ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

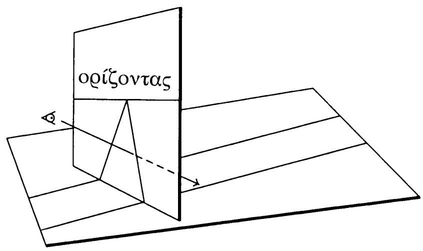
Προβολικά Αλγεβρικά Σύνολα και Προβολικές Ποικιλότητες

Οι συσχετικές ποικιλότητες (και αντιστοίχως, τα συσχετικά αλγεβρικά σύνολα) εμφυτεύονται εντός ευρυτέρων γεωμετρικών οντοτήτων, των λεγομένων *προβολικών ποικιλοτήτων* (και αντιστοίχως, *προβολικών αλγεβρικών συνόλων*), ύστερα από επέκταση τού εκάστοτε περιβάλλοντος χώρου $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ στον *προβολικό χώρο* $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ με τη βοήθεια προσαρτήσεως καταλλήλων *επ' άπειρον υπερεπιπέδων*. Επί παραδείγματι, όταν $n = 1$ και $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, οι αναγνώστες που διαθέτουν στοιχειώδεις τοπολογικές γνώσεις θα αντιληφθούν χωρίς κόπο ότι η *πραγματική προβολική ευθεία* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ (μέχρις ομοιομορφισμού, ως προς τη συνήθη τοπολογία) δεν είναι τίποτα άλλο παρά ο μοναδιαίος κύκλος $\mathbb{S}^1$, ιδωμένος ως μονοσημειακή συμπαγοποίηση τής πραγματικής ευθείας $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$.

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρατεθούν ορισμένα θεμελιώδη τμήματα τής θεωρίας των προβολικών και σχεδόν προβολικών ποικιλοτήτων, δίνοντας έμφαση σε εκείνες τις ιδιότητες που παρουσιάζουν κάποιες διαφορές σε σχέση με ό,τι έχει ήδη διδαχθεί στο κεφάλαιο 2 για τις αντίστοιχες συσχετικές και σχεδόν συσχετικές ποικιλότητες.

3.1 Ο Προβολικός Χώρος

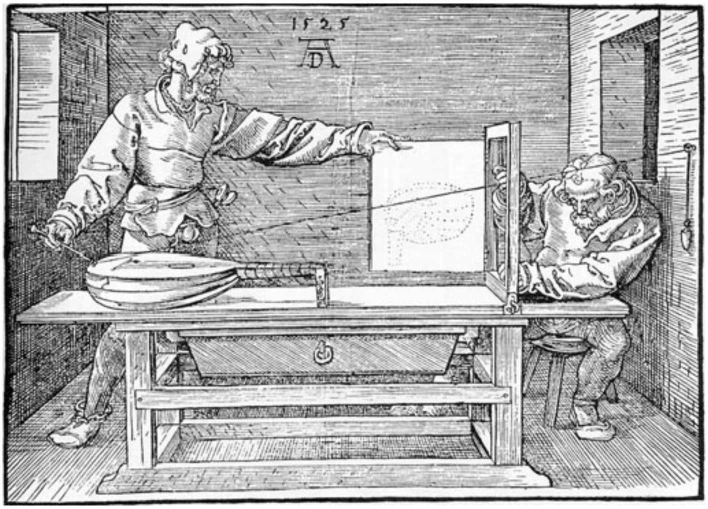
Κατά τη μελέτη τής Γεωμετρίας τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ ερχόμαστε αντιμέτωποι με μια «σχετικώς ανορθόδοξη ιδιότητα»: Οι υπολογισμοί δεν εκτελούνται απευθείας με τα σημεία αλλά με τα διανύσματα που τα συνδέουν. Επί παραδείγματι, δύο (διακεκριμένα) σημεία τού συσχετικού χώρου $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ καθορίζουν πάντοτε μία ευθεία, επί τής οποίας κείνται (πρβλ. άσκηση **A-2-17**). Αντιθέτως, ακόμη και στον $\mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$,δύο ευθείες δεν καθορίζουν πάντοτε ένα σημείο, το οποίο να ανήκει σε αμφότερες, καθότι αυτές ενδέχεται να είναι *παράλληλες*. Αυτή η *μη συμμετρική ιδιότητα* μεταξύ τού συνόλου των σημείων και τού συνόλου των ευθειών οδήγησε στην εισαγωγή νέων, *επ' άπειρον σημείων*, στα οποία δυο παράλληλες ευθείες θα όφειλαν να «τέμνονται». Τούτο καθίσταται αντιληπτό όταν ένας ζωγράφος προσπαθεί να αποδώσει στον (δισδιάστατο) καμβά του αντικείμενα ευρισκόμενα επί ενός (διαφορετικού) επιπέδου τού $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ μέσω προοπτικής προβολής από ένα συγκεκριμένο σημείο εποπτεύσεως (βλ. σχήμα **9**).



Σχήμα 9

Ό,τι εμφανίζεται στον καμβά ως ευθεία, είναι και στο ζωγραφιζόμενο επίπεδο μια ευθεία, αλλά υφίσταται και μια άλλη ευθεία, η *επ' άπειρον ευθεία* (ή *ο ορίζοντας*) που δεν αντιστοιχεί σε τίποτα κείμενο επί τού ζωγραφιζόμενου επιπέδου. Οι παράλληλες ευθείες φαίνεται να «τέμνονται» επί τής γραμμής τού ορίζοντα. Κατ' αυτήν τη διαδικασία ο ζωγράφος κάτι κερδίζει και κάτι χάνει, καθότι δεν αποτυπώνονται τα πάντα εμπρός του. Το «λάθος» οφείλεται στον καμβά, ο οποίος δεν είναι «καλύτερος» τού απεικονιζόμενου επιπέδου. Η προβολή είναι η ορθή μέθοδος· ωστόσο αυτή δεν θα πρέπει να εκτελείται απευθείας επί τού καμβά αλλά νοητικώς, ήτοι μετατρέποντας τις τομές των ευθειών προβολής [των διερχομένων από το σημείο εποπτεύσεως (που παίζει τον ρόλο τής «αρχής των αξόνων») και από τα σημεία των αποτυπούμενων αντικειμένων] με τον καμβά σε σημεία ενός νέου, *προβολικού χώρου* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Εν προκειμένω, οι «οριζόντιες ευθείες» αντιστοιχούν στα σημεία τού επ' άπειρον υπερεπιπέδου $\mathbb{H}^{\infty}$ (κατ' ουσίαν τής *προβολικής ευθείας* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$) που επισυνάπτεται στον αποτυπούμενο $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

Οι ιδιότητες τέτοιου είδους *κεντρικών προβολών* είχαν εξετασθεί διεξοδικώς από περιώνυμους αναγεννησιακούς ζωγράφους (που αποσκοπούσαν στη θέσπιση *αυστηρών κανόνων* για την ορθή αισθητική απόδοση τού «βάθους»), όπως ήταν οι Leonardo da Vinci (1452-1519) και Albrecht Dürer (1471-1528). Τα σχέδια **10** και **11** είναι έργα τού δευτέρου (από το έτος 1525). Το πρώτο εξ αυτών αφορά στον τρόπο κατασκευής τής απεικονίσεως ενός λαούτου σε έναν καμβά μέσω κεντρικής προβολής υλοποιούμενης με τη βοήθεια ειδικώς προσαρμοσμένων νημάτων· το δεύτερο στον τρόπο κατασκευής μιας προσωπογραφίας κάνοντας χρήση ενός καταλλήλως επιλεγμένου σημείου εποπτεύσεως.



Σχέδιο 10

Σχέδιο 11

Από ιστορική σκοπιά, για την έλευση τής «χρυσής εποχής» τής Προβολικής Γεωμετρίας (1795-1850) απαιτήθηκε να παρέλθουν $2\frac{1}{2}$ επιπλέον αιώνες! Ως αφετηρία της θεωρείται η δημοσίευση τής «Γεωμετρίας» τού Gaspard Monge (1746-1818) το έτος 1795. Έκτοτε η Προβολική Γεωμετρία γνώρισε ιδιαίτερη άνθηση, αφού έτυχε τής υποστηρίξεως ακόμη και τού Ναπολέοντα Βοναπάρτη (1769-1821), ο οποίος ήλπιζε να αποκομίσει μέσω αυτής στρατιωτικά οφέλη. Από μαρτυρίες εκείνης τής περιόδου είναι γνωστό ότι ο Jean Victor Poncelet (1788-1867), έχοντας περιπέσει σε αιχμαλωσία ύστερα από τη συμμετοχή του στην (αποτυχημένη, ναπολεόντεια) εκστρατεία εναντίον τής Ρωσίας, ξεκίνησε τη συγγραφή τού «Traité des propriétés projectives des figures» εντός τής φυλακής. Το έργο αυτό είδε το φως τής δημοσιότητας το 1822 και έμελλε να συνεισφέρει τα μέγιστα στη ραγδαία εξέλιξη τής εν λόγω ερευνητικής περιοχής. Στους αξιομνημόνευτους σύγχρονους γεωμέτρες, τους ανήκοντες στη γερμανική σχολή, με βαρύνουσα συνεισφορά στον κλάδο, συγκαταλέγονται οι August Ferdinand Möbius (1790-1868), Jakob Steiner (1796-1863), Karl Georg Christian von Staudt (1798-1867) και Julius Plücker (1801-1868).

Η κλασική Προβολική Γεωμετρία ασχολείτο κυρίως με γεωμετρικούς σχηματισμούς που περιγράφονται ως χώροι λύσεων συστημάτων ομογενών πολυωνύμων μικρού βαθμού (ήτοι βαθμού $\leq$ 3). Ωστόσο, για την εργασία με πολυώνυμα μεγαλυτέρου βαθμού ήταν αναγκαία η χρήση προκεχωρημένων αλγεβρικών τεχνικών μέσων. Έτσι, η βαθμιαία «αλγεβροποίηση» τής Προβολικής Γεωμετρίας κατά το δεύτερο ήμισυ τού 19ου αιώνα προλείανε το έδαφος για τη δημιουργία τής *πρώιμης* Αλγεβρικής Γεωμετρίας με κύριους εκπροσώπους της τους Alexander Wilhelm von Brill (1842-1935), Max Noether (1844-1921, πατέρα τής Emmy) και Felix Christian Klein (1849-1925) στη Γερμανία, και τους Antonio L.G.G. Cremona (1830-1903), Giuseppe Veronese (1854-1917), Corrado Segre (1863-1924), Guido Castelnuovo (1865-1952), Federigo Enriques (1871-1946), Gino Fano (1871-1952) και Francesco Severi (1879-1961) στην Ιταλία. Οι Castelnuovo, Enriques και Severi υπήρξαν διδάσκαλοι τού Oscar Zariski (1899-1986) στη Ρώμη. Οι Zariski, Bartel L. van der Waerden (1903-1996) και André Weil (1906-1998) μπορούν αναμφιβόλως να θεωρηθούν ως πρωτεργάτες τής μετεξελίξεως τής Αλγεβρικής Γεωμετρίας κατά την τριακονταετία 1930-1960.

3.1.1 Ορισμός. Έστω $\mathbf{k}$ ένα σώμα και έστω $\mathcal{V}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διαστάσεως υπεράνω τού $\mathbf{k}$. Ως **προβολικό χώρο** $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ που αντιστοιχεί στον $\mathcal{V}$ ορίζουμε το σύνολο όλων των ευθειών τού $\mathcal{V}$ που διέρχονται από το $0_{\mathcal{V}}$ (ήτοι το σύνολο όλων των μονοδιάστατων $\mathbf{k}$-υπόχωρων τού $\mathcal{V}$). Επομένως, κάθε **σημείο** τού $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ είναι τής μορφής $\{\mu\mathbf{v}\,|\,\mu\in\mathbf{k}\}$ για κάποιο $\mathbf{v}\in\mathcal{V}\smallsetminus\{0_{\mathcal{V}}\}$. Ως **διάσταση τού** $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ ορίζουμε τον αριθμό

$$\dim(\mathbb{P}(\mathcal{V})) := \dim_{\mathbf{k}}(\mathcal{V}) - 1.$$

Εάν το $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{V}$ είναι ένας $\mathbf{k}$-υπόχωρος τού $\mathcal{V}$, τότε $\mathbb{P}(\mathcal{W})\subseteq\mathbb{P}(\mathcal{V})$. Τέτοιου είδους υποσύνολα τού $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ καλούνται **προβολικοί υπόχωροι τού** $\mathbb{P}(\mathcal{V})$.

