Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 2

A-2-1. *Απόδειξη τής προτάσεως 2.1.3* : Εστω

$$\theta_V : \mathbf{k}[V] \longrightarrow \Gamma(V), \quad f \longmapsto \theta_V(f) = F + \mathbf{I}(V),$$

(όπου $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \dots, \mathsf{X}_n]$ οιοδήποτε πολυώνυμο που εκπροσωπεί την f).

► *Η θ_V είναι καλώς ορισμένη απεικόνιση* : Θεωρούμε τυχούσα $f \in \mathbf{k}[V]$ και δυο πολυώνυμα F, G από τον δακτύλιο $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \dots, \mathsf{X}_n]$, για τα οποία ισχύει

$$\theta_V(f) = F + \mathbf{I}(V) = G + \mathbf{I}(V).$$

Τότε

$$F - G \in \mathbf{I}(V) \Longrightarrow (F - G)(a_1, \dots, a_n) = 0, \ \forall (a_1, \dots, a_n) \in V$$

$$\Longrightarrow F(a_1, \dots, a_n) = G(a_1, \dots, a_n) = f(a_1, \dots, a_n), \ \forall (a_1, \dots, a_n) \in V.$$

► *Η θ_V είναι ομομορφισμός δακτυλίων* : Ας υποθέσουμε ότι τα πολυώνυμα F, G από τον δακτύλιο $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \dots, \mathsf{X}_n]$ εκπροσωπούν δυο πολυωνυμικές συναρτήσεις f και $g \in \mathbf{k}[V]$, αντιστοίχως. Τότε το $H := F + G$ εκπροσωπεί την πολυωνυμική συνάρτηση $f + g$, διότι

$$H(a_1, \dots, a_n) = F(a_1, \dots, a_n) + G(a_1, \dots, a_n), \ \forall (a_1, \dots, a_n) \in V,$$

οπότε $\theta_V(f + g) = \theta_V(f) + \theta_V(g)$. Κατ' αναλογίαν δείχνουμε ότι

$$\theta_V(fg) = \theta_V(f)\,\theta_V(g), \quad \theta_V\left(1_{\mathbf{k}[V]}\right) = 1_{\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \dots, \mathsf{X}_n]} + \mathbf{I}(V).$$

► *Η θ_V είναι ενριπτική* : Έστω τυχούσα $f \in \mathbf{k}[V]$ και έστω $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \dots, \mathsf{X}_n]$ ένα πολυώνυμο που την εκπροσωπεί. Τότε $f \in \mathrm{Ker}(\theta_V)$ εάν και μόνον εάν

$$\theta_V(f) = \mathbf{I}(V) \Longleftrightarrow F + \mathbf{I}(V) = \mathbf{I}(V) \Longleftrightarrow F \in \mathbf{I}(V)$$

$$\Longleftrightarrow F(a_1,\ldots,a_n)=0=f(a_1,\ldots,a_n),\ \forall\,(a_1,\ldots,a_n)\in V \Longleftrightarrow f=0_{\mathbf{k}[V]}.$$

► *Η θ_V είναι επιρριπτική* : Έστω τυχόν στοιχείο $F+\mathbf{I}(V)$ τού $\Gamma\,(V)$, όπου το F εκπροσωπεί μια πολυωνυμική συνάρτηση $f\in\mathbf{k}[V]$. Τότε εξ ορισμού $\theta_V\,(f)=F+\mathbf{I}(V)$. $\square$

A-2-2. (a)⇒(b): Εάν $V=\{(a_1,\ldots,a_n)\}$, τότε, από την πρόταση 1.3.1 (2) (c),

$$\mathbf{I}(V)=\langle \mathsf{X}_1-a_1,\ldots,\mathsf{X}_n-a_n\rangle \underset{(\text{άσκηση }\mathbf{A\text{-}1\text{-}21})}{\Longrightarrow} \Gamma\,(V)\cong\mathbf{k}.$$

(b)⇒(a): Εάν $\Gamma\,(V)\cong\mathbf{k}$, τότε (κατά το θεώρημα 1.1.14) το $\mathbf{I}(V)$ είναι μεγιστοτικό ιδεώδες τού πολυωνυμικού δακτυλίου $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n]$. Σύμφωνα με το 3ο βήμα τής αποδείξεως τού πορίσματος 1.7.4, $\mathbf{I}(V)=\langle \mathsf{X}_1-a_1,\ldots,\mathsf{X}_n-a_n\rangle$, για κάποια $a_1,\ldots,a_n\in\mathbf{k}$, οπότε (κατά το (5) τής προτάσεως 1.2.3 και το (5) (a) τής προτάσεως 1.3.1)

$$V=\mathbf{V}(\mathbf{I}(V))=\mathbf{V}(\mathsf{X}_1-a_1,\ldots,\mathsf{X}_n-a_n)=\{(a_1,\ldots,a_n)\}.$$

(b)⇒(c): Εάν $\Gamma\,(V)\cong\mathbf{k}$, τότε $\dim_{\mathbf{k}}(\Gamma\,(V))=1<\infty$.

(c)⇒(b): Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε το εξής *βοηθητικό λήμμα* : *Έστω* $\mathbf{k}$ *ένα σώμα και έστω* R *μια ακεραία περιοχή, τέτοια ώστε το* $\mathbf{k}$ *να είναι υποδακτύλιός της. Τότε για την* R, *ιδωμένη ως διανυσματικός χώρος υπεράνω τού* $\mathbf{k}$, *ισχύει η συνεπαγωγή*

$$\dim_{\mathbf{k}}(R)<\infty \Longrightarrow \text{η } R \text{ είναι σώμα.}$$

• Πρώτη απόδειξη βοηθητικού λήμματος: Έστω $r\in R\smallsetminus\{0_R\}$ και έστω $\nu:=\dim_{\mathbf{k}}(R)$. Τα $\nu+1$ στοιχεία $1_R,r,r^2,\ldots,r^\nu$ τής R οφείλουν να είναι γραμμικώς εξαρτημένα υπεράνω τού $\mathbf{k}$, οπότε υπάρχουν $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_\nu\in\mathbf{k}$ (όχι όλα μηδέν) με

$$\lambda_0+\lambda_1 r+\cdots+\lambda_\nu r^\nu=0_R.$$

Δίχως βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda_0\neq 0_R$. (Εάν $\lambda_0=0_R$ και $i:=\min\{\,j\in\{1,\ldots,n\}|\ \lambda_j\neq 0_R\}$, τότε

$$r^i(\lambda_i+\lambda_{i+1}r+\cdots+\lambda_\nu r^{\nu-i})=0_R,$$

κι επειδή $r\neq 0_R$, έχουμε $\lambda_i+\lambda_{i+1}r+\cdots+\lambda_\nu r^{\nu-i}=0_R$.) Επειδή

$$r(\lambda_1+\cdots+\lambda_\nu r^{\nu-1})=-\lambda_0\neq 0_R,$$

το r έχει το $-\lambda_0{}^{-1}(\lambda_1+\cdots+\lambda_\nu r^{\nu-1})$ ως αντίστροφό του.

• Δεύτερη απόδειξη βοηθητικού λήμματος: Επικαλούμεθα ένα γνωστό αποτέλεσμα από τη Γραμμική Άλγεβρα: *Εάν οι* X,Y *είναι δυο διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διαστάσεως υπεράνω τού* $\mathbf{k}$ *και η* $f:X\longrightarrow Y$ *μια γραμμική απεικόνιση, τότε οι εξής συνθήκες είναι ισοδύναμες* :

(i) *Η f είναι μονομορφισμός διανυσματικών χώρων.*

(ii) *Η f είναι επιμορφισμός διανυσματικών χώρων.*

(iii) $\dim_{\mathbf{k}}(X) = \dim_{\mathbf{k}}(Y)$.

Εφαρμόζοντάς το για τη γραμμική απεικόνιση

$$f : R \longrightarrow R, \ \ f(x) := rx, \ \forall x \in R,$$

όπου r τυχόν (αλλά παγιωμένο) στοιχείο τού $R \smallsetminus \{0_R\}$, συμπεραίνουμε ότι η f είναι επιρριπτική. Τούτο σημαίνει ότι για το μοναδιαίο πολλαπλασιαστικό στοιχείο 1_R τής R υπάρχει $x \in R \smallsetminus \{0_R\}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x) = rx = 1_R$. Άρα το r διαθέτει αντίστροφο στοιχείο εντός τής R.

Απόδειξη αρχικού ισχυρισμού: Επειδή η V είναι συσχετική ποικιλότητα, ο πηλικοδακτύλιος $\Gamma(V)$ είναι ακεραία περιοχή (βλ. πρόταση 2.1.15). Εξ υποθέσεως έχουμε $\dim_{\mathbf{k}}(\Gamma(V)) < \infty$. Ως εκ τούτου, κατά το ανωτέρω βοηθητικό λήμμα ο $\Gamma(V)$ οφείλει να είναι σώμα. Εν συνεχεία, υπενθυμίζουμε ένα θεωρητικό αποτέλεσμα, το οποίο είχαμε επικαλεσθεί στην ενότητα 1.7 (και είχαμε αποδείξει, σε πλήρη γενικότητα, στην ενότητα 1.10):

$\boxed{*}$ *Εάν ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα* $\mathbf{k}$ *αποτελεί υπόσωμα ενός σώματος* L *και εάν υπάρχει ένας επιμορφισμός δακτυλίων από τον* $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ *επί τού* L (*ο οποίος, περιοριζόμενος στο* $\mathbf{k}$, *είναι η ταυτοτική απεικόνιση*), *τότε* $\mathbf{k} = L$.

Εφαρμόζοντάς το για το $L = \Gamma(V)$ και για τον φυσικό επιμορφισμό

$$\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] \longrightarrow \Gamma(V)$$

συνάγουμε ότι $\Gamma(V) = \mathbf{k}$. □

Α-2-3. Έστω F ένα *ανάγωγο* πολυώνυμο τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}, \mathsf{Y}]$. Υποθέτοντας ότι το F είναι μονικό ως προς το Y:

$$F = \mathsf{Y}^n + a_1(\mathsf{X})\,\mathsf{Y}^{n-1} + a_2(\mathsf{X})\,\mathsf{Y}^{n-2} + \cdots + a_n(\mathsf{X}),$$

και ότι $V = \mathbf{V}(F) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$, θεωρούμε τον φυσικό ομομορφισμό δακτυλίων

$$\varphi : \mathbf{k}[\mathsf{X}] \longrightarrow \Gamma(V) = \mathbf{k}[\mathsf{X}, \mathsf{Y}] \,/\, \langle F \rangle\,, \ \ G \longmapsto \varphi(G) := G + \langle F \rangle\,.$$

Προφανώς,

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{G \in \mathbf{k}[\mathsf{X}] \mid G \in \langle F \rangle\} = \{G \in \mathbf{k}[\mathsf{X}] \mid \exists H \in \mathbf{k}[\mathsf{X}, \mathsf{Y}] : G = F \cdot H\} = \{0_{\mathbf{k}[\mathsf{X}]}\}.$$

(Αιτιολόγηση τής τελευταίας ισότητας: Εάν $G = \sum_{i=0}^{m} b_i \mathsf{X}^i$ και $H = \sum \lambda_{jk} \mathsf{X}^j \mathsf{Y}^k$, τότε για να ισχύει $G = F \cdot H$ θα πρέπει, λόγω τής υπάρξεως τού όρου $\sum \lambda_{jk} \mathsf{Y}^{k+n}$ στο δεξιό μέλος, να έχουμε $H = 0_{\mathbf{k}[\mathsf{X},\mathsf{Y}]}$ και, κατ' επέκτασιν, $G = 0_{\mathbf{k}[\mathsf{X}]}$.) Άρα ο φ είναι μονομορφισμός δακτυλίων και ο $\mathbf{k}[\mathsf{X}]$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένας υποδακτύλιος τού $\Gamma(V)$. Εν συνεχεία, θα αποδείξουμε ότι το σύνολο $\left\{\overline{1}, \overline{\mathsf{Y}}, \ldots, \overline{\mathsf{Y}}^{n-1}\right\}$ παράγει τον $\Gamma(V)$ ως $\mathbf{k}[\mathsf{X}]$-μόδιο. Προς τούτο θεωρούμε τυχόν στοιχείο

$$\overline{\Xi} = \Xi + \langle F \rangle \in \Gamma(V), \ \ \Xi = \sum \mu_{jk} \mathsf{X}^j \mathsf{Y}^k,$$

υποθέτουμε ότι η μέγιστη τιμή τού εκθέτη j τού Y είναι m και εξετάζουμε δύο περιπτώσεις χωριστά:

► Περίπτωση (a): $m \leq n-1$. Προφανώς, $\overline{\Xi} \in \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{k}[\mathsf{X}]\overline{\mathsf{Y}}^i$, διότι το Ξ γράφεται ως άθροισμα γινομένων στοιχείων τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}]$ με στοιχεία τού $\left\{\overline{1}, \overline{\mathsf{Y}}, \ldots, \overline{\mathsf{Y}}^{n-1}\right\}$.

► Περίπτωση (b): $m \geq n$. Εν προκειμένω εκτελούμε διαίρεση τού Ξ διά τού F εντός τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}][\mathsf{Y}]$ και λαμβάνουμε

$$\Xi = F \cdot Q + \Pi, \ \ \deg_{\mathsf{Y}}(\Pi) < \deg_{\mathsf{Y}}(F) = n,$$

οπότε

$$\overline{\Xi} = \Xi + \langle F \rangle = F \cdot Q + \Pi + \langle F \rangle = \Pi + \langle F \rangle,$$

με $\deg_{\mathsf{Y}}(\Pi) \leq n-1$, και μπορούμε να αναχθούμε στην περίπτωση (a). □

A-2-4. Εάν οι $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \supseteq V \xrightarrow{\varphi_1} W \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ και $\mathbb{A}^m_{\mathbf{k}} \supseteq W \xrightarrow{\varphi_2} Z \subseteq \mathbb{A}^k_{\mathbf{k}}$ είναι δυο απεικονίσεις μεταξύ συσχετικών αλγεβρικών συνόλων, τότε για κάθε $f \in \mathfrak{J}(Z, \mathbf{k})$ έχουμε

$$\widetilde{\varphi_2 \circ \varphi_1}(f) = f \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1) = (f \circ \varphi_2) \circ \varphi_1 = \widetilde{\varphi}_1 (f \circ \varphi_2) = \widetilde{\varphi}_1 \circ \widetilde{\varphi}_2(f),$$

οπότε $\widetilde{\varphi_2 \circ \varphi_1} = \widetilde{\varphi}_1 \circ \widetilde{\varphi}_2$. Εάν οι φ_1 και φ_2 είναι πολυωνυμικές απεικονίσεις, τότε υπάρχουν $T_1, \ldots, T_m$ από τον $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ με

$$\varphi_1(a_1, \ldots, a_n) = (T_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, T_m(a_1, \ldots, a_n)), \ \ \forall (a_1, \ldots, a_n) \in V,$$

καθώς και $T'_1, \ldots, T'_k$ από τον $\mathbf{k}[\mathsf{Y}_1, \ldots, \mathsf{Y}_m]$ με

$$\varphi_2(b_1, \ldots, b_m) = (T'_1(b_1, \ldots, b_m), \ldots, T'_k(b_1, \ldots, b_m)), \ \ \forall (b_1, \ldots, b_m) \in W.$$

Ως εκ τούτου, θέτοντας $\Xi_j := T'_j \circ T, \forall j \in \{1, \ldots, k\}$, και $T := (T_1, \ldots, T_m)$, έχουμε για κάθε $(a_1, \ldots, a_n) \in V$:

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1)(a_1, \ldots, a_n) = \varphi_2(T_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, T_m(a_1, \ldots, a_n))$$

$$= (T'_1(T_1(a_1, .., a_n), .., T_m(a_1, .., a_n)), .., T'_k(T_1(a_1, .., a_n), .., T_m(a_1, .., a_n)))$$

$$
\begin{aligned}
&= \left((T_1' \circ T)(a_1, \dots, a_n), \dots, (T_k' \circ T)(a_1, \dots, a_n) \right) \\
&= \left(\Xi_1 (a_1, \dots, a_n), \dots, \Xi_k (a_1, \dots, a_n) \right).
\end{aligned}
$$

Άρα η σύνθεση δυο πολυωνυμικών απεικονίσεων είναι όντως μια πολυωνυμική απεικόνιση. □

A-2-5. Έστω

$$\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \ni (a_1, \dots, a_n) \longmapsto \mathrm{pr}(a_1, \dots, a_n) := (a_1, \dots, a_\nu) \in \mathbb{A}^\nu_{\mathbf{k}}, \;\; 1 \leq \nu \leq n,$$

η απεικόνιση προβολής (στις πρώτες ν συντεταγμένες). Θεωρώντας τά πολυώνυμα

$$T_j(\mathsf{X}_1, \dots, \mathsf{X}_n) := \mathsf{X}_j, \;\; \forall j \in \{1, \dots, \nu\},$$

διαπιστώνουμε ότι

$$\mathrm{pr}(a_1, \dots, a_n) = (T_1(a_1, \dots, a_n), \dots, T_\nu(a_1, \dots, a_n)), \;\; \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},$$

οπότε η pr είναι πράγματι μια πολυωνυμική απεικόνιση. □

A-2-6. Το $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ έχει τον $\Gamma(\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}[\mathsf{T}]$ ως δακτύλιο συντεταγμένων. Το $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \smallsetminus \{0_{\mathbb{C}}\}$ μπορεί να θεωρηθεί ως συσχετική ποικιλότητα

$$\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \smallsetminus \{0_{\mathbb{C}}\} \cong \mathbf{V}(\mathsf{XY} - 1) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}.$$

Ισχυρισμός: $\Gamma(\mathbf{V}(\mathsf{XY} - 1)) = \mathbb{C}[\mathsf{T}, \mathsf{T}^{-1}] \subset \mathbb{C}(\mathsf{T})$ (Ο $\mathbb{C}[\mathsf{T}, \mathsf{T}^{-1}]$ είναι *ο δακτύλιος των πολυωνύμων Laurent μίας μεταβλητής*). Προφανώς, οι $\mathbb{C}[\mathsf{T}]$ και $\mathbb{C}[\mathsf{T}, \mathsf{T}^{-1}]$ δεν είναι μεταξύ τους ισόμορφοι (διότι $\mathsf{T}^{-1} \in \mathbb{C}[\mathsf{T}, \mathsf{T}^{-1}]^\times \smallsetminus \mathbb{C}[\mathsf{T}]^\times$), οπότε και τα $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ και $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \smallsetminus \{0_{\mathbb{C}}\}$ δεν είναι μεταξύ τους ισόμορφα.

