανατολίσιμη επιφάνεια γένους g, και επεκτείνουμε τον ορισμό και για $g=1$ θέτοντας $\boxed{N_1 := \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}}$.

• Σχήματα για $g = 2, 3$:

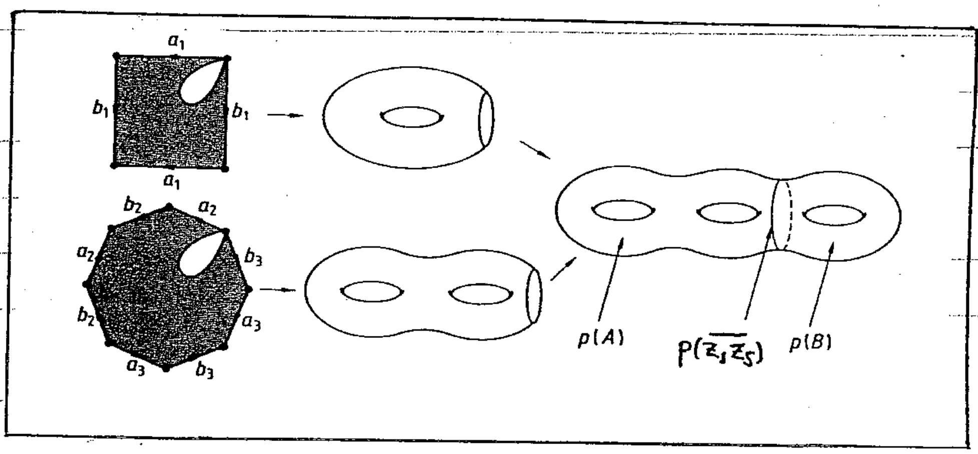


Η επιφάνεια N_2 είναι ομοιομορφική της λεγομένης φιάλης του Klein:



1.11.14. Σημείωση. (i) Προφανώς $F_1 \approx \mathbb{T}^2 (:= \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$. Έστω $g \geq 2$ και έστω $p: E_{4g} \to F_g$ η φυσική επίρριψη. Το ευθύγραμμο τμήμα $\overline{z_1 z_5}$ αποσυνθέτει το E_{4g} σε δύο τμήματα A και B με $A \cap B = \overline{z_1 z_5}$. Επειδή $p(z_1) = p(z_5)$ η εικόνα $p(\overline{z_1 z_5}) \subset F_g$ είναι ένας κύκλος (πρβλ. 1.10.6). Εάν κανείς αρχικώς ταυτίσει εντός τού A (αντ., εντός τού B) μόνον τα σημεία z_1 και z_5, τότε λαμβάνει προφανώς ένα τετράγωνο (αντ., ένα $(4g-4)$-γωνο) από το οποίο έχει απομακρυνθεί ένας ανοικτός δίσκος έχων ως σύνορό του την εικόνα $p(\overline{z_1 z_5})$ τού $\overline{z_1 z_5}$ μέσω τής p. Εάν εν συνεχεία υλοποιηθούν και οι λοιπές ταυτίσεις, τότε διαπιστώνουμε ότι το $p(A)$ είναι ένας τρυπημένος τόρος και το $p(B)$ μια τρυπημένη επιφάνεια F_{g-1} (υποθέτοντας, μέσω επαγωγής, ότι η εμφανιζόμενη F_{g-1} είναι μια επιφάνεια). Επειδή $F_g = p(A) \cup p(B)$ και $p(A) \cap p(B) = p(\overline{z_1 z_5})$, η F_g προκύπτει από τις ανωτέρω επιφάνειες ύστερα από συγκόλλησή τους κατά μήκος των συνόρων των τρυπών τους. Ως εκ τούτου, βάσει τής προτάσεως 1.11.7, έχουμε:

$$\boxed{F_g \approx F_1 \# F_{g-1}, \ \forall g \geq 2.}$$



(ii) Κατ' αναλογίαν αποδεικνύεται ότι

$$\boxed{N_g \approx N_1 \# N_{g-1}, \ \forall g \geq 2.}$$

Τώρα είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε το περίφημο <u>Θεώρημα ταξινομήσεως</u>:

1.1.1.15. Θεώρημα Κάθε συνεκτική, κλειστή επιφάνεια F είναι ομοιομορφική ενός εκ των επιφανειών:

$$\begin{cases} F_0, F_1, F_2, \dots \\ N_1, N_2, \dots \end{cases}$$

Επιπροσθέτως, αυτές οι επιφάνειες είναι ανά ζεύγη μη ομοιομορφικές και

$$\begin{cases} F_0 := \mathbb{S}^2, \quad F_g \approx A_g \approx B_g \approx C_g \approx D_g \text{ (βλ. 1.11.11)}, \ \forall g \geq 1, \\ N_g \approx \underbrace{\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \# \dots \# \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}}_{g\text{-αντίτυπα}}, \ \forall g \geq 1 \\ \approx \begin{Bmatrix} \text{σφαίρα από την οποία έχουμε} \\ \text{απομακρύνει } g \text{ δίσκους και τους} \\ \text{έχουμε αντικαταστήσει με ταινίες Möbius} \end{Bmatrix} \end{cases}$$

Ένα αντίστοιχο θεώρημα ταξινομήσεως για συνεκτικές, συμπαγείς επιφάνειες <u>με σύνορο</u> είναι το εξής:

1.11.16 Θεώρημα Κάθε συνεκτική συμπαγής επιφάνεια με σύνορο είναι ομοιομορφική ενός εκ των επιφανειών $\mathbb{S}^2$, F_g, $g \geq 1$, N_g, $g \geq 1$, από τις οποίες έχουν απομακρυνθεί πεπερασμένου πλήθους δίσκοι.

Για την απόδειξη των ανωτέρω θεωρημάτων (και άλλων συναφών αποτελεσμάτων από τη θεωρία των επιφανειών) ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στη μελέτη των αντιστοίχων κεφαλαίων από τα ακόλουθα συγγράμματα:

- M.A. Armstrong: *Basic Topology*, second printing, UTM, Springer-Verlag, 1983.
- L. C. Kinsey: *Topology of Surfaces*, UTM, Springer-Verlag, 1993.
- C. Kosniowski: *A First Course in Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 1980.
- W.S. Massey: *Algebraic Topology: An Introduction*, second printing, GTM, Vol. 56, Springer-Verlag, 1977.
- J.R. Munkres: *Topology*, second edition, Prentice Hall, 2000.

§ 1.12 Προβολικοί χώροι

Εξέχουσα θέση εντός της κλάσεως των παραδειγμάτων συνεκτικών, συμπαγών τοπολογικών πολυπτυγμάτων κατέχουν οι λεγόμενοι "προβολικοί χώροι". Έστω $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ το σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ ή το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ ή το στρεβλό σώμα των τετρανίων $\mathbb{H}$. Θέτοντας

$$d := \begin{cases} 1, & \text{όταν } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \\ 2, & \text{όταν } \mathbb{K} = \mathbb{C}, \\ 4, & \text{όταν } \mathbb{K} = \mathbb{H}, \end{cases}$$

θεωρούμε το (υποκείμενο σύνολο τού $\mathbb{K}$) ως το $\mathbb{R}^d$ και το εφοδιάζουμε με τη συνήθη (ευκλείδεια) τοπολογία. Ο $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος $\mathbb{K}^{n+1} = \underbrace{\mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}_{n+1 \text{ φορές}}$ $(n \geq 0)$ είναι ωσαύτως τοπολογικός χώρος (ταυτιζόμενος με τον $\mathbb{R}^{d(n+1)}$). Εδώ εξυπονοείται ότι εργαζόμαστε με τη μετρική τοπολογία την επαγόμενη από τις συνήθεις στάθμες (= νόρμες):

- Για $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\|x\| := \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, $\forall\, x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$

- Για $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\|z\| := \sqrt{|z_0|^2 + |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}$, $\forall\, z = (z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$
$(z_j = x_j + \sqrt{-1}\, y_j,\ j \in \{0, \ldots, n\}$
$|z_j| := \sqrt{x_j^2 + y_j^2}\,)$