3.1.2 Ορισμός. (a) Έστω k ένα σώμα. Τότε για οιονδήποτε $n \in \mathbb{N}_0$ ορίζουμε ως n-**διάστατο προβολικό χώρο υπεράνω τού** k το σύνολο

$$\boxed{\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} := \mathbb{P}(\mathbf{k}^{n+1}) = \left\{[a_0 : a_1 : \ldots : a_n] \,\middle|\, (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}^{n+1}}\}\right\}.}$$

Τα

$$[a_0 : \ldots : a_n] := \{(\mu a_0, \ldots, \mu a_n) \,|\, \mu \in \mathbf{k}\}, \ \ (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}^{n+1}}\}$$

είναι τα **σημεία** (= οι μηδενοδιάστατοι προβολικοί υπόχωροι) τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$. Ακριβέστερα, χαρακτηρίζουμε το $[a_0 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ ως το σημείο τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ που έχει τα $a_0, \ldots, a_n$ ως **ομογενείς συντεταγμένες**[1] του.

(b) Προφανώς, επειδή

$$[a_0 : \ldots : a_n] = [a'_0 : \ldots : a'_n] \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\} : a'_i = \lambda a_i, \ \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\},$$

ο $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ μπορεί -εναλλακτικώς- να ορισθεί ως το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας

$$\boxed{\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} := \left(\mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}^{n+1}}\}\right) / \sim}$$

ως προς τη σχέση ισοδυναμίας[2] "$\sim$":

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n) \sim (a'_0, a'_1, \ldots, a'_n) \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \exists \lambda \in \mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\} : a'_i = \lambda a_i, \ \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

(c) Κάθε προβολικός υπόχωρος τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ ο οποίος έχει διάσταση 1 (και αντιστοίχως, διάσταση $n-1$) καλείται **προβολική ευθεία** (και αντιστοίχως, **προβολικό υπερεπίπεδο**) εντός τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$.

3.1.3 Σημείωση. Θέτοντας για κάθε $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$,

$$\boxed{U_i := U_i(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}) := \{[a_0 : a_1 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \,|\, a_i \neq 0_{\mathbf{k}}\},}$$

παρατηρούμε ότι για οιοδήποτε σημείο $[a_0 : \ldots : a_n] \in U_i$ έχουμε

$$[a_0 : \ldots : a_n] = \begin{cases} [1_{\mathbf{k}} : \frac{a_1}{a_0} : \ldots : \frac{a_n}{a_0}], & \text{όταν } i = 0, \\ [\frac{a_0}{a_i} : \ldots : \frac{a_{i-1}}{a_i} : 1_{\mathbf{k}} : \frac{a_{i+1}}{a_i} : \ldots : \frac{a_n}{a_i}], & \text{όταν } 1 \leq i < n, \\ [\frac{a_0}{a_n} : \ldots : \frac{a_{n-1}}{a_n} : 1_{\mathbf{k}}], & \text{όταν } i = n, \end{cases}$$

[1] Το a_i καλείται i-**οστή ομογενής συντεταγμένη τού** $[a_0 : \ldots : a_n]$. Βεβαίως, δεν έχει νόημα να ομιλούμε για την *τιμή* τής i-οστής ομογενούς συντεταγμένης. Ωστόσο, *έχει νόημα* να διευκρινίζουμε το κατά πόσον η i-οστή ομογενής συντεταγμένη δοθέντος σημείου τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι (ή δεν είναι) ίση με το $0_{\mathbf{k}}$!

[2] Κατά συνέπειαν, ο $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ μπορεί να θεωρηθεί και ως ο **τροχιακός χώρος** $\left(\mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}^{n+1}}\}\right) / (\mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\})$ ο δημιουργούμενος από **τη δράση**

$$(\mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\}) \times \left(\mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}^{n+1}}\}\right) \ni (\lambda, (a_0, \ldots, a_n)) \longmapsto (\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) \in \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}^{n+1}}\}$$

τής (αλγεβρικής) πολλαπλασιαστικής ομάδας $\mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\}$ επί τού $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}^{n+1}}\}$.

και ότι η απεικόνιση

$$\phi_i : \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow U_i \tag{3.1}$$

η οριζόμενη από τον τύπο

$$(a_1, \ldots, a_n) \xmapsto{\phi_i} \begin{cases} [1_{\mathbf{k}} : a_1 : \ldots : a_n], & \text{όταν } i = 0, \\ [a_1 : \ldots : a_i : 1_{\mathbf{k}} : a_{i+1} : \ldots : a_n], & \text{όταν } 1 \leq i < n, \\ [a_1 : \ldots : a_n : 1_{\mathbf{k}}], & \text{όταν } i = n, \end{cases}$$

είναι αμφιρριπτική έχουσα την

$$U_i \ni [a_0 : \ldots : a_n] \longmapsto \begin{cases} (\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}), & \text{όταν } i = 0, \\ \left(\frac{a_0}{a_i}, \ldots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \ldots, \frac{a_n}{a_i}\right), & \text{όταν } 1 \leq i < n, \\ \left(\frac{a_0}{a_n}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n}\right), & \text{όταν } i = n, \end{cases}$$

ως αντίστροφό της. Ως εκ τούτου, ο $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ γράφεται ως ένωση

$$\boxed{\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} = \bigcup_{i=0}^{n} U_i,} \tag{3.2}$$

με καθένα των U_i «ταυτιζόμενο» με τον n-διάστατο συσχετικό χώρο $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$. Επίσης, ο $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ γράφεται ως ένωση

$$\boxed{\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} = U_i \cup \mathbb{H}^{\infty}_i, \ \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}} \tag{3.3}$$

όπου το

$$\mathbb{H}^{\infty}_i := \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \smallsetminus U_i = \{[a_0 : a_1 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \,|a_i = 0_{\mathbf{k}}\}$$

είναι το λεγόμενο (**i-οστό) επ' άπειρον υπερεπίπεδο τού** $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ (ως προς την εμφύτευση ϕ_i τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ εντός τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$). Η αμφίρριψη

$$\mathbb{H}^{\infty}_i \ni [a_0 : \ldots : a_{i-1} : 0_{\mathbf{k}} : a_{i+1} : \ldots : a_n] \longleftrightarrow [a_0 : \ldots : a_{i-1} : a_{i+1} : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbf{k}}$$

δείχνει το πώς μπορούμε να «ταυτίζουμε» το $\mathbb{H}^{\infty}_i$ με τον $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbf{k}}$.

3.1.4 Παραδείγματα. (a) Ο $\mathbb{P}^0_{\mathbf{k}}$ είναι ένα σημείο. (Συγκεκριμένα, το $\{1_{\mathbf{k}}\}$.) Η **προβολική ευθεία υπεράνω τού** k είναι ο χώρος

$$\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}} = \left\{[a : 1_{\mathbf{k}}] \,\middle|\, a \in \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}\right\} \cup \{[1_{\mathbf{k}} : 0_{\mathbf{k}}]\}$$

ο αποτελούμενος από ένα αντίτυπο τής συσχετικής ευθείας και ένα επ' άπειρον σημείο, ενώ το **προβολικό επίπεδο υπεράνω τού** k είναι ο χώρος

$$\mathbb{P}^2_{\mathbf{k}} = \left\{[a : b : 1_{\mathbf{k}}] \,\middle|\, (a, b) \in \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}\right\} \cup \left\{[a : b : 0_{\mathbf{k}}] \,\middle|\, [a : b] \in \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}\right\}$$

ο αποτελούμενος από ένα αντίτυπο τού συσχετικού επιπέδου και μια επ' άπειρον ευθεία.
(b) Έστω $\mathsf{Y} = a\mathsf{X} + b$ η εξίσωση μιας ευθείας τού $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$. Για να προσδιορίσουμε την εικόνα αυτής τής ευθείας μέσω τής εμφυτεύσεως $\phi_2 : \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ θεωρούμε ένα σημείο (x_0, y_0) επ' αυτής, καθώς και τις εξισώσεις

$$\frac{x_0}{\mathsf{X}} = \frac{ax_0 + b}{\mathsf{Y}} = \frac{1}{\mathsf{Z}}$$

που καθορίζουν την ευθεία τη διερχόμενη από τα σημεία $(0,0,0)$ και $(x_0, y_0, 1)$ εντός τού $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$. Προφανώς,

$$\begin{aligned} \phi_2(\{(\mathsf{X},\mathsf{Y}) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \,|\, \mathsf{Y} = a\mathsf{X} + b\}) &= \{[\mathsf{X}:\mathsf{Y}:\mathsf{Z}] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \,|\, \mathsf{Y} = a\mathsf{X} + b\mathsf{Z}\} \cap U_2 \\ &= \{[\mathsf{X}:\mathsf{Y}:\mathsf{Z}] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \,|\, \mathsf{Y} = a\mathsf{X} + b\mathsf{Z},\ \mathsf{Z} \neq 0\} \end{aligned}$$

και

$$\{[\mathsf{X}:\mathsf{Y}:\mathsf{Z}] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \,|\, \mathsf{Y} = a\mathsf{X} + b\mathsf{Z}\} \cap \mathbb{H}^{\infty}_2 = \{[1:a:0]\}.$$

Κατά συνέπειαν, όλες οι ευθείες τού $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ οι οποίες έχουν την ίδια κλίση, επεκτεινόμενες στο $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, διέρχονται από το ίδιο σημείο τής επ' άπειρον ευθείας $\mathbb{H}^{\infty}_2$.
(c) Η εικόνα τής υπερβολής $V = \mathbf{V}(\mathsf{Y}^2 - \mathsf{X}^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ μέσω τής $\phi_2 : \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ είναι η

$$\begin{aligned} \phi_2(V) &= \{[\mathsf{X}:\mathsf{Y}:\mathsf{Z}] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \,|\, \mathsf{Y}^2 = \mathsf{X}^2 + \mathsf{Z}^2\} \cap U_2 \\ &= \{[\mathsf{X}:\mathsf{Y}:\mathsf{Z}] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \,|\, \mathsf{Y}^2 = \mathsf{X}^2 + \mathsf{Z}^2,\ \mathsf{Z} \neq 0\} \end{aligned}$$

και

$$\{[\mathsf{X}:\mathsf{Y}:\mathsf{Z}] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \,|\, \mathsf{Y}^2 = \mathsf{X}^2 + \mathsf{Z}^2\} \cap \mathbb{H}^{\infty}_2 = \{[1:1:0], [1:-1:0]\}.$$

Τα σημεία $[1:\pm 1:0]$ είναι τα σημεία τομής τής καμπύλης (εντός τού $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$) με τις ευθείες $\mathsf{Y} = \pm\mathsf{X}$.

Ασκήσεις

Α-3-1. Έστω $\mathbf{k}$ ένα σώμα και έστω $n \in \mathbb{N}_0$. Εάν οι $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ είναι δυο $\mathbf{k}$-υπόχωροι τού $\mathbf{k}^{n+1}$, τότε ορίζουμε ως **χώρο συνδέσεως** $\mathbb{P}(\mathcal{W}_1) + \mathbb{P}(\mathcal{W}_2)$ των $\mathbb{P}(\mathcal{W}_1)$ και $\mathbb{P}(\mathcal{W}_2)$ τον ελάχιστο προβολικό υπόχωρο τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} := \mathbb{P}(\mathbf{k}^{n+1})$ που περιέχει αμφότερους τους $\mathbb{P}(\mathcal{W}_1)$ και $\mathbb{P}(\mathcal{W}_2)$. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:
(a) $\mathbb{P}(\mathcal{W}_1) + \mathbb{P}(\mathcal{W}_2) = \mathbb{P}(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2)$.
(b) $\mathbb{P}(\mathcal{W}_1) \cap \mathbb{P}(\mathcal{W}_2) = \mathbb{P}(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2)$.