Απόδειξη ισχυρισμού: Η απεικόνιση

$$\psi : \mathbb{C}[\mathsf{X}, \mathsf{Y}] \longrightarrow \mathbb{C}(\mathsf{T}), \quad F \longmapsto \psi(F(\mathsf{X}, \mathsf{Y})) := F(\mathsf{T}, \mathsf{T}^{-1}),$$

είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων με $\mathrm{Ker}(\psi) \supseteq \langle \mathsf{XY} - 1 \rangle$, οπότε επάγει τον εξής ομομορφισμό δακτυλίων:

$$\varphi : \mathbb{C}[\mathsf{X}, \mathsf{Y}] / \langle \mathsf{XY} - 1 \rangle \longrightarrow \mathbb{C}(\mathsf{T}), \quad \overline{F} \longmapsto \varphi(\overline{F}) := \psi(F).$$

Ο φ είναι μονομορφισμός. Πράγματι· εκτελώντας τή διαίρεση τού F διά τού $\mathsf{XY} - 1$ εντός τού $\mathbb{C}(\mathsf{X})[\mathsf{Y}]$ λαμβάνουμε

$$F(\mathsf{X}, \mathsf{Y}) = (\mathsf{XY} - 1) \cdot Q(\mathsf{Y}) + \Xi(\mathsf{X}),$$

όπου το $Q(\mathsf{Y})$ είναι ένα πολυώνυμο με συντελεστές ειλημμένους τού $\mathbb{C}\left(\mathsf{X}\right)$ και $\Xi \in \mathbb{C}\left(\mathsf{X}\right)$. Πολλαπλασιάζοντας τα μέλη τής ανωτέρω ισότητας με το ε.κ.π. $B\left(\mathsf{X}\right)$ $(\neq 0)$ των παρονομαστών τού Ξ και των συντελεστών τού Q καταλήγουμε σε μια πολυωνυμική εξίσωση τής μορφής:

$$B\left(\mathsf{X}\right) \cdot F(\mathsf{X},\mathsf{Y}) = (\mathsf{X}\mathsf{Y}-1) \cdot \widehat{Q}(\mathsf{Y}) + \widehat{\Xi}\left(\mathsf{X}\right).$$

Εάν $\varphi(\overline{F}) = 0$, τότε $\widehat{\Xi}\left(\mathsf{T}\right) = 0 \Longrightarrow \widehat{\Xi} = 0 \Longrightarrow \overline{F} = 0$. Άρα $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$. Επιπροσθέτως,

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \left\{ f \in \mathbb{C}\left(\mathsf{T}\right) \;\middle|\; \exists F \in \mathbb{C}[\mathsf{T}] \text{ και } \exists k \in \mathbb{N}_0 : f(\mathsf{T}) = \frac{F(\mathsf{T})}{\mathsf{T}^k} \right\} = \mathbb{C}[\mathsf{T},\mathsf{T}^{-1}],$$

οπότε $\Gamma(\mathbf{V}(\mathsf{X}\mathsf{Y}-1)) = \mathbb{C}[\mathsf{T},\mathsf{T}^{-1}] \subset \mathbb{C}\left(\mathsf{T}\right)$. □

A-2-7. (a) Εάν η $\varphi : \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ είναι ένας αυτομορφισμός τής συσχετικής ποικιλότητας $\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ και $\psi : \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ η αντίστροφός της, τότε η επαγομένη απεικόνιση

$$\widetilde{\varphi} : \mathbf{k}[\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}] \cong \mathbf{k}[\mathsf{T}] \longrightarrow \mathbf{k}[\mathsf{T}] \cong \mathbf{k}[\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}], \;\; F \longmapsto F \circ \varphi,$$

είναι ένας $\mathbf{k}$-αυτομορφισμός τού πολυωνυμικού δακτυλίου $\mathbf{k}[\mathsf{T}]$ (με την $\widetilde{\psi}$ ως αντίστροφό της, πρβλ. άσκηση **A-2-4**). Η $\widetilde{\varphi}$ καθορίζεται πλήρως από το στοιχείο $\widetilde{\varphi}(\mathsf{T})$, διότι για κάθε $G(\mathsf{T}) = \sum_{\nu=0}^{d} \lambda_\nu \mathsf{T}^\nu \in \mathbf{k}[\mathsf{T}]$ έχουμε

$$\widetilde{\varphi}(G(\mathsf{T})) = G(\varphi(\mathsf{T})) = \sum_{\nu=0}^{d} \lambda_\nu \varphi(\mathsf{T})^\nu = \sum_{\nu=0}^{d} \lambda_\nu (\mathsf{T}\circ\varphi)^\nu = \sum_{\nu=0}^{d} \lambda_\nu \widetilde{\varphi}(\mathsf{T})^\nu.$$

Επιπροσθέτως,

$$G(\mathsf{T}) = \widetilde{\psi}(\widetilde{\varphi}(G(\mathsf{T}))) = \sum_{\nu=0}^{m} \lambda_\nu \widetilde{\psi}\left(\widetilde{\varphi}(\mathsf{T})\right)^\nu = \sum_{\nu=0}^{m} \lambda_\nu \left(\widetilde{\psi}\left(\widetilde{\varphi}(\mathsf{T})\right)\right)^\nu \Rightarrow \widetilde{\psi}\left(\widetilde{\varphi}(\mathsf{T})\right) = \mathsf{T}.$$

Ας υποθέσουμε ότι

$$\widetilde{\varphi}(\mathsf{T}) = \sum_{i=0}^{m} a_i \mathsf{T}^i \in \mathbf{k}[\mathsf{T}], \quad \widetilde{\psi}\left(\mathsf{T}\right) = \sum_{j=0}^{n} b_j \mathsf{T}^j \in \mathbf{k}[\mathsf{T}].$$

Τότε

$$\mathsf{T} = \widetilde{\psi}\left(\widetilde{\varphi}(\mathsf{T})\right) = \sum_{i=0}^{m} a_i \widetilde{\psi}(\mathsf{T})^i, \quad \mathsf{T} = \widetilde{\varphi}\left(\widetilde{\psi}(\mathsf{T})\right) = \sum_{j=0}^{n} b_j \widetilde{\varphi}(\mathsf{T})^j,$$

οπότε

$$\frac{d}{d\mathsf{T}}\widetilde{\psi}\left(\widetilde{\varphi}(\mathsf{T})\right) = \frac{d}{d\mathsf{T}}\widetilde{\psi}\left(\mathsf{T}\right) \cdot \left(\widetilde{\psi}\left(\frac{d}{d\mathsf{T}}\widetilde{\varphi}(\mathsf{T})\right)\right) = 1_{\mathbf{k}[\mathsf{T}]} = 1_{\mathbf{k}},$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\frac{d}{d\mathsf{T}}\widetilde{\psi}\,(\mathsf{T}) \in \mathbf{k}[\mathsf{T}]^{\times} = \mathbf{k}\smallsetminus\{0_{\mathbf{k}}\} \Rightarrow n = 1.$$

Κατ' αναλογίαν,

$$\frac{d}{d\mathsf{T}}\widetilde{\varphi}\,(\mathsf{T}) \in \mathbf{k}[\mathsf{T}]^{\times} = \mathbf{k}\smallsetminus\{0_{\mathbf{k}}\} \Rightarrow m = 1.$$

Επομένως,

$$\mathsf{T} = \widetilde{\psi}\,(\widetilde{\varphi}(\mathsf{T})) = \sum_{i=0}^{1} a_i(b_0 + b_1\mathsf{T})^i = (a_0 + a_1 b_0) + a_1 b_1 \mathsf{T}$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a_0 + a_1 b_0 = 0_{\mathbf{k}} \\ a_1 b_1 = 1_{\mathbf{k}} \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a_1 \neq 0_{\mathbf{k}},\; b_1 \neq 0_{\mathbf{k}}, \\ a_1^{-1} = b_1,\; a_0 = -a_1 b_0 \end{array} \right\}.$$

Εξ αυτού επαληθεύεται ο αρχικός ισχυρισμός.

(b) Εάν το $\mathbf{k}$ είναι ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα χαρακτηριστικής $p > 0$, η *απεικόνιση τού Frobenius* φ ορίζεται ως εξής:

$$\varphi : \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}, \quad t \longmapsto \varphi(t) := t^p.$$

Η φ είναι ενριπτική, διότι

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2) \Rightarrow 0_{\mathbf{k}} = t_1^p - t_2^p = (t_1 - t_2)^p \Rightarrow t_1 = t_2.$$

Επειδή το $\mathbf{k}$ είναι αλγεβρικώς κλειστό, η εξίσωση $\mathsf{X} - t^p = 0$ είναι επιλύσιμη, οπότε η φ είναι και επιρριπτική. Ως αμφιρριπτική πολυωνυμική απεικόνιση, η φ είναι ομοιομορφισμός ως προς την τοπολογία Zariski (αφού είναι προφανώς και ανοικτή απεικόνιση). Ωστόσο, δεν είναι αυτομορφισμός τού $\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$, καθόσον για κάθε πολυώνυμο $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}]$ έχουμε $F(\mathsf{X})^p = F(\mathsf{X}^p)$, κάτι που σημαίνει ότι δεν υφίσταται πολυώνυμο $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}]$ με την ιδιότητα $F(\mathsf{X})^p = \mathsf{X}$. (Εναλλακτικώς, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και το (a) γι' αυτό: Εάν η απεικόνιση τού Frobenius φ ήταν αυτομορφισμός τού $\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$, θα έπρεπε να υπάρχουν $a \in \mathbf{k}\smallsetminus\{0_{\mathbf{k}}\},\ b \in \mathbf{k}$, με $t^p = at + b$, $\forall t \in \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$, κάτι που θα οδηγούσε εκ νέου σε αντίφαση.) □

A-2-8. (a) Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\varphi : \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \longrightarrow V = \mathbf{V}\left(\mathsf{Y}^2 - \mathsf{X}^3\right) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}, \quad \varphi\,(t) := \left(t^2, t^3\right),$$

► *Η φ είναι ενριπτική* : Εάν $t_1, t_2 \in \mathbf{k}$ με $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, τότε

$$t_1^2 = t_2^2, \quad t_1^3 = t_2^3,$$

οπότε $t_1 = \pm t_2$ και ταυτοχρόνως (είτε $t_1 = t_2$ είτε $t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2 = 0$). Άρα $t_1 = t_2$.

► *Η φ είναι επιρριπτική*: Έστω τυχόν σημείο $(a,b) \in V$. Προφανώς, $a^3 = b^2$. Εάν $a = 0_{\mathbf{k}}$, τότε $b = 0_{\mathbf{k}}$ και $\varphi(0_{\mathbf{k}}) = (0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}})$. Εάν $a \neq 0_{\mathbf{k}}$, τότε $b \neq 0_{\mathbf{k}}$ και

$$\varphi\left(\tfrac{b}{a}\right) = \left(\tfrac{b^2}{a^2}, \tfrac{b^3}{a^3}\right) = \left(\tfrac{a^3}{a^2}, \tfrac{b^3}{b^2}\right) = (a,b).$$

► *Η φ δεν είναι ισομορφισμός*: Προφανώς, $\widetilde{\varphi}(\Gamma(V)) = \mathbf{k}[\mathsf{T}^2, \mathsf{T}^3] \subsetneqq \mathbf{k}[\mathsf{T}] = \Gamma(\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}})$. Μια πιο αναλυτική απόδειξη είναι η εξής: Η αντίστροφος τής φ είναι η

$$\psi : V \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}, \ \ \psi(a,b) := \begin{cases} 0_{\mathbf{k}}, & \text{όταν } (a,b) = (0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}}), \\ \frac{b}{a}, & \text{όταν } (a,b) \neq (0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}}). \end{cases}$$

Η ψ δεν είναι πολυωνυμική απεικόνιση. Πράγματι· εάν η ψ ήταν μια πολυωνυμική απεικόνιση (και -κατ' επέκτασιν- αμφότερες οι φ, ψ ισομορφισμοί), τότε θα υπήρχε πολυώνυμο $T \in \mathbf{k}[\mathsf{X}, \mathsf{Y}]$, τέτοιο ώστε να ισχύει $\psi(a,b) = T(a,b)$ για κάθε $(a,b) \in V$. Κατά συνέπειαν, θα ίσχυε

$$\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}} \Rightarrow \psi(\varphi(t)) = T\left(t^2, t^3\right) = t, \ \ \forall t \in \mathbf{k}.$$

Όμως κανένα πολυώνυμο $T \in \mathbf{k}[\mathsf{X}, \mathsf{Y}]$ δεν πληροί αυτήν την ισότητα. Άτοπο!

(b) Η πολυωνυμική απεικόνιση

$$\varphi : \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \longrightarrow V = \mathbf{V}\left(\mathsf{Y}^2 - \mathsf{X}^2(\mathsf{X} + 1_{\mathbf{k}})\right) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}, \ \ \varphi(t) := \left(t^2 - 1_{\mathbf{k}}, \ t\left(t^2 - 1_{\mathbf{k}}\right)\right),$$

είναι αμφιρριπτική, με μόνη εξαίρεση στα σημεία $\varphi(\pm 1_{\mathbf{k}}) = (0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}})$. Πράγματι· εάν $t_1, t_2 \in \mathbf{k} \smallsetminus \{\pm 1_{\mathbf{k}}\}$ με $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, τότε

$$\left.\begin{array}{r} t_1^2 - 1_{\mathbf{k}} = t_2^2 - 1_{\mathbf{k}}, \ t_1, t_2 \notin \{\pm 1_{\mathbf{k}}\} \\ t_1\left(t_1^2 - 1_{\mathbf{k}}\right) = t_2\left(t_2^2 - 1_{\mathbf{k}}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow t_1 = t_2.$$

Έστω τώρα τυχόν στοιχείο $(a,b) \in V$. Προφανώς, $b^2 = a^2(a + 1_{\mathbf{k}})$. Εάν $a = 0_{\mathbf{k}}$, τότε $b = 0_{\mathbf{k}}$ και $\varphi(0_{\mathbf{k}}) = (0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}})$. Εάν $a \neq 0_{\mathbf{k}}$, τότε

$$\varphi\left(\tfrac{b}{a}\right) = \left(\tfrac{b^2}{a^2} - 1_{\mathbf{k}}, \tfrac{b}{a}\left(\tfrac{b^2}{a^2} - 1_{\mathbf{k}}\right)\right) = (a,b).$$

Άρα ο ισχυρισμός είναι αληθής. □

A-2-9. Έστω $V = \mathbf{V}\left(\mathsf{X}^2 - \mathsf{Y}^3, \mathsf{Y}^2 - \mathsf{Z}^3\right) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$, όπως στην άσκηση **A-1-54**, και

$$\overline{\alpha} : \Gamma(V) = \mathbf{k}[\mathsf{X}, \mathsf{Y}, \mathsf{Z}] / \mathbf{I}(V) \longrightarrow \mathbf{k}[\mathsf{T}], \ \ \overline{\alpha}(F + \mathbf{I}(V)) := \alpha(F), \ \ \forall F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}, \mathsf{Y}, \mathsf{Z}],$$

η απεικόνιση η επαγομένη από τον ομομορφισμό α τής ιδίας ασκήσεως.

(a) Εκείνη η πολυωνυμική απεικόνιση $\varphi : \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \to V$ για την οποία ισχύει

$$\theta_{\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}} \circ \widetilde{\varphi}\,\big|_{\mathbf{k}[V]} \circ \theta_V^{-1} = \overline{\alpha}$$

είναι η

$$\varphi(t) = (T_1(t), T_2(t), T_3(t)), \quad T_1(t) := t^9,\ T_2(t) := t^6,\ T_3(t) := t^4,$$

διότι

$$\widetilde{\varphi} : \Gamma(V) = \mathbf{k}\,[\mathsf{X}, \mathsf{Y}, \mathsf{Z}]\,/\mathbf{I}(V) \longrightarrow \mathbf{k}[\mathsf{T}] = \Gamma(\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}), \quad \widetilde{\varphi}(F + \mathbf{I}(V)) = F(T_1, T_2, T_3).$$

(b) Η φ είναι ενριπτική, διότι για $t_1, t_2 \in \mathbf{k}$ με $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ έχουμε

$$\left.\begin{array}{c} t_1^9 = t_2^9 \\ t_1^6 = t_2^6 \\ t_1^4 = t_2^4 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{c} t_1^3 = t_2^3 \\ t_1^4 = t_2^4 \end{array}\right\} \Rightarrow t_1 = t_2.$$

Έστω τώρα τυχόν σημείο $(a, b, c) \in V$. Προφανώς, $a^2 = b^3$ και $b^2 = c^3$. Εάν $a = 0_{\mathbf{k}}$, τότε $b = c = 0_{\mathbf{k}}$ και $\varphi\,(0_{\mathbf{k}}) = (0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}})$. Εάν $a \neq 0_{\mathbf{k}}$, τότε

$$\varphi\left(\tfrac{bc}{a}\right) = \left(\tfrac{b^9c^9}{a^9}, \tfrac{b^6c^6}{a^6}, \tfrac{b^4c^4}{a^4}\right) = (a, b, c).$$

Άρα η φ είναι και επιρριπτική. Όμως η φ δεν είναι ισομορφισμός, διότι ισχύει η αυστηρή εγκλειστική σχέση $\widetilde{\varphi}(\Gamma\,(V)) = \mathbf{k}\left[\mathsf{T}^9, \mathsf{T}^6, \mathsf{T}^4\right] \subsetneqq \mathbf{k}[\mathsf{T}] = \Gamma(\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}})$. □

A-2-10. Έστω $f \in \mathbf{k}[V] \cong \Gamma\,(V)$, όπου $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ ένα αλγεβρικό σύνολο, και έστω

$$\mathrm{Gr}\,(f) := \left\{(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}} \mid (a_1, \ldots, a_n) \in V \text{ και } a_{n+1} = f\,(a_1, \ldots, a_n)\right\}.$$

το *γράφημα* τής f.

(a) Επειδή $f \in \mathbf{k}[V]$,

$$[\exists F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] : f\,(a_1, \ldots, a_n) = F\,(a_1, \ldots, a_n)\,,\ \forall\,(a_1, \ldots, a_n) \in V]\,,$$

οπότε το $\mathrm{Gr}(f)$ είναι ένα αλγεβρικό υποσύνολο τού $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}}$, διότι

$$\mathrm{Gr}\,(f) = \mathbf{V}(\langle \mathsf{X}_{n+1} - F(\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n)\rangle \cup \mathbf{I}(V)) = \mathbf{V}(\mathsf{X}_{n+1} - F(\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n)) \cap V.$$

(b) Η απεικόνιση

$$V \ni (a_1, \ldots, a_n) \overset{\varphi}{\longmapsto} ((a_1, \ldots, a_n)\,, f\,(a_1, \ldots, a_n)) \in \mathrm{Gr}\,(f)$$

ορίζει έναν ισομορφισμό μεταξύ των V και $\mathrm{Gr}(f)$. Πράγματι· θεωρώντας τά πολυώνυμα

$$T_j(\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n) := \mathsf{X}_j, \forall j \in \{1, \ldots, n\},\ T_{n+1}(\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n) := F(\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n),$$

διαπιστώνουμε ότι

$$\varphi(a_1,\ldots,a_n) = (T_1(a_1,\ldots,a_n),\ldots,T_{n+1}(a_1,\ldots,a_n)),\ \ \forall (a_1,\ldots,a_n) \in V.$$

Εξάλλου, επειδή

$$\varphi \circ \mathrm{pr} = \mathrm{Id}_{\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{n+1}}, \quad \mathrm{pr} \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{n}},$$

όπου pr: $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{n}$ η απεικόνιση προβολής (η οποία είναι πολυωνυμική κατά την άσκηση **A-2-5**), η φ είναι όντως ισομορφισμός.

(c) Το γράφημα $\mathrm{Gr}(f)$ τής f αποτελεί την εικόνα τού V μέσω τής φ. Επειδή η φ είναι πολυωνυμική απεικόνιση, είναι και συνεχής ως προς την τοπολογία Zariski (βλ. πρόταση 2.1.14). Κι επειδή οι εικόνες αναγώγων συσχετικών συνόλων μέσω συνεχών απεικονίσεων είναι ανάγωγα συσχετικά σύνολα (βλ. πρόταση 2.1.7), το $\mathrm{Gr}(f)$ είναι συσχετική ποικιλότητα όταν το V είναι συσχετική ποικιλότητα. □

A-2-11. (a) Για κάθε $f \in \mathbf{k}[V]$ έχουμε $f|_W = f \circ i \in \mathbf{k}[W]$, όπου $i : W \hookrightarrow V$ η συνήθης ένθεση.

