Συσχετισμός θεμελιώδους ομάδας και πρώτης ομάδας ομολογίας

Εργασία στο πλαίσιο τού μαθήματος
"Αλγεβρική Τοπολογία - Ομολογία" (με κωδ. αρ. Γ 21)
Χειμερινό Εξάμηνο 2007 - 2008

Μιχαήλ Γκίκας

Περίληψη

Σκοπός αυτής τής εργασίας είναι η παρουσίαση τής λεπτομερούς αποδείξεως ενός θεωρήματος τού Hurewicz, το οποίο συνδέει άμεσα τη θεμελιώδη ομάδα ενός δρομοσυνεκτικού εστιγμένου τοπολογικού χώρου (X, x_0) με την πρώτη ιδιάζουσα ομάδα ομολογίας $H_1^{sing}(X; \mathbb{Z})$.

Σύμβαση : Το σύμβολο X θα υποδηλοί τυχόντα τοπολογικό χώρο και το $x_0 \in X$ ένα παγιωμένο σημείο αναφοράς. Επειδή θα εργασθούμε με την ιδιάζουσα ομολογία με συντελεστές ειλημμένους μόνον από τον δακτύλιο των ακεραίων, θα συμβολίζουμε (για λόγους συντομίας) την αβελιανή (προσθετική) ομάδα $H_1^{sing}(X; \mathbb{Z})$ απλώς ως $H_1^{sing}(X)$. Κατ' αναλογίαν, θα χρησιμοποιούμε τα $S_1(X)$, $Z_1^{sing}(X)$ και $B_1^{sing}(X)$ για τον συμβολισμό των (αβελιανών) ομάδων των ιδιαζόντων 1-αλυσίδων, 1-κυκλημάτων και 1-συνόρων τού X, αντιστοίχως. [Παραπομπές σε εδάφια και σελίδες αφορούν στις διανεμηθείσες χειρόγραφες σημειώσεις τού διδάσκοντος.]

Λήμμα 1 *Έστω* $\eta : \Delta_1 \xrightarrow{\approx} I(:= [0,1])$ *ο ομοιομορφισμός με τύπο*

$$\eta\big((1-t)e_0^1 + te_1^1\big) := t, \quad \forall\, t \in I.$$

Τότε υπάρχει καλώς ορισμένη απεικόνιση (η λεγόμενη "απεικόνιση Hurewicz")

$$\phi : \pi_1(X, x_0) \to H_1^{sing}(X)$$

με τύπο $\phi\big([\alpha]\big) := \alpha \circ \eta + B_1^{sing}(X)$ *, όπου* $[\alpha]$ *είναι η κλάση ισοδυναμίας ενός δρόμου* $\alpha : I \to X$ *με αρχή και πέρας του το* $x_0 \in X$ *(βλ. 1.19.8, σελ. 84).*

Απόδειξη : Κατ' αρχάς, η απεικόνιση $\alpha \circ \eta : \Delta_1 \to X$ είναι προφανώς συνεχής και άρα αποτελεί ένα ιδιάζον 1-μονόπλοκο τού X. Συνεπώς, $\alpha \circ \eta \in S_1(X)$. Επιπροσθέτως, το ότι ο α είναι εξ ορισμού κλειστός δρόμος έχει ως συνέπεια ότι $\alpha \circ \eta \in Z_1^{sing}(X)$. Πράγματι · επειδή

$$\begin{aligned} d_1^{sing}(\alpha \circ \eta) &= \sum_{i=0}^{1} (-1)^i \Big((\alpha \circ \eta) \circ \delta_1^i\Big) = (\alpha \circ \eta) \circ \delta_1^0 - (\alpha \circ \eta) \circ \delta_1^1 \\ &= (\alpha \circ \eta)(e_1^1) - (\alpha \circ \eta)(e_0^1) = a(1) - a(0) = 0 \end{aligned}$$

έχουμε $\alpha \circ \eta + B_1^{sing}(X) \in H_1^{sing}(X)$.
Έστω τώρα $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$ με $[\alpha] = [\beta]$, δηλαδή $\alpha \sim \beta$ (βλ. 1.19.2, σελ. 83). Αρκεί να αποδειχθεί ότι

$$\alpha \circ \eta + B_1^{sing}(X) = \beta \circ \eta + B_1^{sing}(X).$$

Προς τούτο θεωρούμε τον δρόμο $\gamma : I \to \mathbb{S}^1$, με $\gamma(t) = e^{2\pi\iota t}$, για κάθε $t \in I$. Προφανώς, ο γ είναι κλειστός δρόμος εντός τού $\mathbb{S}^1$ και άρα ομοίως, $\gamma \circ \eta \in Z_1^{sing}(\mathbb{S}^1)$. Σύμφωνα με την πρόταση Α΄(i) (τού παραρτήματος) υπάρχουν συνεχείς απεικονίσεις $\alpha', \beta' : \mathbb{S}^1 \to X$, με

$$\alpha'(e^{2\pi\iota t}) = \alpha(t) \ \text{ και } \ \beta'(e^{2\pi\iota t}) = \beta(t),$$