- Για $\mathbb{K} = \mathbb{H}$: Θεωρώντας (ως συνήθως) το σύνολο $\{1, i, j, k\}$ ως βάση τού $\mathbb{H}$ (ιδωμένου ως 4-διάστατο διανυσματικό χώρο υπεράνω τού $\mathbb{R}$) με $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $ik = -ki = -j$ και $jk = -kj = i$, ορίζεται το "μέτρο" οιουδήποτε τετρανίου

$$\xi = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \in \mathbb{H}$$

ως ο αριθμός: $|\xi| := \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$,

δίνοντας το έναυσμα για τον ορισμό της στάθμης:

$$\|h\| := \sqrt{|h_0|^2+|h_1|^2+\dots+|h_n|^2}\,, \quad \forall\, h=(h_0,\dots,h_n)\in \mathbb{H}^{n+1},$$

όπου

$$h_\nu = x_{0,\nu} + x_{1,\nu}\, i + x_{2,\nu}\, j + x_{3,\nu}\, k\,, \quad \nu\in\{0,1,\dots,n\}$$

1.12.1. Ορισμός. Ως n-διάστατος προβολικός χώρος υπεράνω τού $\mathbb{K}$ ορίζεται ο πηλικόχωρος

$$\boxed{\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} := \left(\mathbb{K}^{n+1}\smallsetminus\{0_{\mathbb{K}^{n+1}}\}\right)\big/\sim}$$

ο δημιουργούμενος μέσω τής σχέσεως ισοδυναμίας

$$(x_0,x_1,\dots,x_n)\sim(x_0',x_1',\dots,x_n') \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{c}\exists\,\lambda\in\mathbb{K}\smallsetminus\{0_{\mathbb{K}}\}: x_\nu=\lambda x_\nu' \\ \forall\,\nu\in\{0,1,\dots,n\}\end{array}\right]$$

Συμβ. $[x_0:x_1:\dots:x_n] :=$ κλ. ισοδ. τού $(x_0,\dots,x_n)$ ως προς την "$\sim$" (: ομογενείς συντεταγμένες)

1.12.2. Πρόταση. Ο n-διάστατος προβολικός χώρος $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ αποτελεί ένα συνεκτικό, συμπαγές, dn-διάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα (υπό την έννοια τού ορσ. 1.11.1).

1.12.3. Σημείωση. (i) Παρότι η πρόταση 1.12.2 αποτελεί μια άμεση εφαρμογή ενός γενικότερου αποτελέσματος που θα παρατεθεί στην επομένη ενότητα, οφείλουμε να αναφέρουμε ότι ο "συνήθης άτλαντας" τού $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ απαρτίζεται από $n+1$ χάρτες (U_i, f_i), $0\le i\le n$, όπου $U_i := \{[x_0:x_1:\dots:x_n]\in\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \mid x_i\neq 0_{\mathbb{K}}\}$ και

$$\mathbb{K}^n \ni (y_1,\dots,y_n) \overset{\approx}{\longmapsto} f_i(y_1,\dots,y_n) := [y_1:\dots:y_{i-1}:1_{\mathbb{K}}:y_{i+1}:\dots:y_n]\in U_i.$$

(ii) $\mathbb{P}^0_{\mathbb{K}} = \{\text{ένα σημείο}\}$

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} = \{[x:1_{\mathbb{K}}] \mid x\in\mathbb{K}\}\cup\{\underbrace{[1_{\mathbb{K}}:0_{\mathbb{K}}]}_{\text{κατ' εξοχήν σημείο}}\}$$

$$\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} = \{[x:y:1_{\mathbb{K}}] \mid (x,y)\in\mathbb{K}^2\}\cup\underbrace{\{[x:y:0_{\mathbb{K}}] \mid [x:y]\in\mathbb{P}^1\}}_{\text{κατ' εξοχήν ευθεία}}$$

$\vdots$

Άρα μπορούμε να κατασκευάσουμε εμφυτεύσεις:

$$\mathbb{P}^0_{\mathbb{K}} \subsetneqq \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \subsetneqq \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \subsetneqq \dots \subsetneqq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \subsetneqq \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{K}} \subsetneqq \dots,$$

ταυτίζοντας τον $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{K}}$ με το σύνολο των σημείων $[x_0:x_1:\dots:x_{n-1}:0]\in\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

§ 1.13 Τοπολογικές ομάδες, δράσεις ομάδων και τροχιακοί χώροι

1.13.1. Ορισμός. Ένα μη κενό σύνολο G, το οποίο είναι ταυτοχρόνως εφοδιασμένο και με τη δομή μιας ομάδας $(G,\cdot)$ και με μια τοπολογία καλείται **τοπολογική ομάδα** όταν αμφότερες οι απεικονίσεις

$$G\times G \ni (x,y) \longmapsto xy \in G \quad \text{και} \quad G \ni x \longmapsto x^{-1} \in G$$

είναι συνεχείς (με το $G\times G$ φέρον τη συνήθη τοπολογία γινομένου).

1.13.2. Παραδείγματα. (i) Η προσθετική ομάδα των πραγματικών αριθμών $(\mathbb{R},+)$ είναι τοπολογική ομάδα (ως προς τη συνήθη τοπολογία).

(ii) Ο κύκλος $\mathbb{S}^1 = \{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$ είναι τοπολογική ομάδα, καθότι οι

$$\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1 \ni (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \longmapsto e^{i(\theta_1+\theta_2)} \in \mathbb{S}^1 \quad \text{και}$$

$$\mathbb{S}^1 \ni e^{i\theta} \longmapsto e^{-i\theta} \quad (i=\sqrt{-1}) \quad \text{είναι συνεχείς.}$$

(iii) Ο τόρος $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ (και, γενικότερα, το γινόμενο δυο τοπολογικών ομάδων) είναι μια τοπολογική ομάδα.

(iv) Τοπολογικές ομάδες είναι

- η $GL(n,\mathbb{R}) := \{A\in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A)\neq 0\}$ (γενική γραμμική ομάδα)
- η $O(n,\mathbb{R}) := \{A\in GL(n,\mathbb{R}) \mid A^t = A^{-1}\}$ (ορθογώνια ομάδα)

και • η $SO(n,\mathbb{R}) := \{A\in O(n,\mathbb{R}) \mid \det(A)=1\}$ (ειδική ορθογώνια ομάδα)

με την τοπολογία υποχώρου εντός του $\mathbb{R}^{n^2}$ (όταν κανείς εκλαμβάνει κάθε πίνακα $A\in\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ως σημείο του $\mathbb{R}^{n^2}$).

Κατ' αναλογίαν τοπολογικές ομάδες είναι και

- η $GL(n,\mathbb{C}) := \{A\in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A)\neq 0\}$ (μιγαδική γενική γραμμική)
- η $U(n,\mathbb{C}) := \{A\in GL(n,\mathbb{C}) \mid \overline{A}^t = A^{-1}\}$ (μοναδιακή)

και • η $SU(n,\mathbb{C}) := \{A\in U(n,\mathbb{C}) \mid \det(A)=1\}$ (ειδική μοναδιακή)

Σημειωτέον ότι η $GL(n,\mathbb{R})$ (αντ., η $GL(n,\mathbb{C})$) ως ανοικτός υπόχωρος τού $\mathbb{R}^{n^2}$ (αντ., τού $\mathbb{C}^{n^2}=\mathbb{R}^{2n^2}$) είναι ένα μη συμπαγές τοπολογικό πολύπτυγμα (χωρίς σύνορο) διαστάσεως n^2 (αντ. $2n^2$) και ότι

$$SO(n,\mathbb{R})\times\mathbb{S}^0 \approx O(n,\mathbb{R}), \quad SU(n,\mathbb{C})\times\mathbb{S}^1 \approx U(n,\mathbb{C}).$$

Οι $SO(n,\mathbb{R})$, $U(n,\mathbb{C})$ και $SU(n,\mathbb{C})$ είναι δρομοσυνεκτικές, ενώ η $O(n,\mathbb{R})$ διαθέτει ακριβώς δύο δρομοσυνεκτικές συνιστώσες (καθεμία των οποίων είναι $\approx SO(n,\mathbb{R})$).