(b) Ο πυρήνας τού επιμορφισμού

$$\theta_W \circ \widetilde{i}\,\big|_{\mathbf{k}[V]} \circ \theta_V^{-1} : \Gamma(V) \longrightarrow \Gamma(W), \quad \theta_V(f) = F + \mathbf{I}(V) \longmapsto \theta_W(f|_W),$$

είναι το ιδεώδες

$$\left\{F + \mathbf{I}(V) \in \Gamma(V) \ \middle|\theta_W(\,\widetilde{i}\,\big|_{\mathbf{k}[V]}\ (f)) = \theta_W(f|_W) = F + \mathbf{I}(W) = \mathbf{I}(W) = 0_{\Gamma(W)}\right\}$$

$$= \{F + \mathbf{I}(V) \in \Gamma(V)\ | F \in \mathbf{I}(W)\} = \mathbf{I}_V(W),$$

οπότε $\Gamma(W) \cong \Gamma(V)/\mathbf{I}_V(W)$ βάσει τού 1ου θεωρήματος ισομορφισμών δακτυλίων 1.1.10. □

A-2-12. (a) Λαμβάνοντας υπ' όψιν την άσκηση **A-2-11**, το αποδεικτέο περιλαμβάνει τη συμπλήρωση τού διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(W) \arrow[r, "\theta_V \circ \widetilde{\varphi}|_{\mathbf{k}[W]} \circ \theta_W^{-1}"] \arrow[d, "\pi_W"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \Gamma(V) \arrow[d, "\pi_V"] \\
\Gamma(W)/\mathbf{I}_W(W') \cong \Gamma(W') \arrow[r, dashed] & \Gamma(V') \cong \Gamma(V)/\mathbf{I}_V(V')
\end{tikzcd}$$

(όπου π_W και π_V οι αντίστοιχοι φυσικοί επιμορφισμοί). Επειδή η $\varphi : V \longrightarrow W$ είναι πολυωνυμική απεικόνιση, υπάρχουν πολυώνυμα $T_1, \dots, T_m$ από τον $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \dots, \mathsf{X}_n]$, τέτοια ώστε να ισχύει η ισότητα

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) = (T_1(a_1, \dots, a_n), \dots, T_m(a_1, \dots, a_n)), \ \forall (a_1, \dots, a_n) \in V.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\left(\theta_V \circ \widetilde{\varphi}\,|_{\mathbf{k}[W]} \circ \theta_W^{-1}\right)\left(\mathbf{I}_W(W')\right) = \left(\theta_V \circ \widetilde{\varphi}\,|_{\mathbf{k}[W]} \circ \theta_W^{-1}\right)\left(\{F + \mathbf{I}(W) \in \Gamma(W) \ |F \in \mathbf{I}(W')\}\right)$$

$$= \{F(T_1, \dots, T_m) + \mathbf{I}(V) \in \Gamma(V) \ |F \in \mathbf{I}(W')\} \subseteq \{G + \mathbf{I}(V) \in \Gamma(V) \ |G \in \mathbf{I}(V')\} = \mathbf{I}_V(V').$$

Αιτιολόγηση τού εγκλεισμού: Εάν $F \in \mathbf{I}(W')$ και $(a_1, \dots, a_n) \in V'$, τότε

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) = (T_1(a_1, \dots, a_n), \dots, T_m(a_1, \dots, a_n)) \in \varphi(V') \subseteq W'.$$

Ως εκ τούτου,

$$F(T_1(a_1, \dots, a_n), \dots, T_m(a_1, \dots, a_n)) = 0_{\mathbf{k}}, \ \forall (a_1, \dots, a_n) \in V',$$

απ' όπου έπεται ότι $F(T_1, \dots, T_m) \in \mathbf{I}(V')$.

(b) Επειδή

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) = (T_1(a_1, \dots, a_n), \dots, T_m(a_1, \dots, a_n)), \ \ \forall (a_1, \dots, a_n) \in V'$$

ο περιορισμός $\varphi|_{V'} : V' \longrightarrow \varphi(V') \subseteq W'$ είναι πολυωνυμική απεικόνιση. (Σημειωτέον ότι η εικόνα $\varphi(V')$ τής V' μέσω τής φ είναι υποποικιλότητα τής W' λόγω των προτάσεων 2.1.7 και 2.1.14.) □

A-2-13. Επειδή η $\varphi : V \longrightarrow W$ είναι πολυωνυμική απεικόνιση, υπάρχουν πολυώνυμα $T_1, \dots, T_m$ από τον $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \dots, \mathsf{X}_n]$, τέτοια ώστε να ισχύει η ισότητα

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) = (T_1(a_1, \dots, a_n), \dots, T_m(a_1, \dots, a_n)), \ \forall (a_1, \dots, a_n) \in V.$$

Εάν το X είναι ένα αλγεβρικό υποσύνολο τής W, τότε

$$\exists \mathcal{S} \subseteq \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \dots, \mathsf{X}_n] : X = \mathbf{V}(\mathcal{S}).$$

Κατά συνέπειαν,

$$\varphi^{-1}(X) = \varphi^{-1}(\mathbf{V}(\mathcal{S})) = \varphi^{-1}(\bigcap\{\mathbf{V}(F) \ |F \in \mathcal{S}\}) = \bigcap\{\varphi^{-1}(\mathbf{V}(F)) \ |F \in \mathcal{S}\},$$

όπου

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\mathbf{V}(F)) &= \{(a_1, \dots, a_n) \in V \ |\varphi(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(F)\} \\ &= \{(a_1, \dots, a_n) \in V \ |(T_1(a_1, \dots, a_n), \dots, T_m(a_1, \dots, a_n)) \in \mathbf{V}(F)\} \\ &= \{(a_1, \dots, a_n) \in V \ |F(T_1(a_1, \dots, a_n), \dots, T_m(a_1, \dots, a_n)) = 0_{\mathbf{k}}\} \\ &= \mathbf{V}(F(T_1, \dots, T_m)), \end{aligned}$$

οπότε το

$$\varphi^{-1}(X) = \bigcap\{\mathbf{V}(F(T_1, \ldots, T_m)) \ |F \in \mathcal{S}\}$$

είναι αλγεβρικό σύνολο επί τη βάσει τού (2) τής προτάσεως 1.2.3. Επιπροσθέτως, εάν το $\varphi^{-1}(X)$ είναι ανάγωγο (ήτοι μια υποποικιλότητα τής V), τότε (λόγω τής επιρριπτικότητας τής φ) έχουμε $X = \varphi(\varphi^{-1}(X))$, οπότε και το X είναι ανάγωγο (ήτοι μια υποποικιλότητα τής W) επί τη βάσει των προτάσεων 2.1.7 και 2.1.14. □

A-2-14. (a) Κατά την άσκηση **A-1-11** (a) το $\left\{\left(t, t^2, t^3\right) \in \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}} \mid t \in \mathbf{k}\right\}$ είναι αλγεβρικό σύνολο εντός τού $\mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$. Επειδή αυτό αποτελεί την εικόνα τής πολυωνυμικής απεικονίσεως

$$\mathbb{A}^3_{\mathbf{k}} \ni t \longmapsto \left(t, t^2, t^3\right) \in \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}},$$

είναι και συσχετική ποικιλότητα (επί τη βάσει των προτάσεων 2.1.7 και 2.1.14.).
(b) Έστω $V := \mathbf{V}(\mathsf{XZ} - \mathsf{Y}^2, \mathsf{YZ} - \mathsf{X}^3, \mathsf{Z}^2 - \mathsf{X}^2\mathsf{Y}) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$. Παρατηρούμε ότι

$$\mathsf{Y}^3 - \mathsf{X}^4 = (-\mathsf{Y})\left(\mathsf{XZ} - \mathsf{Y}^2\right) + \mathsf{X}\left(\mathsf{YZ} - \mathsf{X}^3\right) \in \left\langle \mathsf{XZ} - \mathsf{Y}^2, \mathsf{YZ} - \mathsf{X}^3, \mathsf{Z}^2 - \mathsf{X}^2\mathsf{Y}\right\rangle \subseteq \mathbf{I}(V),$$

$$\mathsf{Z}^3 - \mathsf{X}^5 = \mathsf{X}^2\left(\mathsf{YZ} - \mathsf{X}^3\right) + \mathsf{Z}\left(\mathsf{Z}^2 - \mathsf{X}^2\mathsf{Y}\right) \in \left\langle \mathsf{XZ} - \mathsf{Y}^2, \mathsf{YZ} - \mathsf{X}^3, \mathsf{Z}^2 - \mathsf{X}^2\mathsf{Y}\right\rangle \subseteq \mathbf{I}(V),$$

$$\mathsf{Z}^4 - \mathsf{Y}^5 = \mathsf{Z}^2\left(\mathsf{Z}^2 - \mathsf{X}^2\mathsf{Y}\right) + \left(\mathsf{XYZ} + \mathsf{Y}^3\right)\left(\mathsf{XZ} - \mathsf{Y}^2\right) \in \left\langle \mathsf{XZ} - \mathsf{Y}^2, \mathsf{YZ} - \mathsf{X}^3, \mathsf{Z}^2 - \mathsf{X}^2\mathsf{Y}\right\rangle \subseteq \mathbf{I}(V).$$

Γι' αυτόν τον λόγο ορίζεται η πολυωνυμική απεικόνιση

$$\varphi : \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \longrightarrow V, \ \ t \longmapsto \varphi(t) := (t^3, t^4, t^5).$$

Η φ είναι επιρριπτική. Πράγματι· για οιοδήποτε σημείο $(a, b, c) \in V$ έχουμε

$$ac = b^2, \ \ bc = a^3, \ \ c^2 = a^2 b.$$

Εάν $b = 0_{\mathbf{k}}$, τότε $a = c = 0_{\mathbf{k}}$ και $\varphi\left(0_{\mathbf{k}}\right) = (0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}})$. Εάν $b \neq 0_{\mathbf{k}}$, τότε $a \neq 0_{\mathbf{k}}$ και

$$\varphi\left(\tfrac{b}{a}\right) = \varphi\left(\tfrac{c}{b}\right) = \left(\tfrac{c^3}{b^3}, \tfrac{c^4}{b^4}, \tfrac{c^5}{b^5}\right) = (a, b, c).$$

Κατά συνέπειαν, το V είναι συσχετική ποικιλότητα επί τη βάσει των προτάσεων 2.1.7 και 2.1.14. □

A-2-15. (a) Υποθέτουμε εν πρώτοις ότι τα $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ και $W \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ είναι συσχετικές ποικιλότητες. Παρατηρούμε ότι για κάθε $w \in W$ η προβολή τού $V \times W$ στον πρώτο παράγοντα ορίζει έναν ισομορφισμό μεταξύ των $V \times \{w\}$ και V. Κατ' αναλογίαν, τα $\{v\} \times W$ και W είναι ισόμορφα για κάθε $v \in V$. Ας υποθέσουμε ότι το γινόμενο $V \times W$ γράφεται ως ένωση $V \times W = Z_1 \cup Z_2$ δυο αλγεβρικών συνόλων Z_1, Z_2 εντός τού $\mathbb{A}^{n+m}_{\mathbf{k}}$. Τότε

$$V \times \{w\} = (V \times \{w\} \cap Z_1) \cup (V \times \{w\} \cap Z_2)\,, \ \forall w \in W.$$

Επειδή το $V \times \{w\}$ είναι ισόμορφο τής συσχετικής ποικιλότητας V και, ως εκ τούτου, ανάγωγο, έχουμε είτε $V \times \{w\} = V \times \{w\} \cap Z_1$ είτε $V \times \{w\} = V \times \{w\} \cap Z_2$, δηλαδή είτε $V \times \{w\} \subseteq Z_1$ είτε $V \times \{w\} \subseteq Z_2$. Για $i = 1, 2$ ορίζουμε

$$W_i := \{w \in W \mid V \times \{w\} \subseteq Z_i\}.$$

Προφανώς, $W = W_1 \cup W_2$. Εν συνεχεία, για κάθε $v \in V$ και $i = 1, 2$ ορίζουμε

$$W_i^{(v)} := \{w \in W \mid (v, w) \in Z_i\}.$$

Επειδή

$$\{v\} \times W_i^{(v)} = (\{v\} \times W) \cap Z_i,$$

το $\{v\} \times W_i^{(v)}$ (και κατ' επέκτασιν και το $W_i^{(v)}$ που είναι ισόμορφο αυτού) είναι αλγεβρικό σύνολο (ήτοι κλειστό σύνολο ως προς την τοπολογία Zariski) ως τομή δυο αλγεβρικών συνόλων. Κατά συνέπειαν, και τα

$$W_i = \bigcap_{v \in V} W_i^{(v)}, \;\; i = 1, 2,$$

είναι αλγεβρικά σύνολα ως τομή αλγεβρικών συνόλων. Επειδή το W υπετέθη ανάγωγο, αυτό σημαίνει ότι είτε $W = W_1$ είτε $W = W_2$. Στην πρώτη περίπτωση λαμβάνουμε $V \times W = Z_1$ και στη δεύτερη $V \times W = Z_2$. Άρα το γινόμενο $V \times W$ των V και W είναι μια συσχετική ποικιλότητα.

Και αντιστρόφως· εάν το $V \times W$ είναι μια συσχετική ποικιλότητα, τότε το V (και αντιστοίχως, το W) είναι η εικόνα τού $V \times W$ μέσω τής προβολής p_V (και αντιστοίχως, μέσω τής προβολής p_W). Σύμφωνα με την άσκηση **A-2-5** οι p_V και p_W (ως περιορισμοί των προβολών $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{n}$ και $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{m}$ επί των V και W, αντιστοίχως) είναι πολυωνυμικές απεικονίσεις και, ως εκ τούτου, συνεχείς απεικονίσεις ως προς την τοπολογία Zariski (βλ. πρόταση 2.1.14). Επειδή οι εικόνες αναγώγων συσχετικών συνόλων μέσω συνεχών απεικονίσεων είναι ανάγωγα συσχετικά σύνολα (βλ. πρόταση 2.1.7), τα V, W είναι συσχετικές ποικιλότητες.

(b) Εάν τα $V_1, \ldots, V_r$ είναι οι ανάγωγες συνιστώσες τού V και τα $W_1, \ldots, W_\nu$ οι ανάγωγες συνιστώσες τού W, τότε

$$V \times W = \bigcup \{V_i \times W_j \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq \nu\}.$$

Κι επειδή

$$V_i \nsubseteq V_{i'}, \;\; \forall i, i' \in \{1, 2, \ldots, r\}, \; i \neq i',$$

και

$$W_j \nsubseteq W_{j'}, \;\; \forall j, j' \in \{1, 2, \ldots, \nu\}, \; j \neq j',$$

απλοί συνολοθεωρητικοί συλλογισμοί μάς οδηγούν στο συμπέρασμα ότι

$$V_i \times W_j \not\subseteqq V_{i'} \times W_{j'},\ (i,j) \neq (i',j'),$$

οπότε τα $V_i \times W_j$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq \nu$, είναι οι ανάγωγες συνιστώσες τού $V \times W$. $\square$

A-2-16. Έστω $\varnothing \neq V = \mathbf{V}(F_1, \ldots, F_\kappa) \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ μια *γραμμική υποποικιλότητα* τού συσχετικού χώρου $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ (όπου $F_1, \ldots, F_\kappa \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ κάποια *πρωτοβάθμια* πολυώνυμα).

(a) Εάν η $T = (T_1, \ldots, T_n) : \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ είναι μια συσχετική αλλαγή συντεταγμένων τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$, τότε το V^T είναι μια γραμμική υποποικιλότητα τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$, διότι

$$V^T = \mathbf{V}(\mathbf{I}(V)^T) = \mathbf{V}(F_1^T, \ldots, F_\kappa^T)$$

και τα $F_\nu^T = \widetilde{T}(F_\nu) = F_\nu(T_1, \ldots, T_n)$ είναι πρωτοβάθμια πολυώνυμα $\forall \nu \in \{1, \ldots, \kappa\}$. Ας σημειωθεί ότι εάν

$$T_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}\mathsf{X}_j + a_{i\,0},\ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\},$$

και

$$F_\nu = \sum_{j=1}^{n} b_{\nu\,j}\mathsf{X}_j + b_{\nu\,0},\ \ \forall \nu \in \{1, \ldots, \kappa\},$$

τότε το V^T, με τη βοήθεια πινάκων, γράφεται ως εξής:

$$V^T = \mathbf{V}(F_1^T, \ldots, F_\kappa^T) = \mathbf{V}\left(\left\{ \sum_{j=1}^{n} b_{\nu\,j}T_j + b_{\nu\,0} \,\middle|\, 1 \leq \nu \leq \kappa \right\}\right) = \mathbf{V}\left(\mathcal{B} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathcal{X} + \mathcal{E}\right)$$

όπου

$$\mathbf{b}_\mu := \begin{pmatrix} b_{1\,\mu} \\ \vdots \\ b_{\kappa\,\mu} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{\kappa\times 1}(\mathbf{k}),\ \ \mathbf{a}_\mu := \begin{pmatrix} a_{1\,\mu} \\ \vdots \\ a_{n\,\mu} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(\mathbf{k}),\ \forall \mu \in \{0, 1, \ldots, n\},$$

και

$$\mathcal{B} := \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{\kappa\times n}(\mathbf{k}),\ \ \mathcal{A} := \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n; \mathbf{k}),$$

$$\mathcal{X} := \begin{pmatrix} \mathsf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathsf{X}_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]),\quad \mathcal{E} := \mathcal{B} \cdot \mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0 \in \mathrm{Mat}_{\kappa\times 1}(\mathbf{k}).$$

(b) Θα δείξουμε μέσω επαγωγής επί τού κ ότι υπάρχει μια συσχετική αλλαγή συντεταγμένων

$$T = (T_1, \ldots, T_n)\,, \;\; T_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}\mathsf{X}_j + a_{i\,0}, \; \forall i \in \{1, \ldots, n\},$$

τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ με

$$V^T = \mathbf{V}(\mathsf{X}_{m+1}, \ldots, \mathsf{X}_n).$$

Για $\kappa = 1, \; F_1 = \sum_{j=1}^{n} b_{1\,j}\mathsf{X}_j + b_{1\,0}$,

$$V^T = \mathbf{V}(F_1^T) = \mathbf{V}\left(\left(\sum_{j=1}^{n} b_{1\,j}a_{j\,1}\right)\mathsf{X}_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n} b_{1\,j}a_{j\,n}\right)\mathsf{X}_n + \sum_{j=1}^{n} b_{1\,j}a_{j\,0} + b_{1\,0}\right).$$

Επειδή $\deg(F_1) = 1$, τουλάχιστον ένας εκ των $b_{1\,j}, j \in \{1, \ldots, n\}$, είναι $\neq 0_{\mathbf{k}}$. Θέτουμε

$$a_{j\,i} := 0_{\mathbf{k}}, \; \forall (i,j) \in \{1, \ldots, n-1\} \times \{1, \ldots, n\},$$

και παρατηρούμε ότι η εξίσωση

$$\sum_{j=1}^{n} b_{1\,j}a_{j\,n} = 1_{\mathbf{k}}$$

(με τα $a_{1\,n}, \ldots, a_{n\,m}$ ως αγνώστους), καθώς και η εξίσωση

$$\sum_{j=1}^{n} b_{1\,j}a_{j\,0} = -b_{1\,0}$$

(με τα $a_{1\,0}, \ldots, a_{n\,0}$ ως αγνώστους) διαθέτουν λύσεις. Άρα υπάρχει μια συσχετική αλλαγή συντεταγμένων T με $V^T = \mathbf{V}(\mathsf{X}_n)$. Εν συνεχεία, υποθέτουμε ότι για οιαδήποτε γραμμική ποικιλότητα που ορίζεται από $\kappa - 1$ πρωτοβάθμια πολυώνυμα

$$F_\nu = \sum_{j=1}^{n} b_{\nu\,j}\mathsf{X}_j + b_{\nu\,0} \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n], \;\; \nu \in \{1, \ldots, \kappa - 1\},$$