δηλαδή τέτοιες ώστε τα ακόλουθα διαγράμματα να καθίστανται μεταθετικά:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^1 \arrow[dr, dotted, "\alpha'"] & \\ I \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{S}^1 \arrow[dr, dotted, "\beta'"] & \\ I \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & X \end{tikzcd}$$

Εν συνεχεία θεωρούμε τον ομομορφισμό

$$H_1^{sing}(\alpha') : H_1^{sing}(\mathbb{S}^1) \to H_1^{sing}(X)$$

τον επαγόμενο απο τον $\alpha' : \mathbb{S}^1 \to X$, με τύπο

$$H_1^{sing}(\alpha')\Big(\tau + B_1^{sing}(\mathbb{S}^1)\Big) := S_1(\alpha')(\tau) + B_1^{sing}(X),$$

όπου $\quad S_1(\alpha')(\tau) := \alpha' \circ \tau \quad$ για κάθε $\tau \in Z_1^{sing}(\mathbb{S}^1)$.
Καθώς $\alpha \sim \beta$, η πρόταση Α΄(ii) μας πληροφορεί ότι και $\alpha' \sim \beta'$. Συνεπώς, από το αξίωμα τού ομοτοπικώς αναλλοιώτου (βλ. 3.4.7, σελ. 180) έπεται ότι

$$H_1^{sing}(\alpha') = H_1^{sing}(\beta').$$

Ως εκ τούτου,

$$\begin{aligned} \alpha \circ \eta + B_1^{sing}(X) &= (\alpha' \circ \gamma) \circ \eta + B_1^{sing}(X) \\ &= \alpha' \circ (\gamma \circ \eta) + B_1^{sing}(X) \\ &= H_1^{sing}(\alpha')\Big(\gamma \circ \eta + B_1^{sing}(\mathbb{S}^1)\Big) \\ &= H_1^{sing}(\beta')\Big(\gamma \circ \eta + B_1^{sing}(\mathbb{S}^1)\Big) \\ &= \beta' \circ (\gamma \circ \eta) + B_1^{sing}(X) \\ &= (\beta' \circ \gamma) \circ \eta + B_1^{sing}(X) \\ &= \beta \circ \eta + B_1^{sing}(X). \end{aligned}$$

$\square$

Παρατήρηση 2 Για διευκόλυνσή μας μπορούμε εφεξής να θεωρούμε τους δρόμους $\alpha : I \to X$ ως ιδιάζοντα 1-μονόπλοκα $\alpha : \Delta_1 \to X$ (υπονοώντας τή σύνθεση $\alpha \circ \eta : \Delta_1 \overset{\approx}{\to} I \to X$). Επιπροσθέτως, βάσει τής ιδίας συλλογιστικής, μπορούμε να εκλαμβάνουμε τους κλειστούς δρόμους $\alpha : I \to X$ ως 1-κυκλήματα (διότι έχουμε $\alpha \circ \eta \in Z_1^{sing}(X)$). Συνεπώς, ύστερα από υιοθέτηση αυτών των πρακτικών συντομεύσεων, θέτουμε

$$\phi([\alpha]) := a + B_1^{sing}(X).$$

Πρόταση 3 *Η απεικόνιση Hurewicz $\phi : \pi_1(X, x_0) \to H_1^{sing}(X)$ είναι ομομορφισμός ομάδων.*

Απόδειξη : Έστω ότι οι $\alpha, \beta : \Delta_1 \to X$ είναι δυο κλειστοί δρόμοι εντός τού X με αρχή και πέρας το $x_0 \in X$. Οφείλουμε να δείξουμε ότι

$$\phi\big([\alpha] \cdot [\beta]\big) = \big(a + B_1^{sing}(X)\big) + \big(\beta + B_1^{sing}(X)\big).$$

Επειδή όμως $\phi\big([\alpha] \cdot [\beta]\big) = \phi\big([\alpha * \beta]\big) = (\alpha * \beta) + B_1^{sing}(X)$, αρκεί να κατασκευασθεί ιδιάζον 2-μονόπλοκο $\sigma : \Delta_2 \to X$, τέτοιο ώστε $d_2^{sing}(\sigma) = \alpha + \beta - (\alpha * \beta)$. Η κατασκευή γίνεται ως εξής :
Κατ' αρχάς ορίζουμε την απεικόνιση σ επί των εδρών (= πλευρών) $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2$ τού θεμελιακού 2-μονοπλόκου Δ_2 ως ακολούθως :

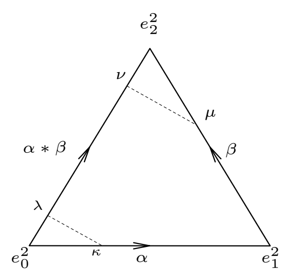
- 0-έδρα ϵ_0 : $\sigma(0, 1-t, t) := \beta(t)$,
- 1-έδρα ϵ_1 : $\sigma(1-t, 0, t) := (\alpha * \beta)(t)$,
- 2-έδρα ϵ_2 : $\sigma(1-t, t, 0) := \alpha(t)$.