Η $SO(n,\mathbb{R})$ (αντ., η $SU(n,\mathbb{C})$) είναι ένα συμπαγές τοπολογικό πολύπτυγμα (χωρίς σύνορο) διαστάσεως $\frac{1}{2}n(n-1)$ (αντ. n^2-1).
Για μικρά n έχουμε: $SO(1,\mathbb{R}) = SU(1,\mathbb{C}) = \{$ένα σημείο$\}$
και $SO(2,\mathbb{R}) \underset{\text{τ.ο}}{\cong} U(1,\mathbb{C}) \underset{\text{τ.ο}}{\cong} \mathbb{S}^1$, $SU(2,\mathbb{C}) \underset{\text{τ.ο.}}{\cong} \mathbb{S}^3$, πολλ/μός τετρανίων

όπου "$\underset{\text{τ.ο.}}{\cong}$" δηλοί ισομορφισμό τοπολογικών ομάδων (= ισομορφισμό ομάδων που είναι —ταυτοχρόνως— και ομοιομορφισμός τοπολογικών χώρων).

1.13.3. Ορισμός. Έστω G μια τοπολογική ομάδα και έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Μια δράση της G επί τού X είναι μια συνεχής απεικόνιση $G\times X \ni (g,x) \longmapsto gx \in X$, τέτοια ώστε να ισχύουν οι εξής συνθήκες:

$$\begin{cases} \text{(i)} & g(g'x) = (gg')x, \quad \forall\, g,g' \in G \text{ και } \forall x\in X, \\ \text{(ii)} & 1_G\, x = x, \quad \forall x \in X. \end{cases}$$

Για $x\in X$ το σύνολο $Gx := \{gx \mid g\in G\}$ καλείται τροχιά τού x.
Επί τού X ορίζεται η σχέση ισοδυναμίας "$\sim_G$" ως εξής:

$$x \underset{G}{\sim} x' \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} Gx = Gx' \Longleftrightarrow \exists\, g \in G : gx = x'.$$

Ο πηλικόχωρος $\boxed{X/G := X/\sim_G}$ καλείται τροχιακός χώρος (τού X ως προς τη δράση τής G επ' αυτού).

1.13.4. Σημείωση. Για παγιωμένο $g\in G$ η $X\ni x \mapsto gx\in X$ είναι ένας ομοιομορφισμός (με την $X\ni x\mapsto g^{-1}x\in X$ ως αντίστροφό του).

1.13.5. Παραδείγματα. (i) Ο τροχιακός χώρος $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ που κατασκευάζεται μέσω τής δράσεως $\mathbb{Z}\times\mathbb{R}\ni(n,x)\mapsto x+n\in\mathbb{Z}$ είναι $\approx \mathbb{S}^1$

(ii) Η $(\mathbb{Z},+)$ δρα επί τού $\mathbb{R}^2$ ως εξής: $\mathbb{Z}\times\mathbb{R}^2\ni(n,(x_1,x_2))\mapsto(x_1+n,x_2)\in\mathbb{R}^2$ και δίδει $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \approx \mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$ $\left(\mathbb{Z}(x_1,x_2)\mapsto(e^{2\pi\sqrt{-1}\,x_1}, x_2)\right)$.

(iii) Η δράση $\mathbb{Z}^2\times\mathbb{R}^2\ni((m,n),(x_1,x_2))\longmapsto(x_1+m, x_2+n)\in\mathbb{R}^2$ δίδει τον πηλικόχωρο $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \approx \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1 =: \mathbb{T}^2$.

(iv) Η $(\mathbb{S}^1,\cdot)$ (όπου $\mathbb{S}^1=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$) δρα επί τού $\mathbb{C}$ ως εξής: $\mathbb{S}^1\times\mathbb{C}\ni(\lambda,z)\mapsto\lambda z\in\mathbb{C}$. Η τροχιά $\mathbb{S}^1 z$, για $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, είναι ο κύκλος κέντρου 0 και ακτίνας $|z|$, ενώ $\mathbb{S}^1.0=\{0\}$. Άρα $\mathbb{C}/\mathbb{S}^1\approx[0,\infty)$.

(γ) Εάν $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ και $d := \begin{cases} 1, & \text{όταν } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \\ 2, & \text{όταν } \mathbb{K} = \mathbb{C}, \\ 4, & \text{όταν } \mathbb{K} = \mathbb{H}, \end{cases}$ όπως στην §1.12,

και

$$p : \mathbb{S}^{d(n+1)-1} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$$
$$x \longmapsto \mathbb{K}\cdot x = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{K}\} \subseteq \mathbb{K}^{n+1}, \text{ δηλ.}$$

$$\begin{cases} (x_0, x_1, \dots, x_n) \longmapsto [x_0 : x_1 : \dots : x_n], & \text{για } d=1 \\ (x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \mapsto [x_0 : y_0 : \dots : x_n : y_n], & \text{για } d=2 \\ (x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3}, x_{0,4}, \dots, x_{n,1}, x_{n,2}, x_{n,3}, x_{n,4}) \mapsto [x_{0,1} : \dots : x_{n,4}], & \text{για } d=4, \end{cases}$$

η p είναι μια ταυτισμική απεικόνιση και μάλιστα

$$p(x) = p(x') \iff (\exists \lambda \in \mathbb{K} \text{ με } |\lambda| = 1 : x' = \lambda x).$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ταυτίσεις

$$\left.\begin{cases} \mathbb{S}^0 = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid |\lambda| = 1\} = \{\pm 1\} \\ \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \\ \mathbb{S}^3 = \{\xi \in \mathbb{H} \mid |\xi| = 1\} \end{cases}\right\}$$

και το ότι οι εν λόγω σφαίρες φέρουν τη δομή πολλαπλασιαστικής ομάδας,

καθώς και τις ταυτίσεις

$$\begin{cases} \mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}, \\ \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \|z\| = 1\} = \mathbb{S}^{2n+1} \quad (\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}), \\ \{h \in \mathbb{H}^{n+1} \mid \|h\| = 1\} = \mathbb{S}^{4n+3} \quad (\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R}^{4n+4}), \end{cases}$$

έχουμε τη δυνατότητα ορισμού δράσεων

$$\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{S}^{d(n+1)-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{d(n+1)-1}, \quad (\mu, \xi_0, \dots, \xi_n) \mapsto (\mu\xi_0, \dots, \mu\xi_n),$$

(μέσω πολλαπλασιασμού κατά συντεταγμένες) και τη δημιουργία του τροχιακού χώρου $\mathbb{S}^{d(n+1)-1}/\mathbb{S}^{d-1}$, ο οποίος είναι εκ κατασκευής ομοιομορφικός του $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ (πρβλ. 1.10.7 (i)):

$$\bar{p} : \mathbb{S}^{d(n+1)-1}/\mathbb{S}^{d-1} \xrightarrow{\approx} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$$

Προφανώς $p(\underbrace{\mathbb{S}^{d(n+1)-1}}) = \underbrace{\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}}$

συνεκτική	συνεκτικός (1.9.6)
συμπαγής	συμπαγής (1.8.7)
Hausdorff	Hausdorff
2ος αριθμ.	2ος αρ.

Επειδή $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^{dn}$, ο $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ είναι όντως ένα συνεκτικό, συμπαγές, dn-διάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα (χωρίς σύνορο), διότι καλύπτεται από τους χάρτες $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^{dn} \xrightarrow[f_i]{\approx} U_i$, $i \in \{0,1,\dots,n\}$ που προαναφέρθησαν στην 1.12.3 (i).

(vi) Θεωρώντας την $O(n-1,\mathbb{R})$ ως υποομάδα της $O(n,\mathbb{R})$ και την

$$p : O(n) \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$$
$$A \longmapsto A(0,0,\dots,1)^t$$

διαπιστώνουμε (με παρόμοιο τρόπο) ότι

$$O(n)/O(n-1) \approx \mathbb{S}^{n-1}$$

Κατ' αναλογίαν αποδεικνύονται και οι ομοιομορφισμοί:

$$\begin{cases} SO(n,\mathbb{R})/SO(n-1,\mathbb{R}) \approx \mathbb{S}^{n-1}, \ n \geq 2, \\ SU(n,\mathbb{C})/SU(n-1,\mathbb{C}) \approx \mathbb{S}^{2n-1}, \ n \geq 2, \\ [U(n,\mathbb{C})/U(n-1,\mathbb{C}) \approx \mathbb{S}^{2n-1}] \\ O(n+1)/(O(n)\times O(1)) \approx \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}, \\ U(n+1)/(U(n)\times U(1)) \approx \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}. \end{cases}$$

Για περαιτέρω παραδείγματα αυτού του είδους οι ενδιαφερόμενοι αναγνώστες παραπέμπονται στα ακόλουθα συγγράμματα:

1) A. Baker: *Matrix Groups*, SUMS, Springer-Verlag, 2002.
2) K. Tapp: *Matrix Groups for Undergraduates*, Student Math. Library, Vol. 29, American Math. Society, 2005.
3) I.R. Porteous: *Topological Geometry*, 2nd Edition, Cambridge University Press, 1981.