(για κάποιον $\kappa \geq 2$) υπάρχει μια συσχετική αλλαγή συντεταγμένων T

$$T = (T_1, \ldots, T_n)\,, \;\; T_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}\mathsf{X}_j + a_{i\,0}, \; \forall i \in \{1, \ldots, n\},$$

τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ και ένας $m \in \mathbb{N}_0$ με

$$\mathbf{V}(F_1, \ldots, F_{\kappa-1})^T = \mathbf{V}(F_1^T, \ldots, F_{\kappa-1}^T) = \mathbf{V}(\mathsf{X}_{m+1}, \ldots, \mathsf{X}_n).$$

Έστω $F_\kappa = \sum_{j=1}^{n} b_{\kappa\, j}\mathsf{X}_j + b_{\kappa\, 0} \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ ένα επιπλέον πρωτοβάθμιο πολυώνυμο με

$$\mathbf{V}(F_1, \ldots, F_{\kappa-1}, F_\kappa)^T \neq \varnothing.$$

Προφανώς,

$$\mathbf{V}(F_1, \ldots, F_{\kappa-1}, F_\kappa)^T = \mathbf{V}(\mathsf{X}_{m+1}, \ldots, \mathsf{X}_n) \cap \mathbf{V}(F_\kappa^T)$$

και

$$\mathbf{V}(F_\kappa^T) = \mathbf{V}\left(c_1\mathsf{X}_1 + \cdots + c_n\mathsf{X}_n + c_0\right),$$

όπου

$$c_1 := \sum_{j=1}^{n} b_{\kappa\, j}a_{j\, 1},\ \ldots,\ c_n := \sum_{j=1}^{n} b_{\kappa\, j}a_{j\, n},\ \ c_0 := \sum_{j=1}^{n} b_{\kappa\, j}a_{j\, 0} + b_{\kappa\, 0}.$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: 1) Εάν $c_1 = \cdots = c_n = c_0 = 0_{\mathbf{k}}$, τότε

$$\mathbf{V}(F_1, \ldots, F_{\kappa-1}, F_\kappa)^T = \mathbf{V}(\mathsf{X}_{m+1}, \ldots, \mathsf{X}_n) \cap \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} = \mathbf{V}(\mathsf{X}_{m+1}, \ldots, \mathsf{X}_n).$$

2) Εάν κάποιος από τους συντελεστές $c_1, \ldots, c_m$ είναι $\neq 0_{\mathbf{k}}$, τότε

$$\mathbf{V}(F_1, \ldots, F_{\kappa-1}, F_\kappa)^T = \mathbf{V}\left(c_1\mathsf{X}_1 + \cdots + c_m\mathsf{X}_m + c_0\right) \cap \mathbf{V}(\mathsf{X}_{m+1}, \ldots, \mathsf{X}_n)$$

και υπάρχει συσχετική αλλαγή συντεταγμένων $U = (U_1, \ldots, U_n)$ τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$, τέτοια ώστε

$$\mathbf{V}\left(c_1\mathsf{X}_1 + \cdots + c_m\mathsf{X}_m + c_0\right)^U = \mathbf{V}(\mathsf{X}_m),\ \mathbf{V}(\mathsf{X}_{m+1}, \ldots, \mathsf{X}_n)^U = \mathbf{V}(\mathsf{X}_{m+1}, \ldots, \mathsf{X}_n)$$

οπότε έχουμε τελικώς

$$\left(\mathbf{V}(F_1, \ldots, F_{\kappa-1}, F_\kappa)^T\right)^U = \mathbf{V}(\mathsf{X}_m, \mathsf{X}_{m+1}, \ldots, \mathsf{X}_n).$$

(Όλες οι άλλες περιπτώσεις αποκλείονται από τη συνθήκη $\mathbf{V}(F_1, \ldots, F_\kappa)^T \neq \varnothing$.)

(c) Κατά το (b) υπάρχει συσχετική αλλαγή συντεταγμένων $T = (T_1, \ldots, T_n)$ τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ με

$$V^T = \mathbf{V}(\mathsf{X}_{m+1}, \ldots, \mathsf{X}_n).$$

Επειδή το $\langle \mathsf{X}_{m+1}, \ldots, \mathsf{X}_n \rangle$ είναι πρώτο ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ (αφού ισχύει $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] / \langle \mathsf{X}_{m+1}, \ldots, \mathsf{X}_n \rangle \cong \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_m]$, βλ. θεώρημα 1.1.13 και πρόταση 1.1.34 (a)), το V^T είναι συσχετική ποικιλότητα (βλ. πρόταση 1.6.7). Όμως το V^T είναι ισόμορφο τού V (βλ. πόρισμα 2.2.3), οπότε και το V είναι συσχετική ποικιλότητα.

(d) Ο μη αρνητικός ακέραιος αριθμός m ο εμφανιζόμενος στο (b) είναι ανεξάρτητος τής επιλογής τής συσχετικής αλλαγής συντεταγμένων T: Εάν υπήρχε μια συσχετική αλλαγή συντεταγμένων

$$T = (T_1, \ldots, T_n)\,,\ \ T_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}\mathsf{X}_j + a_{i\,0},\ \forall i \in \{1, \ldots, n\},$$

με

$$\mathbf{V}(\mathsf{X}_{m+1}, \ldots, \mathsf{X}_n)^T = \mathbf{V}(\mathsf{X}_{m'+1}, \ldots, \mathsf{X}_n),$$

όπου $m < m'$, τότε οι $T_{m+1}, \ldots, T_n$ θα ήταν μεταξύ τους εξαρτημένες. Πράγματι· η ανωτέρω εξίσωση θα έδινε

$$\mathbf{V}(T_{m+1}, \ldots, T_n) = \mathbf{V}(\mathsf{X}_{m'+1}, \ldots, \mathsf{X}_n). \tag{$\star$}$$

Στο δεξιό μέλος έχουμε κατ' ουσίαν έναν $\mathbf{k}$-διανυσματικό χώρο ισόμορφο τού $\mathbf{k}^{m'}$. Από την άλλη μεριά, το

$$\mathbf{V}(T_{m+1}, \ldots, T_n) = \mathbf{V}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{m+1\,j}\mathsf{X}_j + a_{m+1\,0}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{n\,j}\mathsf{X}_j + a_{n\,0}\right)$$

είναι ο χώρος των λύσεων ενός συστήματος $n-m$ γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους. Εάν οι εν λόγω εξισώσεις ήσαν μεταξύ τους ανεξάρτητες, τότε θα έπρεπε να ισχύει

$$\text{rank}(\mathcal{A}) = \text{rank}(\mathcal{A}') = n - m,$$

όπου

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} a_{m+1\,1} & \cdots & a_{m+1\,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,n} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{(n-m)\times n}(\mathbf{k})$$

ο πίνακας τού συστήματος και

$$\mathcal{A}' := \begin{pmatrix} a_{m+1\,1} & \cdots & a_{m+1\,n} & -a_{m+1\,0} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,n} & -a_{n\,0} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{(n-m)\times(n+1)}(\mathbf{k})$$

ο αντίστοιχος επαυξημένος πίνακας. Από τη Γραμμική Άλγεβρα είναι γνωστό ότι ο χώρος των λύσεων ενός συμβιβαστού συστήματος γραμμικών εξισώσεων (με συντελεστές ειλημμένους από το $\mathbf{k}$) εντός τού $\mathbf{k}^{\sharp(\text{πλήθος αγνώστων})}$ έχει διάσταση ίση με

$$\sharp(\text{πλήθος αγνώστων}) - (\text{βαθμίδα τού πίνακα τού συστήματος}).$$

Εν προκειμένω, η διάσταση θα έπρεπε να είναι

$$n - \mathrm{rank}(\mathcal{A}) = n - \mathrm{rank}(\mathcal{A}') = n - (n-m) = m < m',$$

κάτι που θα αντέφασκε προς την ισότητα $(\star)$. □

A-2-17. Για δυο σημεία

$$P = (a_1, \ldots, a_n),\ Q = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},$$

όπου $P \neq Q$, ορίζεται το σύνολο

$$\mathbb{L}(P,Q) := \{(a_1 + \lambda(b_1 - a_1), \ldots, a_n + \lambda(b_n - a_n)) \mid \lambda \in \mathbf{k}\}$$

ως *η ευθεία η διερχόμενη από τα* P *και* Q.

(a) Εάν η

$$T = (T_1, \ldots, T_n) : \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$$

είναι μια συσχετική αλλαγή συντεταγμένων τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ με

$$T_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}\mathsf{X}_j + a_{i\,0},\ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\},$$

τότε

$$T(\mathbb{L}(P,Q)) = (\{T_i\,(a_1 + \lambda(b_1 - a_1), \ldots, a_n + \lambda(b_n - a_n))\}_{1 \leq i \leq n})$$

$$= \left(\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}\,(a_j + \lambda(b_j - a_j)) + a_{i\,0}\right\}_{1 \leq i \leq n}\right)$$

$$= \left(\left\{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}a_j + a_{i\,0}\right) + \lambda\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}b_j + a_{i\,0}\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}a_j + a_{i\,0}\right)\right)\right\}_{1 \leq i \leq n}\right)$$

$$= \left(\{T_i\,(P) + \lambda\,(T_i\,(Q) - T_i\,(P))\}_{1 \leq i \leq n}\right) = \mathbb{L}(T(P), T(Q)).$$

(b) Επειδή $P \neq Q$, υπάρχει κάποιος δείκτης $i_\bullet \in \{1, \ldots, n\} : a_{i_\bullet} \neq b_{i_\bullet}$. Επομένως, κάθε ευθεία

$$\mathbb{L}(P,Q) = \mathbf{V}\left(\{(b_{i_\bullet} - a_{i_\bullet})\,(\mathsf{X}_i - a_i) - (\mathsf{X}_{i_\bullet} - a_{i_\bullet})\,(b_i - a_i) \mid 1 \leq i \leq n\ ,\ i \neq i_\bullet\}\right)$$

αποτελεί μια γραμμική υποποικιλότητα τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$. Θεωρώντας τή συσχετική αλλαγή συντεταγμένων $T = (T_1, \ldots, T_n)$ με

$$T_i := \begin{cases} \frac{\mathsf{X}_i + (\lambda_{i_\bullet} - a_{i_\bullet})(b_i - a_i)}{b_{i_\bullet} - a_{i_\bullet}} + a_i, & \text{όταν } i \in \{1, \ldots, n\} \smallsetminus \{i_\bullet\}, \\ \lambda_{i_\bullet}, & \text{όταν } i = i_\bullet, \end{cases}$$

όπου $\lambda_{i_\bullet} \in \mathbf{k}$, λαμβάνουμε

$$\mathbb{L}(P,Q)^T = \mathbf{V}(\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_{i_\bullet - 1}, \mathsf{X}_{i_\bullet + 1}, \ldots, \mathsf{X}_n).$$

Εν συνεχεία, θεωρώντας τή συσχετική αλλαγή συντεταγμένων $U = (U_1, \ldots, U_n)$ με

$$U_i := \begin{cases} \mathsf{X}_{i+1}, & \text{όταν } i \in \{1, \ldots, i_\bullet - 1\}, \\ \mathsf{X}_i, & \text{όταν } i \in \{i_\bullet + 1, \ldots, n\}, \end{cases}$$

λαμβάνουμε

$$\left(\mathbb{L}(P,Q)^T\right)^U = \mathbf{V}(\mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots, \mathsf{X}_n),$$

οπότε η $\mathbb{L}(P,Q)$ είναι όντως μια *μονοδιάστατη* γραμμική υποποικιλότητα τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$. Και αντιστρόφως· κάθε γραμμική μονοδιάστατη υποποικιλότητα V τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ ισούται με την ευθεία $\mathbb{L}(P,Q)$ που διέρχεται από δύο αυθαιρέτως επιλεγμένα σημεία της

$$P, Q \in V, \; P \neq Q,$$

διότι υπάρχει εξ υποθέσεως μια συσχετική αλλαγή συντεταγμένων $T = (T_1, \ldots, T_n)$ με

$$V^T = \mathbf{V}(\mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots, \mathsf{X}_n),$$

οπότε $T^{-1}(P), T^{-1}(Q) \in V^T$ και $\exists a, b \in \mathbf{k}$, $a \neq b$:

$$T^{-1}(P) = \{(a, 0_{\mathbf{k}}, \ldots, 0_{\mathbf{k}})\}, \; T^{-1}(Q) = \{(b, 0_{\mathbf{k}}, \ldots, 0_{\mathbf{k}})\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L}(T^{-1}(P), T^{-1}(Q)) = \{(a + \lambda(b-a), 0_{\mathbf{k}}, \ldots, 0_{\mathbf{k}}) \mid \lambda \in \mathbf{k}\} \cong V^T \cong \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$$

$$\underset{\text{(a)}}{\Rightarrow} T^{-1}(\mathbb{L}(P,Q)) = V^T = T^{-1}(V) \underset{2.2.3}{\Longrightarrow} V = \mathbb{L}(P,Q).$$

(c) Εάν $P = (a_1, a_2), Q = (b_1, b_2) \in \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$, $P \neq Q$, τότε

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(P,Q) &= \{(a_1 + \lambda(b_1 - a_1), a_2 + \lambda(b_2 - a_2)) \mid \lambda \in \mathbf{k}\} \\ &= \mathbf{V}\left((b_1 - a_1)(\mathsf{X}_2 - a_2) - (b_2 - a_2)(\mathsf{X}_1 - a_1)\right). \end{aligned}$$

Και αντιστρόφως· εάν το $\mathbf{V}(\alpha\mathsf{X}_1+\beta\mathsf{X}_2+\gamma)$ είναι ένα υπερεπίπεδο εντός τού $\mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$, τότε το ορίζον πολυώνυμο έχει βαθμό 1, οπότε ένας τουλάχιστον εκ των α,β είναι $\neq 0_{\mathbf{k}}$. Δίχως βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\beta\neq 0_{\mathbf{k}}$. Προφανώς,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\alpha\mathsf{X}_1+\beta\mathsf{X}_2+\gamma) &= \{(a_1+\lambda(b_1-a_1),a_2+\lambda(b_2-a_2)) \mid \lambda\in\mathbf{k}\}\\ &= \mathbb{L}((a_1,a_2),(b_1,b_2)),\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{cases} a_1=0_{\mathbf{k}}, \quad a_2=-\frac{\gamma}{\beta}, \\ \\ b_1=1_{\mathbf{k}}, \quad b_2=-\frac{(\alpha+\gamma)}{\beta}.\end{cases}$$

Συνεπώς, εντός τού $\mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$ οι έννοιες «ευθεία» και «υπερεπίπεδο» ταυτίζονται.

(d) Εάν $P=(a_1,a_2)$, $P'=(a_1',a_2')\in\mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$ και οι $\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_2,\mathbb{L}_1',\mathbb{L}_2'$ είναι τέσσερεις ευθείες τού συσχετικού επιπέδου, τέτοιες ώστε

$$\mathbb{L}_1\neq\mathbb{L}_2,\ \ P\in\mathbb{L}_1\cap\mathbb{L}_2,\ \ \mathbb{L}_1'\neq\mathbb{L}_2',\ \ P'\in\mathbb{L}_1'\cap\mathbb{L}_2',$$

τότε υπάρχει μια συσχετική αλλαγή συντεταγμένων $T=(T_1,T_2)$ τού $\mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$ με

$$T(P)=P',\quad T(\mathbb{L}_1)=\mathbb{L}_1',\quad T(\mathbb{L}_2)=\mathbb{L}_2'. \tag{*}$$

Πράγματι· εκφράζοντας αυτές τις ευθείες (βάσει τού (c)) υπό τη μορφή υπερεπιπέδων

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_1&=\mathbf{V}(\alpha_1\mathsf{X}_1+\beta_1\mathsf{X}_2+\gamma_1),\quad \mathbb{L}_2=\mathbf{V}(\alpha_2\mathsf{X}_1+\beta_2\mathsf{X}_2+\gamma_2),\\ \mathbb{L}_1'&=\mathbf{V}(\alpha_1'\mathsf{X}_1+\beta_1'\mathsf{X}_2+\gamma_1'),\quad \mathbb{L}_2'=\mathbf{V}(\alpha_2'\mathsf{X}_1+\beta_2'\mathsf{X}_2+\gamma_2'),\end{aligned}$$

έχουμε

$$P=(a_1,a_2)=\left(\frac{\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1},\frac{\alpha_2\gamma_1-\alpha_1\gamma_2}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}\right)=\left(\frac{\begin{vmatrix}\beta_1 & \gamma_1\\ \beta_2 & \gamma_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}},\frac{\begin{vmatrix}\gamma_1 & \alpha_1\\ \gamma_2 & \alpha_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}}\right),$$

και

$$P'=(a_1',a_2')=\left(\frac{\beta_1'\gamma_2'-\beta_2'\gamma_1'}{\alpha_1'\beta_2'-\alpha_2'\beta_1'},\frac{\alpha_2'\gamma_1'-\alpha_1'\gamma_2'}{\alpha_1'\beta_2'-\alpha_2'\beta_1'}\right)=\left(\frac{\begin{vmatrix}\beta_1' & \gamma_1'\\ \beta_2' & \gamma_2'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha_1' & \beta_1'\\ \alpha_2' & \beta_2'\end{vmatrix}},\frac{\begin{vmatrix}\gamma_1' & \alpha_1'\\ \gamma_2' & \alpha_2'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha_1' & \beta_1'\\ \alpha_2' & \beta_2'\end{vmatrix}}\right).$$

Θέτοντας λοιπόν

$$T_1=a_{1\,1}\mathsf{X}_1+a_{1\,2}\mathsf{X}_2+a_{1\,0},\ T_2=a_{2\,1}\mathsf{X}_1+a_{2\,2}\mathsf{X}_2+a_{2\,0},$$

η πρώτη εκ των συνθηκών (*) ισοδυναμεί με το σύστημα δύο εξισώσεων:

$$T(P) = P' \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1)\ \ a_1 a_{1\,1} + a_2 a_{1\,2} + a_{1\,0} = a_1' \\ (2)\ \ a_1 a_{2\,1} + a_2 a_{2\,2} + a_{2\,0} = a_2' \end{array} \right\},$$

η δεύτερη δίδει

$$T(\mathbb{L}_1) = \mathbb{L}_1' \Leftrightarrow T(\mathbf{V}(\alpha_1 \mathsf{X}_1 + \beta_1 \mathsf{X}_2 + \gamma_1)) = \mathbf{V}(\alpha_1' \mathsf{X}_1 + \beta_1' \mathsf{X}_2 + \gamma_1')$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad \mathbf{V}(\alpha_1 \mathsf{X}_1 + \beta_1 \mathsf{X}_2 + \gamma_1) = \mathbf{V}(\alpha_1' \mathsf{X}_1 + \beta_1' \mathsf{X}_2 + \gamma_1')^T \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbf{V}(\alpha_1 \mathsf{X}_1 + \beta_1 \mathsf{X}_2 + \gamma_1) = \mathbf{V}(\alpha_1' T_1 + \beta_1' T_2 + \gamma_1') = \mathbf{V}(\alpha_1' T_1 + \beta_1' T_2 + \gamma_1') \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{V}(\alpha_1 \mathsf{X}_1 + \beta_1 \mathsf{X}_2 + \gamma_1) = \mathbf{V}((\alpha_1' a_{1\,1} + \beta_1' a_{2\,1})\mathsf{X}_1 + (\alpha_1' a_{1\,2} + \beta_1' a_{2\,2})\mathsf{X}_2 + \alpha_1' a_{1\,0} + \beta_1' a_{2\,0} + \gamma_1')$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\} : \left\{ \begin{array}{l} (3)\ \ \alpha_1' a_{1\,1} + \beta_1' a_{2\,1} = \lambda \alpha_1, \\ (4)\ \ \alpha_1' a_{1\,2} + \beta_1' a_{2\,2} = \lambda \beta_1, \\ (5)\ \ \alpha_1' a_{1\,0} + \beta_1' a_{2\,0} + \gamma_1' = \lambda \gamma_1 \end{array} \right\}$$