Κατόπιν τούτου, ορίζουμε τη σ στο εσωτερικό τού Δ_2, ούτως ώστε να είναι σταθερή απεικόνιση επί των ευθυγράμμων τμημάτων με άκρα τα

$$\kappa := \kappa(t) := (1-t, t, 0) \quad \text{και} \quad \lambda := \lambda(t) := (\frac{2-t}{2}, 0, \frac{t}{2})$$

και σταθερή απεικόνιση επί των ευθυγράμμων τμημάτων με άκρα τα

$$\mu := \mu(t) := (0, 1-t, t) \quad \text{και} \quad \nu := \nu(t) := (\frac{1-t}{2}, 0, \frac{1+t}{2}).$$



Προφανώς, η κατασκευασθείσα $\sigma : \Delta_2 \to X$ είναι συνεχής με

$$\begin{aligned} d_2^{sing}(\sigma) &= \sum_{i=0}^{2} (-1)^i (\sigma \circ \delta_2^i) \\ &= \sigma(\epsilon_0) - \sigma(\epsilon_1) + \sigma(\epsilon_2) \\ &= \beta - (\alpha * \beta) + \alpha. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\phi\big([\alpha]\cdot[\beta]\big) &= \phi\big([\alpha*\beta]\big) = (\alpha*\beta)+B_1^{sing}(X)\\ &= (\alpha+\beta)+B_1^{sing}(X)\\ &= \big(\alpha+B_1^{sing}(X)\big)+\big(\beta+B_1^{sing}(X)\big).\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 4 (Hurewicz) *Εάν ο X είναι δρομοσυνεκτικός, τότε η απεικόνιση Hurewicz $\phi : \pi_1(X,x_0) \to H_1^{sing}(X)$ είναι επιμορφισμός ομάδων με πυρήνα του τον* $\ker(\phi) = \pi_1'(X,x_0)$, *ήτοι τη μεταθέτρια υποομάδα* [1] *τής $\pi_1(X,x_0)$.*

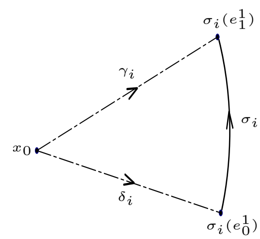
Απόδειξη :

► Γιά το ότι είναι *επιμορφισμός* : Έστω $\zeta \in Z_1^{sing}(X)$ με $\zeta = \sum_{i=1}^{k} r_i\sigma_i$, όπου $\sigma_i : \Delta_1 \to X$ και $r_i \in \mathbb{Z}$. Τότε

$$\begin{aligned} 0 &= d_1^{sing}(\zeta) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\ r_i\ (\sigma_i\circ\delta_1^j)\\ &= \sum_{i=1}^{k} r_i\Big(\sigma_i(e_1^1)-\sigma_i(e_0^1)\Big). \end{aligned} \tag{1}$$

Ο X είναι δρομοσυνεκτικός, οπότε για κάθε δείκτη $i = 1,\cdots,k$ υπάρχουν δρόμοι $\gamma_i,\delta_i : \Delta_1 \to X$ με

$$\gamma_i : x_0 \rightsquigarrow \sigma_i(e_1^1) \quad \text{και} \quad \delta_i : x_0 \rightsquigarrow \sigma_i(e_0^1).$$



Προσοχή ! Επιλέγουμε τους ανωτέρω δρόμους, ούτως ώστε να εξαρτώνται μόνον από τα ληκτικά τους σημεία και όχι από τους δείκτες. Δηλαδή,

- εάν $\sigma_i(e_1^1) = \sigma_j(e_1^1)$, θέτουμε $\gamma_i = \gamma_j$.
- εάν $\sigma_i(e_0^1) = \sigma_j(e_0^1)$, θέτουμε $\delta_i = \delta_j$ και
- εάν $\sigma_i(e_1^1) = \sigma_j(e_0^1)$, θέτουμε $\gamma_i = \delta_j$.