(c) $\dim(\mathbb{P}(\mathcal{W}_1) \cap \mathbb{P}(\mathcal{W}_2)) = \dim(\mathbb{P}(\mathcal{W}_1)) + \dim(\mathbb{P}(\mathcal{W}_2)) - \dim(\mathbb{P}(\mathcal{W}_1) + \mathbb{P}(\mathcal{W}_2))$.

(d) Εάν $\dim(\mathbb{P}(\mathcal{W}_1)) + \dim(\mathbb{P}(\mathcal{W}_2)) \geq n$, τότε $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 \neq \varnothing$.

A-3-2. Έστω ότι το $\mathbf{k}$ είναι ένα απειροπληθές σώμα και ότι $0 \neq F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$. Γράφοντας το F μονοσημάντως ως άθροισμα

$$F = \sum_{j \geq 0} F_{(j)}, \;\; F_{(j)} := \sum_{i_0 + i_1 + \cdots + i_n = j} \lambda_{(i_0, i_1, \ldots, i_n)} \mathsf{X}_0^{i_0} \mathsf{X}_1^{i_1} \cdots \mathsf{X}_n^{i_n},$$

ομογενών πολυωνύμων (βλ. §1.1 **(xii)**) και υποθέτοντας ότι

$$F(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 0_{\mathbf{k}}$$

για κάθε επιλογή ομογενών συντεταγμένων $[a_0 : \ldots : a_n]$ ενός σημείου $P \in \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, να αποδειχθεί ότι

$$F_{(j)}(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 0_{\mathbf{k}}, \;\; \forall j \in \{0, \ldots, \deg(F)\},$$

για κάθε επιλογή ομογενών συντεταγμένων $[a_0 : \ldots : a_n]$ τού P.

3.2 Βαθμολογημένοι Δακτύλιοι και Μόδιοι

Ο πολυωνυμικός δακτύλιος $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ καθίσταται κατά φυσικό τρόπο *βαθμολογημένος δακτύλιος*.

3.2.1 Ορισμός. Μια ($\mathbb{N}_0$-)**βαθμολόγηση** ενός δακτυλίου R είναι μια οικογένεια $(R_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ υποομάδων τής προσθετικής ομάδας $(R, +)$ τού R, τέτοια ώστε να πληρούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

(a) $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} R_i$ (ευθύ άθροισμα υποομάδων), και

(b) $R_i \cdot R_j \subseteq R_{i+j}$, για οιουσδήποτε $i, j \in \mathbb{N}_0$.

Ένας **βαθμολογημένος δακτύλιος** είναι ένας δακτύλιος εφοδιασμένος με μια βαθμολόγηση. Εάν ο R είναι βαθμολογημένος δακτύλιος, τότε η R_i, για $i \in \mathbb{N}_0$, καλείται **ομογενές τμήμα τού** R **βαθμού** i, ενώ τα στοιχεία της καλούνται **ομογενή στοιχεία**[3] **βαθμού** i.

3.2.2 Σημείωση. Έστω $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} R_i$ ένας βαθμολογημένος δακτύλιος. Τότε είναι εύκολο να διαπιστωθούν τα εξής:

(a) Κάθε $r \in R \smallsetminus \{0_R\}$ γράφεται *μονοσημάντως* υπό τη μορφή

$$r = \sum_{i \geq 0} r_{(i)}, \quad (r_{(i)} \in R_i, \; \forall i \in \mathbb{N}_0),$$

[3] Εάν το r είναι ένα ομογενές στοιχείο τού R βαθμού i, τότε είθισται να γράφουμε $\deg(r) = i$.

όπου μόνον *πεπερασμένοι* όροι τού αθροίσματος είναι μη μηδενικοί. Μάλιστα, θέτοντας

$$j := \min\left\{ i \in \mathbb{N}_0 |\, r_{(i)} \neq 0_R \right\}, \quad d := \max\left\{ i \in \mathbb{N}_0 |\, r_{(i)} \neq 0_R \right\},$$

το r μπορεί να γραφεί ως

$$r = \sum_{i=j}^{d} r_{(i)}.$$

Ιδιαιτέρως, το $r_{(j)}$ καλείται **αρχικό ομογενές στοιχείο τού** r και το $r_{(d)}$ **τελικό ομογενές στοιχείο τού** r. (Είθισται, μάλιστα, να λέμε ότι το r έχει **συνολικό βαθμό** d.)

(b) Η προσθετική υποομάδα R_0 τής $(R, +)$ αποτελεί υποδακτύλιο τού R με[4] $1_R \in R_0$, ο R καθίσταται R_0-άλγεβρα και κάθε R_i, $i \in \mathbb{N}_0$, καθίσταται R_0-υπομόδιος τού R.

(c) Έστω R' μια υποάλγεβρα τής R_0-άλγεβρας R. Εάν αυτή παράγεται από το R_1 (ήτοι από το ομογενές τμήμα τού R βαθμού 1), τότε η R' είναι ένας *βαθμολογημένος υποδακτύλιος* τού βαθμολογημένου δακτυλίου R, οπότε γράφουμε $R' = R_0[R_1]$. Στην ειδική περίπτωση κατά την οποία $R' = R$, λέμε ότι ο R είναι μια **βαθμολογημένη R_0-άλγεβρα παραγόμενη από τα ομογενή στοιχεία βαθμού** 1.

3.2.3 Παραδείγματα. (a) Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω $\mathbf{k}$ ένα σώμα. Θέτοντας για κάθε $d \in \mathbb{N}_0$,

$$\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]_d := \left\{ F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] |\, F \text{ ομογενές βαθμού } d \right\} \cup \{0_{\mathbf{k}}\},$$

παρατηρούμε ότι

$$\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]_d = \mathbf{Span}_{\mathbf{k}}\left(\mathrm{Mon}(\mathbf{k}\left[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n\right])_d\right)$$

(με το $\mathrm{Mon}(\mathbf{k}\left[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n\right])_d$ μια *βάση* τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]_d$), ότι

$$\dim_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]_d) = \binom{d+n-1}{n-1}$$

(βλ. άσκηση **A-1-35**) και ότι ο δακτύλιος $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ δέχεται τη βαθμολόγηση

$$\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}_0} \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]_d.$$

Επειδή $\mathrm{Mon}(\mathbf{k}\left[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n\right])_1 = \{\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n\}$, ο $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ είναι μια βαθμολογημένη $\mathbf{k}$-άλγεβρα παραγόμενη από τα ομογενή στοιχεία βαθμού 1.

---

[4] Επειδή $1_R = \sum_{i=0}^{d} r_{(i)}$, για κάποια $r_{(i)} \in R_i$, $d \in \mathbb{N}_0$, έχουμε *για κάθε* $a_{(i)} \in R_i$

$$a_{(i)} - r_{(0)} a_{(i)} = \sum_{i=1}^{d} r_{(i)} a_{(i)} \in R_i \cap (R_{i+1} \oplus \cdots \oplus R_{i+d}) = \{0_R\},$$

οπότε $a = r_{(0)} a$, $\forall a \in R$, πράγμα που σημαίνει ότι $r_{(0)} = 1_R$.

(b) Εάν $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{w} := (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{N}^n$ και το $\mathbf{k}$ είναι ένα σώμα, τότε το (a) γενικεύεται ως εξής: Ορίζουμε ως **w-βεβαρημένο ομογενές πολυώνυμο βαθμού** $d \in \mathbb{N}_0$ κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ ανήκον στο

$$\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]_d^{(\mathbf{w})} := \mathbf{Span}_{\mathbf{k}} \left(\mathrm{Mov}(\mathbf{k}\,[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n])_d^{(\mathbf{w})} \right),$$

όπου

$$\mathrm{Mov}(\mathbf{k}\,[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n])_d^{(\mathbf{w})} := \left\{ \mathsf{X}_1^{i_1} \cdots \mathsf{X}_n^{i_n} \,\middle|\, (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n : i_1 w_1 + \cdots + i_n w_n = d \right\}.$$

Προφανώς,

$$\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}_0} \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]_d^{(\mathbf{w})}.$$

(Τα $w_1, \ldots, w_n$ καλούνται **βάρη** τής ανωτέρω «$\mathbf{w}$-βαθμολογήσεως».) Ως εκ τούτου, ο $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ δέχεται μια απειρία *διαφορετικών* βαθμολογήσεων. Για να αποκτήσουμε την «συνήθη» βαθμολόγηση (a) αρκεί να θέσουμε $w_1 = \cdots = w_n = 1$.

3.2.4 Ορισμός. Έστω $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} R_i$ ένας βαθμολογημένος δακτύλιος. Ένας R-μόδιος M καλείται **βαθμολογημένος R-μόδιος** όταν δέχεται διάσπαση ως ευθύ άθροισμα

$$M = \bigoplus\nolimits_{i \in \mathbb{N}_0} M_i$$

προσθετικών υποομάδων M_i τής $(M, +)$, ούτως ώστε να ισχύει $R_i \cdot M_j \subseteq M_{i+j}$, για οιουσδήποτε $i, j \in \mathbb{N}_0$. Εάν ο M είναι βαθμολογημένος R-μόδιος, τότε η M_i, για $i \in \mathbb{N}_0$, καλείται **ομογενές τμήμα τού M βαθμού** i, ενώ τα στοιχεία τής M_i καλούνται **ομογενή στοιχεία τού M βαθμού** i. (Οι έννοιες **αρχικό και τελικό ομογενές στοιχείο** και **συνολικός βαθμός** οιουδήποτε μη μηδενικού στοιχείου τού M ορίζονται όπως στο 3.2.2 (a).) Προφανώς, κάθε M_i, $i \in \mathbb{N}_0$, είναι R_0-μόδιος.

3.2.5 Ορισμός. Ένας υπομόδιος N ενός βαθμολογημένου R-μοδίου $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} M_i$ καλείται **ομογενής υπομόδιος** (ή **βαθμολογημένος υπομόδιος**) όταν

$$N = \bigoplus\nolimits_{i \in \mathbb{N}_0} (M_i \cap N).$$

3.2.6 Πρόταση. *Έστω N ένας υπομόδιος ενός βαθμολογημένου R-μοδίου $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} M_i$. Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(a) *Ο N είναι ομογενής υπομόδιος τού M (υπό την έννοια τού ορισμού 3.2.5).*

(b) *Ο N παράγεται από ομογενή στοιχεία (πιθανώς διαφορετικών βαθμών) τού M.*

(c) *Εάν $y = m_{(0)} + m_{(1)} + \cdots + m_{(d)}$, όπου $m_{(i)} \in M_i$, $\forall i \in \{0, \ldots, d\}$, τότε*

$$y \in N \Longleftrightarrow m_{(i)} \in N, \ \ \forall i \in \{0, \ldots, d\}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a)⇒(b): Είναι προφανές ότι το σύνολο $\bigcup_{i\in\mathbb{N}_0}(N\cap M_i)$ όλων των ομογενών στοιχείων τού N παράγει τον N.

(b)⇒(a): Έστω $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ μια οικογένεια γεννητόρων τού N η οποία αποτελείται από ομογενή στοιχεία $x_\lambda\in M$ με $\deg(x_\lambda)=i_\lambda$. Κάθε $y\in N$ γράφεται υπό τη μορφή

$$y=\sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda x_\lambda \ \ (\text{για κάποια } r_\lambda\in R).$$

Διασπώντας καθένα των r_λ στις ομογενείς του συνιστώσες λαμβάνουμε

$$r_\lambda=\sum_{i\in\mathbb{N}_0} r_{\lambda,i} \ \ \ (r_{\lambda,i}\in R_i),$$

οπότε

$$y=\sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\sum_{i\in\mathbb{N}_0} r_{\lambda,i}\right)x_\lambda=\sum_{i\in\mathbb{N}_0}\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{j+i_\lambda=i} r_{\lambda,j}x_\lambda\right)\Longrightarrow y=\sum_{i\in\mathbb{N}_0} y_i,$$

όπου τα

$$y_i:=\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{j+i_\lambda=i} r_{\lambda,j}x_\lambda,\ \ i\in\mathbb{N}_0,$$

είναι οι ομογενείς συνιστώσες τού y με $\deg(y_i)=i$, $\forall i\in\mathbb{N}_0$. Επειδή $y_i\in N$, $\forall i\in\mathbb{N}_0$, ο ισχυρισμός είναι αληθής.