και η τρίτη (κατ' αναλογίαν):

$$T(\mathbb{L}_2) = \mathbb{L}_2' \Leftrightarrow T(\mathbf{V}(\alpha_2 \mathsf{X}_1 + \beta_2 \mathsf{X}_2 + \gamma_2)) = \mathbf{V}(\alpha_2' \mathsf{X}_1 + \beta_2' \mathsf{X}_2 + \gamma_2')$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad \mathbf{V}(\alpha_2 \mathsf{X}_1 + \beta_2 \mathsf{X}_2 + \gamma_2) = \mathbf{V}(\alpha_2' \mathsf{X}_1 + \beta_2' \mathsf{X}_2 + \gamma_2')^T \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbf{V}(\alpha_2 \mathsf{X}_1 + \beta_2 \mathsf{X}_2 + \gamma_2) = \mathbf{V}(\alpha_2' T_1 + \beta_2' T_2 + \gamma_2') \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{V}(\alpha_2 \mathsf{X}_1 + \beta_2 \mathsf{X}_2 + \gamma_2) = \mathbf{V}((\alpha_2' a_{1\,1} + \beta_2' a_{2\,1})\mathsf{X}_1 + (\alpha_2' a_{1\,2} + \beta_2' a_{2\,2})\mathsf{X}_2 + \alpha_2' a_{1\,0} + \beta_2' a_{2\,0} + \gamma_2')$$

$$\Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\} : \left\{ \begin{array}{l} (6)\ \ \alpha_2' a_{1\,1} + \beta_2' a_{2\,1} = \mu \alpha_2, \\ (7)\ \ \alpha_2' a_{1\,2} + \beta_2' a_{2\,2} = \mu \beta_2, \\ (8)\ \ \alpha_2' a_{1\,0} + \beta_2' a_{2\,0} + \gamma_2' = \mu \gamma_2 \end{array} \right\}$$

Άρα οι συνθήκες (*) ισοδυναμούν με ένα σύστημα 8 γραμμικών εξισώσεων με 8 αγνώστους, το οποίο, με τη βοήθεια πινάκων, γράφεται ως εξής:

$$\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} a_{1\,1} \\ a_{1\,2} \\ a_{1\,0} \\ a_{2\,1} \\ a_{2\,2} \\ a_{2\,0} \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ 0_{\mathbf{k}} \\ 0_{\mathbf{k}} \\ -\gamma_1' \\ 0_{\mathbf{k}} \\ 0_{\mathbf{k}} \\ -\gamma_2' \end{pmatrix}, \ \ \mathcal{A} := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} \\ 0_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & a_1 & a_2 & 1_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} \\ \alpha_1' & 0_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & \beta_1' & 0_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & -\alpha_1 & 0_{\mathbf{k}} \\ 0_{\mathbf{k}} & \alpha_1' & 0_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & \beta_1' & 0_{\mathbf{k}} & -\beta_1 & 0_{\mathbf{k}} \\ 0_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & \alpha_1' & 0_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & \beta_1' & -\gamma_1 & 0_{\mathbf{k}} \\ \alpha_2' & 0_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & \beta_2' & 0_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & -\alpha_2 \\ 0_{\mathbf{k}} & \alpha_2' & 0_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & \beta_2' & 0_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & -\beta_2 \\ 0_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & \alpha_2' & 0_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & \beta_2' & 0_{\mathbf{k}} & -\gamma_2 \end{pmatrix}.$$

Εκτελώντας τη διαδικασία διαγωνιοποιήσεως τού $\mathcal{A}$ κατά Smith (π.χ. μέσω MAPLE), αφού έχουμε γράψει τα a_1, a_2 συναρτήσει των $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, $i = 1, 2$, προσδιορίζουμε δύο αντιστρέψιμους (8×8)-πίνακες $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$, τέτοιους ώστε να ισχύει

$$\mathcal{P} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathcal{Q} = \mathrm{diag}\left(\underbrace{1_{\mathbf{k}}, \ldots, 1_{\mathbf{k}}}_{6\text{φφορές}}, 0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}}\right).$$

Άρα η βαθμίδα τού $\mathcal{A}$ ισούται με 6. Παρομοίως διαπιστώνουμε ότι η βαθμίδα τού επαυξημένου πίνακα τού συστήματος ισούται με 6. Κατά συνέπειαν το εν λόγω σύστημα είναι *συμβιβαστό* και οι λύσεις του συγκροτούν μια γραμμική υποποικιλότητα τού συσχετικού χώρου $\mathbb{A}^8_{\mathbf{k}}$ διαστάσεως 2. (Οι λ, μ μπορούν να θεωρηθούν ως οι *ελεύθερες παράμετροι.*) □

A-2-18. (a) Εάν $I \subseteq J$ και $a = \frac{r}{s} \in \mathsf{S}^{-1}I$, όπου $r \in I$ και $s \in \mathsf{S}$, τότε $r \in J$, οπότε $a \in \mathsf{S}^{-1}J$. Επομένως, $\mathsf{S}^{-1}I \subseteq \mathsf{S}^{-1}J$.

(b) Προφανώς,

$$\left.\begin{array}{l} I \subseteq I+J \\ J \subseteq I+J \end{array}\right\} \overset{\text{(a)}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} \mathsf{S}^{-1}I \subseteq \mathsf{S}^{-1}(I+J) \\ \mathsf{S}^{-1}J \subseteq \mathsf{S}^{-1}(I+J) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathsf{S}^{-1}I + \mathsf{S}^{-1}J \subseteq \mathsf{S}^{-1}(I+J).$$

Εάν $a = \frac{r}{s} \in \mathsf{S}^{-1}(I+J)$, όπου $r \in I+J$ και $s \in \mathsf{S}$, τότε $r = r_1 + r_2$, για κάποια $r_1 \in I$ και $r_2 \in J$, οπότε

$$a = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s} \in \mathsf{S}^{-1}I + \mathsf{S}^{-1}J.$$

Άρα ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός $\mathsf{S}^{-1}(I+J) \subseteq \mathsf{S}^{-1}I + \mathsf{S}^{-1}J$.

(c) Προφανώς,

$$\left.\begin{array}{l} I \cap J \subseteq I \\ I \cap J \subseteq J \end{array}\right\} \overset{\text{(a)}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} \mathsf{S}^{-1}(I \cap J) \subseteq \mathsf{S}^{-1}(I) \\ \mathsf{S}^{-1}(I \cap J) \subseteq \mathsf{S}^{-1}(J) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathsf{S}^{-1}(I \cap J) \subseteq (\mathsf{S}^{-1}I) \cap (\mathsf{S}^{-1}J).$$

Εάν $a \in (\mathsf{S}^{-1}I) \cap (\mathsf{S}^{-1}J)$, τότε $a = \frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$, για κάποια $r \in I$, $r' \in J$ και $s, s' \in \mathsf{S}$, οπότε

$$\exists t \in \mathsf{S} : (rs' - r's)t = 0_R \Rightarrow rs't = r'st \in I \cap J \Rightarrow a = \tfrac{r}{s} = \tfrac{rs't}{ss't} \in \mathsf{S}^{-1}(I \cap J).$$

Άρα ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός $\mathsf{S}^{-1}(I \cap J) \supseteq (\mathsf{S}^{-1}I) \cap (\mathsf{S}^{-1}J)$.

(d) Εάν $a \in \mathsf{S}^{-1}(IJ)$, τότε $\exists \kappa \in \mathbb{N}$ και $r_1, \ldots, r_\kappa \in I$, $r'_1, \ldots, r'_\kappa \in J$, $s \in \mathsf{S}$:

$$a = \frac{\sum_{j=1}^{\kappa} r_j r'_j}{s} \Rightarrow a = \sum_{j=1}^{\kappa} \frac{r_j}{s} \cdot \frac{r'_j}{1_R} \in (\mathsf{S}^{-1}I)(\mathsf{S}^{-1}J).$$

Άρα $\mathsf{S}^{-1}(IJ) \subseteq (\mathsf{S}^{-1}I)(\mathsf{S}^{-1}J)$. Και αντιστρόφως· εάν $a \in (\mathsf{S}^{-1}I)(\mathsf{S}^{-1}J)$, τότε $\exists \kappa \in \mathbb{N}$ και

$$\left.\begin{array}{r} r_j \in I,\ r'_j \in J,\ s_j, s'_j \in \mathsf{S}, \\ \forall j \in \{1, \ldots, \kappa\} \end{array}\right\} : a = \sum_{j=1}^{\kappa} \frac{r_j}{s_j} \cdot \frac{r'_j}{s'_j}.$$

Επομένως, θέτοντας $s := \prod_{j=1}^{\kappa} s_j s'_j$ και $t_j := \prod_{\nu \in \{1,\ldots,\kappa\} \smallsetminus \{j\}} s_\nu s'_\nu$, για κάθε $j \in \{1, \ldots, \kappa\}$, λαμβάνουμε

$$a = \sum_{j=1}^{\kappa} \frac{r_j r'_j}{s_j s'_j} = \frac{\sum_{j=1}^{\kappa} r_j r'_j t_j}{s} \in \mathsf{S}^{-1}(IJ).$$

Άρα ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός $\mathsf{S}^{-1}(IJ) \supseteq (\mathsf{S}^{-1}I)(\mathsf{S}^{-1}J)$.

(e) Κατά το (c) τής προτάσεως 2.3.17 και το (d) τής ασκήσεως **A-1-30**,

$$\mathsf{S}^{-1}(I : J) = (I : J)^{\mathrm{ext}(i_R, \mathsf{S})} \subseteq I^{\mathrm{ext}(i_R, \mathsf{S})} : J^{\mathrm{ext}(i_R, \mathsf{S})} = (\mathsf{S}^{-1}I) : (\mathsf{S}^{-1}J).$$

Εάν υποθέσουμε ότι το J είναι *πεπερασμένως παραγόμενο*, ας πούμε $J = \langle b_1, \ldots, b_\kappa \rangle$, και $a = \frac{r}{s} \in (\mathsf{S}^{-1}I) : (\mathsf{S}^{-1}J)$, για κάποια $r \in R$ και $s \in \mathsf{S}$, τότε

$$\tfrac{r}{s} \cdot \tfrac{b_i}{1_R} \in \mathsf{S}^{-1}I, \ \ \forall i \in \{1, \ldots, \kappa\},$$

οπότε υπάρχουν $c_1, \ldots, c_\kappa \in I$ και $s_1, \ldots, s_\kappa \in \mathsf{S}$, ούτως ώστε να ισχύουν οι ισότητες

$$\tfrac{r}{s} \cdot \tfrac{b_i}{1_R} = \tfrac{r b_i}{s} = \tfrac{c_i}{s_i}, \ \ \forall i \in \{1, \ldots, \kappa\}.$$

Εξ ορισμού, για κάθε $i \in \{1, \ldots, \kappa\}$

$$\exists t_i \in \mathsf{S} : (s_i r b_i - s c_i) t_i = 0_R \Rightarrow s_i t_i r b_i = s c_i t_i \in I.$$

Θέτοντας $s' := \prod_{i=1}^{\kappa} s_i t_i \in \mathsf{S}$ παρατηρούμε ότι $s' r b_i \in I$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, \kappa\}$. Έστω *τυχόν* $b \in J$. Τότε υπάρχουν $r_1, \ldots, r_\kappa \in R$:

$$b = \sum_{i=1}^{\kappa} r_i b_i \Rightarrow s' r b = \sum_{i=1}^{\kappa} r_i \left(s' r b_i\right) \in I \Rightarrow s' r \in I : J.$$

Επομένως,

$$a = \tfrac{r}{s} = \tfrac{s' r}{s' s} \in (I : J)^{\mathrm{ext}(i_R, \mathsf{S})} = \mathsf{S}^{-1}(I : J),$$

απ' όπου έπεται ότι $(\mathsf{S}^{-1}I) : (\mathsf{S}^{-1}J) \subseteq \mathsf{S}^{-1}(I : J)$. □

A-2-19. Κατά το (c) τής προτάσεως 2.3.17 και το (e) τής ασκήσεως **A-1-30**,

$$\mathsf{S}^{-1}\mathrm{Rad}(I) = \mathrm{Rad}(I)^{\mathrm{ext}(i_R, \mathsf{S})} \subseteq \mathrm{Rad}(I^{\mathrm{ext}(i_R, \mathsf{S})}) = \mathrm{Rad}(\mathsf{S}^{-1}I).$$

Και αντιστρόφως· εάν $a = \frac{r}{s} \in \mathrm{Rad}(\mathsf{S}^{-1}I) \subseteq \mathsf{S}^{-1}R$, για κάποια $r \in R$ και $s \in \mathsf{S}$, τότε $\exists m \in \mathbb{N} : a^m = \frac{r^m}{s^m} \in \mathsf{S}^{-1}I$ και $b \in I$, $s' \in \mathsf{S}$:

$$\begin{aligned} \tfrac{r^m}{s^m} &= \tfrac{b}{s'} \Leftrightarrow \exists t \in \mathsf{S} : (r^m s' - bs^m)t = 0_R \Rightarrow r^m s' t = bs^m t \in I \\ &\Rightarrow (r^m s' t)\,(s't)^{m-1} = (rs't)^m \in I \Rightarrow rs't \in \mathrm{Rad}(I), \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\left. \begin{cases} rs't \in \mathrm{Rad}(I), \\ s, s', t \in \mathsf{S} \Rightarrow ss't \in \mathsf{S} \end{cases} \right\} \Rightarrow a = \tfrac{r}{s} = \tfrac{rs't}{ss't} \in \mathsf{S}^{-1}\mathrm{Rad}(I),$$

οπότε ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός $\mathrm{Rad}(\mathsf{S}^{-1}I) \subseteq \mathsf{S}^{-1}\mathrm{Rad}(I)$. □

A-2-20. Έστω $j = i_{R, R\smallsetminus\{0_R\}} : R \hookrightarrow \mathbf{Fr}(R)$ η συνήθης ένθεση τής ακεραίας περιοχής R εντός τού σώματος των κλασμάτων της. Μέσω τής j κατασκευάζεται ένας (μονοσημάντως ορισμένος) ομομορφισμός δακτυλίων $\psi : \mathsf{S}^{-1}R \longrightarrow \mathbf{Fr}(R)$ με $\psi \circ i_{R,\mathsf{S}} = j$ (επί τη βάσει τής προτάσεως 2.3.13). Κατά την πρόταση 2.3.10, ο $i_{R,\mathsf{S}}$ είναι μονομορφισμός (διότι $\mathsf{S} \subseteq R\smallsetminus\{0_R\}$), οπότε

$$\mathrm{Ker}(j) = \{0_R\} \Rightarrow \mathrm{Ker}(\psi) = \{0_R\},$$

και ο $\mathsf{S}^{-1}R$ μπορεί να θεωρηθεί ως υποδακτύλιος τής R. Άρα ο $\mathsf{S}^{-1}R$ είναι ακεραία περιοχή. Εν συνεχεία, ας υποθέσουμε ότι η R είναι Π.Κ.Ι. κι ας θεωρήσουμε *τυχόν* ιδεώδες I τής R. Τότε $\exists a \in I$ με $I = Ra = \langle a \rangle$ και

$$\begin{aligned} \mathsf{S}^{-1}I &= \{\tfrac{ra}{s} \in \mathsf{S}^{-1}R \mid r \in R,\ s \in \mathsf{S}\} \\ &= \{\tfrac{r}{s} \cdot \tfrac{a}{1_R} \in \mathsf{S}^{-1}R \mid r \in R,\ s \in \mathsf{S}\} = \left(\mathsf{S}^{-1}R\right)\tfrac{a}{1_R}. \end{aligned}$$

Επειδή (κατά την πρόταση 2.3.17) κάθε ιδεώδες τού $\mathsf{S}^{-1}R$ είναι τής μορφής $\mathsf{S}^{-1}I$ για κάποιο $I \in \mathcal{I}_R$, η ακεραία περιοχή $\mathsf{S}^{-1}R$ οφείλει να είναι Π.Κ.Ι. □

A-2-21. (a) Επειδή $1_R \in \mathsf{S}$ έχουμε $1_{R'} = f(1_R) \in f(\mathsf{S})$. Επιπροσθέτως, εάν $a, b \in f(\mathsf{S})$, τότε $\exists c, d \in \mathsf{S}$ με $a = f(c)$ και $b = f(d)$, οπότε

$$\left. \begin{cases} c, d \in \mathsf{S} \Rightarrow cd \in \mathsf{S}, \\ ab = f(c)f(d) = f(cd) \end{cases} \right\} \Rightarrow ab \in f(\mathsf{S}).$$

Άρα το $f(\mathsf{S})$ είναι ένα πολλαπλασιαστικώς κλειστό υποσύνολο τού R'.