Κατ' αυτόν τον τρόπο είμαστε σε θέση να εφαρμόσουμε την αρχή τής αντικαταστάσεως (λήμμα Β') για τα

$$\sigma_1(e_1^1),\sigma_1(e_0^1),\cdots,\sigma_k(e_1^1),\sigma_k(e_0^1) \in S_0(X)$$

[1] Έστω G μια ομάδα. Ορίζουμε τη *μεταθέτρια υποομάδα* G' τής G ως την υποομάδα που παράγεται από όλους τους μεταθέτες $[a,b] := aba^{-1}b^{-1}$, όπου $a,b \in G$. Ας σημειωθεί ότι $G' \lhd G$. Συμβολίζουμε την πηλικοομάδα G/G' ως G^{ab} και την καλούμε *αβελιανοποίηση* τής G.

και τα $\gamma_1, \delta_1, \cdots, \gamma_k, \delta_k \in S_1(X)$
και να λάβουμε απο τη σχέση (1) την ισότητα:

$$\sum_{i=1}^{k} r_i(\gamma_i - \delta_i) = 0_{S_1(X)}.$$

Συνεπώς,

$$\zeta = \sum_{i=1}^{k} r_i\sigma_i = \sum_{i=1}^{k} r_i(\delta_i + \sigma_i - \gamma_i).$$

Όμως οι δρόμοι $\delta_i * \sigma_i * \gamma_i^{-1}$ είναι κλειστοί έχοντες ως πέρας και αρχή τους το x_0, γιά κάθε $i \in \{1, \cdots, k\}$. Ως εκ τούτου, εφαρμόζοντας τα λήμματα Δ′(i) και Δ′(ii) συνάγουμε τα εξής:

$$\begin{aligned}
&\phi\Big(\prod_{i=1}^{k}[\delta_i * \sigma_i * \gamma_i^{-1}]^{r_i}\Big) = \sum_{i=1}^{k} r_i\ \phi\big([\delta_i * \sigma_i * \gamma_i^{-1}]\big)\\
= \quad & \sum_{i=1}^{k} r_i\Big((\delta_i * \sigma_i * \gamma_i^{-1}) + B_1^{sing}(X)\Big)\\
\overset{\Delta(ii)}{=} \quad & \sum_{i=1}^{k} r_i\Big((\delta_i + \sigma_i + \gamma_i^{-1}) + B_1^{sing}(X)\Big)\\
\overset{\Delta(i)}{=} \quad & \sum_{i=1}^{k} r_i\Big((\delta_i + \sigma_i - \gamma_i) + B_1^{sing}(X)\Big)\\
= \quad & \Big(\sum_{i=1}^{k} r_i(\delta_i + \sigma_i - \gamma_i)\Big) + B_1^{sing}(X)\\
= \quad & \zeta + B_1^{sing}(X).
\end{aligned}$$

► Για το ότι $\ker(\phi) = \pi_1'(X, x_0)$:
"$\supseteq$ " Γνωρίζουμε ότι η μεταθέτρια υποομάδα G' μιας ομάδας G είναι η ελάχιστη ορθόθετη υποομάδα που καθιστά την πηλικοομάδα G/G' αβελιανή. Επειδή από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών ομάδων ισχύει

$$\pi_1(X, x_0)\ /\ \ker(\phi) \cong H_1^{sing}(X)$$

και η $H_1^{sing}(X)$ είναι αβελιανή, ο ισχυρισμός είναι αληθής.

"$\subseteq$ " : Έστω $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ με $[\gamma] \in \ker(\phi)$. Τότε

$$\phi\big([\gamma]\big) = 0_{H_1^{sing}(X)} \quad \text{και άρα} \quad \gamma \in B_1^{sing}(X).$$

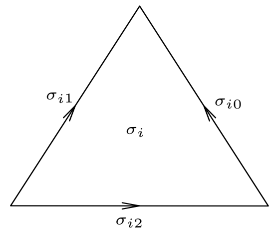
Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια 2-αλυσίδα

$$\sum_{i=1}^{k} r_i\sigma_i, \quad \text{όπου } r_i \in \mathbb{Z}\ ,\ \sigma_i : \Delta_2 \to X,\ i \in \{1, \ldots, k\},$$

τέτοια ώστε να ισχύει

$$d_2^{sing}\Big(\sum_{i=1}^{k} r_i\sigma_i\Big) = \gamma.$$

Ας συμβολίσουμε ως σ_{ij} τη σύνθεση $\sigma_{ij} = \sigma_i \circ \delta_2^j : \Delta_1 \longrightarrow X$, όπου $j \in \{0, 1, 2\}$ και $\delta_2^j : \Delta_1 \longrightarrow \Delta_2$ η απεικόνιση έδρας (βλ. 3.1.2, σελ. 160). Η σ_{ij} είναι προφανώς η j-οστή έδρα τού ιδιάζοντος 2-μονοπολόκου σ_i.