(a)⇔(c) Τούτη η ισοδυναμία είναι προφανής. □

3.2.7 Ορισμός. Ένα ιδεώδες I ενός βαθμολογημένου δακτυλίου $R=\bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0}R_i$ καλείται **ομογενές ιδεώδες** (ή **βαθμολογημένο ιδεώδες**) **τού** R όταν αυτό, ως R-μόδιος, είναι ένας ομογενής υπομόδιος τού R (υπό την έννοια τού ορισμού 3.2.5).

3.2.8 Πρόταση. *Έστω I ένα ιδεώδες ενός βαθμολογημένου δακτυλίου $R=\bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0}R_i$. Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(a) *Το I είναι ομογενές ιδεώδες τού R.*

(b) *Το I παράγεται από ομογενή στοιχεία (πιθανώς διαφορετικών βαθμών) τού R.*

(c) *Εάν $y=r_{(0)}+r_{(1)}+\cdots+r_{(d)}$, όπου $r_{(i)}\in R_i$, $\forall i\in\{0,\ldots,d\}$, τότε*

$$y\in I\Longleftrightarrow r_{(i)}\in I,\ \ \forall i\in\{0,\ldots,d\}.$$

(d) *Ο πηλικοδακτύλιος R/I είναι βαθμολογημένος, δεχόμενος τη βαθμολόγηση*

$$R/I=\bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0}(R_i+I)/I\cong\bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0}R_i/(R_i\cap I)$$

(Ο ισομορφισμός αυτός οφείλεται στο 2ο θεώρημα ισομορφισμών δακτυλίων 1.1.11.)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Οι ισοδυναμίες των (a), (b) και (c) έπονται άμεσα από την πρόταση 3.2.6.

(a)⇒(d): Είναι προφανές ότι $R/I = \sum_{i\in\mathbb{N}_0}(R_i + I)/I$. Απομένει λοιπόν να δείξουμε ότι η αναπαράσταση κάθε στοιχείου τού πηλικοδακτυλίου R/I ως αθροίσματος στοιχείων των $(R_i + I)/I$, $i \in \mathbb{N}_0$, είναι μοναδική. Προς τούτο αρκεί να θεωρηθεί ένα τέτοιο άθροισμα που να ισούται με το μηδενικό στοιχείο, ας πούμε

$$\sum_{i\in\mathbb{N}_0} \overline{r_{(i)}} = 0_{R/I}, \quad \overline{r_{(i)}} = r_{(i)} + I \ \ (\text{για κάποια } r_{(i)} \in R_i + I).$$

Προφανώς, επειδή το I είναι ομογενές,

$$\sum_{i\in\mathbb{N}_0} r_{(i)} \in I \Longrightarrow r_{(i)} \in I,\, \forall i \in \mathbb{N}_0 \Longrightarrow \ \overline{r_{(i)}} = 0_{R/I},\, \forall i \in \mathbb{N}_0.$$

(d)⇒(a): Έστω τυχόν $a \in I$. Γράφοντας το a υπό τη μορφή

$$a = \sum_{i\in\mathbb{N}_0} a_{(i)} \ \ (\text{όπου } a_{(i)} \in R_i,\ i \in \mathbb{N}_0),$$

έχουμε εντός τού R/I

$$\sum_{i\in\mathbb{N}_0} \overline{a_{(i)}} = 0_{R/I} \Longrightarrow \overline{a_{(i)}} = 0_{R/I},\, \forall i \in \mathbb{N}_0 \Longrightarrow a_{(i)} \in I,\, \forall i \in \mathbb{N}_0,$$

με την πρώτη συνεπαγωγή απορρέουσα από το γεγονός ότι $R/I = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0}(R_i + I)/I$. Άρα το I είναι ομογενές ιδεώδες τού R. □

3.2.9 Παράδειγμα. Έστω I ένα ιδεώδες τού πολυωνυμικού δακτυλίου $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$, εφοδιασμένου με τη συνήθη βαθμολόγηση 3.2.3 (a). Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(a) $I = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}_0}(\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]_d \cap I)$ (δηλαδή το I είναι ομογενές ιδεώδες).

(b) Το I παράγεται από ομογενή πολυώνυμα (πιθανώς διαφορετικών βαθμών).

(c) Εάν $F = \sum_{d\geq 0} F_{(d)}$, όπου $F_{(d)} \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]_d$, $\forall d \in \mathbb{N}_0$, τότε

$$F \in I \Longleftrightarrow F_{(d)} \in I, \ \ \forall d \in \mathbb{N}_0.$$

(d) Ο πηλικοδακτύλιος $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]/I$ είναι βαθμολογημένος, δεχόμενος τη βαθμολόγηση

$$\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]/I = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}_0}(\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]_d + I)/I.$$

3.2.10 Πρόταση. *Έστω I ένα γνήσιο, ομογενές ιδεώδες ενός βαθμολογημένου, μη τετριμμένου δακτυλίου $R = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} R_i$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(a) *Το I είναι πρώτο ιδεώδες τού R εάν και μόνον εάν για οιαδήποτε ομογενή στοιχεία $r_{(i)} \in R_i$ και $r'_{(j)} \in R_j$, $i,j \in \mathbb{N}_0$, ισχύει η συνεπαγωγή*

$$[r_{(i)}r'_{(j)} \in I \Longrightarrow \text{ είτε } r_{(i)} \in I \;\; \text{ είτε } r'_{(j)} \in I].$$

(b) *Το I είναι μεγιστοτικό ιδεώδες τού R εάν και μόνον εάν*

$$I \cong \mathfrak{m} \oplus (\textstyle\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} R_i),$$

όπου $\mathfrak{m}$ ένα μεγιστοτικό ιδεώδες τού R_0.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a) Η μία κατεύθυνση είναι προφανής. Ας υποθέσουμε, αντιστρόφως, ότι $r, r' \in R$ με $rr' \in I$ και $r \notin I$, και ότι

$$r = \sum_{i=j}^{d} r_{(i)}, \;\; r' = \sum_{i=j'}^{d'} r'_{(i)}$$

(όπως στο (a) τής σημειώσεως 3.2.2). Δίχως βλάβη τής γενικότητας μπορούμε, επιπροσθέτως, να υποθέσουμε ότι $r_{(d)} \notin I$ (διότι αλλιώς αντικαθιστούμε το r με το $r - r_{(d)}$ κ.ο.κ). Ο όρος βαθμού $d + d'$ στο στοιχείο rr' είναι ο $r_{(d)}r'_{(d')}$, οπότε εξ υποθέσεως έχουμε $r'_{(d')} \in I$. Το στοιχείο $r' - r'_{(d')}$ ικανοποιεί τη συνθήκη $r(r' - r'_{(d')}) \in I$, οπότε με επαναληπτική χρήση τής ανωτέρω επιχειρηματολογίας δείχνουμε διαδοχικώς ότι $r'_{(d'-1)} \in I, \ldots, r'_{(j')} \in I$, κάτι που σημαίνει ότι $r' \in I$. Άρα το I είναι πρώτο ιδεώδες τού R.

(b) Ας υποθέσουμε ότι ένα γνήσιο, ομογενές ιδεώδες I τού R είναι μεγιστοτικό. Εάν κάποιο ομογενές στοιχείο $r_{(i)} \in R_i$ βαθμού $i \geq 1$ δεν ανήκει στο I, τότε

$$I \subsetneqq I + \langle r_{(i)} \rangle \subseteq R \Longrightarrow I + \langle r_{(i)} \rangle = R,$$

οπότε $1_R - r_{(i)}r' \in I$ για κάποιο $r' \in R$. Έστω ότι $r' = \sum_{k=j}^{d} r'_{(k)}$ (όπως στο (a) τής σημειώσεως 3.2.2). Επειδή το I είναι ομογενές,

$$\left.\begin{array}{l} 1_R - r_{(i)}r' = 1_R - \sum_{k=j}^{d} r'_{(k)}r_{(i)} \in I \\ 1_R \in R_0,\; r_{(i)} \notin I, \\ (i \geq 1 \Rightarrow i + j \geq 1, \forall j \in \{j, \ldots, d\}) \\ I = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0}(R_i \cap I) \end{array}\right\} \Longrightarrow 1_R \in I \Longrightarrow I = R.$$

Άτοπο! Κατά συνέπειαν, $I \supseteq \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} R_i$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ισομορφισμό δακτυλίων

$$R/(\textstyle\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} R_i) \cong R_0$$

και το (b) τής ασκήσεως **A-1-36**, συμπεραίνουμε ότι το $I/\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} R_i$ είναι ένα μεγιστοτικό ιδεώδες $\mathfrak{m}$ τού $R/(\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} R_i)$, οπότε

$$\left.\begin{array}{l} I=\bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0}(R_i\cap I) \\ R_i\subseteq I\Rightarrow R_i\cap I=R_i, \forall\ i\geq 1, \\ I/\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} R_i=\mathfrak{m} \end{array}\right\} \Longrightarrow I\cong \mathfrak{m}\oplus(\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} R_i).$$

Και αντιστρόφως· εάν το I είναι ένα γνήσιο, ομογενές ιδεώδες τού $R=\bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} R_i$ για το οποίο ισχύει $I\cong \mathfrak{m}\oplus(\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} R_i)$ για κάποιο μεγιστοτικό $\mathfrak{m}$ ιδεώδες τού R_0, τότε

$$R/I=(\bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} R_i)/(\mathfrak{m}\oplus(\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} R_i))\cong (R_0/\mathfrak{m})\oplus\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}(R_i/R_i)=R_0/\mathfrak{m},$$

με το $R_0/\mathfrak{m}$ ένα σώμα. Τούτο σημαίνει ότι και το R/I είναι σώμα. Άρα το I οφείλει να είναι μεγιστοτικό ιδεώδες τού R (βλ. θεώρημα 1.1.14). □

3.2.11 Ορισμός. Έστω S ένα πολλαπλασιαστικώς κλειστό υποσύνολο ενός βαθμολογημένου δακτυλίου $R=\bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} R_i$, αποτελούμενο μόνον από ομογενή στοιχεία τού R. Εκτός τής συνήθους τοπικοποιήσεως[5] $\mathsf{S}^{-1}R$ τού R ως προς το S (βλ. πρόταση 2.3.8) υφίσταται και η λεγόμενη **ομογενής τοπικοποίηση τού R ως προς το S**

$$\boxed{\mathsf{S}_{\text{ομ.}}^{-1}R:=\left\{\tfrac{r}{s}\in \mathsf{S}^{-1}R\,\middle|\,\exists i\in\mathbb{N}_0: r\in R_i,\ s\in R_i\cap \mathsf{S}\right\}}$$

που απαρτίζεται από τα ομογενή κλάσματα «βαθμού 0». Ο $\mathsf{S}_{\text{ομ.}}^{-1}R$ είναι υποδακτύλιος τού $\mathsf{S}^{-1}R$.

3.2.12 Παραδείγματα. (a) Εάν ο $R=\bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} R_i$ είναι βαθμολογημένη ακεραία περιοχή και $\mathsf{S}:=R\smallsetminus\{0_R\}$, τότε $\mathsf{S}^{-1}R=\mathbf{Fr}(R)$ (βλ. 2.3.11 (a)) και η ομογενής τοπικοποίηση

$$\boxed{\mathbf{Fr}_{\text{ομ.}}(R):=\mathsf{S}_{\text{ομ.}}^{-1}R=\left\{\tfrac{r}{s}\in \mathsf{S}^{-1}R\,\middle|\,\exists i\in\mathbb{N}_0: r,s\in R_i,\ s\neq 0_R\right\}}$$

καλείται **ομογενές σώμα κλασμάτων τής R**.