(b) Εάν $I \in \mathcal{I}_R$ και $\pi : R \longrightarrow R/I$ ο φυσικός επιμορφισμός, τότε, σύμφωνα με το (a), το $\pi(\mathsf{S})$ είναι ένα πολλαπλασιαστικώς κλειστό υποσύνολο τού R/I. Επειδή

$$i_{R/I, \pi(\mathsf{S})}(\pi(\mathsf{S})) \subseteq \left(\pi(\mathsf{S})^{-1}(R/I)\right)^{\times},$$

μέσω τής συνθέσεως $i_{R/I,\pi(\mathsf{S})} \circ \pi : R \longrightarrow \pi(\mathsf{S})^{-1}(R/I)$ κατασκευάζεται ένας (μονοσημάντως ορισμένος) ομομορφισμός δακτυλίων

$$\psi : \mathsf{S}^{-1}R \longrightarrow \pi(\mathsf{S})^{-1}(R/I),\ \tfrac{r}{s} \longmapsto \psi(\tfrac{r}{s}) := \frac{\overline{r}}{1_R} \cdot \left(\frac{\overline{s}}{1_R}\right)^{-1} = \frac{\overline{r}}{\overline{s}},$$

με $\psi \circ i_{R,\mathsf{S}} = i_{R/I,\pi(\mathsf{S})} \circ \pi$ (επί τη βάσει τής προτάσεως 2.3.13). Επιπροσθέτως, εάν $a = \frac{r'}{s'} \in \pi(\mathsf{S})^{-1}(R/I)$, για κάποια $r' \in R/I$ και $s' \in \pi(\mathsf{S})$, τότε υπάρχουν $r \in R$ και $s \in \mathsf{S}$:

$$\pi(r) =: \overline{r} = r',\ \pi(s) =: \overline{s} = s' \Rightarrow a = \tfrac{\overline{r}}{\overline{s}} = \psi(\tfrac{r}{s}),$$

οπότε η ψ είναι επιμορφισμός δακτυλίων. Έστω τώρα τυχόν $\frac{r}{s} \in \mathrm{Ker}(\psi)$. Προφανώς,

$$\tfrac{\overline{r}}{\overline{s}} = \psi(\tfrac{r}{s}) = 0_{\pi(\mathsf{S})^{-1}(R/I)} = \frac{\overline{0_R}}{1_R}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \exists t' \in \pi(\mathsf{S}) : \overline{r}t' = 0_{R/I}, \\ \exists t \in \mathsf{S} : \pi(t) =: \overline{t} = t' \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{r} \cdot \overline{t} = 0_{R/I} \Rightarrow rt \in I,$$

απ' όπου έπεται ότι $\frac{r}{s} = \frac{rt}{st} \in \mathsf{S}^{-1}I$. Και αντιστρόφως· για κάθε $r \in I$ και $s \in \mathsf{S}$ έχουμε

$$\psi(\tfrac{r}{s}) = \tfrac{\overline{r}}{\overline{s}} = \tfrac{\overline{0_R}}{\overline{s}} = 0_{\pi(\mathsf{S})^{-1}(R/I)} \Rightarrow \tfrac{r}{s} \in \mathrm{Ker}(\psi).$$

Επειδή λοιπόν $\mathrm{Ker}(\psi) = \mathsf{S}^{-1}I$, από το 1ο θεώρημα ισομορφισμών δακτυλίων 1.1.10 γνωρίζουμε ότι η επαγομένη απεικόνιση

$$\mathsf{S}^{-1}R/\mathsf{S}^{-1}I \longrightarrow \pi(\mathsf{S})^{-1}(R/I),\ \ \tfrac{r}{s} + \mathsf{S}^{-1}I \longmapsto \psi(\tfrac{r}{s}),$$

είναι ισομορφισμός δακτυλίων. □

A-2-22. Εάν ο R είναι ακεραία περιοχή, $f \in R \smallsetminus \{0_R\}$, $\mathsf{S} := \{\, f^\nu \,|\, \nu \in \mathbb{N}_0\}$ και $R_f := \mathsf{S}^{-1}R$, τότε θεωρούμε τον ομομορφισμό δακτυλίων

$$\beta : R \longrightarrow R[\mathsf{X}]/\left\langle 1_R - \mathsf{X}f \right\rangle,\ \ r \longmapsto \beta(r) := r + \left\langle 1_R - \mathsf{X}f \right\rangle.$$

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι ισχύει $\beta(\mathsf{S}) \subseteq (R[\mathsf{X}]/\left\langle 1_R - \mathsf{X}f \right\rangle)^\times$. Πράγματι· για οιοδήποτε $\nu \in \mathbb{N}_0$ το $\beta(f^\nu) = f^\nu + \left\langle 1_R - \mathsf{X}f \right\rangle$ έχει το $\mathsf{X}^\nu + \left\langle 1_R - \mathsf{X}f \right\rangle$ ως αντίστροφό του, διότι

$$\begin{array}{rcl} 1_R - f^\nu \mathsf{X}^\nu & = & (1_R - \mathsf{X}f)\left(f^{\nu-1}\mathsf{X}^{\nu-1} + f^{\nu-2}\mathsf{X}^{\nu-2} + \cdots + 1_R\right) \in \left\langle 1_R - \mathsf{X}f \right\rangle \\ & \Rightarrow & \left(f^\nu + \left\langle 1_R - \mathsf{X}f \right\rangle\right)\left(\mathsf{X}^\nu + \left\langle 1_R - \mathsf{X}f \right\rangle\right) = 1_R + \left\langle 1_R - \mathsf{X}f \right\rangle, \end{array}$$

για $\nu \geq 1$ (και για $\nu = 0$ είναι προφανές). Εν συνεχεία, θεωρούμε *τυχόν* $r \in \mathrm{Ker}(\beta)$. Εάν $r = 0_R$, τότε $r \cdot 1_R = 0_R$, όπου $1_R \in \mathsf{S}$. Εάν $r \neq 0_R$, τότε

$$r \in \left\langle 1_R - \mathsf{X}f \right\rangle \Rightarrow \exists F = \sum_{j=0}^{m} a_j \mathsf{X}^j \in R[\mathsf{X}] : r = F \cdot (1_R - \mathsf{X}f),$$

όπου $m \in \mathbb{N}_0$ με $a_m \neq 0_R$ και $a_0 \neq 0_R$, οπότε κατόπιν συγκρίσεως συντελεστών συνάγουμε ότι

$$\left.\begin{cases} 0_R = a_m f, \\ a_m = a_{m-1} f \Rightarrow a_m f = a_{m-1} f^2, \\ a_{m-1} = a_{m-2} f \Rightarrow a_{m-1} f^2 = a_{m-2} f^3, \\ \vdots \\ a_1 = a_0 f \Rightarrow a_1 f^m = a_0 f^{m+1}, \\ a_0 = r \end{cases}\right\} \Rightarrow 0_R = a_0 f^{m+1} = r f^{m+1}.$$

Επομένως, $rs = 0_R$, όπου

$$s := \begin{cases} 1_R, & \text{όταν } r = 0_R, \\ f^{m+1}, & \text{όταν } r \neq 0_R. \end{cases}$$

Έστω τώρα *τυχόν* στοιχείο $G + \langle 1_R - \mathsf{X} f \rangle \in R[\mathsf{X}] / \langle 1_R - \mathsf{X} f \rangle$, όπου $0 \neq G \in R[\mathsf{X}]$. Γράφοντας το G υπό τη μορφή

$$G = \sum_{i=0}^{d} b_i \mathsf{X}^i, \;\; d \in \mathbb{N}_0, \;\; b_d \neq 0_R,$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\mathsf{X} + \langle 1_R - \mathsf{X} f \rangle = (f + \langle 1_R - \mathsf{X} f \rangle)^{-1}$ έχουμε

$$\begin{aligned} G + \langle 1_R - \mathsf{X} f \rangle &= \sum_{i=0}^{d} b_i \mathsf{X}^i + \langle 1_R - \mathsf{X} f \rangle = \sum_{i=0}^{d} b_i \left(\mathsf{X} + \langle 1_R - \mathsf{X} f \rangle\right)^i \\ &= \sum_{i=0}^{d} b_i \left(f + \langle 1_R - \mathsf{X} f \rangle\right)^{-i} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{d} b_i \left(f + \langle 1_R - \mathsf{X} f \rangle\right)^{d-i} \right) \left(f + \langle 1_R - \mathsf{X} f \rangle\right)^{-d} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{d} b_i \mathsf{X}^{d-i} + \langle 1_R - \mathsf{X} f \rangle \right) \left(f^d + \langle 1_R - \mathsf{X} f \rangle\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Επομένως, θέτοντας $r := \sum_{i=0}^{d} b_i \mathsf{X}^{d-i}$ και $s := f^d$, λαμβάνουμε

$$G + \langle 1_R - \mathsf{X} f \rangle = \beta(r)\, \beta(s)^{-1}.$$

Τέλος, όταν $G = 0$,

$$G + \langle 1_R - \mathsf{X} f \rangle = \beta(0_R)\, \beta(1_R)^{-1}.$$

Επί τη βάσει των όσων απεδείχθησαν και τού πορίσματος 2.3.14 υφίσταται ακριβώς ένας ισομορφισμός δακτυλίων

$$\psi : R_f \xrightarrow{\cong} R[\mathsf{X}] / \langle 1_R - \mathsf{X} f \rangle.$$

για τον οποίο ισχύει $\beta = \psi \circ i_{R,\mathsf{S}}$. □

A-2-23. (a) Επειδή $i_{R',\mathsf{S}'}(\mathsf{S}') \subseteq ((\mathsf{S}')^{-1}R')^{\times}$ (βλ. 2.3.9 (b)) έχουμε για κάθε $s \in \mathsf{S}$

$$\left.\begin{array}{l} f(\mathsf{S}) \subseteq \mathsf{S}' \Rightarrow f(s) \in \mathsf{S}', \\ (i_{R',\mathsf{S}'} \circ f)(s) = i_{R',\mathsf{S}'}(\underbrace{f(s)}_{\in \mathsf{S}'}) \end{array}\right\} \Rightarrow (i_{R',\mathsf{S}'} \circ f)(\mathsf{S}) \subseteq ((\mathsf{S}')^{-1}R')^{\times}$$

Ως εκ τούτου, μπορούμε να εφαρμόσουμε την πρόταση 2.3.13 εξασφαλίζοντας την ύπαρξη ενός (και μόνον) ομομορφισμού δακτυλίων $\widehat{f}_{\mathsf{S},\mathsf{S}'} : \mathsf{S}^{-1}R \longrightarrow (\mathsf{S}')^{-1}R'$ που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "i_{R,\mathsf{S}}"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "i_{R',\mathsf{S}'} \circ f" description] & \mathsf{S}^{-1}R \arrow[d, "\widehat{f}_{\mathsf{S},\mathsf{S}'}"] \\
R' \arrow[r, "i_{R',\mathsf{S}'}"'] & (\mathsf{S}')^{-1}R'
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Εκ κατασκευής,

$$\widehat{f}_{\mathsf{S},\mathsf{S}'}(\tfrac{r}{s}) = \tfrac{f(r)}{1_{R'}} \cdot \left(\tfrac{f(s)}{1_{R'}}\right)^{-1}, \forall r \in R, s \in \mathsf{S} \Rightarrow \widehat{f}_{\mathsf{S},\mathsf{S}'}(\tfrac{r}{1_R}) = \tfrac{f(r)}{1_{R'}},\ \forall r \in R.$$

(b) Έστω τυχόν στοιχείο $\frac{r}{s} \in \mathrm{Ker}(\widehat{f}_{\mathsf{S},\mathsf{S}'})$, για κάποια $r \in R$ και $s \in \mathsf{S}$. Τότε

$$\widehat{f}_{\mathsf{S},\mathsf{S}'}(\tfrac{r}{s}) = \tfrac{f(r)}{1_{R'}} \cdot \tfrac{1_{R'}}{f(s)} = \tfrac{0_{R'}}{1_{R'}} \Rightarrow \exists t \in \mathsf{S}' : f(r)t = 0_{R'}$$

$$\Rightarrow (i_{R',\mathsf{S}'} \circ f)(r) = i_{R',\mathsf{S}'}(f(r)) = \tfrac{f(r)}{1_{R'}} = \tfrac{0_{R'}}{1_{R'}} \Rightarrow f(r) \in \mathrm{Ker}(i_{R',\mathsf{S}'}).$$

Κατά συνέπειαν,

$$f(r) \in \mathrm{Ker}(i_{R',\mathsf{S}'}) \cap f(R) \subseteq f(\mathrm{Ker}(i_{R,\mathsf{S}})) \Rightarrow \exists r' \in \mathrm{Ker}(i_{R,\mathsf{S}}) : f(r) = f(r').$$

Ο f είναι εξ υποθέσεως μονομορφισμός, οπότε

$$\begin{aligned} r &= r' \Rightarrow \tfrac{r}{1_R} = i_{R,\mathsf{S}}(r) = i_{R,\mathsf{S}}(r') = \tfrac{r'}{1_R} = \tfrac{0_R}{1_R} \\ &\Rightarrow \tfrac{r}{1_R} = \tfrac{0_R}{1_R} \Rightarrow \tfrac{r}{s} = \tfrac{r}{1_R} \cdot \tfrac{1_R}{s} = \tfrac{0_R}{1_R} \cdot \tfrac{1_R}{s} = \tfrac{0_R}{1_R} = 0_{\mathsf{S}^{-1}R}. \end{aligned}$$

Άρα ο επαγόμενος ομομορφισμός $\widehat{f}_{\mathsf{S},\mathsf{S}'}$ είναι όντως μονομορφισμός.

(c) Εάν $f(\mathsf{S}) = \mathsf{S}'$ και ο f είναι επιμορφισμός, τότε για κάθε $r' \in R'$ και $s' \in \mathsf{S}'$ υπάρχουν $r \in R$ και $s \in \mathsf{S}$ με $r' = f(r)$ και $s' = f(s)$, οπότε

$$\widehat{f}_{\mathsf{S},\mathsf{S}'}(\tfrac{r}{s}) = \tfrac{f(r)}{1_{R'}} \cdot \left(\tfrac{f(s)}{1_{R'}}\right)^{-1} = \tfrac{r'}{s'}$$

και ο επαγόμενος ομομορφισμός $\widehat{f}_{\mathsf{S},\mathsf{S}'}$ είναι επιμορφισμός. □

A-2-24. (a) Για την απόδειξη τού ότι ο δακτύλιος $\mathbf{k}[\![\mathsf{X}]\!]$ των επίτυπων δυναμοσειρών (ή τύποις δυναμοσειρών) μιας μεταβλητής είναι ναιτεριανός οι αναγνώστες παραπέμπονται στο βιβλίο τού R.Y. Sharp: *Steps in Commutative Algebra*, second ed., London Mathematical Society, Student Texts, Vol. **51**, Cambridge University Press, 2000, θεώρημα 8.13, σελ. 151-153. (Η απόδειξη ομοιάζει με εκείνην τού θεωρήματος βάσεως τού Hilbert 1.5.4.)

Τώρα για οιοδήποτε στοιχείο $F = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \mathsf{X}^i \in \mathbf{k}[\![\mathsf{X}]\!]$ έχουμε

$$F \in \mathbf{k}[\![\mathsf{X}]\!]^{\times} \Longleftrightarrow a_0 \neq 0_{\mathbf{k}}.$$

Πράγματι· εάν υπάρχει $G = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \mathsf{X}^i \in \mathbf{k}[\![\mathsf{X}]\!]$ με $FG = 1_{\mathbf{k}}$, τότε $a_0 b_0 = 1_{\mathbf{k}}$, οπότε $a_0 \neq 0_{\mathbf{k}}$. Και αντιστρόφως· εάν $a_0 \neq 0_{\mathbf{k}}$, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε διαδοχικώς πολυώνυμα

$$H_0, H_1, \ldots, H_i, H_{i+1}, \ldots$$

όπου το $H_i \in \mathbf{k}[\mathsf{X}]$ είναι είτε το μηδενικό πολυώνυμο είτε ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού i, για κάθε $i \in \mathbb{N}_0$, ούτως ώστε να ισχύουν οι ισότητες

$$\begin{cases} H_0 a_0 = 1_{\mathbf{k}}, \\ H_1 a_0 + H_0 a_1 = 0_{\mathbf{k}}, \\ \vdots \\ H_i a_0 + H_{i-1} a_1 + \cdots + H_0 a_i = 0_{\mathbf{k}}, \\ \vdots \end{cases}$$

(Προφανώς, $H_0 = a_0^{-1}$. Έστω τυχών φυσικός αριθμός $i \in \mathbb{N}$. Υποθέτοντας ότι έχουμε ήδη προσδιορίσει τα πολυώνυμα $H_j \in \mathbf{k}[\mathsf{X}]_j \cup \{0_{\mathbf{k}[\mathsf{X}]}\}$, $j \in \{0, 1, \ldots, i-1\}$, ορίζουμε ως H_i το πολυώνυμο

$$H_i := -a_0^{-1}(H_{i-1} a_1 + \cdots + H_0 a_i),$$

με $H_i \in \mathbf{k}[\mathsf{X}]_i \cup \{0_{\mathbf{k}[\mathsf{X}]}\}$.) Θέτοντας $H := \sum_{i=0}^{\infty} H_i \mathsf{X}^i$, λαμβάνουμε $FH = 1_{\mathbf{k}}$ και ο ισχυρισμός είναι αληθής.

Εν συνεχεία, παρατηρούμε ότι για οιαδήποτε $F, G \in \mathbf{k}[\![\mathsf{X}]\!] \smallsetminus \mathbf{k}[\![\mathsf{X}]\!]^{\times}$ ισχύει

$$F - G \in \mathbf{k}[\![\mathsf{X}]\!] \smallsetminus \mathbf{k}[\![\mathsf{X}]\!]^{\times},$$

οπότε από το (a) τής προτάσεως 2.3.1 και τον ορισμό 2.3.2 συνάγουμε ότι ο $\mathbf{k}[\![\mathsf{X}]\!]$ είναι τοπικός δακτύλιος με το

$$\mathfrak{m}_{\mathbf{k}[\![\mathsf{X}]\!]} := \mathbf{k}[\![\mathsf{X}]\!] \smallsetminus \mathbf{k}[\![\mathsf{X}]\!]^{\times}$$

ως το μοναδικό μεγιστοτικό του ιδεώδες. Αρκεί λοιπόν να αποδειχθεί ότι $\mathfrak{m}_{\mathbf{k}[\![\mathsf{X}]\!]} = \langle \mathsf{X} \rangle$. Εάν $F = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \mathsf{X}^i \in \mathfrak{m}_{\mathbf{k}[\![\mathsf{X}]\!]}$, τότε $a_0 = 0_{\mathbf{k}}$, οπότε

$$F = \mathsf{X}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathsf{X}^{i-1}\right) \in \langle \mathsf{X} \rangle \Rightarrow \mathfrak{m}_{\mathbf{k}[\![\mathsf{X}]\!]} \subseteq \langle \mathsf{X} \rangle \subsetneqq \mathbf{k}[\![\mathsf{X}]\!] \Rightarrow \mathfrak{m}_{\mathbf{k}[\![\mathsf{X}]\!]} = \langle \mathsf{X} \rangle .$$

(b) Η απόδειξη αυτού είναι εύκολη και έπεται από το (a) κάνοντας χρήση μαθηματικής επαγωγής επί τού n. $\square$

A-2-25. Εάν $V = \mathbf{V}\left(\mathsf{Y}^2 - \mathsf{X}^3\right) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$, τότε προφανώς

$$\mathbf{k}[V] \supseteq \left\{\varphi \in \mathfrak{F}(V, \mathbf{k}) \;\middle|\; \varphi(\mathsf{X}, \mathsf{Y}) = Q(\mathsf{X}) + \Xi(\mathsf{X})\mathsf{Y}, \;\; \text{για κάποια } Q, \Xi \in \mathbf{k}[\mathsf{X}] \right\}.$$

Για την απόδειξη τής αντίστροφης εγκλειστικής σχέσεως θεωρούμε τυχούσα $\varphi \in \mathbf{k}[V]$. Αυτή θα γράφεται ως εξής:

$$\varphi(\mathsf{X}, \mathsf{Y}) = F_0(\mathsf{X}) + F_1(\mathsf{X})\mathsf{Y} + F_2(\mathsf{X})\mathsf{Y}^2 + \cdots + F_i(\mathsf{X})\mathsf{Y}^i + \cdots$$

(άθροισμα με *πεπερασμένους* όρους), όπου $F_0, F_1, F_2, \ldots \in \mathbf{k}[\mathsf{X}]$ και

$$\varphi(a, b) = F_0(a) + F_1(a)b + F_2(a)b^2 + \cdots + F_i(a)b^i + \cdots,$$

για κάθε $(a, b) \in V$ (δηλαδή για κάθε $(a, b) \in \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$ με $a^3 = b^2$). Τούτο σημαίνει ότι

$$\begin{aligned} \varphi(a, b) &= F_0(a) + F_1(a)b + F_2(a)a^3 + F_3(a)a^3 b + \cdots \\ &= \left(F_0(a) + a^3 F_2(a) + \cdots\right) + (F_1(a) + a^3 F_3(a) + \cdots)b. \end{aligned}$$

Θέτοντας

$$Q(\mathsf{X}) = F_0(\mathsf{X}) + \mathsf{X}^3 F_2(\mathsf{X}) + \cdots, \;\; \Xi(\mathsf{X}) := F_1(\mathsf{X}) + \mathsf{X}^3 F_3(\mathsf{X}) + \cdots,$$

έχουμε

$$\varphi(\mathsf{X}, \mathsf{Y}) = Q(\mathsf{X}) + \Xi(\mathsf{X})\mathsf{Y}.$$

Εν συνεχεία, ταυτίζοντας το $\mathbf{k}(V)$ με το σώμα κλασμάτων τής ακεραίας περιοχής $\mathbf{k}[V]$ μέσω τού ισομορφισμού τού επαγομένου από εκείνον τής προτάσεως 2.1.3, παρατηρούμε ότι

$$\mathbf{k}(V) \supseteq \left\{\varphi \in \mathfrak{J}\,(V,\mathbf{k}) \;\middle|\; \varphi(\mathsf{X},\mathsf{Y}) = u(\mathsf{X}) + v(\mathsf{X})\mathsf{Y}, \;\; \text{για κάποια } u,v \in \mathbf{k}(\mathsf{X}) \;\right\}.$$