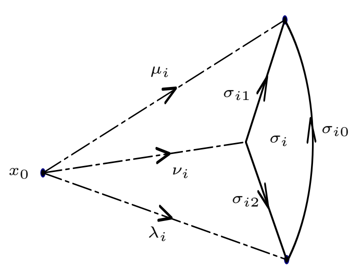
Επιπροσθέτως,

$$\begin{aligned} \gamma &= d_2^{sing}\Big(\sum_{i=1}^{k} r_i\sigma_i\Big) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{2}(-1)^j r_i(\sigma_i \circ \delta_2^j) \\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{2}(-1)^j r_i\sigma_{ij} = \sum_{i=1}^{k} r_i(\sigma_{i0} - \sigma_{i1} + \sigma_{i2}). \qquad (2) \end{aligned}$$

Τόσο το γ όσο και τα σ_{ij}, όπου $i \in \{1, \cdots, k\}$, $j \in \{0, 1, 2\}$, αποτελούν στοιχεία τής βάσεως τής ελεύθερης (αβελιανής) ομάδας $S_1(X)$. Επειδή όμως έχουμε μοναδική γραφή ως προς τη βάση και ο συντελεστής τού γ είναι 1, έπεται εύκολα ότι $\gamma = \sigma_{pq}$, για κάποιο $p \in \{1, \cdots, k\}$ και κάποιο $q \in \{0, 1, 2\}$. Εξάλλου, επειδή ο X είναι δρομοσυνεκτικός, υπάρχουν $\forall i \in \{1, \cdots, k\}$ δρόμοι λ_i, μ_i, ν_i εντός τού X με

$$\begin{aligned} \lambda_i &: x_0 \rightsquigarrow \sigma_{i0}(e_0^1), \\ \mu_i &: x_0 \rightsquigarrow \sigma_{i1}(e_1^1), \\ \nu_i &: x_0 \rightsquigarrow \sigma_{i2}(e_0^1). \end{aligned}$$

Ήτοι σχηματικά:



Επιλέγουμε και πάλι τους δρόμους αυτούς κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να εξαρτώνται μόνον από τα ληκτικά τους σημεία και όχι από τους δείκτες, δηλαδή:

- εάν κάποιο από τα $\sigma_{i0}(e_0^1), \sigma_{i1}(e_1^1), \sigma_{i2}(e_0^1)$ είναι το σημείο x_0, ορίζουμε αντιστοίχως τα λ_i, μ_i, ν_i να είναι ο σταθερός δρόμος c_{x_0},

- εάν $\sigma_{i0}(e_0^1) = \sigma_{j0}(e_0^1)$, τότε θέτουμε $\lambda_i = \lambda_j$,
- εάν $\sigma_{i1}(e_1^1) = \sigma_{j1}(e_1^1)$, τότε θέτουμε $\mu_i = \mu_j$ και, τέλος,
- εάν $\sigma_{i2}(e_0^1) = \sigma_{j2}(e_0^1)$, τότε θέτουμε $\nu_i = \nu_j$.

Εν συνεχεία, για κάθε $i \in \{1, \cdots, k\}$ θεωρούμε τις κλάσεις ομοτοπίας των ακολούθων κλειστών δρόμων, με βασικό τους σημείο το x_0 :

$$\begin{aligned}
[a_{i0}] &= [\lambda_i * \sigma_{i0} * \mu_i^{-1}], \\
[a_{i1}] &= [\nu_i * \sigma_{i1} * \mu_i^{-1}], \\
[a_{i2}] &= [\nu_i * \sigma_{i2} * \lambda_i^{-1}].
\end{aligned}$$

Κατόπιν τούτου, θεωρούμε την πηλικοομάδα $\pi_1(X, x_0) \ / \ \pi_1'(X, x_0)$, η οποία είναι εξ ορισμού αβελιανή, και αντιστοίχως τις κλάσεις υπολοίπων $\overline{[a_{ij}]}$ των κλάσεων ομοτοπίας $[a_{ij}] \in \pi_1(X, x_0)$. Η σχέση (2),

$$\sigma_{pq} = \gamma = \sum_{i=1}^{k} r_i(\sigma_{i0} - \sigma_{i1} + \sigma_{i2}),$$

είναι μια εξίσωση σε επίπεδο γεννητόρων τής ελεύθερης αβελιανής ομάδας $S_1(X)$. Ακριβώς λόγω τής προσεκτικής επιλογής των δρόμων λ_i, μ_i, ν_i και τον ορισμό των δρόμων a_{ij}, αυτή επάγει (μέσω της αρχής τής αντικαταστάσεως - λήμμα Β΄) μια εξίσωση σε επίπεδο στοιχείων τής αβελιανής πηλικοομάδας $\pi_1(X, x_0) \ / \ \pi_1'(X, x_0)$:

$$\begin{aligned}
\overline{[a_{pq}]} &= \prod_{i=1}^{k} \left(\overline{[a_{i0}]} \cdot \overline{[a_{i1}]}^{\,-1} \cdot \overline{[a_{i2}]} \right)^{r_i} \\
&= \prod_{i=1}^{k} \left(\overline{[a_{i0} * a_{i1}^{-1} * a_{i2}]} \right)^{r_i}. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Σημειωτέον ότι $[a_{pq}] = [x * \sigma_{pq} * y]$, για κατάλληλα $x \in \{\lambda_p, \nu_p\}$ και $y \in \{\mu_p^{-1}, \lambda_p^{-1}\}$. Ωστόσο, $\gamma = \sigma_{pq}$, οπότε ο σ_{pq} είναι κλειστός δρόμος με βασικό του σημείο το x_0. Επομένως, για να ορίζεται το γινόμενο δρόμων $x * \sigma_{pq} * y$ πρέπει υποχρεωτικά οι x και y να είναι οι σταθεροί δρόμοι c_{x_0}. Ως εκ τούτου, $[a_{pq}] = [\sigma_{pq}] = [\gamma]$, οπότε

$$\overline{[\gamma]} = \overline{[a_{pq}]} \ .$$

Από την άλλη μεριά,

$$\begin{aligned}
[a_{i0} * a_{i1}^{-1} * a_{i2}] &= [\lambda_i * \sigma_{i0} * \sigma_{i1}^{-1} * \sigma_{i2} * \lambda_i^{-1}] \\
&= [\lambda_i * \lambda_i^{-1}] = [c_{x_0}] = id_{\pi_1(X, x_0)}, \qquad (4)
\end{aligned}$$

με τον $\sigma_{i0} * \sigma_{i1}^{-1} * \sigma_{i2}$ μηδενοομοτοπικό επί τη βάσει τού λήμματος Γ΄ (βλ. και το δεύτερο σχήμα τής σελ. 6). Άρα η σχέση (3) διαμορφώνεται ως εξής :

$$\begin{aligned}
\overline{[\gamma]} &= \overline{[a_{pq}]} = \prod_{i=1}^{k} \left(\overline{[a_{i0} * a_{i1}^{-1} * a_{i2}]} \right)^{r_i} \\
&\overset{(4)}{=} \prod_{i=1}^{k} \left(\overline{id_{\pi_1(X, x_0)}} \right)^{r_i} = id_{\pi_1(X, x_0) \ / \ \pi_1'(X, x_0)},
\end{aligned}$$

οπότε $[\gamma] \in \pi_1'(X, x_0)$. $\square$

Πόρισμα 5 *Εάν ο X είναι δρομοσυνεκτικός, τότε*

$$H_1^{sing}(X) \cong \pi_1(X, x_0)^{ab}.$$

Απόδειξη : Λόγω τού θεωρήματος 4, αρκεί η εφαρμογή τού πρώτου θεωρήματος ισομορφισμών ομάδων για τον επιμορφισμό ϕ τού Hurewicz. $\square$

Παράρτημα

Πρόταση Α′ *(i) Έστω $\alpha : I \to X$ ένας κλειστός δρόμος με αρχή και πέρας του το $x_0 \in X$. Τότε υπάρχει $\alpha' : \mathbb{S}^1 \to X$ συνεχής με $\alpha'(e^{2\pi\iota t}) = \alpha(t)$.*
(ii) Εάν οι $\alpha, \beta : I \to X$ είναι κλειστοί δρόμοι με αρχή και πέρας τους το $x_0 \in X$ και $\alpha \sim \beta$, τότε $\alpha' \sim \beta'$.

Απόδειξη : (i) Κατ' αρχάς, επειδή ο $\alpha : I \to X$ είναι ένας δρόμος με αρχή και πέρας του το $x_0 \in X$, είναι κατ' ουσίαν μια συνεχής απεικόνιση τοπολογικών ζευγών

$$\alpha : (I, \partial I) \to (X, x_0).$$

Θέτοντας σε εφαρμογή την πρόταση 1.18.4, σελ. 80, εξασφαλίζουμε την ύπαρξη μιας συνεχούς απεικονίσεως

$$\alpha' : I \,/\, \partial I \to X \quad (= X \,/\, \{x_0\})$$

με τύπο $\alpha'\big([t]_{\mathcal{R}_{\partial I}}\big) := [\alpha(t)]_{\mathcal{R}_{x_0}} = \alpha(t)$ για κάθε $t \in I$, όπου $\mathcal{R}_{\partial I}$ και $\mathcal{R}_{x_0}$ είναι οι αντίστοιχες σχέσεις ισοδυναμίας (βλ. 1.10.9, σελ. 25). Επιπροσθέτως, $I \,/\, \partial I \approx \mathbb{S}^1$, οπότε διαθέτουμε μια συνεχή απεικόνιση