(b) Εάν υποθέσουμε ότι ο δακτύλιος $R=\bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} R_i$ είναι μια βαθμολογημένη ακεραία περιοχή, $f\in R_d\smallsetminus\{0_R\}$, για κάποιο $d\geq 0$ και $\mathsf{S}:=\{f^\nu\,|\,\nu\in\mathbb{N}_0\}$, τότε η προκύπτουσα τοπικοποίηση συμβολίζεται ως $R_f:=\mathsf{S}^{-1}R$ (βλ. 2.3.11 (b)) και η αντίστοιχη ομογενής τοπικοποίηση ως

$$\boxed{R_{(f)}:=\mathsf{S}_{\text{ομ.}}^{-1}R=\left\{\tfrac{r}{f^\nu}\in R_f\,\middle|\,\nu\in\mathbb{N}_0,\ r\in R_{\nu d}\right\}.}$$

[5] Η τοπικοποίηση $\mathsf{S}^{-1}R$ μπορεί να θεωρηθεί ως $\mathbb{Z}$-*βαθμολογημένος δακτύλιος*. Προς τούτο αρκεί στον ορισμό 3.2.1 να αντικατασταθεί το $\mathbb{N}_0$ με το $\mathbb{Z}$ και να ορισθεί $\deg(\frac{r}{s}):=\deg(r)-\deg(s)$, ως *βαθμός* τού $\frac{r}{s}$, όπου r οιοδήποτε ομογενές στοιχείο τού R. (Είναι εύκολο να δειχθεί ότι ο εν λόγω ορισμός είναι ανεξάρτητος των εκπροσώπων των θεωρουμένων κλασμάτων.) Εν τοιαύτη περιπτώσει $\mathsf{S}^{-1}R=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}(\mathsf{S}^{-1}R)_i$, όπου $(\mathsf{S}^{-1}R)_i:=\left\{\frac{r}{s}\in \mathsf{S}^{-1}R\,\middle|\,\deg(\frac{r}{s})=i\right\}$. Ωστόσο εδώ θα εργασθούμε μόνον με τον $\mathsf{S}_{\text{ομ.}}^{-1}R=(\mathsf{S}^{-1}R)_0$.

(c) Εάν υποθέσουμε ότι το $\mathfrak{p}$ είναι ένα ομογενές, πρώτο ιδεώδες ενός βαθμολογημένου δακτυλίου $R = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} R_i$ και $\mathsf{S} := R\smallsetminus\mathfrak{p}$, τότε το S είναι πολλαπλασιαστικώς κλειστό υποσύνολο τού R και ορίζεται η τοπικοποίηση $R_{\mathfrak{p}} := \mathsf{S}^{-1}R$ τού R στο $\mathfrak{p}$ (βλ. 2.3.24). Επιπροσθέτως, *και* το υποσύνολο S' τού S το αποτελούμενο από όλα τα ομογενή στοιχεία τού S είναι πολλαπλασιαστικώς κλειστό υποσύνολο τού R. Ως **ομογενή τοπικοποίηση** $R_{(\mathfrak{p})}$ **τού** R **στο** $\mathfrak{p}$ ορίζουμε -ως εκ τούτου- τον

$$\boxed{R_{(\mathfrak{p})} := \mathsf{S}'^{-1}_{\text{ομ.}}R = \left\{\tfrac{r}{s}\in R_{\mathfrak{p}} \,\middle|\, \exists i\in\mathbb{N}_0 : r\in R_i,\ s\in R_i\cap\mathsf{S}'\right\}.}$$

Ο $R_{(\mathfrak{p})}$ είναι τοπικός δακτύλιος έχων ως (μοναδικό) μεγιστοτικό του ιδεώδες το

$$\boxed{\mathfrak{p}R_{(\mathfrak{p})} := \left\{\tfrac{r}{s}\in R_{(\mathfrak{p})} \,\middle|\, r\in\mathfrak{p}\right\}.}$$

Επίσης, η

$$R_{(\mathfrak{p})}/\mathfrak{p}R_{(\mathfrak{p})} \ni \left(\tfrac{r}{r'} + \mathfrak{p}R_{(\mathfrak{p})}\right) \longmapsto \tfrac{r+\mathfrak{p}}{r'+\mathfrak{p}} \in \mathbf{Fr}_{\text{ομ.}}(R/\mathfrak{p})$$

ορίζει έναν *ισομορφισμό σωμάτων*. (Πρβλ. άσκηση **A-2-21** (b)).

Ασκήσεις

A-3-3. Έστω $R = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} R_i$ ένας βαθμολογημένος δακτύλιος. Εάν ο R είναι ακεραία περιοχή, να αποδειχθεί ότι κάθε διαιρέτης ενός ομογενούς στοιχείου του είναι ωσαύτως ομογενές στοιχείο του.

A-3-4. Έστω $R = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} R_i$ ένας βαθμολογημένος δακτύλιος. Εάν τα I, J είναι ομογενή ιδεώδη τού R, να αποδειχθεί ότι και τα $I+J$, IJ, $I\cap J$ και $I : J$ είναι ομογενή ιδεώδη τού R.

A-3-5. Έστω $R = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} R_i$ ένας βαθμολογημένος δακτύλιος. Εάν το I είναι ένα ομογενές ιδεώδες τού R, να αποδειχθεί ότι και το $\mathrm{Rad}(I)$ είναι ομογενές ιδεώδες τού R.

A-3-6. Να αποδειχθεί ότι για οιονδήποτε βαθμολογημένο δακτύλιο $R = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} R_i$ οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(a) Ο R είναι ναιτεριανός.

(b) Ο R_0 είναι ναιτεριανός και ο R μια πεπερασμένως παραγόμενη R_0-άλγεβρα.

A-3-7. Έστω $\mathbf{k}$ ένα σώμα και έστω $R = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} R_i$ ένας βαθμολογημένος δακτύλιος με $R_0 = \mathbf{k}$. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:
(a) Το ευθύ άθροισμα $R_{\geq 1} := \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} R_i$ αποτελεί ένα μεγιστοτικό ιδεώδες τού R.
(b) Εάν το I είναι ένα γνήσιο, ομογενές ιδεώδες τού R, τότε $I \subseteq R_{\geq 1}$.

(c) Το $R_{\geq 1}$ είναι το μοναδικό ομογενές μεγιστοτικό ιδεώδες τού R.

A-3-8. Έστω S ένα πολλαπλασιαστικώς κλειστό υποσύνολο ενός βαθμολογημένου δακτυλίου $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} R_i$, αποτελούμενο μόνον από ομογενή στοιχεία τού R. Να αποδειχθούν τα εξής:

(a) Κάθε ιδεώδες τού $\mathsf{S}^{-1}_{\text{ομ.}} R$ είναι τής μορφής

$$\boxed{\mathsf{S}^{-1}_{\text{ομ.}} I := (\mathsf{S}^{-1} I) \cap \mathsf{S}^{-1}_{\text{ομ.}} R}$$

όπου I κάποιο ομογενές ιδεώδες τού R.

(b) Εάν το I είναι ένα ομογενές ιδεώδες τού R και $\pi : R \longrightarrow R/I$ ο φυσικός επιμορφισμός, τότε υφίσταται ένας ισομορφισμός δακτυλίων

$$\boxed{(\mathsf{S}^{-1}_{\text{ομ.}} R)/(\mathsf{S}^{-1}_{\text{ομ.}} I) \cong \pi(\mathsf{S})^{-1}_{\text{ομ.}} (R/I).}$$

(c) Στην περίπτωση κατά την οποία ο R είναι μια βαθμολογημένη ακεραία περιοχή, $f \in R_d \smallsetminus \{0_R\}$, για κάποιο $d \geq 0$, $\mathsf{S} := \{ f^\nu \mid \nu \in \mathbb{N}_0 \}$ και το I ένα ομογενές ιδεώδες τής R, το ιδεώδες

$$\boxed{I_{(f)} := \mathsf{S}^{-1}_{\text{ομ.}} I \subseteq R_{(f)}}$$

ισούται με

$$I_{(f)} = \left\{ \tfrac{r}{f^\nu} \in R_f \,\middle|\, \nu \in \mathbb{N}_0,\ r \in I_{\nu d} \right\},$$

όπου $I_j := R_j \cap I$ για κάθε $j \in \mathbb{N}_0$.

$\boxed{3.3}$ Προβολικά Αλγεβρικά Σύνολα

Στην παρούσα ενότητα, επανερχόμενοι στον προβολικό χώρο $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, πρόθεσή μας είναι να ορίσουμε *προβολικά* αλγεβρικά σύνολα και να μελετήσουμε κάποιες ιδιότητές τους, οι οποίες είναι ανάλογες εκείνων που παρουσιάσθηκαν για τα συσχετικά αλγεβρικά σύνολα στα προηγηθέντα κεφάλαια. Εξαρχής απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή: Ως γνωστόν, τουλάχιστον όταν το $\mathbf{k}$ είναι απειροπληθές, κάθε πολυώνυμο $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ προσδιορίζει μια συνάρτηση $F : \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbf{k}$. (βλ. άσκηση **A-1-3**). Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι προσδιορίζει και μια συνάρτηση $F : \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbf{k}$, διότι η ισότητα

$$F(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = F(a_0, \ldots, a_n)$$

ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\}$ *μόνον όταν το* F *είναι σταθερό*!

Σημειωτέον ότι, όταν ένα $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ είναι *ομογενές* βαθμού $d \geq 0$, έχουμε

$$F(\lambda \mathsf{X}_0, \ldots, \lambda \mathsf{X}_n) = \lambda^d F(\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n), \ \forall \lambda \in \mathbf{k} \tag{3.4}$$

(για οιοδήποτε σώμα $\mathbf{k}$). Και αντιστρόφως· όταν η συνθήκη (3.4) ισχύει για κάποιο πολυώνυμο $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ και το $\mathbf{k}$ είναι απειροπληθές, το F οφείλει να είναι ομογενές.

3.3.1 Ορισμός. Έστω $\mathbf{k}$ οιοδήποτε σώμα. Ένα σημείο $P = [a_0 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ καλείται **σημείο μηδενισμού** ενός $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ όταν

$$F(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = 0_{\mathbf{k}}, \ \forall \lambda \in \mathbf{k}.$$

Όταν το F είναι ομογενές, τότε λόγω τής (3.4), προκειμένου το P να είναι σημείο μηδενισμού του, αρκεί να ισχύει $F(a_0, \ldots, a_n) = 0$.

Κατά συνέπειαν, μολονότι ένα ομογενές πολυώνυμο $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ βαθμού ≥ 1 δεν προσδιορίζει μια συνάρτηση $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbf{k}$, ο μηδενισμός του (ή ο μη μηδενισμός του) σε ένα σημείο $P \in \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ *δεν εξαρτάται από την επιλογή των ομογενών συντεταγμένων*[6] *τού* P. Τούτη η ιδιότητα υποδεικνύει τον τρόπο ορισμού των προβολικών αλγεβρικών συνόλων.

3.3.2 Ορισμός. (a) Έστω $\mathbf{k}$ οιοδήποτε σώμα και έστω $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ ένα *ομογενές* πολυώνυμο. Ως **σύνολο των** (προβολικών) **σημείων μηδενισμού τού** F εντός τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ ορίζουμε το

$$\boxed{\mathbf{V}_+(F) := \{P \in \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \mid F(P) = 0_{\mathbf{k}}\}.}$$

(Το σύμβολο "+" τίθεται εν είδει υποδείκτη προκειμένου να αποφεύγεται σύγχυση με το $\mathbf{V}(F) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}}$.) Γενικότερα, εάν το $\mathcal{S}$ είναι οιοδήποτε σύνολο *ομογενών*[7] πολυωνύμων από τον $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, θέτουμε

$$\boxed{\mathbf{V}_+(\mathcal{S}) := \{P \in \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \mid F(P) = 0_{\mathbf{k}}, \text{ για όλα τα } F \in \mathcal{S}\} = \bigcap_{F \in \mathcal{S}} \mathbf{V}_+(F).}$$

(Όταν το $\mathcal{S}$ συμβαίνει να είναι πεπερασμένο, π.χ. $\mathcal{S} = \{F_1, \ldots, F_\kappa\}$, συνήθως αντί τού $\mathbf{V}_+(\{F_1, \ldots, F_\kappa\})$ γράφουμε $\mathbf{V}_+(F_1, \ldots, F_\kappa)$).

