



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Λεωφόρος Κνωσού (Τ.Θ. 2208) 71409, Ηράκλειο Κρήτης
Τηλ. 2810-393800, 393801, 393807, 393868, Fax 2810-393881

ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2005

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ (ΟΜΟΛΟΓΙΑ, Γ 21)

(Διδάσκων: Δ.Ι. Νταής)

Διδαχθείσα ύλη τού μαθήματος

- Πρώτο μέρος. Μόδιοι (Modules).

(α) Μόδιοι, υπομόδιοι και πηλικομόδιοι. Πεπερασμένως παραγόμενοι μόδιοι. Ομομορφισμοί μοδίων. Θεωρήματα ισομορφισμών μοδίων. Ακριβείς ακολουθίες μοδίων.

(β) Ελεύθεροι μόδιοι, βάσεις μοδίων. Μόδιοι με στρέψη και χωρίς στρέψη. Προβολικοί και εμβολικοί μόδιοι.

- Δεύτερο Μέρος. Στοιχεία Πλειογραμμικής Άλγεβρας.

Πλειογραμμικές απεικονίσεις. Κατασκευή τού τανυστικού γινομένου μοδίων μέσω καθολικής συνθήκης. Κύριες ιδιότητες τανυστικού γινομένου. Ισόπεδοι μόδιοι. Κατάταξη μοδίων:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ} \\ \text{ΧΩΡΟΙ} \end{array} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{c} \text{ΕΛΕΥΘΕΡΟΙ} \\ \text{ΜΟΔΙΟΙ} \end{array} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{c} \text{ΠΡΟΒΟΛΙΚΟΙ} \\ \text{ΜΟΔΙΟΙ} \end{array} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{c} \text{ΙΣΟΠΕΔΟΙ} \\ \text{ΜΟΔΙΟΙ} \end{array} \right\} \subset \{ \text{ΜΟΔΙΟΙ} \}$$

- Τρίτο Μέρος. Ομολογία και Συνομολογία Αλυσωτών Συμπλόκων.

(α) Αλυσωτά σύμπλοκα. Αλυσωτοί μετασχηματισμοί. Κυκλήματα, σύνορα και ομολογία. Αλυσωτή ομοτοπία συμπλόκων. Δυϊκός ορισμός τής συνομολογίας.

(β) Λήμμα τού φιδιού. Μακρά ακριβής ακολουθία. Ακολουθία Mayer-Vietoris.

- Τέταρο Μέρος. Στοιχειώδεις έννοιες από τη Θεωρία Κατηγοριών.

(α) Κατηγορίες. Αντικείμενα. Τελικά και αρχικά αντικείμενα. Μορφισμοί. Μονικοί και επικοί μορφισμοί. Υποκατηγορίες. Πλήρεις υποκατηγορίες.

(β) Συναρτητές μεταξύ κατηγοριών. Συναλλοίωτοι και ανταλλοίωτοι συναρτητές. Παραδείγματα. (Επιλήσιμων συναρτητής, ελεύθερος συναρτητής, δυϊκός συναρτητής, συναρτητής δημιουργούμενος κατόπιν αβελιανοποίησης, ταυτοτικός συναρτητής, συναρτητής ενθέσεως, συναρτητής τανυστικού γινομένου, Hom-συναρτητής, σύνθεση συναρτητών κ.ά.) Προσθετικοί συναρτητές. Ακριβείς συναρτητές.

(γ) Φυσικοί μετασχηματισμοί μεταξύ συναρτητών. Παραδείγματα.

- Πέμπτο Μέρος. Στοιχεία Ομολογικής Άλγεβρας.

(α) Κερατισμοί R-μοδίων. Ύπαρξη ελευθέρων κερατισμών. Θεώρημα Συγκρίσεως (ή «Θεμελιώδες Λήμμα» της Ομολογικής Άλγεβρας).

(β) Συναρτητές Tor και Ext (στρέψεως και επεκτάσεως). Κύριες ιδιότητες και παραδείγματα.

(γ) Άλγεβρικά θεωρήματα συντελεστών και άλγεβρικό θεώρημα του Künneth.

(δ) Αντίστοιχα θεωρήματα για τη συνομολογία.

- Έκτο Μέρος. Υπενθυμίσεις από την Τοπολογία.

(α) Τοπολογικοί χώροι και υπόχωροι. Ομοιομορφισμοί μεταξύ τοπολογικών χώρων. Ταυτισμική τοπολογία, άθροισμα και γινόμενο τοπολογικών χώρων.

(β) Συμπάγεια, συνεκτικότητα και δρομοσυνεκτικότητα. Διαχωριστικά αξιώματα.

(γ) Ομοτοπία. Παραμορφωτικές συμπτύξεις. Συσταλοί τοπολογικοί χώροι.

- Έβδομο Μέρος. Τα αξιώματα των Eilenberg και Steenrod.

(α) Τα αξιώματα που καθορίζουν θεωρίες ομολογίας και συνομολογίας.

(β) Τυπικοί υπολογισμοί και παραδείγματα μόνον με τη χρήση των αξιωμάτων.

- Όγδοο Μέρος. Θεωρία ιδιάζουσας ομολογίας.

(α) Κυρτά σύνολα και μονόπλοκα. Ιδιάζοντα μονόπλοκα και ιδιάζουσες αλυσίδες. Ορισμός της ιδιάζουσας ομολογίας για τοπολογικούς χώρους και ζεύγη τοπολογικών χώρων.

(β) Απόδειξη για το ότι η ιδιάζουσα ομολογία πληροί τα αξιώματα των Eilenberg και Steenrod.

(γ) Υπολογισμοί μέσω ιδιάζουσας ομολογίας. Θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer.

(δ) Συσχετισμός πρώτης ομάδας ομοτοπίας και πρώτης ομάδας ιδιάζουσας ομολογίας ενός δρομοσυνεκτικού τοπολογικού χώρου. [Διάλεξις Μ. Σταματάκη.]

(ε) Τοπολογικό καθολικό θεώρημα συντελεστών και τοπολογικό θεώρημα του Künneth.

- Ένατο Μέρος. Θεωρία μονοπλεκτικής ομολογίας.

(α) Προσανατολισμένα μονόπλοκα. Μονοπλεκτικά συμπλέγματα και τριγωνισμοί. Ορισμός μονοπλεκτικής ομολογίας.

(β) Βασικά παραδείγματα και εφαρμογές.

(γ) Απόδειξη τού τύπου των Euler και Poincaré, και τού θεωρήματος των Borsuk και Ulam μέσω μονοπλεκτικής ομολογίας. [Διάλεξη Χ. Σαρόγλου.]

(δ) Συσχετισμός ιδιάζουσας και μονοπλεκτικής ομολογίας. [Διάλεξη Μ. Γιάνναρου.]