$$\alpha' : \mathbb{S}^1 \to X,$$

για την οποία ισχύει $\alpha'(e^{2\pi\iota t}) = \alpha(t)$, για κάθε $t \in I$.
(ii) Ας υποθέσουμε ότι η $H : I \times I \to X$ είναι μια ομοτοπία από το $\alpha(x)$ στο $\beta(x)$, με $H(0,t) = H(1,t) = x_0$, για κάθε $t \in I$. Ορίζοντας επί τού I τη σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}_{\partial I}$ και επί τού X την "τετριμμένη" $\mathcal{R}_{x_0}$, εφαρμόζουμε το πόρισμα 1.17.8, σελ. 72, και καταλήγουμε στη δημιουργία μιας ομοτοπίας

$$H' : (I \,/\, \partial I) \times I \approx \mathbb{S}^1 \times I \to X$$

μεταξύ των $\alpha'(x)$ και $\beta'(x)$, όπου $x \in \mathbb{S}^1$. $\square$

Λήμμα Β′ (Αρχή τής αντικαταστάσεως) *Έστω $\mathcal{F}$ μια ελεύθερη αβελιανή ομάδα με το $\mathcal{B}$ ως παράγον σύνολό της. Ας υποθέσουμε ότι $x_0, x_1, \cdots, x_k \in \mathcal{B}$ (όχι κατ' ανάγκην διακεκριμένα), ούτως ώστε να ισχύει*

$$r_0 x_0 = \sum_{i=1}^{k} r_i x_i \quad , r_i \in \mathbb{Z} \, , i \in \{0, 1, \cdots, k\}$$

Εάν η $\mathcal{G}$ είναι οποιαδήποτε αβελιανή ομάδα και $y_0, y_1 \cdots, y_k \in \mathcal{G}$ με την ιδιότητα $\big[x_i = x_j \Rightarrow y_i = y_j\big]$, τότε ισχύει η ισότητα

$$r_0 y_0 = \sum_{i=1}^{k} r_i y_i.$$

Απόδειξη : Ορίζουμε την $f : \mathcal{B} \to \mathcal{G}$ με τύπο $f(x_i) := y_i$, για $i = 0, \cdots, k$ και $f(x) := 0$, αλλιώς. Η απεικόνιση είναι καλώς ορισμένη, ακριβώς λόγω τής ιδιότητας $\big[x_i = x_j \Rightarrow y_i = y_j\big]$. Από την καθολική ιδιότητα των ελευθέρων (αβελιανών) ομάδων (πρβλ. [Σ.Ο.Α.] 1.6.1, σελ. 38) έπεται ότι υπάρχει ομομορφισμός ομάδων $\tilde{f} : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ με $\tilde{f}|_{\mathcal{B}} = f$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[dr, dotted, "\tilde{f}"] & \\
\mathcal{B} \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

Συνεπώς,

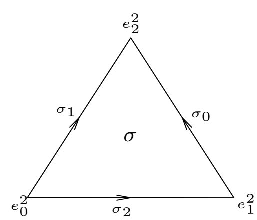
$$\begin{aligned}
& r_0 x_0 = \sum_{i=1}^{k} r_i x_i \Rightarrow r_0 x_0 - \sum_{i=1}^{k} r_i x_i = 0_{\mathcal{F}} \\
\Rightarrow \quad & \tilde{f}\big(r_0 x_0 - \sum_{i=1}^{k} r_i x_i\big) = \tilde{f}(0_{\mathcal{F}}) = 0_{\mathcal{G}} \\
\Rightarrow \quad & r_0 y_0 - \sum_{i=1}^{k} r_i y_i = 0_{\mathcal{G}} \Rightarrow r_0 y_0 = \sum_{i-1}^{k} r_i y_i.
\end{aligned}$$

$\square$

Λήμμα Γ′ *Έστω $\sigma : \Delta_2 \to X$ ένα ιδιάζον 2-μονόπλοκο. Για κάθε $j \in \{0,1,2\}$ ορίζουμε τη σύνθεση*

$$\sigma_j := \sigma \circ \delta_2^j : \Delta_1 \to X,$$

όπου $\delta_2^j : \Delta_1 \to \Delta_2$ η απεικόνιση έδρας (βλ. 3.1.2, σελ 160).



Τότε ο δρόμος $\sigma_0 * \sigma_1^{-1}\sigma_2$ είναι μηδενοομοτοπικός.