<u>1.13.6 Ορισμός.</u> Έστω G μια τοπολογική ομάδα, η οποία δρα επί ενός τοπολογικού χώρου X. Λέμε ότι η G <u>δρα ελευθέρως</u> (ή ότι <u>στερείται σταθερών σημείων</u>) <u>επί του X</u> όταν $gx \neq x$, $\forall g \in G \setminus \{1_G\}$ (δηλαδή όταν η $X \ni x \mapsto gx \in X$ στερείται σταθερών σημείων, $\forall g \in G \setminus \{1_G\}$).

<u>1.13.7 Λήμμα.</u> Εάν μια πεπερασμένη (διακριτή) ομάδα G δρα επί ενός χώρου Hausdorff X, τότε ο τροχιακός χώρος X/G είναι χώρος Hausdorff.

48

Έστω $p: X \to X/G$, $p(x) := [x]_{\sim G}$, η φυσική επίρριψη.

<u>Απόδειξη.</u> Εάν $[x_1]_{\sim G}, [x_2]_{\sim G} \in X/G$ και $x_1 \not\sim_G x_2$, τότε $g_1 x_1 \neq g_2 x_2$, για οιοδήποτε ζεύγος $g_1, g_2 \in G$, οπότε

$$p^{-1}([x_1]_{\sim G}) \cap p^{-1}([x_2]_{\sim G}) = \{g x_1 | g \in G\} \cap \{g x_2 | g \in G\} = \emptyset.$$

Επειδή αυτά τα σύνολα είναι πεπερασμένα είναι δυνατόν (κατόπιν επαναλαμβανόμενης εφαρμογής της ιδιότητας του Hausdorff) να κατασκευασθούν ανοικτά υποσύνολα U_1, U_2 του X, τέτοια ώστε

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset, \quad p^{-1}([x_1]_{\sim G}) \subseteq U_1, \quad p^{-1}([x_2]_{\sim G}) \subseteq U_2.$$

Επειδή

$$p^{-1}(p(X \setminus U_j)) = \underbrace{\bigcup_{g \in G} \underbrace{g \cdot (X \setminus U_j)}_{\text{κλειστό}}}_{\text{πεπ. ένωση κλειστών}}, \; j \in \{1,2\}, \text{ το } p^{-1}(p(X \setminus U_j)) \text{ είναι κλειστό} \subseteq X$$

$\Longrightarrow$ Το $p(X \setminus U_j)$, $j \in \{1,2\}$, είναι κλειστό υποσύνολο του X/G

$\Longrightarrow$ το $W_j := X/G \setminus p(X \setminus U_j)$, $j \in \{1,2\}$, είναι ανοικτό $\subseteq X/G$.

Επειδή
$$\begin{aligned} W_1 \cap W_2 &= X/G \setminus (p(X \setminus U_1) \cup p(X \setminus U_2)) \\ &= X/G \setminus p((X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)) \\ &= X/G \setminus p(X \setminus \underbrace{(U_1 \cap U_2)}_{=\emptyset}) = X/G \setminus p(X) = \emptyset, \end{aligned}$$

ο X/G είναι όντως χώρος Hausdorff. □

> **1.13.8. <u>Πρόταση.</u>** Εάν μια πεπερασμένη (διακριτή) ομάδα G δρα ελευθέρως επί ενός συμπαγούς τοπολογικού n-διάστατου τοπολογικού πολυπτύγματος X (χωρίς σύνορο), τότε και ο τροχιακός χώρος X/G είναι ένα n-διάστατο συμπαγές τοπολογικό πολύπτυγμα (χωρίς σύνορο).

<u>Απόδειξη.</u> Κατά το λήμμα 1.13.7 ο X/G είναι χώρος Hausdorff. Επιπροσθέτως, επειδή ο X είναι $2^{\text{ος}}$ αριθμήσιμος και η $p: X \to X/G$ ανοικτή, ο τροχιακός χώρος είναι ωσαύτως $2^{\text{ος}}$ αριθμήσιμος (άσκηση).

1.10.2 (ii) Επίσης, X συμπαγής $\underset{p \text{ συνεχής}}{\Longrightarrow}$ $\underset{= p(X)}{X/G}$ συμπαγής.

$\left[U \text{ αν.} \subseteq X \Rightarrow p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} \underbrace{g \cdot U}_{\text{ανοικτ.}} \text{ αν.} \subseteq X/G \right]$

Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι κάθε σημείο $[x]_{\sim_G} \in X/G$ διαθέτει μια περιοχή ομοιομορφική τού $\mathbb{R}^n$ (πρβλ. 1.11.2 (i)).

Έστω $G = \{g_0 = 1_G, g_1, g_2, \ldots, g_m\}$. Επειδή η G δρα ελευθέρως επί τού X, $g_j x = x$, για κάποιο $j \in \{0, 1, .., m\}$, σημαίνει ότι $j = 0$. Ως εκ τούτου, μέσω επαναλαμβανόμενης εφαρμογής της ιδιότητας Hausdorff είναι δυνατή η κατασκευή ανοικτών περιοχών $U_0, U_1, \ldots, U_m$ των $x = g_0 x, g_1 x, \ldots, g_m x$, αντιστοίχως, με $U_0 \cap U_j = \phi$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Τότε η τομή $U := \bigcap_{j=0}^{m} g_j^{-1} U_j$ είναι προφανώς μια ανοικτή περιοχή τού x.

Εξ υποθέσεως, το x διαθέτει κάποια ανοικτή περιοχή W_x εντός τού X με $W_x \approx \mathbb{R}^n$. Δοθέντος ενός ομοιομορφισμού $h : W_x \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^n$, το $W_x \cap U$ είναι ανοικτό υποσύνολο τού W_x, οπότε το $h(W_x \cap U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο τού $\mathbb{R}^n$. Επειδή $h(x) \in h(W_x \cap U)$ $\exists \varepsilon > 0$ με $S(h(x); \varepsilon) \subseteq h(W_x \cap U)$. Το $V_x := h^{-1}(S(h(x); \varepsilon)) \approx S(h(x); \varepsilon) \approx \mathbb{R}^n$ είναι μια ανοικτή περιοχή τού x εντός τού U.

Εν συνεχεία θα δείξουμε ότι η $p|_{V_x} : V_x \to p(V_x)$ είναι αμφιρριπτική. Προς τούτο αρκεί να δείξουμε ότι είναι ενριπτική. Πράγματι· εάν $(p|_{V_x})(x_1) = (p|_{V_x})(x_2)$, τότε $x_1 = g_j x_2$, για κάποιο $g_j \in G$. Επειδή $x_1, x_2 \in V_x \Rightarrow x_1, x_2 \in U$

$$\Longrightarrow x_1 \in g_0^{-1} U_0 = U_0 \text{ και } x_2 \in g_j^{-1} U_j \Longrightarrow x_1 = g_j x_j \in U_0 \cap U_j$$

$$\Longrightarrow U_0 \cap U_j \neq \phi \Rightarrow j = 0 \text{ και } g_j = g_0 = 1_G \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Επειδή η p είναι ανοικτή $\Rightarrow p|_{V_x}$ ανοικτή και συνεχής $\underset{1.5.2}{\Rightarrow}$ η $p|_{V_x}$ είναι ομοιομορφισμός $\Longrightarrow$ $\underbrace{p(V_x)}_{\text{ανοικτή περιοχή του } [x]_{\sim_G}} \approx V_x \approx \mathbb{R}^n$. □