(b) Ένα υποσύνολο $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ καλείται **προβολικό αλγεβρικό σύνολο** εντός τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ όταν υπάρχει ένα σύνολο ομογενών πολυωνύμων $\mathcal{S}$ από τον $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, ούτως ώστε να

---

[6] Η άσκηση **A-3-2** περιγράφει μια γενικότερη, ικανή συνθήκη, ούτως ώστε ένα *μη ομογενές* πολυώνυμο $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ να διαθέτει καλώς ορισμένο σύνολο σημείων μηδενισμού εντός τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ (όταν το $\mathbf{k}$ είναι απειροπληθές): Εάν ο μηδενισμός τού F σε ένα σημείο $P \in \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ *δεν εξαρτάται από την επιλογή των ομογενών συντεταγμένων* τού P, τότε συμβαίνει το ίδιο και για καθεμιά των ομογενών συνιστωσών του.

[7] *Σύμβαση*: Το μηδενικό πολυώνυμο θα θεωρείται ως ομογενές πολυώνυμο «βαθμού $-\infty$». (Πρβλ. **(xii)** τής πρώτης ενότητας τού κεφαλαίου 1.)

ισχύει η ισότητα $V = \mathbf{V}_+(\mathcal{S})$.

(c) Εάν το F δεν είναι σταθερό, λέμε ότι το $\mathbf{V}_+(F)$ είναι **η υπερεπιφάνεια η οριζόμενη από το** F. Μια υπερεπιφάνεια εντός τού προβολικού επιπέδου $\mathbb{P}^2_{\mathbf{k}}$ ονομάζεται **προβολική επίπεδη καμπύλη**. Εάν το F είναι ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού 1, τότε λέμε ότι η $\mathbf{V}_+(F)$ είναι ένα **υπερεπίπεδο** εντός τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$.

3.3.3 Σημείωση. (a) Εάν το $I = \langle \mathcal{S} \rangle$ είναι το ιδεώδες το παραγόμενο από ένα σύνολο ομογενών πολυωνύμων $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, τότε, σύμφωνα με την πρόταση 3.2.8, το I είναι ομογενές ιδεώδες (υπό την έννοια τού ορισμού 3.2.7) ως προς τη συνήθη βαθμολόγηση[8] 3.2.3 (a) τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$. Επιπροσθέτως,

$$\boxed{\mathbf{V}_+(\mathcal{S}) = \mathbf{V}_+(I).}$$

Πράγματι· εάν $P \in \mathbf{V}_+(\mathcal{S})$ και $G \in I = \langle \mathcal{S} \rangle$, τότε $\exists k \in \mathbb{N}$ και

$$a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{k}, \quad F_1, \ldots, F_k \in \mathcal{S}$$

με

$$G = \sum_{i=1}^{k} a_i F_i \Longrightarrow G(P) = \sum_{i=1}^{k} a_i F_i(P) = 0_{\mathbf{k}} \Longrightarrow P \in \mathbf{V}_+(I).$$

Άρα $\mathbf{V}_+(\mathcal{S}) \subseteq \mathbf{V}_+(I)$. Και αντιστρόφως· εάν $P \in \mathbf{V}_+(I)$, τότε $G(P) = 0_{\mathbf{k}}$, $\forall G \in I$, οπότε $F(P) = 0_{\mathbf{k}}$, $\forall F \in \mathcal{S}$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $P \in \mathbf{V}_+(\mathcal{S})$. Αυτό σημαίνει ότι $\mathbf{V}_+(I) \subseteq \mathbf{V}_+(\mathcal{S})$. Κατά συνέπειαν, κάθε προβολικό αλγεβρικό σύνολο $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι τής μορφής $V = \mathbf{V}_+(I)$ για κάποιο ομογενές ιδεώδες I τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$.

(b) Κάθε μη τετριμμένο, ομογενές ιδεώδες I τού πολυωνυμικού δακτυλίου $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ παράγεται από *πεπερασμένα* ομογενή πολυώνυμα. Πράγματι· σύμφωνα με το θεώρημα βάσεως τού Hilbert 1.5.4 $\exists k \in \mathbb{N}$ και $F_1, \ldots, F_k \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ με $I = \langle F_1, \ldots, F_k \rangle$. Θεωρώντας τις διασπάσεις

$$F_1 = \sum_{i=j_1}^{d_1} F_{1,(i)}, \ \ldots, \ F_\kappa = \sum_{i=j_\kappa}^{d_\kappa} F_{\kappa,(i)}$$

αυτών των γεννητόρων στις ομογενείς τους συνιστώσες (όπως στο (a) τής σημειώσεως 3.2.2) παρατηρούμε ότι

$$I = \left\langle F_{1,(j_1)}, \ldots, F_{1,(d_1)}, \ldots, F_{\kappa,(j_\kappa)}, \ldots, F_{\kappa,(d_\kappa)} \right\rangle.$$

Κατά συνέπειαν, κάθε μη κενό προβολικό αλγεβρικό σύνολο $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ μπορεί να γραφεί ως τομή των μελών μιας οικογενείας *πεπερασμένου πλήθους* υπερεπιφανειών. (Πρόκειται για την επέκταση τής προτάσεως 1.5.1 για προβολικά αλγεβρικά σύνολα.)

[8] Από τούδε και στο εξής, ομιλώντας για *ομογενή ιδεώδη*, θα υπονοούμε ότι εργαζόμαστε με αυτήν τη βαθμολόγηση.

3.3.4 Πρόταση. *Έστω* $\mathbf{k}$ *ένα σώμα και έστω* $n \in \mathbb{N}_0$. *Τότε ισχύουν τα εξής:*

(1) *Εάν η* $\{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ *είναι μια συλλογή ομογενών ιδεωδών τού* $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, *τότε*

$$\mathbf{V}_+(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) = \mathbf{V}_+(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{V}_+(I_\lambda)\,.$$

(Επομένως, η τομή οιασδήποτε συλλογής προβολικών αλγεβρικών συνόλων αποτελεί ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο.)

(2) *Εάν τα* I, J *είναι ομογενή ιδεώδη τού δακτυλίου* $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, *με* $I \subseteq J$, *τότε*

$$\mathbf{V}_+(I) \supseteq \mathbf{V}_+(J).$$

(3) *Εάν τα* $I_1, \ldots, I_\nu$ *είναι ομογενή ιδεώδη τού δακτυλίου* $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, *τότε*

$$\mathbf{V}_+(I_1 I_2 \cdots I_\nu) = \mathbf{V}_+(I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_\nu) = \mathbf{V}_+(I_1) \cup \mathbf{V}_+(I_2) \cup \cdots \cup \mathbf{V}_+(I_\nu).$$

(Συνεπώς, η ένωση πεπερασμένου πλήθους προβολικών αλγεβρικών συνόλων αποτελεί ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο.)

(4) $\mathbf{V}_+(0) = \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ *και* $\mathbf{V}_+(1) = \varnothing$. *Επίσης, για κάθε* $P = [a_0 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ *έχουμε*

$$\mathbf{V}_+(\langle\{\, a_j\mathsf{X}_i - a_i\mathsf{X}_j \,|\, 0 \leq i < j \leq n\}\rangle) = \{P\}\,.$$

(Άρα κάθε πεπερασμένο υποσύνολο τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι αλγεβρικό).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Πανομοιότυπη εκείνης των (2)-(5) τής προτάσεως 1.2.3. Η μόνη διαφορά έγκειται στο ότι κανείς οφείλει να επικαλεσθεί την άσκηση **A-3-4** για να εξασφαλίσει το ότι τα εμφανιζόμενα αθροίσματα, γινόμενα και τομές ομογενών ιδεωδών τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ είναι ομογενή. □

3.3.5 Ορισμός. Έστω $\mathbf{k}$ ένα σώμα και έστω $n \in \mathbb{N}_0$. Θέτοντας

$$\mathcal{T}_{\text{Zar}} := \mathcal{T}_{\text{Zar}}(\mathbb{P}^l_{\mathbf{k}}) := \{\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \smallsetminus V \,|\, V \text{ προβολικά αλγεβρικά σύνολα εντός τού } \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}\}$$

το ζεύγος $(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}, \mathcal{T}_{\text{Zar}})$ (λόγω των (1), (3) και (4)τής προτάσεως 3.3.4) αποτελεί έναν τοπολογικό χώρο επί τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ (με τα προβολικά αλγεβρικά ως κλειστά υποσύνολά του). Η $\mathcal{T}_{\text{Zar}}$ καλείται, και σε αυτήν την περίπτωση, **τοπολογία (τού) Zariski** επί τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$. Γενικότερα, επί τυχόντος υποσυνόλου X τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ ορίζεται η **σχετική τοπολογία (τού) Zariski**

$$\mathcal{T}_{\text{Zar}}|_X := X \cap \{\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \smallsetminus V \,|\, V \text{ προβολικά αλγεβρικά σύνολα εντός τού } \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}\}\,.$$

3.3.6 Πρόταση. *Εάν το* $\mathbf{k}$ *είναι ένα απειροπληθές σώμα και* $n \in \mathbb{N}$, *τότε δυο τυχόντα μη κενά ανοικτά υποσύνολα τού* $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ *ως προς την τοπολογία Zariski διαθέτουν πάντοτε μη κενή τομή. (Ως εκ τούτου, κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο τού* $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ *είναι* «παντού πυκνό» *ως προς την τοπολογία Zariski.)*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν τα U, U' είναι δυο τυχόντα μη κενά κατά Zariski ανοικτά υποσύνολα τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, τότε υπάρχουν *μη τετριμμένα*[9] ομογενή ιδεώδη I, J τού δακτυλίου $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ με $U = \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \smallsetminus \mathbf{V}_+(I)$ και $U' = \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \smallsetminus \mathbf{V}_+(J)$. Κατά το (3) τής προτάσεως 3.3.4,

$$U \cap U' = \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \smallsetminus (\mathbf{V}_+(I) \cup \mathbf{V}_+(J)) = \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \smallsetminus \mathbf{V}_+(IJ).$$

Επειδή τα I, J είναι μη τετριμμένα ιδεώδη (τής *ακεραίας περιοχής* $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$), το ιδεώδες IJ θα είναι ωσαύτως μη τετριμμένο, οπότε $U \cap U' \neq \varnothing$. □

3.3.7 Ορισμός. Για κάθε *μη κενό* υποσύνολο X τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ θεωρούμε τα πολυώνυμα τα οποία μηδενίζονται επί τού X. Αυτά τα πολυώνυμα συγκροτούν ένα ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, το οποίο ονομάζεται **το ιδεώδες τού** X και συμβολίζεται ως $\mathbf{I}_+(X)$, ήτοι

$$\boxed{\mathbf{I}_+(X) := \{F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n] \,|\, F(a_0, \ldots, a_n) = 0_{\mathbf{k}}, \ \forall [a_0 : \ldots : a_n] \in X\}.}$$

Επίσης, εν είδει συμβάσεως[10], θέτουμε

$$\boxed{\mathbf{I}_+(\varnothing) := \langle \mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n \rangle.}$$

Εάν το $\mathbf{k}$ είναι απειροπληθές, τότε η άσκηση **A-3-2** μας πληροφορεί ότι το $\mathbf{I}_+(X)$ οφείλει να είναι ομογενές ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$.