Απόδειξη : Έπεται άμεσα από την πρόταση 1.17.13 (σελ. 74) και από το ότι ισχύει $(\Delta_2, \partial\Delta_2) \approx (\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1)$ (βλ. 1.20.11, σελ. 90). $\square$

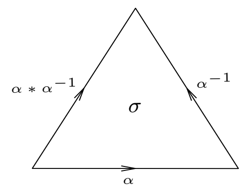
Λήμμα Δ′ *(i) Έστω ότι ο $\alpha : \Delta_1 \to X$ είναι ένας δρόμος εντός τού X. Τότε*

$$\alpha + \alpha^{-1} \in B_1^{sing}(X).$$

(ii) Έστω ότι οι $\alpha, \beta, \gamma : \Delta_1 \to X$ είναι τρείς δρόμοι εντός τού X, ούτως ώστε να ορίζεται ο δρόμος $\alpha * \beta * \gamma$ και να είναι κλειστός. Τότε ισχύει η ισότητα

$$(\alpha * \beta * \gamma) + B_1^{sing}(X) = (\alpha + \beta + \gamma) + B_1^{sing}(X).$$

Απόδειξη : (i) Κατασκευάζουμε ένα ιδιάζον 2-μονόπλοκο $\sigma : \Delta_2 \to X$ με τρόπο παρόμοιο αυτού τής αποδείξεως τής προτάσεως 3, οριζόμενο επί των εδρών Δ_2 όπως στο κάτωθι σχήμα:



Προφανώς, $d_2^{sing}(\sigma) = \alpha^{-1} - (\alpha * \alpha^{-1}) + \alpha$, και άρα

$$\alpha^{-1} - (\alpha * \alpha^{-1}) + \alpha \in B_1^{sing}(X). \tag{1}$$

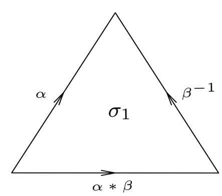
Ας υποθέσουμε ότι ο δρόμος α έχει ως αρχικό του σημείο το $x_0 \in X$. Τότε, επειδή η απεικόνιση Hurewicz ϕ είναι ομομορφισμός (πρόταση 3), λαμβάνουμε το ακόλουθο:

$$(\alpha * \alpha^{-1}) + B_1^{sing}(X) = \phi\big([\alpha * \alpha^{-1}]\big) = \phi(id_{\pi_1(X,x_0)}) = id_{H_1^{sing}(X)}.$$

Συνεπώς, $(\alpha * \alpha^{-1}) \in B_1^{sing}(X)$, και από τη σχέση (1) συμπεραίνουμε ότι

$$\alpha^{-1} + \alpha \in B_1^{sing}(X).$$

(ii) Κατ' αρχάς θα δείξουμε ότι $(\alpha * \beta) - \alpha - \beta \in B_1^{sing}(X)$. Προς τούτο κατασκευάζουμε, όπως πριν, ένα ιδιάζον 2-μονόπλοκο $\sigma_1 : \Delta_2 \to X$ οριζόμενο επί των εδρών τού Δ_2 όπως στο ακόλουθο σχήμα:



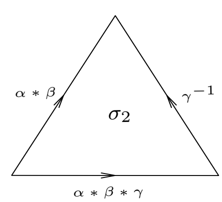
Προφανώς, $d_2^{sing}(\sigma_1) = \beta^{-1} - \alpha + (\alpha * \beta)$ και άρα

$$\beta^{-1} - \alpha + (\alpha * \beta) \in B_1^{sing}(X).$$

Όμως από το (i) έχουμε ότι $\beta + \beta^{-1} \in B_1^{sing}(X)$ και, ως εκ τούτου,

$$-\beta - \alpha + (\alpha * \beta) \in B_1^{sing}(X). \tag{2}$$

Εν συνεχεία, κατασκευάζουμε ένα ιδιάζον 2-μονόπλοκο $\sigma_2 : \Delta_2 \to X$ ορίζοντάς το επί των εδρών τού Δ_2 ως εξής:



Κατά συνέπειαν, $d_2^{sing}(\sigma_2) = \gamma^{-1} - (\alpha * \beta) + (\alpha * \beta * \gamma)$, οπότε

$$\gamma^{-1} - (\alpha * \beta) + (\alpha * \beta * \gamma) \in B_1^{sing}(X).$$

Από τη σχέση (2) και από το ότι $\gamma + \gamma^{-1} \in B_1^{sing}(X)$ (που ισχύει λόγω τού (i)) έπεται ότι

$$\begin{aligned} & -\gamma - (\alpha + \beta) + (\alpha * \beta * \gamma) \in B_1^{sing}(X) \\ \Rightarrow \quad & -(\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha * \beta * \gamma) \in B_1^{sing}(X) \\ \Rightarrow \quad & (\alpha * \beta * \gamma) + B_1^{sing}(X) = (\alpha + \beta + \gamma) + B_1^{sing}(X). \end{aligned}$$

□

Αναφορές

[1] J. J. Rotman : *An Introduction to Algebraic Topology*, Springer-Verlag (1988)

[2] M. J. Greenberg – J. R. Harper : *Algebraic Topology, A First Course*, Benjamin/Cummings Publishing Company (1981)