Για την απόδειξη τής αντίστροφης εγκλειστικής σχέσεως θεωρούμε τυχούσα $\varphi \in \mathbf{k}(V)$. Βάσει των όσων έχουμε ήδη αποδείξει, υπάρχουν $Q_j, \Xi_j \in \mathbf{k}[\mathsf{X}]$, $j = 1, 2$, με τουλάχιστον ένα εκ των Q_2, Ξ_2 μη μηδενικό, τέτοια ώστε να ισχύει

$$\varphi(\mathsf{X},\mathsf{Y}) = \frac{Q_1(\mathsf{X}) + \Xi_1(\mathsf{X})\mathsf{Y}}{Q_2(\mathsf{X}) + \Xi_2(\mathsf{X})\mathsf{Y}}.$$

Επειδή

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathsf{X},\mathsf{Y}) &= \frac{Q_1(\mathsf{X}) + \Xi_1(\mathsf{X})\mathsf{Y}}{Q_2(\mathsf{X}) + \Xi_2(\mathsf{X})\mathsf{Y}} \cdot \frac{Q_2(\mathsf{X}) - \Xi_2(\mathsf{X})\mathsf{Y}}{Q_2(\mathsf{X}) - \Xi_2(\mathsf{X})\mathsf{Y}} \\
&= \frac{Q_1(\mathsf{X})Q_2(\mathsf{X}) - \Xi_1(\mathsf{X})\Xi_2(\mathsf{X})\mathsf{Y}^2 + \Xi_1(\mathsf{X})Q_2(\mathsf{X})\mathsf{Y} - \Xi_2(\mathsf{X})Q_1(\mathsf{X})\mathsf{Y}}{Q_2(\mathsf{X})^2 - \Xi_2(\mathsf{X})^2\mathsf{Y}^2} \\
&= \frac{Q_1(\mathsf{X})Q_2(\mathsf{X}) - \Xi_1(\mathsf{X})\Xi_2(\mathsf{X})\mathsf{X}^3}{Q_2(\mathsf{X})^2 - \Xi_2(\mathsf{X})^2\mathsf{Y}^2} + \left(\frac{\Xi_1(\mathsf{X})Q_2(\mathsf{X}) - \Xi_2(\mathsf{X})Q_1(\mathsf{X})}{Q_2(\mathsf{X})^2 - \Xi_2(\mathsf{X})^2\mathsf{Y}^2}\right)\mathsf{Y},
\end{aligned}$$

θέτοντας

$$u(\mathsf{X}) := \tfrac{Q_1(\mathsf{X})Q_2(\mathsf{X}) - \Xi_1(\mathsf{X})\Xi_2(\mathsf{X})\mathsf{X}^3}{Q_2(\mathsf{X})^2 - \Xi_2(\mathsf{X})^2\mathsf{Y}^2}, \;\; v(\mathsf{X}) := \tfrac{\Xi_1(\mathsf{X})Q_2(\mathsf{X}) - \Xi_2(\mathsf{X})Q_1(\mathsf{X})}{Q_2(\mathsf{X})^2 - \Xi_2(\mathsf{X})^2\mathsf{Y}^2},$$

καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Α-2-26. Για το *φύλλο τού Καρτεσίου* $V = \mathbf{V}(\mathsf{Y}^2 - \mathsf{X}^2(\mathsf{X}+1_{\mathbf{k}})) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$, ζητείται να προσδιορισθούν τα σύνολα πόλων $\mathrm{Pol}(f)$ και $\mathrm{Pol}(f^2)$, όπου $f = \frac{\overline{\mathsf{Y}}}{\overline{\mathsf{X}}} \in \mathbf{k}(V)$. Επειδή $f = \frac{\theta_V(g)}{\theta_V(h)}$, όπου g, h οι πολυωνυμικές συναρτήσεις

$$\begin{aligned}
g &: V \longrightarrow \mathbf{k}, \;\; (a,b) \longmapsto g(a,b) := b, \\
h &: V \longrightarrow \mathbf{k}, \;\; (a,b) \longmapsto h(a,b) := a,
\end{aligned}$$

έχουμε $h(P) = 0_{\mathbf{k}}$ για κάποιο $P = (a,b) \in V$ εάν και μόνον εάν $a = 0_{\mathbf{k}}$. Εξάλλου, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι

$$f = \frac{\overline{\mathsf{Y}}}{\overline{\mathsf{X}}} = \frac{\overline{\mathsf{X}}(\overline{\mathsf{X}} + 1_{\mathbf{k}})}{\overline{\mathsf{Y}}} = \frac{\overline{\mathsf{X}}(\overline{\mathsf{X}} + 1_{\mathbf{k}})}{\theta_V(g)},$$

έχουμε $g(P) = 0_{\mathbf{k}}$ για κάποιο $P = (a,b) \in V$ εάν και μόνον εάν $b = 0_{\mathbf{k}}$. Κατά συνέπειαν,

$$\mathrm{Pol}\,(f) = \{(0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}})\}\,.$$

Σύμφωνα με την άσκηση **A-1-49**, το V είναι ανάγωγο, οπότε

$$\mathbf{I}(V) = \left\langle \mathsf{Y}^2 - \mathsf{X}^2(\mathsf{X}+1_{\mathbf{k}}) \right\rangle \Rightarrow \Gamma(V) = \mathbf{k}[\mathsf{X},\mathsf{Y}]/\left\langle \mathsf{Y}^2 - \mathsf{X}^2(\mathsf{X}+1_{\mathbf{k}}) \right\rangle.$$

Επιπροσθέτως,

$$f^2 = \left(\frac{\overline{\mathsf{Y}}}{\overline{\mathsf{X}}}\right)^2 = \frac{\left(\overline{\mathsf{Y}}\right)^2}{\left(\overline{\mathsf{X}}\right)^2}$$

και

$$\left(\overline{\mathsf{Y}}\right)^2 = \left(\overline{\mathsf{X}}\right)^2 \overline{\mathsf{X}+1_{\mathbf{k}}} \Rightarrow f^2 = \frac{\left(\overline{\mathsf{Y}}\right)^2}{\left(\overline{\mathsf{X}}\right)^2} = \frac{\overline{\mathsf{X}+1_{\mathbf{k}}}}{\overline{1_{\mathbf{k}}}} = \frac{\overline{\mathsf{X}+1_{\mathbf{k}}}}{\theta_V(j)},$$

όπου j η πολυωνυμική συνάρτηση

$$j : V \longrightarrow \mathbf{k}, \ \ (a,b) \longmapsto j(a,b) := 1_{\mathbf{k}}.$$

Άρα $P = (a,b) \in \mathrm{Pol}\big(f^2\big) \Leftrightarrow 1_{\mathbf{k}} = j(P) = 0_{\mathbf{k}}$, κάτι που σημαίνει ότι $\mathrm{Pol}\big(f^2\big) = \varnothing$. □

A-2-27. Εάν $P := (0_{\mathbf{k}}, \ldots, 0_{\mathbf{k}}) \in \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ και $I := \langle \mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n \rangle \subset \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$, τότε

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P} = \left\{ \frac{F}{G} \in \mathbf{k}\left(\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n\right) \mid F, G \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n],\ G \neq 0,\ G(P) \neq 0_{\mathbf{k}} \right\}$$

και

$$\mathfrak{m}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P} = \left\{ \frac{F}{G} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P} \mid F(P) = 0_{\mathbf{k}} \right\}.$$

Επειδή το $\mathfrak{m}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P}$ είναι το μοναδικό μεγιστοτικό ιδεώδες τού τοπικού δακτυλίου $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P}$, έχουμε

$$I\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P} \subseteq \mathfrak{m}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P}.$$

Επιπροσθέτως, για κάθε $\frac{F}{G} \in \mathfrak{m}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P}$,

$$\left.\begin{array}{r} \frac{F}{G} = F \cdot \left(\frac{1_{\mathbf{k}}}{G}\right), \\ F \in I,\ \frac{1_{\mathbf{k}}}{G} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{F}{G} \in I\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P},$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\mathfrak{m}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P} \subseteq I\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P} \Rightarrow I\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P} = \mathfrak{m}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P},$$

και κατ' επέκτασιν ότι $I^\nu \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P} = \left(I\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P}\right)^\nu = \mathfrak{m}^\nu_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P},\ \forall \nu \in \mathbb{N}$. □

Α-2-28. Έστω $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ μια συσχετική ποικιλότητα και έστω $P \in V$. Εάν το J είναι ένα ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ που περιέχει το $\mathbf{I}(V)$ και το $J' := \pi(J)$ η εικόνα τού J μέσω τού φυσικού επιμορφισμού $\pi : \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] \longrightarrow \Gamma(V)$, τότε ορίζουμε τη

$$\varphi : \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P}/J\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,P}/J'\mathcal{O}_{V,P}$$
$$\tfrac{F}{G} + J\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P} \longmapsto \varphi\left(\tfrac{F}{G} + J\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P}\right) := \tfrac{\pi(F)}{\pi(G)} + J'\mathcal{O}_{V,P}.$$

Η φ είναι καλώς ορισμένη απεικόνιση, διότι εάν

$$F_1, G_1, F_2, G_2 \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n],\ G_1 \neq 0,\ G_2 \neq 0,\ G_1(P) \neq 0_{\mathbf{k}},\ G_2(P) \neq 0_{\mathbf{k}},$$

με

$$\tfrac{F_1}{G_1} + J\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P} = \tfrac{F_2}{G_2} + J\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P},$$

τότε

$$\tfrac{F_1G_2 - F_2G_1}{G_1G_2} \in J\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P},$$

οπότε $\exists \kappa \in \mathbb{N}$ και $A_1, \ldots, A_\kappa \in J$, $H_1, \ldots, H_\kappa, \Xi_1, \ldots, \Xi_\kappa \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] : \Xi_j \neq 0$, $\Xi_j(P) \neq 0_{\mathbf{k}}$ και

$$\tfrac{H_j}{\Xi_j} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P},\ \forall j \in \{1, \ldots, \kappa\},$$

ούτως ώστε να ισχύει

$$\tfrac{F_1G_2 - F_2G_1}{G_1G_2} = \sum_{j=1}^{\kappa} A_j \tfrac{H_j}{\Xi_j},$$

κι επομένως (ύστερα από τη μετάβασή μας στις κλάσεις υπολοίπων)

$$\tfrac{\pi(F_1)\pi(G_2) - \pi(F_2)\pi(G_1)}{\pi(G_1)\pi(G_2)} = \sum_{j=1}^{\kappa} \pi(A_j) \tfrac{\pi(H_j)}{\pi(\Xi_j)}$$

$$\Rightarrow \tfrac{\pi(F_1)}{\pi(G_1)} - \tfrac{\pi(F_2)}{\pi(G_2)} \in J'\mathcal{O}_{V,P} \Rightarrow \varphi\left(\tfrac{F_1}{G_1} + J\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P}\right) = \varphi\left(\tfrac{F_2}{G_2} + J\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P}\right).$$

Επιπροσθέτως, είναι πρόδηλο ότι η φ είναι *επιμορφισμός* δακτυλίων. Ο πυρήνας του είναι ο εξής:

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \left\{ \tfrac{F}{G} + J\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P}/J\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P} \ \middle|\ \tfrac{\pi(F)}{\pi(G)} \in J'\mathcal{O}_{V,P} \right\}.$$

Για οιοδήποτε $\frac{F}{G} + J\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P} \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ υπάρχουν $\kappa \in \mathbb{N}$ και

$$A_1, \ldots, A_\kappa \in J,\ H_1, \ldots, H_\kappa,\ \Xi_1, \ldots, \Xi_\kappa \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] : \Xi_j \neq 0,\ \Xi_j(P) \neq 0_{\mathbf{k}}$$

και

$$\tfrac{H_j}{\Xi_j} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P},\ \forall j \in \{1,\ldots,\kappa\},$$

ούτως ώστε να ισχύει

$$\tfrac{\pi(F)}{\pi(G)} = \sum_{j=1}^{\kappa} \pi(A_j)\tfrac{\pi(H_j)}{\pi(\Xi_j)} \in J'\mathcal{O}_{V,P},$$

οπότε

$$\tfrac{F}{G} - \sum_{j=1}^{\kappa} A_j \tfrac{H_j}{\Xi_j} \in \mathbf{I}(V) \subseteq J \Rightarrow \tfrac{F}{G} \in J\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P}.$$

Άρα $\mathrm{Ker}(\varphi) = J\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P} = \{0_{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P}/J\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P}}\}$ και -ως εκ τούτου- ο

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P}/J\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_{V,P}/J'\mathcal{O}_{V,P}$$

είναι *ισομορφισμός* δακτυλίων. Εξ αυτού συμπεραίνουμε, ιδιαιτέρως, ότι η απεικόνιση

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P}/J\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P} &\longrightarrow \mathcal{O}_{V,P} \\ \tfrac{F}{G} + J\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P} &\longmapsto \tfrac{F+\mathbf{I}(V)}{G+\mathbf{I}(V)}, \end{aligned}$$

είναι *ισομορφισμός* δακτυλίων. □

A-2-29. Εάν ο R είναι ένας δακτύλιος περιέχων ένα σώμα $\mathbf{k}$ ως υποδακτύλιό του και $\dim_{\mathbf{k}}(R) = m \in \mathbb{N}$, τότε $R \cong \mathbf{k}^m$. Θεωρώντας ένα στοιχείο $\lambda \in \mathbf{k}$, παρατηρούμε ότι για το ιδεώδες $I := \langle \mathsf{X} - \lambda \rangle \subset \mathbf{k}[\mathsf{X}]$ ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\mathbf{V}(I) = \{\lambda\} \subset \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$$

(βλ. πρόταση 1.2.3. (5)),

$$\mathbf{k}[\mathsf{X}]/I \cong \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}},\{\lambda\}}/I\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}},\{\lambda\}}$$

(βλ. θεώρημα 2.4.14),

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}},\{\lambda\}}/I\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}},\{\lambda\}} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}},\{\lambda\}}/\mathbf{I}(\mathbf{V}(I))\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}},\{\lambda\}} \cong \mathcal{O}_{\{\lambda\},\{\lambda\}}$$

(βλ. άσκηση **A-2-28** και πρόταση 1.3.1 (5) (b)), και

$$\mathbf{k}[\mathsf{X}]/I \cong \mathbf{k}$$

(βλ. άσκηση **A-1-21**). Κατά συνέπειαν,

$$R \cong \mathbf{k}^m \cong \underbrace{\mathcal{O}_{\{\lambda\},\{\lambda\}} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\{\lambda\},\{\lambda\}}}_{m \text{φφορές}}$$

και ο R είναι όντως ισόμορφος ενός ευθέος αθροίσματος πεπερασμένου πλήθους τοπικών δακτυλίων. $\square$

Α-2-30. Έστω I ένα ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ ($\mathbf{k}$ όχι κατ' ανάγκην αλγεβρικώς κλειστό) με $\mathbf{V}(I) = \{P_1, \ldots, P_m\}$ και $I_j := \mathbf{I}(\{P_j\}),\ \forall j \in \{1, \ldots, m\}$.

(a) Τα I_j, I_k είναι μεταξύ τους πρώτα για κάθε $j, k \in \{1, \ldots, m\}$, $j \neq k$. Πράγματι·

$$j \neq k \Rightarrow P_j = (a_{j,1}, a_{j,2}, \ldots, a_{j,n}) \neq (a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n}) = P_k$$

$$\Rightarrow \exists i \in \{1, \ldots, n\} : a_{j,i} \neq a_{k,i}.$$

Εάν ληφθεί υπ' όψιν ότι

$$I_j = \langle \mathsf{X}_1 - a_{j,1}, \ldots, \mathsf{X}_n - a_{j,n} \rangle\,, \quad I_k = \langle \mathsf{X}_1 - a_{k,1}, \ldots, \mathsf{X}_n - a_{k,n} \rangle\,,$$

συνάγουμε ότι

$$1_{\mathbf{k}} = \tfrac{1_{\mathbf{k}}}{a_{j,i} - a_{k,i}}((\mathsf{X}_i - a_{j,i}) - (\mathsf{X}_i - a_{k,i})) \in I_j + I_k,$$

οπότε $I_j + I_k = \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$.

(b) Σύμφωνα με το (a), το κινέζικο θεώρημα 1.4.8 και την άσκηση **Α-1-21** υπάρχουν φυσικοί ισομορφισμοί δακτυλίων

$$\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]/(\bigcap_{j=1}^{m} I_j) \cong \bigoplus_{j=1}^{m} (\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]/I_j) \cong \mathbf{k}^m.$$

(c) Ο πρώτος εκ των ανωτέρω ισομορφισμών επάγεται από τον επιμορφισμό

$$\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] \ni F \overset{\varphi}{\longmapsto} (F + I_1, \ldots, F + I_m) \in \bigoplus_{j=1}^{m} (\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]/I_j),$$

όπου $\mathrm{Ker}(\varphi) = \bigcap_{j=1}^{m} I_j$. Επειδή

$$I \subseteq \mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \mathbf{I}(\{P_1, \ldots, P_m\}) = \bigcap_{j=1}^{m} I_j = \mathrm{Ker}(\varphi),$$

(βλ. πρόταση 1.3.1 (3) (a)), ο ομομορφισμός δακτυλίων (και διανυσματικών χώρων υπεράνω τού $\mathbf{k}$):

$$\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]/I \ni F + I \overset{\psi}{\longmapsto} (F + I_1, \ldots, F + I_m) \in \bigoplus_{j=1}^{m} (\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]/I_j) \underset{\text{(b)}}{\cong} \mathbf{k}^m.$$

είναι επιμορφισμός (καθότι $\psi \circ \pi = \varphi$, όπου $\pi : \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] \longrightarrow \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]/I$ ο φυσικός επιμορφισμός). Εξ αυτού έπεται ότι

$$m = \sharp(\mathbf{V}(I)) = \dim_{\mathbf{k}}(\bigoplus_{j=1}^{m}(\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]/I_j)) \leq \dim_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]/I)$$

Ιδιαιτέρως, όταν το I είναι ένα ριζικό ιδεώδες και το $\mathbf{k}$ αλγεβρικώς κλειστό, έχουμε

$$I = \mathrm{Rad}(I) = \mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \mathrm{Ker}(\varphi)$$

(βλ. θεώρημα 1.8.2), ο ψ είναι ισομορφισμός και η ανωτέρω ανισοϊσότητα ισχύει ως *ισότητα*. $\square$

Α-2-31. Έστω $T = (T_1, .., T_n) : \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ μια συσχετική αλλαγή συντεταγμένων τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$.
(a) Εάν $P \in \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ και $Q := T(P)$, ο ομομορφισμός δακτυλίων (και $\mathbf{k}$-αλγεβρών)

$$\widehat{T}_P : \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},Q} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P}$$

(τής προτάσεως 2.5.1) είναι ισομορφισμός, διότι

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},Q} = \left\{ f = \tfrac{G}{H} \in \mathbf{k}(\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n) \;\middle|\; G, H \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n],\ H \neq 0,\ H(P) \neq 0_{\mathbf{k}} \right\},$$

η T είναι ένας αυτομορφισμός τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ (βλ. πρόταση 2.2.2),

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(\widehat{T}_P) &= \left\{ f = \tfrac{G}{H} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},Q} \;\middle|\; \widehat{T}_P(f) = \tfrac{G^T}{H^T} = 0_{\mathbf{k}(\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n)} \right\} \\
&= \left\{ f = \tfrac{G}{H} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},Q} \;\middle|\; G^T = 0_{\mathbf{k}(\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n)} \right\} \\
&= \left\{ f = \tfrac{G}{H} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},Q} \;\middle|\; G = 0_{\mathbf{k}(\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n)} \right\} = \{0_{\mathbf{k}(\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n)}\}
\end{aligned}$$