§ 1.14 Χώροι φακού

Ταυτίζοντας την $\mathbb{S}^3$ με το σύνολο $\{(z_0,z_1)\in\mathbb{C}^2 \mid |z_0|^2+|z_1|^2=1\}$ και θεωρώντας δυο ακεραίους p,q με $0\leq q<p$, $\mu\kappa\delta(p,q)=1$, είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι η $\mathbb{Z}_p=\{[0]_p,[1]_p,\dots,[p-1]_p\}$ δρα επί της $\mathbb{S}^3$ ως εξής:

$$\mathbb{Z}_p\times\mathbb{S}^3\ni([k]_p,(z_0,z_1))\longmapsto(e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}k}{p}}\cdot z_0,\ e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}qk}{p}}\cdot z_1)\in\mathbb{S}^3.$$

Η $\mathbb{Z}_p$ δρα (κατ' αυτόν τον τρόπο) ελευθέρως επί της $\mathbb{S}^3$.
Πράγματι· εάν $[k]_p\cdot(z_0,z_1)=(z_0,z_1)$, τότε

$$e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}k}{p}}z_0=z_0 \quad \text{και} \quad e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}qk}{p}}\cdot z_1=z_1.$$

Από την πρώτη εξίσωση έπεται ότι είτε $e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}k}{p}}=1$ είτε $z_0=0$.
Στην πρώτη περίπτωση, $\frac{k}{p}\in\mathbb{Z}\Rightarrow p\mid k\Rightarrow k=0$.
Στη δεύτερη περίπτωση,

$$z_0=0\Rightarrow|z_1|=1\Rightarrow z_1\neq0\Rightarrow e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}kq}{p}}=1\Rightarrow\frac{kq}{p}\in\mathbb{Z}$$

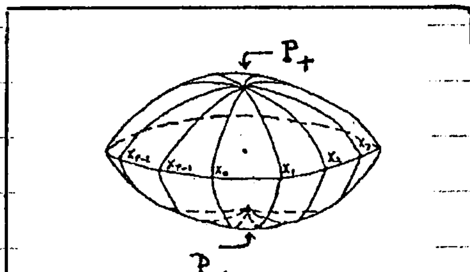
$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}p\mid kq\\ \mu\kappa\delta(p,q)=1\end{array}\right\}\Rightarrow p\mid k\Rightarrow k=0.$$

<u>1.14.1. Ορισμός.</u> Ο τροχιακός χώρος $\boxed{L(p,q):=\mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_p}$

καλείται <u>χώρος φακού</u> (<u>με παραμέτρους τα p και q</u>). Κατά την πρόταση 1.13.8 ο $L(p,q)$ είναι ένα 3-διάστατο συμπαγές τοπολογικό πολύπτυγμα (χωρίς σύνορο).

Ο κλασικός "γεωμετρικός" ορισμός του χώρου του φακού είναι κάπως διαφορετικός. Γι' αυτόν τον λόγο, η παρούσα ενότητα θα περιλάβει την απόδειξη της ισοδυναμίας των δύο ορισμών.

Ας θεωρήσουμε (εντός τού $\mathbb{R}^3$) το στερεό (εν είδει "φακού") τού σχήματος 1 ($\approx \mathbb{D}^3$), το σύνορο τού οποίου αποτελείται από δύο συμμετρικά πώματα συναντώμενα σε ένα κυκλικό στεφάνι.



σχ. 1

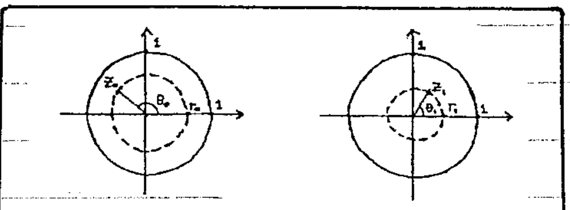
Συμβολίζουμε τον βόρειο (αντ., νότιο) πόλο αυτού ως P_+ (αντ., P_-) και διαμερίζουμε το κυκλικό στεφάνι σε p ίσα τόξα $\widehat{x_0x_1}, \widehat{x_1x_2}, \ldots, \widehat{x_{p-1}x_0}$. Κατόπιν τούτου συνδέουμε καθένα x_j, $0\le j\le p-1$, με τα P_+ και P_- (μέσω μεγάκυκλων) χωρίζοντας καθένα των δύο πωμάτων σε p τριγωνικούς τομείς.

1.14.2. Ορισμός. Ορίζουμε τον τοπολογικό χώρο $\boxed{\tilde{L}(p,q)}$ ως τον ταυτισμικό χώρο τον δημιουργούμενο από το στερεό τού σχήματος 1 κατόπιν ταυτίσεως των τριγώνων με κορυφές τις x_j, x_{j+1}, P_+ και x_{j+q}, x_{j+q+1}, P_-, $\forall j\in\{0,1,\ldots,p-1\}$, και μάλιστα έτσι, ώστε το x_j να ταυτίζεται με το x_{j+q}, το x_{j+1} με το x_{j+q+1}, και το P_+ με το P_-. (Οι υποδείκτες $j+1$, $j+q$, $j+q+1$ οφείλουν να διαβάζονται "mod p".)

1.14.3. Θεώρημα. $L(p,q) \approx \tilde{L}(p,q)$.

Για την απόδειξη τού Θεωρήματος 1.14.3 θα προτάξουμε ορισμένες προπαρασκευαστικές παρατηρήσεις:

- Επειδή ταυτίσαμε την $\mathbb{S}^3$ με το $\{(z_0,z_1)\in\mathbb{C}^2 \mid |z_0|^2+|z_1|^2=1\}$, γράφοντας ένα τυχόν $(z_0,z_1)\in\mathbb{S}^3$ μέσω των πολικών συντεταγμένων $z_0=r_0e^{\sqrt{-1}\theta_0}$, $z_1=r_1e^{\sqrt{-1}\theta_1}$, έχουμε $r_0^2+r_1^2=1$. Μάλιστα, εάν παγιώσαμε το r_1, παγιώνεται και το $r_0 = (1-r_1^2)^{\frac{1}{2}}$. Επομένως, σε κάθε $(z_0,z_1)\in \mathbb{S}^3$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μια τριάδα (r_1,θ_0,θ_1), όπου $0\leq r_1\leq 1$ και $0\leq \theta_0,\theta_1 < 2\pi$, βλ. σχ. 2.



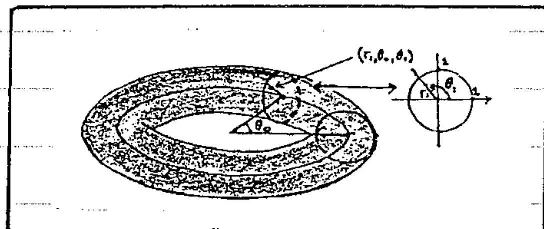
σχ. 2

Για $r_1\in\{0,1\}$, η αντιστοιχία $(z_0,z_1)\longleftrightarrow(r_1,\theta_0,\theta_1)$ παύει να είναι αμφιρριπτική:

(i) Εάν $r_1=0$, τότε $r_0=1$ και το $(z_0,z_1)=(e^{\sqrt{-1}\theta_0},0)$ είναι ανεξάρτητο τού θ_1. Επομένως, για τη θέσπιση μιας αμφιρρίψεως, χρειαζόμαστε την επιπρόσθετη συνθήκη: $(0,\theta_0,\theta_1)=(0,\theta_0,\theta_1')$ για όλα τα $\theta_1,\theta_1'\in[0,2\pi)$.

(ii) Εάν $r_1=1$, τότε $r_0=0$ και το $(z_0,z_1)=(0,e^{\sqrt{-1}\theta_1})$ είναι ανεξάρτητο τού θ_0. Επομένως, για τη θέσπιση μιας αμφιρρίψεως, χρειαζόμαστε την επιπρόσθετη συνθήκη: $(1,\theta_0,\theta_1)=(1,\theta_0',\theta_1)$ για όλα τα $\theta_0,\theta_0'\in[0,2\pi)$.

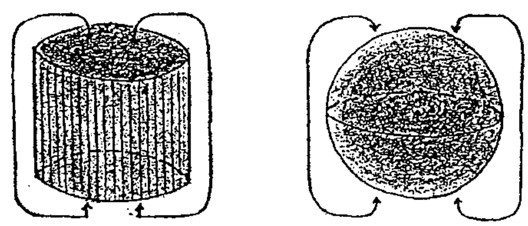
- Τα ανωτέρω μάς οδηγούν στη θεώρηση τού στερεού τόρου $\mathbb{T}(\approx \mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1)$ με "μεσημβρινή" ακτίνα ίση με 1, βλ. σχ. 3.