3.3.8 Πρόταση. *Έστω $\mathbf{k}$ ένα απειροπληθές σώμα και έστω $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ ο n-διάστατος προβολικός χώρος υπεράνω αυτού. Τότε ισχύουν τα εξής :*

(1) *Για $X, Y \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, όπου $X \subseteq Y$, έχουμε $\mathbf{I}_+(X) \supseteq \mathbf{I}_+(Y)$.*

$$(2)\begin{cases} (a) & \mathbf{I}_+(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}) = \{0\}, \\ (b) & \mathbf{I}_+(\{P\}) = \langle \{ a_j\mathsf{X}_i - a_i\mathsf{X}_j \,|\, 0 \le i < j \le n\} \rangle, \ \forall P = [a_0 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}. \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} (a) & \mathbf{I}_+(\mathbf{V}_+(\mathcal{S})) \supseteq \mathcal{S}, \ \forall \mathcal{S} \subseteq \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n] \text{ αποτελούμενο από ομογενή στοιχεία.} \\ (b) & \mathbf{V}_+(\mathbf{I}_+(X)) \supseteq X, \ \ \forall X, \ \ X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}. \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} (a) & \mathbf{V}_+(\mathbf{I}_+(\mathbf{V}_+(\mathcal{S}))) = \mathbf{V}_+(\mathcal{S}), \forall \mathcal{S} \subseteq \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n] \text{ με ομογενή στοιχεία.} \\ (b) & \mathbf{I}_+(\mathbf{V}_+(\mathbf{I}_+(X))) = \mathbf{I}_+(X), \ \ \forall X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}. \end{cases}$$

$$(5)\begin{cases} (a) & \text{Εάν το } W \text{ είναι ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο, τότε } W = \mathbf{V}_+(\mathbf{I}_+(W)). \\ (b) & \begin{cases} \text{Εάν το } I \text{ είναι το ιδεώδες ενός προβολικού αλγεβρικού συνόλου } W, \\ \text{τότε } I = \mathbf{I}_+(\mathbf{V}_+(I)). \end{cases} \end{cases}$$

[9]Εδώ χρησιμοποιείται μια ισχυροποίηση τής πρώτης ισότητας τού (4) τής προτάσεως 3.3.4: Εάν το $\mathbf{k}$ είναι απειροπληθές σώμα και το F ένα ομογενές πολυώνυμο τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, τότε $\mathbf{V}_+(F) = \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \iff \mathbf{V}(F) = \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}} \iff F = 0$. Η κατεύθυνση "$\Longrightarrow$" τής δεύτερης αμφίπλευρης συνεπαγωγής έπεται από την άσκηση **A-1-3**.

[10]Αυτή η σύμβαση διασφαλίζει μια «φυσική» παραμέτρηση των προβολικών αλγεβρικών συνόλων μέσω των αντιστοίχων ιδεωδών (βλ. πόρισμα 3.3.24).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Πανομοιότυπη εκείνης των (1)-(5) τής προτάσεως 1.3.1. □

• **Από εδώ και στο εξής το σώμα αναφοράς k θα είναι απειροπληθές.**

3.3.9 Πόρισμα. *Οι απεικονίσεις*

$$\boxed{\begin{array}{c}\{\text{ομογενή ιδεώδη τού } \mathbf{k}[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_n]\} \underset{\mathbf{I}_+}{\overset{\mathbf{V}_+}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{array}{c}\text{προβολικά αλγεβρικά}\\ \text{σύνολα εντός τού } \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}\end{array}\right\}\\ I \longmapsto \mathbf{V}_+(I),\ \ V \longmapsto \mathbf{I}_+(V)\end{array}}$$

αναστρέφουν τις σχέσεις εγκλεισμού, που σημαίνει ότι:

$$[I_1 \subseteq I_2 \Longrightarrow \mathbf{V}_+(I_1) \supseteq \mathbf{V}_+(I_2)], \qquad [V_1 \subseteq V_2 \Longrightarrow \mathbf{I}_+(V_1) \supseteq \mathbf{I}_+(V_2)].$$

Επιπροσθέτως, η "$\mathbf{I}_+$" είναι ενριπτική.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται από το (2) τής προτάσεως 3.3.4 και τα (1) και (5) (a) τής προτάσεως 3.3.8. □

3.3.10 Πρόταση. *Για οιοδήποτε $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ ισχύει η ισότητα*

$$\mathbf{V}_+(\mathbf{I}_+(X)) = \mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}}(X), \tag{3.5}$$

όπου

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}}(X) := \bigcap \{E \mid (\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \smallsetminus E) \in \mathcal{T}_{\mathrm{Zar}},\ E \supseteq X\}$$

η κλειστή θήκη τού X ως προς την τοπολογία Zariski την ορισθείσα επί τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κατά την πρόταση 3.3.8 (3) (b), $\mathbf{V}_+(\mathbf{I}_+(X)) \supseteq X$. Έστω B τυχόν κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ που περιέχει το X. Επειδή (εξ ορισμού) υπάρχει κάποιο ομογενές ιδεώδες I τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n]$ για το οποίο ισχύει $B = \mathbf{V}_+(I)$, από το (2) τής προτάσεως 3.3.4 και τα (1) και (5) (a) τής προτάσεως 3.3.8 έπεται ότι

$$B = \mathbf{V}_+(I) = \mathbf{V}_+(\mathbf{I}_+(\mathbf{V}_+(I))) = \mathbf{V}_+(\mathbf{I}_+(B)) \supseteq \mathbf{V}_+(\mathbf{I}_+(X)).$$

Επειδή το $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}}(X)$ είναι το *ελάχιστο* κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ που περιέχει το X, η ισότητα (3.5) είναι αληθής. □

3.3.11 Πρόταση. *Εάν το V είναι ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο εντός τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, τότε το (ομογενές) ιδεώδες του $\mathbf{I}_+(V)$ είναι ριζικό ιδεώδες.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Πανομοιότυπη εκείνης τής προτάσεως 1.3.3. □

3.3.12 Ορισμός. Θα ονομάζουμε ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ **ανάγωγο** όταν είναι ανάγωγο (υπό την έννοια τού ορισμού 1.6.1), με τον $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ εφοδιασμένο με την τοπολογία Zariski. (Προσοχή! Το κενό σύνολο δεν θα λογίζεται ως ανάγωγο!)

3.3.13 Πρόταση. *Ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι ανάγωγο εάν και μόνον εάν το (ομογενές) ιδεώδες του $\mathbf{I}_+(V)$ είναι πρώτο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν το $\mathbf{I}_+(V)$ δεν είναι πρώτο ιδεώδες, τότε, σύμφωνα με το (a) της προτάσεως 3.2.10, υπάρχουν *ομογενή* πολυώνυμα $F_1, F_2 \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$, τέτοια ώστε $F_1 F_2 \in \mathbf{I}_+(V)$ ενώ $F_1 \notin \mathbf{I}_+(V)$, $F_2 \notin \mathbf{I}_+(V)$. Επομένως,

$$V = (V \cap \mathbf{V}_+(F_1)) \cup (V \cap \mathbf{V}_+(F_2)), \quad V \cap \mathbf{V}_+(F_1) \subsetneqq V, \quad V \cap \mathbf{V}_+(F_2) \subsetneqq V,$$

δηλαδή το V θα είναι μη ανάγωγο. Και αντιστρόφως· εάν το $\mathbf{I}_+(V)$ είναι πρώτο και υποθέσουμε ότι $V = V_1 \cup V_2$, όπου τα V_1, V_2 είναι αλγεβρικά σύνολα εντός τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ με $V_1 \subsetneqq V$, $V_2 \subsetneqq V$, τότε, σύμφωνα με την πρόταση 3.3.8 (1) και την άσκηση **A-3-9** έχουμε

$$\mathbf{I}_+(V) \subsetneqq \mathbf{I}_+(V_1), \;\; \mathbf{I}_+(V) \subsetneqq \mathbf{I}_+(V_2).$$

Έστω $F \in \mathbf{I}_+(V_1) \smallsetminus \mathbf{I}_+(V)$ και έστω $G \in \mathbf{I}_+(V_2)$. Επειδή $V = V_1 \cup V_2$, το γινόμενο FG μηδενίζεται σε κάθε σημείο τού V, κι επομένως $FG \in \mathbf{I}_+(V)$. Αλλά το $\mathbf{I}_+(V)$ είναι πρώτο ιδεώδες, οπότε είτε $F \in \mathbf{I}_+(V)$ είτε $G \in \mathbf{I}_+(V)$. Αφού $F \in \mathbf{I}_+(V_1) \smallsetminus \mathbf{I}_+(V)$, έχουμε αναγκαστικώς $G \in \mathbf{I}_+(V)$. Άρα, και πάλι κατά την άσκηση **A-3-9**,

$$\mathbf{I}_+(V) = \mathbf{I}_+(V_2) \Longrightarrow V = V_2,$$

πράγμα άτοπο. □

3.3.14 Λήμμα. *Ο $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, εφοδιασμένος με την τοπολογία Zariski $\mathcal{T}_{\text{Zar}}$* (βλ. 3.3.5)*, αποτελεί έναν ναιτεριανό χώρο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $V_1 \supseteq V_2 \supseteq \cdots \supseteq V_m \supseteq V_{m+1} \supseteq \cdots$ μια ακολουθία κατά Zariski κλειστών (ήτοι αλγεβρικών) υποσυνόλων τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$. Λόγω τού (1) τής προτάσεως 3.3.8 αυτή επάγει την ακολουθία ιδεωδών

$$\mathbf{I}_+(V_1) \subseteq \mathbf{I}_+(V_2) \subseteq \cdots \subseteq \mathbf{I}_+(V_m) \subseteq \mathbf{I}_+(V_{m+1}) \subseteq \cdots$$

τού πολυωνυμικού δακτυλίου $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$. Επειδή ο $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ είναι ναιτεριανός δακτύλιος (βλ. θεώρημα 1.5.4), υπάρχει κάποιος $k \in \mathbb{N} : \mathbf{I}_+(V_k) = \mathbf{I}_+(V_{k+1}) = \cdots$. Μέσω τής ασκήσεως **A-3-9** συμπεραίνουμε ότι $V_k = V_{k+1} = \cdots$. Άρα ο $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ αποτελεί έναν ναιτεριανό χώρο. □

3.3.15 Θεώρημα. *Εάν το $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο, τότε υπάρχουν μονοσημάντως ορισμένα (μέχρις αναδιατάξεως δεικτών) ανάγωγα προβολικά αλγεβρικά σύνολα $V_1, \ldots, V_m \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$* (οι ***ανάγωγες συνιστώσες*** τού V), *τέτοια ώστε*

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_m \;\; \textit{και} \;\; V_i \nsubseteq V_j, \;\; \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}, \; i \neq j.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται άμεσα από το θεώρημα 1.6.11 και το λήμμα 3.3.14. □

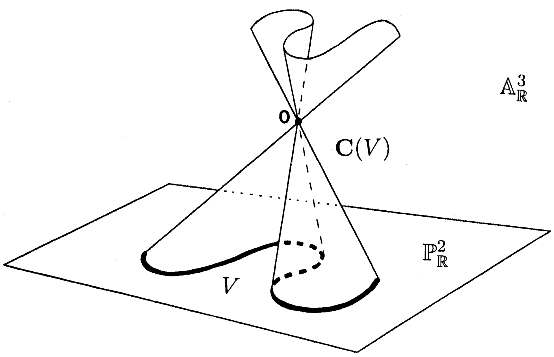
3.3.16 Ορισμός. Έστω $\varpi = \varpi_{[n]} : \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}^{n+1}}\} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ η επιρριπτική απεικόνιση

$$\mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}^{n+1}}\} \ni (a_0, \ldots, a_n) \longmapsto \varpi\,(a_0, \ldots, a_n) := [a_0 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}.$$

Εάν το I είναι ένα ομογενές ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ και $V = \mathbf{V}_+(I) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, τότε ορίζουμε **τον συσχετικό κώνο $\mathbf{C}(V)$ υπεράνω τού** V ως το συσχετικό σύνολο

$$\boxed{\mathbf{C}(V) := \varpi^{-1}(V) \cup \{0_{\mathbf{k}^{n+1}}\} = \{\,(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}} \,\big|\, [a_0 : \ldots : a_n] \in V\} \cup \{0_{\mathbf{k}^{n+1}}\}}$$

ήτοι ως το σύνολο $\mathbf{C}(V) = \mathbf{V}(I) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}}$ των σημείων μηδενισμού των πολυωνύμων τού I *εντός τού* $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}}$. Σημειωτέον ότι $\mathbf{C}(\varnothing) = \{0_{\mathbf{k}^{n+1}}\}$. Όταν $V \neq \varnothing$, ο $\mathbf{C}(V)$ αποτελείται από την ένωση όλων των ευθειών των διερχομένων από το $0_{\mathbf{k}^{n+1}}$ και από κάποιο σημείο τού V. (Πρβλ. το συμβολικό σχήμα **12** που μας βοηθά να αντιληφθούμε ενορατικώς το ποιος οφείλει να είναι ο συσχετικός κώνος $\mathbf{C}(V) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ υπεράνω μιας καμπύλης $V \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.)