και

$$\forall g = \tfrac{Q}{\Xi} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P} \quad \exists f := \tfrac{Q^{T^{-1}}}{\Xi^{T^{-1}}} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},Q} : g = \widehat{T}_P(f).$$

(b) Εάν το $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ είναι μια συσχετική ποικιλότητα και $P \in V$, ο ισομορφισμός

$$\widehat{T}_P : \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},Q} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P}$$

επάγει έναν ισομορφισμό

$$\widehat{T}_{V,P} : \mathcal{O}_{V^T,Q} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,P}, \quad \frac{\overline{G}}{\overline{H}} = f \longmapsto \widehat{T}_{V,P}(f) := \frac{\overline{G^T}}{\overline{H^T}},$$

επί τού $\mathcal{O}_{V^T,Q}$ ($V^T = T^{-1}(V)$), καθόσον

$$\mathcal{O}_{V^T,Q} = \left\{ f = \frac{\overline{G}}{\overline{H}} \in \mathbf{k}\left(V^T\right) \;\middle|\; \begin{array}{c} \overline{G}, \overline{H} \in \Gamma\left(V^T\right), \\ \overline{H} \in \Gamma\left(V^T\right) \smallsetminus \mathbf{I}_{V^T}(\{Q\}) \end{array} \right\}$$

με

$$\mathrm{Ker}(\widehat{T}_{V,P}) = \left\{ f = \frac{\overline{G}}{\overline{H}} \in \mathcal{O}_{V^T,Q} \;\middle|\; \frac{\overline{G^T}}{\overline{H^T}} = 0_{\mathbf{k}(V^T)} \right\} = \{0_{\mathbf{k}(V^T)}\},$$

και $\forall g = \frac{\overline{Q}}{\overline{\Xi}} \in \mathcal{O}_{V,P} \quad \exists f := \frac{\overline{Q^{T^{-1}}}}{\overline{\Xi^{T^{-1}}}} \in \mathcal{O}_{V^T,Q} : g = \widehat{T}_{V,P}(f).$ □

A-2-32. Έστω $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \supseteq V \xrightarrow{\varphi} W \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ μια πολυωνυμική απεικόνιση μεταξύ συσχετικών ποικιλοτήτων. Ας υποθέσουμε ότι η φ είναι ισομορφισμός (υπό την έννοια τού ορισμού 2.1.16). Τότε υπάρχει μια πολυωνυμική απεικόνιση $\psi : W \longrightarrow V$, τέτοια ώστε να ισχύουν οι ισότητες $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_V$ και $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_W$. Βάσει τής προτάσεως 2.1.14, αμφότερες οι $\varphi, \psi = \varphi^{-1}$ είναι συνεχείς και -κατ' επέκτασιν- ομοιομορφισμοί (ως προς την τοπολογία Zariski). Επίσης, για κάθε σημείο $P \in V$ και κάθε $f = \frac{\overline{G}}{\overline{H}} = \frac{\theta_W(g)}{\theta_W(h)} \in \mathcal{O}_{W,\varphi(P)}$ έχουμε (κατά τον ορισμό τής $\widehat{\varphi}_P$ τον δοθέντα στην πρόταση 2.5.1)

$$\widehat{\psi}_{\varphi(P)}\left(\widehat{\varphi}_P(f)\right) = \widehat{\psi}_{\varphi(P)}\left(\widehat{\varphi}_P\left(\frac{\overline{G}}{\overline{H}}\right)\right) = \widehat{\psi}_{\varphi(P)}\left(\frac{\theta_W(g)}{\theta_W(h)}\right) = \widehat{\psi}_{\varphi(P)}\left(\frac{\left(\theta_V \circ \widetilde{\varphi}\big|_{\mathbf{k}[W]} \circ \theta_W^{-1}\right)(\theta_W(g))}{\left(\theta_V \circ \widetilde{\varphi}\big|_{\mathbf{k}[W]} \circ \theta_W^{-1}\right)(\theta_W(h))}\right)$$

$$= \widehat{\psi}_{\varphi(P)}\left(\frac{\left(\theta_V \circ \widetilde{\varphi}\big|_{\mathbf{k}[W]}\right)(g)}{\left(\theta_V \circ \widetilde{\varphi}\big|_{\mathbf{k}[W]}\right)(h)}\right) = \frac{\left(\theta_W \circ \widetilde{\psi}\big|_{\mathbf{k}[V]} \circ \theta_V^{-1}\right)\left(\left(\theta_V \circ \widetilde{\varphi}\big|_{\mathbf{k}[W]}\right)(g)\right)}{\left(\theta_W \circ \widetilde{\psi}\big|_{\mathbf{k}[V]} \circ \theta_V^{-1}\right)\left(\left(\theta_V \circ \widetilde{\varphi}\big|_{\mathbf{k}[W]}\right)(h)\right)} = \frac{\left(\theta_W \circ \left(\widetilde{\psi}\big|_{\mathbf{k}[V]} \circ \widetilde{\varphi}\big|_{\mathbf{k}[W]}\right)\right)(g)}{\left(\theta_W \circ \left(\widetilde{\psi}\big|_{\mathbf{k}[V]} \circ \widetilde{\varphi}\big|_{\mathbf{k}[W]}\right)\right)(h)}$$

$$= \frac{\left(\theta_W \circ \mathrm{Id}_{\mathbf{k}[W]}\right)(g)}{\left(\theta_W \circ \mathrm{Id}_{\mathbf{k}[W]}\right)(h)} = \frac{\theta_W(g)}{\theta_W(h)} = f \Rightarrow \widehat{\psi}_{\varphi(P)} \circ \widehat{\varphi}_P = \mathrm{Id}_{\mathcal{O}_{W,\varphi(P)}}$$

και κατ' αναλογίαν $\widehat{\varphi}_P \circ \widehat{\psi}_{\varphi(P)} = \mathrm{Id}_{\mathcal{O}_{V,P}}$, οπότε αμφότεροι οι ομομορφισμοί τοπικών δακτυλίων $\widehat{\varphi}_P, \widehat{\psi}_{\varphi(P)}$ είναι ισομορφισμοί.

Και αντιστρόφως· εάν υποθέσουμε ότι το $\mathbf{k}$ είναι αλγεβρικώς κλειστό, η πολυωνυμική απεικόνιση φ ομοιομορφισμός (ως προς την τοπολογία Zariski) και οι ομομορφισμοί τοπικών δακτυλίων $\widehat{\varphi}_P : \mathcal{O}_{W,\varphi(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,P}$ ισομορφισμοί για κάθε σημείο $P \in V$, θα αποδείξουμε ότι η φ είναι ισομορφισμός συσχετικών ποικιλοτήτων (υπό την έννοια τού ορισμού 2.1.16), καθότι η αντίστροφός της $\psi = \varphi^{-1}$ είναι ωσαύτως πολυωνυμική απεικόνιση. Επειδή κατά το (b) τής προτάσεως 2.4.28 ισχύει $\mathcal{O}_V(V) \cong \mathbf{k}[V]$ και $\mathcal{O}_W(W) \cong \mathbf{k}[W]$, αρκεί προς τούτο να δειχθεί ότι $f \circ \psi \in \mathcal{O}_W(W)$ για κάθε $f \in \mathcal{O}_V(V)$. Θεωρούμε λοιπόν τυχόν σημείο $P \in V$ και τυχούσα $f \in \mathcal{O}_V(V) \cong \mathbf{k}[V] \subseteq \mathcal{O}_{V,P}$. Η f απεικονίζεται μέσω τού ισομορφισμού $\widehat{\psi}_{\varphi(P)} := \widehat{\varphi}_P^{-1}$ στην $\widehat{\psi}_{\varphi(P)}(f) = f \circ \psi \in \mathcal{O}_{W,\varphi(P)}$ (λόγω τού τύπου τού ορισμού τής $\widehat{\psi}_{\varphi(P)}$ και τού ότι $f \in \mathbf{k}[V]$!), οπότε εκ κατασκευής $f \circ \psi \in \mathcal{O}_W(W) \cong \mathbf{k}[W]$. □

A-2-33. Σύμφωνα με την άσκηση **A-2-9** η πολυωνυμική απεικόνιση

$$\varphi : \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \longrightarrow V, \;\; t \longmapsto \varphi(t) := (t^9, t^6, t^4),$$

είναι αμφιρριπτική αλλά δεν είναι ισομορφισμός, διότι ισχύει η αυστηρή εγκλειστική σχέση

$$\widetilde{\varphi}(\Gamma(V)) = \mathbf{k}\left[\mathsf{T}^9, \mathsf{T}^6, \mathsf{T}^4\right] \subsetneqq \mathbf{k}[\mathsf{T}] = \Gamma(\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}).$$

Επίσης, η ρητή απεικόνιση

$$\psi : V \dashrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}, \ \ (a,b,c) \longmapsto \frac{a}{c^2} = \frac{bc}{a},$$

με $\mathrm{Dom}(\psi) = V \smallsetminus \{(0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}})\}$, είναι τέτοια, ώστε να ισχύει

$$\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}}, \ \varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_V,$$

υπό την έννοια τού ορισμού 2.5.6! Ο περιορισμός της

$$\psi|_{\mathrm{Dom}(\psi)} : V \smallsetminus \{(0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}})\} \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\}$$

είναι μορφισμός (βλ. 2.5.17 (a)) και πληροί τις ισότητες

$$\left(\psi|_{\mathrm{Dom}(\psi)}\right) \circ \left(\varphi|_{\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\}}\right) = \mathrm{Id}_{\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\}}, \ \left(\varphi|_{\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\}}\right) \circ \left(\psi|_{\mathrm{Dom}(\psi)}\right) = \mathrm{Id}_{\mathrm{Dom}(\psi)}$$

υπό τη συνήθη έννοια, οπότε ορίζεται ένας ισομορφισμός συσχετικών ποικιλοτήτων

$$V \smallsetminus \{(0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}})\} \cong \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\}$$

(πρβλ. πόρισμα 2.5.35). □

A-2-34. Ως κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο τού $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ το $Y := \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \smallsetminus \{(0,0)\}$ είναι μια *σχεδόν συσχετική ποικιλότητα* (και, προφανώς, ανάγωγο). Έστω $\iota : Y \hookrightarrow \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ η φυσική ένθεση και έστω τυχούσα $f \in \mathcal{O}_Y(Y)$. Εξ ορισμού υπάρχει ένα μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο U τού Y με $(0,0) \in U$, καθώς και πολυώνυμα $G, H \in \mathbb{C}[\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2]$, τέτοια ώστε να ισχύει $f|_U = \frac{G}{H}\big|_U$ και $H(Q) \neq 0$ για κάθε $Q \in U$ (βλ. ορσ. 2.4.15). Δίχως βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα G και H δεν διαθέτουν κανένα ανάγωγο πολυώνυμο (ανήκον στον $\mathbb{C}[\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2]$) ως κοινό παράγοντα. Η συνάρτηση $Hf - G \in \mathcal{O}_Y(Y)$ είναι συνεχής (βλ. πρόταση 2.4.17) και μηδενίζεται επί τού U. Επομένως μηδενίζεται και επί ολοκλήρου τού Y (βλ. πόρισμα 2.4.19). Εξ αυτού έπεται ότι $\mathbf{V}(H) \subseteq \mathbf{V}(G)$. Τούτο σημαίνει ότι $\mathbf{V}(H) = \varnothing$ (διότι αλλιώς τα G και H θα διέθεταν κάποιον ανάγωγο κοινό παράγοντα), δηλαδή ότι το H είναι *σταθερό*, μη μηδενικό πολυώνυμο. Κατά συνέπειαν, κάθε $f \in \mathcal{O}_Y(Y)$ μπορεί να θεωρηθεί ως περιορισμός $f = \overline{f}\big|_Y$ μιας πολυωνυμικής απεικονίσεως $\overline{f} \in \mathbb{C}[\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}] \cong \mathbb{C}[\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2]$ επί τού Y. (Εάν χρησιμοποιήσουμε μια παράσταση τής f περί το $(0,0)$, όπως προηγουμένως, αρκεί να θέσουμε $\overline{f} := H^{-1}G$.) Ο επαγόμενος ομομορφισμός $\mathbb{C}$-αλγεβρών $\widehat{\iota} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-}\mathfrak{Alg}}(\mathbb{C}[\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}], \mathcal{O}_Y(Y))$,

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}}(\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{C}[\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}] \cong \mathbb{C}[\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2] \ni g = \overline{f} \longmapsto \widehat{\iota}(g) := \overline{f} \circ \iota = f \in \mathcal{O}_Y(Y),$$

είναι -ως εκ τούτου- *επιμορφισμός*. (Η ι είναι η αντίστροφη εικόνα $\alpha^{-1}(\widehat{\iota})$ τής $\widehat{\iota}$ μέσω τής αμφιρρίψεως α τής προτάσεως 2.5.25.) Επιπροσθέτως, επειδή το $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ είναι ανάγωγο, η εικόνα $\iota(Y) = Y$ τού Y μέσω τής ι (ως μη κενή και κατά Zariski ανοικτή) είναι πυκνή εντός τού $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ (βλ. πρόταση 1.6.2), οπότε, σύμφωνα με την πρόταση 2.5.6, η $\widehat{\iota}$ είναι *και* μονομορφισμός (και κατ' επέκτασιν και *ισομορφισμός*) $\mathbb{C}$-αλγεβρών.

Εάν το Y ήταν μια *συσχετική ποικιλότητα*, τότε, κατά το (b) τής προτάσεως 2.4.28, θα ίσχυε $\mathcal{O}_Y(Y) \cong \mathbb{C}[Y]$ και η $\widehat{\iota}$ θα μπορούσε να ταυτισθεί με την

$$\widetilde{\iota}|_{\mathbb{C}[\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}]} : \mathbb{C}[\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}] \longrightarrow \mathbb{C}[Y],$$

(βλ. 2.1.12 (b)). Επειδή η $\widetilde{\iota}|_{\mathbb{C}[\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}]}$ θα ήταν *ισομορφισμός* δακτυλίων (και $\mathbb{C}$-αλγεβρών), η ι θα όφειλε (σύμφωνα με το πόρισμα 2.1.18) να είναι ισομορφισμός συσχετικών ποικιλοτήτων, πράγμα *άτοπο* (διότι η ι δεν είναι επιρριπτική απεικόνιση). Άρα το Y είναι μια σχεδόν συσχετική αλλά μη συσχετική ποικιλότητα. $\square$

A-2-35. Έστω U μια ανοικτή υποποικιλότητα μιας σχεδόν συσχετικής ποικιλότητας Y και έστω W μια κλειστή υποποικιλότητα τής U.

(a) Το $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_Y}(W)$ είναι εξ ορισμού ένα (κατά Zariski) κλειστό υποσύνολο τής Y. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι το $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_Y}(W)$ είναι ανάγωγο υποσύνολο τής Y. Ας υποθέσουμε ότι το $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_Y}(W)$ γράφεται ως ένωση $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_Y}(W) = Z_1 \cup Z_2$ δυο κλειστών υποσυνόλων Z_1, Z_2 τού Y. Τότε

$$W = \mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_U}(W) = U \cap \mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_Y}(W) = (U \cap Z_1) \cup (U \cap Z_2),$$

οπότε είτε $W = U \cap Z_1$ είτε $W = U \cap Z_2$ (αφού τα $U \cap Z_1$ και $U \cap Z_2$ είναι κλειστά υποσύνολα τού U και το W ανάγωγο υποσύνολο τού U, βλ. 1.6.2 (b)). Στην πρώτη περίπτωση,

$$W \subseteq Z_1 \Rightarrow \mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_Y}(W) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_Y}(Z_1) = Z_1.$$

Όμως εξ υποθέσεως, $Z_1 \subseteq \mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_Y}(W)$. Άρα $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_Y}(W) = Z_1$. Αναλόγως δείχνουμε την ισότητα $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_Y}(W) = Z_2$ στη δεύτερη περίπτωση. Αρκεί λοιπόν να εφαρμοσθεί εκ νέου το (b) τής προτάσεως 1.6.2 για να αποδειχθεί ότι το $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_Y}(W)$ είναι όντως ανάγωγο.

(b) Επειδή έχουμε $W = \mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_U}(W) = U \cap \mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_Y}(W)$ και το U είναι ανοικτό υποσύνολο τής Y, το W οφείλει να είναι ανοικτό υποσύνολο τού $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_Y}(W)$ (δηλαδή $W \in \mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_{\mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_Y}(W)}$). $\square$

A-2-36. (a) Η Z, ως σχεδόν συσχετική ποικιλότητα, αποτελεί ένα κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο $Z \subseteq W \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ μιας συσχετικής ποικιλότητας W εντός ενός χώρου $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$. Ας συμβολίσουμε ως

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}} &:= \{(P,P) \mid P \in \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}\}\,, \\
\Delta_W &:= \{(P,P) \quad P \in W\}\,, \\
\Delta_Z &:= \{(P,P) \mid P \in Z\}\,,
\end{aligned}$$

τις *διαγωνίους* των $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}, W$ και Z, αντιστοίχως, και ως $\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n, \mathsf{X}_{n+1}, \ldots, \mathsf{X}_{2n}$ τις συναρτήσεις συντεταγμένων τού γινομένου $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \times \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$. Η διαγώνιος

$$\Delta_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}} = \mathbf{V}(\mathsf{X}_1 - \mathsf{X}_{n+1}, \ldots, \mathsf{X}_n - \mathsf{X}_{2n}) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \times \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} = \mathbb{A}^{2n}_{\mathbf{k}}$$

αποτελεί μια κλειστή, γραμμική υποποικιλότητα τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \times \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$, η διαγώνιος

$$\Delta_W = (W \times W) \cap \Delta_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}}$$

ένα κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού $W \times W$ και η διαγώνιος

$$\Delta_Z = (Z \times Z) \cap \Delta_W$$

ένα κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού $Z \times Z$. Επειδή οι φ και Id_Z είναι μορφισμοί, είναι μορφισμός και το γινόμενό τους

$$\varphi \times \mathrm{Id}_Z : Y \times Z \longrightarrow Z \times Z.$$

Ως μορφισμός η $\varphi\times$ Id_Z είναι κατά Zariski συνεχής (βλ. 2.5.16 (a)), οπότε αντιστρέφει κλειστά υποσύνολα τού $Z \times Z$ σε κλειστά υποσύνολα τού $Y \times Z$. Άρα το *γράφημα*

$$\mathrm{Gr}\,(\varphi) := \{\,(a,b) \in Y \times Z \mid \; b = \varphi\,(a)\} = (\varphi \times \mathrm{Id}_Z)^{-1}\,(\Delta_Z)$$

τού φ είναι ένα κλειστό υποσύνολο τής $Y \times Z$. Το ότι το $\mathrm{Gr}(\varphi)$ είναι ανάγωγο έπεται από τον υφιστάμενο ισομορφισμό μεταξύ αυτού και τής Y (που θα παραθέσουμε στο (b)) και από την πρόταση 2.1.7. Άρα το $\mathrm{Gr}(\varphi)$ είναι όντως μια κλειστή υποποικιλότητα τής $Y \times Z$.

(b) Η απεικόνιση

$$\mathrm{pr}_Y|_{\mathrm{Gr}(\varphi)} : \mathrm{Gr}\,(\varphi) \ni (a,b) \longmapsto a \in Y$$

είναι ισομορφισμός μεταξύ σχεδόν συσχετικών ποικιλοτήτων, διότι είναι μορφισμός έχων τον μορφισμό

$$Y \ni a \longmapsto (a, \varphi\,(a)) \in \mathrm{Gr}\,(\varphi) \subseteq Y \times Z$$

ως αντίστροφό του. $\square$