σχ. 3

Επ' αυτού η επιπρόσθετη συνθήκη (i) πληρούται αυτομάτως, καθότι τα σημεία επί τού "κεντρικού κύκλου" του (όπου $r_1=0$) είναι ανεξάρτητα τού θ_1. Προκειμένου να διασφαλίσουμε την επαλήθευση και τής συνθήκης (ii) είμαστε υποχρεωμένοι να ταυτίσουμε καταλλήλως σημεία με $r_1=1$, ήτοι ευρισκόμενα επί τού (συνήθους) τόρου $\partial\mathbb{T}\approx\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$. Εξετάζοντας προσεκτικά την (ii), διαπιστώνουμε ότι για κάθε $c\in[0,2\pi)$ θα πρέπει να ταυτίσουμε μεταξύ τους όλα τα σημεία τού $\{(r_1,\theta_0,\theta_1)\mid \theta_1=c, r_1=1\}$ (που απαρτίζουν έναν οριζόντιο κύκλο επί τού $\partial\mathbb{T}$).

Επομένως, κάθε τέτοιος "οριζόντιος κύκλος" καθίσταται (κατόπιν ταυτίσεως) ένα και μόνον σημείο, ενώ το σύνορο $\partial\mathbb{T}$ καθίσταται ένας και μόνον διαμεσημβρινός κύκλος τού $\mathbb{T}$. Εάν κανείς κόψει τον $\mathbb{T}$ κατά μήκος ενός (καταλλήλως επιλεγμένου) ημιεπιπέδου, τότε λαμβάνει τον στερεό κύλινδρο τού σχήματος 4 με ταυτιζόμενες απολήξεις (και καθένα των κατακορύφων ευθυγράμμων τμημάτων τού συνόρου του καθιστάμενο ένα και μόνον σημείο). Ο προκύπτων χώρος είναι ομοιομορφικός τής μπάλας $\mathbb{D}^3$ στην οποία έχουμε ταυτίσει το άνω και κάτω ημισφαίριο (μέσω ορθογωνίου προβολής, πρβλ. 1.5.3.(iv)), βλ. σχήμα 5, ήτοι ενός χώρος $\approx \mathbb{S}^3$.



σχ. 4 σχ. 5

- Η προηγηθείσα ανάλυση χρησιμεύει στην "οπτικοποίηση" των τροχιών τής δράσεως τής $\mathbb{Z}_p$ επί τής $\mathbb{S}^3$.

- Κατ' αρχάς είναι αναγκαίο να προσδιορισθούν οι κλάσεις ισοδυναμίας τού $\mathbb{T}$ (και κατ' επέκταση τής $\mathbb{S}^3$) υπό τη δράση τής $\mathbb{Z}_p$:

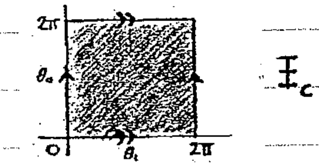
$$\left([k]_p,(z_0,z_1)\right) \longmapsto \left(e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}k}{p}}z_0, e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}kq}{p}}z_1\right) = \left(r_0 e^{\sqrt{-1}(\theta_0+\frac{2\pi k}{p})}, r_1^{\sqrt{-1}(\theta_1+\frac{2\pi kq}{p})}\right).$$

Στη γλώσσα των εισηχθεισών συντεταγμένων τού στερεού τόρου αυτή η δράση έχει ως εξής:

$$\left([k]_p,(r_1,\theta_0,\theta_1)\right) \longmapsto \left(r_1, \theta_0+\frac{2\pi k}{p}, \theta_1+\frac{2\pi kq}{p}\right)$$

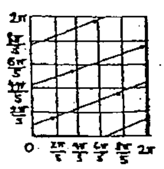
Σημειωτέον ότι η τιμή τού r_1 δεν επηρεάζεται από αυτήν τη δράση. Ως εκ τούτου, αρκεί να εστιάσουμε την προσοχή μας σε καθέναν των τόρων με $r_1 = c$, $c\in[0,1]$, τους οποίους θα συμβολίσουμε ως $\mathbb{T}_c$. Προφανώς, $\mathbb{T} = \bigcup_{c\in[0,1]} \mathbb{T}_c$.

• <u>Περίπτωση πρώτη: $c \in (0,1)$.</u> Ο Ξ_c μπορεί να εκληφθεί ως ένα τετράγωνο με ταυτισμένες ακμές όπως στο σχήμα 6. Ο οριζόντιος άξονας είναι αυτός που παραμετρά τα θ_1 και ο κατακόρυφος αυτός που προσμετρά τα θ_0 (βλ. σχήμα 6).

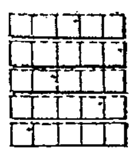


σχ. 6

Η δράση ενός $[k]_p \in \mathbb{Z}_p$ επί ενός σημείου (θ_0, θ_1) δίδει το σημείο $\left(\theta_0 + \frac{2\pi k}{p}, \theta_1 + \frac{2\pi k q}{p}\right)$, οπότε οι δράσεις όλων των στοιχείων της $\mathbb{Z}_p$ είναι μεταφορές κατά μήκος ευθειών κλίσεως ίσης με $\frac{2\pi k}{p} / \frac{2\pi k q}{p} = \frac{1}{q}$. Θεωρώντας, επί παραδείγματι, την περίπτωση κατά την οποία $p=5$ και $q=3$, διαπιστώνουμε ότι για κάθε ευθεία κλίσεως $\frac{1}{3}$ που διέρχεται από κάποιο σημείο του Ξ_c, η αντίστοιχη κλάση ισοδυναμίας του εν λόγω σημείου περιέχει $p=5$ σημεία (βλ. σχ. 7).



σχ. 7

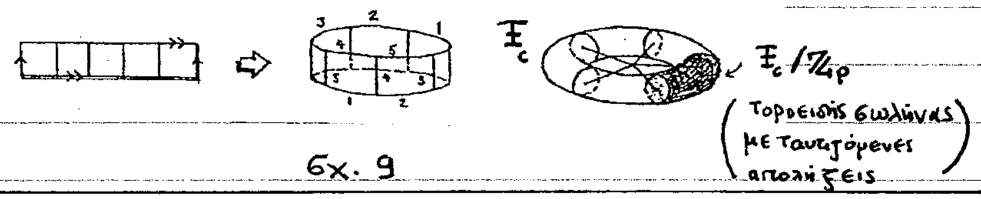


σχ. 8

Μάλιστα, η κλάση ισοδυναμίας περιέχει ακριβώς ένα σημείο σε καθεμιά των οριζοντίων λωρίδων της υποδιαιρέσεως του σχήματος 8. Το ανάλογο αποτέλεσμα παραμένει εν ισχύ ακόμη και για οιαδήποτε p, q με $\mu\kappa\delta(p,q)=1$: Κάθε οριζόντια λωρίδα πλάτους $2\pi/p$ περιέχει ακριβώς ένα σημείο από κάθε σχέση ισοδυναμίας του $\Xi_c / \mathbb{Z}_p$. Κατά συνέπεια, μπορούμε να γράψουμε τον $\Xi_c / \mathbb{Z}_p$ ως εξής:

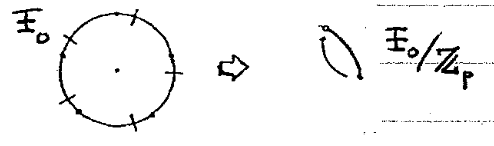
$$\Xi_c/\mathbb{Z}_p = \{(r_1,\theta_0,\theta_1) \mid r_1=c,\ 0\le\theta_0<\tfrac{2\pi}{p},\ 0\le\theta_1<2\pi\}.$$

Πρόκειται για ένα είδος σωλήνα με τις απολήξεις του ταυτιζόμενες ύστερα από συστροφή κατά $\frac{2\pi q}{p}$ (βλ. σχήμα 9).



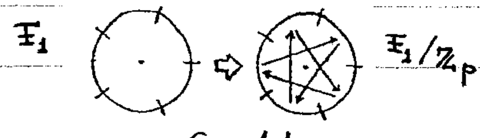
σχ. 9

• Περίπτωση δεύτερη: $c=0$. Ο Ξ_0 είναι ο κύκλος με $r_1=0$. Η δράση ενός $[k]_p\in\mathbb{Z}_p$ επί τού Ξ_0 στέλνει το θ_0 να απεικονισθεί στο $\theta_0+\frac{2\pi k}{p}$, εισάγοντας μια στροφή κατά $2\pi k/p$, οπότε κάθε κλάση ισοδυναμίας περιέχει ακριβώς ένα σημείο σε κάθε ακτινικό τόξο μήκους $2\pi/p$. Ιδιαιτέρως, το τόξο $\theta_0\in[0,2\pi/p)$ έχει μόνον ένα σημείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας και ο $\Xi_0/\mathbb{Z}_p$ μπορεί να εκληφθεί ως ένα τόξο με ταυτιζόμενα ληκτικά σημεία (βλ. σχ. 10).



σχ. 10

• Περίπτωση τρίτη: $c=1$. Ο Ξ_1 (σύμφωνα με όσα προείπαμε στη σελίδα 52) είναι το σύνορο $\partial\Xi$ με καθέναν των οριζόντιων κύκλων τού Ξ ταυτισμένον με ένα σημείο. Η δράση ενός $[k]_p\in\mathbb{Z}_p$ επί ενός (τέτοιου) σημείου τού Ξ_1 στέλνει το θ_1 να απεικονισθεί στο $\theta_1+\frac{2\pi k q}{p}$, εισάγοντας μια στροφή κατά $2\pi kq/p$. Επειδή μκδ$(p,q)=1$, διαμερίζοντας τον $\Xi_1\approx \mathbb{S}^1$ σε p ίσα τόξα: $0\le\theta_1<\frac{2\pi}{p},\dots,\frac{2(p-1)\pi}{p}\le\theta_1<2\pi$, διαπιστώνουμε ότι όλα αυτά ταυτίζονται μέσω τής $\mathbb{Z}_p$-δράσεως. (βλ. σχ. 11.)

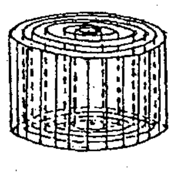


σχ. 11

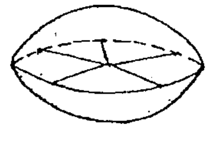
Απόδειξη τού θεωρήματος 1.14.3. Επειδή τα σημεία καθενός $\mathbb{T}_c$, $0 \leq c \leq 1$, στέλνονται να απεικονισθούν μέσω τής $\mathbb{Z}_p$-δράσεως σε σημεία τού $\mathbb{T}_c$, έχουμε

$$L(p,q) := \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_p \approx \bigcup_{c\in[0,1]} \left(\mathbb{T}_c/\mathbb{Z}_p\right).$$

Αυτή είναι μια συλλογή εγκιβωτισμένων σωλήνων με ακτίνες $r_i \in [0,1)$, οι απολήξεις των οποίων είναι ταυτιζόμενες ύστερα από μια συστροφή κατά $\frac{2\pi q}{p}$, και σύνορό τους απαρτιζόμενο από ευθύγραμμα τμήματα, καθένα των οποίων ταυτίζεται με ένα και μόνον σημείο (βλ. σχ. 12 και 13).



σχ. 12



σχ. 13

Εκτελώντας αυτές τις ταυτίσεις των ευθυγράμμων τμημάτων λαμβάνουμε ένα στερεό (εν είδει φακού, όπως στο σχ. 13), το κυκλικό στεφάνι τού οποίου υποδιαιρείται σε p ίσα τόξα. Τα άνω και κάτω τμήματα (τού φακού) αντιστοιχούν στις απολήξεις τού στερεού κυλίνδρου τού σχ. 12 και είναι, ως εκ τούτου, ταυτιζόμενα ύστερα από μια συστροφή κατά $2\pi q/p$. Αυτό σημαίνει ότι $\tilde{L}(p,q) \approx \bigcup_{c\in[0,1]} (\mathbb{T}_c/\mathbb{Z}_p)$. □

1.14.4. Θεώρημα: Δυο χώροι φακού $L(p,q)$ και $L(p',q')$ είναι μεταξύ τους ομοιομορφικοί εάν και μόνον εάν $p=p'$ και είτε $q \equiv q' \pmod{p}$ είτε $qq' \equiv \pm 1 \pmod{p}$.

Απόδειξη: Μια απόδειξη για το ότι η συνθήκη είναι ικανή σκιαγραφείται στο βιβλίο τού J.R. Munkres: *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley Pub. Co., 1984, σελ. 242. Η απόδειξη τού ότι αυτή είναι αναγκαία, είναι πιο δύσκολη και οφείλεται στους μαθηματικούς E.E. Moise και E.J. Brody. Βλ. E.J. Brody: *The topological classification of lens spaces*, Annals of Math., Vol. 71, 1960, pp. 163-168. □

Μια γενίκευση του ορισμού 1.14.1 είναι η ακόλουθη:

1.14.5. Ορισμός. Εκλαμβάνοντας την $\mathbb{S}^{2n-1}$ ως το σύνολο $\{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n \mid \sum_{j=1}^{n}|z_j|^2=1\}$ $(n\geq 2)$ και θεωρώντας φυσικούς αριθμούς $q_1,q_2,\dots,q_n,p$ με $1\leq q_1,\dots,q_n<p$, $\text{μκδ}(q_j,p)=1$, $\forall j\in\{1,2,\dots,n\}$, η $\mathbb{Z}_p=\{[0]_p,[1]_p,\dots,[p-1]_p\}$ δρα επί της $\mathbb{S}^{2n-1}$ ως εξής:

$$\mathbb{Z}_p\times\mathbb{S}^{2n-1}\ni([k]_p,(z_1,\dots,z_n))\longmapsto\left(e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}\,q_1k}{p}}z_1,\dots,e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}\,q_nk}{p}}z_n\right)\in\mathbb{S}^{2n-1}.$$

Ο τροχιακός χώρος

$$\boxed{L_{2n-1}(p;q_1,\dots,q_n):=\mathbb{S}^{2n-1}/\mathbb{Z}_p}$$

καλείται γενικευμένος χώρος φακού (με τα $p,q_1,\dots,q_n$ ως παραμέτρους).

1.14.6. Σημείωση: (i) Κατά την πρόταση 1.13.8, ο χώρος $L_{2n-1}(p;q_1,q_2,\dots,q_n)$ είναι ένα $(2n-1)$-διάστατο, συμπαγές τοπολογικό πολύπτυγμα (χωρίς σύνορο), καθότι η $\mathbb{Z}_p$ δρα ελευθέρως επί της $\mathbb{S}^{2n-1}$.

(ii) $L_3(p;1,q)=L(p,q)$ και

$$L_{2n-1}(2;\underbrace{1,\dots,1}_{n\ \text{φορές}})\approx\mathbb{P}^{2n-1}_{\mathbb{R}}\quad(\text{πρβλ. } 1.13.5\ (v)).$$

§ 1.15 Ασθενής τοπολογία

Κατά την κατασκευή τοπολογικών χώρων πολλές φορές τίθεται το εξής ερώτημα: Εάν δοθεί ένα μη κενό σύνολο X που ισούται με την ένωση υποσυνόλων $A_j\subseteq X$, καθένα των οποίων φέρει τη δομή ενός τοπολογικού χώρου, πώς είναι δυνατόν να ορισθεί "κατά τρόπο φυσικό" μια τοπολογία επί του X;

1.15.1. Ορισμός και Πρόταση: Έστω X ένα μη κενό σύνολο και έστω $(A_j)_{j\in J}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του, ούτως ώστε να ισχύουν τα εξής:

(i) Το A_j φέρει τη δομή ενός τοπολογικού χώρου, $\forall j \in J$.
(ii) Για $i,j \in J$ επάγουν τα A_i και A_j την ίδια τοπολογία επί της τομής $A_i \cap A_j$ και το $A_i \cap A_j$ αποτελεί έναν κλειστό υπόχωρο τόσον τού A_i όσον και τού A_j.
(iii) $X = \bigcup_{j \in J} A_j$.

Τότε το X εφοδιάζεται με μια τοπολογία ως ακολούθως:
Ένα υποσύνολο $A \subseteq X$ ορίζεται να είναι κλειστό εντός τού X $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ το $A \cap A_j$ είναι κλειστό εντός τού A_j, $\forall j \in J$.

Αυτή η τοπολογία ονομάζεται <u>ασθενής τοπολογία επί τού X ως προς την $(A_j)_{j \in J}$</u> και έχει τις εξής ιδιότητες:

(a) Η σχετική τοπολογία τού A_j εντός τού X συμπίπτει με τη δοθείσα τοπολογία επί τού A_j και (ως προς αυτήν) ο A_j αποτελεί κλειστό υπόχωρο τού X, $\forall j \in J$.
(b) Έστω $\sum_{j \in J} A_j$ το τοπολογικό άθροισμα των A_j, $j \in J$, και έστω $p : \sum_{j \in J} A_j \to X$ η απεικόνιση, ο περιορισμός τής οποίας συμπίπτει με με την ένθεση $A_j \hookrightarrow X$, $\forall j \in J$. Τότε η p είναι μια ταυτισμική απεικόνιση. (Ως εκ τούτου, η ασθενής τοπολογία είναι μια ειδική περίπτωση πηλικοτοπολογίας.)
(c) Ένα σύνολο $U \subseteq X$ είναι ανοικτό $\Leftrightarrow$ $U \cap A_j$ ανοικτό $\subseteq A_j$, $\forall j \in J$.
(d) Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι συνεχής $\Leftrightarrow$ $f|_{A_j}$ συνεχής, $\forall j \in J$.

<u>1.15.2. Σημείωση.</u> Ένας τοπολογικός χώρος εφοδιασμένος με την ασθενή τοπολογία δεν είναι κατ' ανάγκην $2^{ος}$ αριθμήσιμος.

<u>1.15.3. Πρόταση:</u> Έστω $(A_j)_{j \in J}$ ένα κλειστό, τοπικά πεπερασμένο κάλυμμα ενός τοπολογικού χώρου X ("Τοπικά πεπερασμένο" σημαίνει ότι κάθε σημείο τού X διαθέτει μια περιοχή, η οποία έχει μη κενή τομή με μόνον πεπερασμένου πλήθους A_j.)

Τότε η τοπολογία τού X είναι κατ' ανάγκην η ασθενής τοπολογία ως προς την $(A_j)_{j\in J}$.

1.15.4. Παράδειγμα. Εάν ο χώρος $X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ είναι η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών υποσυνόλων του, τότε ο X φέρει τη δομή τής ασθενούς τοπολογίας ως προς το $\{A_1, \ldots, A_n\}$. Επομένως, μια απεικόνιση $f: X \to Y$ είναι συνεχής $\Leftrightarrow$ $f|_{A_j}$ είναι συνεχής, $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$.

1.15.5. Ορισμός. Έστω $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \cdots$ μια αύξουσα ακολουθία τοπολογικών χώρων, όπου ο A_j είναι κλειστός υπόχωρος τού A_{j+1}, για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Τότε η ένωση $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, εφοδιασμένη με την ασθενή τοπολογία ως προς την οικογένεια $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, αποτελεί έναν τοπολογικό χώρο που ονομάζεται το όριο των $A_n, n \in \mathbb{N}$, και συμβολίζεται ως $\lim_{n\to\infty} A_n$. Σημειωτέον ότι στην ακολουθία

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \cdots \subseteq A = \lim_{n\to\infty} A_n$$

κάθε A_n είναι κλειστός υπόχωρος τού A.

1.15.6. Παραδείγματα. (i) Ταυτίζοντας τον $\mathbb{R}^n$ με το σύνολο $\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$ μπορούμε να δομήσουμε μια αύξουσα ακολουθία $\mathbb{R}^0 \subsetneqq \mathbb{R}^1 \subsetneqq \mathbb{R}^2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathbb{R}^n \subsetneqq \mathbb{R}^{n+1} \subsetneqq \cdots$ και να ορίσουμε τον $\boxed{\mathbb{R}^\infty := \lim_{n\to\infty} \mathbb{R}^n}$. Τα στοιχεία τού $\mathbb{R}^\infty$ είναι ακολουθίες πραγματικών αριθμών $(x_1, x_2, \ldots)$, οι οποίες, από κάποια θέση και πέρα, είναι ταυτοτικά μηδενικές. Έστω $x = (x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots) \in \mathbb{R}^k \subsetneqq \mathbb{R}^\infty$ ένα παγιωμένο στοιχείο και έστω U μια ανοικτή περιοχή τού x εντός τού $\mathbb{R}^\infty$. Για $n \geq k$ η τομή $U \cap \mathbb{R}^n$ αποτελεί μια περιοχή τού x εντός τού $\mathbb{R}^n$. Επομένως $\exists \varepsilon_n > 0 : S_n(x, \varepsilon_n) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < \varepsilon_n\} \subseteq U \cap \mathbb{R}^n$ και $V := S_k(x, \varepsilon_k) \cup S_{k+1}(x, \varepsilon_{k+1}) \cup \cdots \cup \cdots \subseteq U$.

Και αντιστρόφως, αυτό το σύνολο V είναι για οποιαδήποτε ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \ldots$ μια περιοχή του x, ενώ το σύνολο όλων αυτών των V αποτελεί μια βάση περιοχών του x. Εξ αυτού έπεται ότι το x δεν διαθέτει καμία αριθμήσιμη βάση περιοχών (και, ως εκ τούτου, ο $\mathbb{R}^\infty$ δεν είναι μετρικοποιήσιμος). Μάλιστα, επειδή το $\overline{V}$ δεν είναι συμπαγές, ο $\mathbb{R}^\infty$ δεν είναι ούτε τοπικώς συμπαγής. (Προσοχή! Επειδή η ένωση $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{R}^n$ μπορεί να εφοδιασθεί με μετρική επαγόμενη από τη στάθμη $\|x\| = \left(\sum_n x_n^2\right)^{1/2}$, από τα ανωτέρω συμπεραίνουμε ότι η ασθενής τοπολογία είναι "λεπτότερη" αυτής της μετρικής τοπολογίας!)

(ii) Από την ακολουθία σφαιρών $\mathbb{S}^0 \subsetneq \mathbb{S}^1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathbb{S}^n \subsetneq \mathbb{S}^{n+1}$ (ισημερινός της $\mathbb{S}^{n+1}$) κατασκευάζεται η $\boxed{\mathbb{S}^\infty := \lim_{n\to\infty} \mathbb{S}^n}$, η οποία αποτελεί τον υπόχωρο όλων των $x \in \mathbb{R}^\infty$ με $\sum_n x_n^2 = 1$.

(iii) Για $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, από την ακολουθία προβολικών χώρων

$$\mathbb{P}^0_{\mathbb{K}} \subsetneq \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \subsetneq \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{K}} \subsetneq \cdots$$

(βλ. 1.12.3 (ii), σελ. 43) κατασκευάζεται ο <u>απειροδιάστατος προβολικός χώρος</u>

$$\boxed{\mathbb{P}^\infty_{\mathbb{K}} := \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}}$$

(Όταν $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, τότε ο $\mathbb{P}^\infty_{\mathbb{R}}$ προκύπτει από τον $\mathbb{S}^\infty$ κατόπιν ταυτίσεως καθενός $x \in \mathbb{S}^\infty$ με το "αντιποδικό" του $-x \in \mathbb{S}^\infty$.)

(iv) Κατ' αναλογίαν ορίζεται <u>ο απειροδιάστατος χώρος φακού</u>

$$\boxed{L_\infty(p; q_1, q_2, \ldots) = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_{2n-1}(p; q_1, \ldots, q_n)}$$

ως το όριο των $(L_{2n-1}(p; q_1, \ldots, q_n))_{n \in \mathbb{N}}$ (που είναι $\cong \mathbb{S}^\infty/\mathbb{Z}_p$), καθώς και η <u>απειροδιάστατη ορθογώνια ομάδα</u> $O^\infty := \lim_{n\to\infty} O(n, \mathbb{R})$ και οι απειροδιάστατες τοπολογικές ομάδες:

$$SO^\infty := \lim_{n\to\infty} SO(n, \mathbb{R}), \quad U^\infty := \lim_{n\to\infty} U(n, \mathbb{C}), \quad SU^\infty := \lim_{n\to\infty} SU(n, \mathbb{C}).$$