Σχήμα 12

3.3.17 Πρόταση. *Έστω $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο. Τότε το V είναι ανάγωγο εάν και μόνον εάν ο συσχετικός κώνος $\mathbf{C}(V) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}}$ υπεράνω τού V είναι ανάγωγο συσχετικό αλγεβρικό σύνολο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή $V = \mathbf{V}_+(I)$ για κάποιο *ομογενές* ιδεώδες I τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ (πρβλ. 3.3.3 (a)), αμφότερα τα V και $\mathbf{C}(V)$ έχουν το I ως ιδεώδες τους. Το προβολικό αλγεβρικό σύνολο $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι ανάγωγο $\Leftrightarrow$ το I είναι πρώτο ιδεώδες $\Leftrightarrow$ το $\mathbf{C}(V) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}}$ είναι ανάγωγο, επί τη βάσει των προτάσεων 3.3.13 και 1.6.7. □

3.3.18 Σημείωση. Το ασθενές θεώρημα των θέσεων μηδενισμού 3.3.19 *δεν* «μεταφέρεται κατά λέξη» για τα προβολικά αλγεβρικά σύνολα, διότι η συνθήκη $\mathbf{V}_+(I) = \varnothing$ *δεν σημαίνει αυτομάτως* ότι $I = \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$! Η ορθή «προβολική» εκδοχή αυτού τού θεωρήματος είναι η εξής:

3.3.19 Θεώρημα. (Προβολικό Ασθενές Θεώρημα των Θέσεων Μηδενισμού) *Εάν το* $\mathbf{k}$ *είναι αλγεβρικώς κλειστό σώμα και το* I *ένα ομογενές ιδεώδες τού* $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, *τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες*:

(a)$\mathbf{V}_+(I) = \varnothing$.

(b) *Είτε* $\mathrm{Rad}(I) = \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ *είτε* $\mathrm{Rad}(I) = \langle \mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n \rangle$.

(c) *Υπάρχει* $m \in \mathbb{N}$, *τέτοιος ώστε να ισχύει*

$$\langle \mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n \rangle^m \subseteq I. \tag{3.6}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σύμφωνα με τον ορισμό τού κώνου και το (a) τής ασκήσεως **A-3-11**,

$$\mathbf{V}_+(I) = \varnothing \Leftrightarrow \mathbf{C}(\mathbf{V}_+(I)) \subseteq \{0_{\mathbf{k}^{n+1}}\}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{I}(\{0_{\mathbf{k}^{n+1}}\}) = \langle \mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n \rangle \subseteq \mathbf{I}(\mathbf{C}(\mathbf{V}_+(I))) = \mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \mathrm{Rad}(I)$$

με την τελευταία ισότητα απορρέουσα από το θεώρημα 1.8.2.

(a)$\Leftrightarrow$(b): Επειδή το $\langle \mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n \rangle$ είναι μεγιστοτικό ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, υποθέτοντας ότι $\mathbf{V}_+(I) = \varnothing$, λαμβάνουμε

$$\langle \mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n \rangle \subseteq \mathrm{Rad}(I) \subseteq \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n],$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι πληρούται η συνθήκη (b). Το αντίστροφο είναι προφανές.

(a)$\Leftrightarrow$(c): Από τον εγκλεισμό $\langle \mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n \rangle \subseteq \mathrm{Rad}(I)$ προκύπτει η σχέση (3.6) μέσω τής ασκήσεως **A-1-29**. Και αντιστρόφως· υποθέτοντας την ισχύ τής (3.6) λαμβάνουμε

$$\varnothing = \mathbf{V}_+(\langle \mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n \rangle^m) \supseteq \mathbf{V}_+(I) \Longrightarrow \mathbf{V}_+(I) = \varnothing,$$

λόγω τού (2) τής προτάσεως 3.3.4. □

3.3.20 Σημείωση. Επειδή το ιδεώδες $\langle \mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n \rangle$ είναι μεγιστοτικό (βάσει τής ασκήσεως **A-1-21**) και ομογενές (αφού παράγεται από ομογενή στοιχεία, βλ. πρόταση 3.2.8), η άσκηση **A-3-7** μας πληροφορεί ότι

$$\langle \mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n \rangle = \bigoplus_{d \geq 1} \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_d,$$

και ότι το $\langle \mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n \rangle$ είναι το *μοναδικό* ομογενές μεγιστοτικό ιδεώδες τού πολυωνυμικού δακτυλίου $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$.

3.3.21 Θεώρημα. (Προβολικό Θεώρημα Θέσεων Μηδενισμού τού Hilbert) *Έστω* $\mathbf{k}$ *ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα και έστω* I *ένα ομογενές ιδεώδες τού* $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_n]$. *Εάν* $\mathbf{V}_+(I)\neq\varnothing$, *τότε έχουμε*

$$\boxed{\mathbf{I}_+(\mathbf{V}_+(I))=\mathrm{Rad}(I).}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κατά το (b) τής ασκήσεως **A-3-11**,

$$\mathbf{I}_+(\mathbf{V}_+(I))=\mathbf{I}(\mathbf{C}(\mathbf{V}_+(I)))=\mathbf{I}(\mathbf{V}(I))=\ \mathrm{Rad}(I),$$

όπου η τελευταία ισότητα έπεται από το θεώρημα 1.8.2. □

3.3.22 Σημείωση. Λέμε ότι δυο ομογενή ιδεώδη I,J τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_n]$ **ορίζουν το ίδιο προβολικό αλγεβρικό σύνολο** όταν $\mathbf{V}_+(I)=\mathbf{V}_+(J)$. Εάν το $\mathbf{k}$ είναι ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα, τότε (βάσει των θεωρημάτων 3.3.19 και 3.3.21) τούτο συμβαίνει όταν είτε

$$\mathrm{Rad}(I)=\mathrm{Rad}(J)\ \text{ είτε }\ \mathrm{Rad}(I),\mathrm{Rad}(J)\in\left\{\mathbf{k}[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_n],\langle\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_n\rangle\right\}.$$

3.3.23 Ορισμός. a) Κάθε ανάγωγο, κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού προβολικού χώρου $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ καλείται ($\mathbf{k}$-)**προβολική ποικιλότητα**[11] (εντός τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$).

(b) Έστω $V\subseteq\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ μια προβολική ποικιλότητα. Ως **υποποικιλότητα** τής V χαρακτηρίζεται κάθε προβολική ποικιλότητα $W\subseteq\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ για την οποία ισχύει $W\subseteq V$.

3.3.24 Πόρισμα. *Έστω* $\mathbf{k}$ *ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα. Περιορίζοντας τις απεικονίσεις τού πορίσματος* 3.3.9 *λαμβάνουμε αμφιρρίψεις*:

$$\boxed{\begin{array}{ccc}
\left\{\begin{array}{c}\text{ομογενή ριζικά}\\ \text{ιδεώδη } I\subseteq\langle\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_n\rangle\end{array}\right\} & \underset{\mathbf{I}_+}{\overset{\mathbf{V}_+}{\rightleftarrows}} & \left\{\begin{array}{c}\text{προβολικά αλγεβρικά}\\ \text{σύνολα εντός τού } \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}\end{array}\right\}\\
\cup & & \cup\\
\left\{\begin{array}{c}\text{ομογενή πρώτα}\\ \text{ιδεώδη } I\subsetneqq\langle\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_n\rangle\end{array}\right\} & \longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c}\text{προβολικές ποικιλότητες}\\ \text{εντός τού } \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}\end{array}\right\}
\end{array}}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βάσει τής προτάσεως 3.3.11 η “$\mathbf{I}_+$” απεικονίζει κάθε προβολικό αλγεβρικό σύνολο V εντός τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ σε ένα ομογενές ριζικό ιδεώδες $\mathbf{I}_+(V)$. (Ο λόγος για τον οποίο περιοριζόμαστε στα ομογενή ριζικά ιδεώδη που περιέχονται στο $\langle\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_n\rangle$ είναι ότι δεν επιθυμούμε να απολέσουμε την ενριπτικότητα τής “$\mathbf{V}_+$”. Πρβλ. το (b) τού θεωρήματος 3.3.19.) Το ότι οι περιορισμοί των “$\mathbf{I}_+$” και “$\mathbf{V}_+$” στα σύνολα που αναγράφονται

[11] Προσοχή! Πολλοί συγγραφείς χρησιμοποιούν τον όρο «προβολική ποικιλότητα» ως συνώνυμο τού όρου «προβολικό αλγεβρικό σύνολο» (εντός ενός προβολικού χώρου), χωρίς να συμπεριλαμβάνουν σε αυτόν την επιπρόσθετη συνθήκη τού «αναγώγου».

στην κάτω γραμμή είναι καλώς ορισμένοι έπεται από την πρόταση 3.3.13. Τέλος, παρατηρώντας ότι

$$\mathbf{V}_+(\mathbf{I}_+(V)) = \mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}}(V) = V$$

για κάθε προβολικό αλγεβρικό σύνολο V εντός τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ και ότι

$$\mathbf{I}_+(\mathbf{V}_+(I)) = \mathrm{Rad}(I) = I$$

για κάθε ομογενές ριζικό ιδεώδες $I \subsetneqq \langle \mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n \rangle$, και

$$\mathbf{I}_+(\mathbf{V}_+(\langle \mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n \rangle)) = \mathbf{I}_+(\varnothing) := \langle \mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n \rangle ,$$

διαπιστώνουμε ότι η “$\mathbf{I}_+$” είναι αντίστροφος τής “$\mathbf{V}_+$” και η “$\mathbf{V}_+$” αντίστροφος τής “$\mathbf{I}_+$”, οπότε αποτελούν αμφιρρίψεις μεταξύ των προκειμένων συνόλων. □

3.3.25 Σημείωση. (a) Επειδή, σε αντίθεση με ό,τι συμβαίνει στην περίπτωση των συσχετικών αλγεβρικών συνόλων, το ομογενές μεγιστοτικό ιδεώδες $\langle \mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n \rangle$ δεν αντιστοιχεί σε κάποιο *μη κενό* προβολικό αλγεβρικό σύνολο μέσω των ανωτέρω αμφιρρίψεων, πολλοί συγγραφείς το αποκαλούν **ασυσχέτιστο ιδεώδες**.

(b) Προφανώς, υφίσταται μια αμφίρριψη

$$[F] \longmapsto V = \mathbf{V}_+(F) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$$

μεταξύ τού συνόλου των κλάσεων ισοδυναμίας

$$\{ F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n] |\, F \text{ μη σταθερό και ομογενές}\} / \sim$$

των μη σταθερών, ομογενών πολυωνύμων $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ ως προς τη σχέση ισοδυναμίας “ $\sim$ ” :

$$F \sim F' \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \exists \lambda \in \mathbf{k} : F' = \lambda F,$$

και τού συνόλου των μέσω αυτών καθοριζομένων υπερεπιφανειών.

(c) Η αμφίρριψη “$\mathbf{I}_+$” στέλνει κάθε σημείο $P = [a_0 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ να απεικονισθεί στο ομογενές, πρώτο ιδεώδες

$$\mathbf{I}_+(\{P\}) = \langle \{ a_j \mathsf{X}_i - a_i \mathsf{X}_j |\, 0 \leq i < j \leq n \} \rangle \subset \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n].$$

Προσοχή! Σε αντίθεση με ό,τι συμβαίνει στην περίπτωση των συσχετικών αλγεβρικών συνόλων (βλ. πόρισμα 1.8.4), το $\mathbf{I}_+(\{P\})$ *δεν είναι* μεγιστοτικό ιδεώδες! (Βάσει των όσων προαναφέρθησαν στη σημείωση 3.3.20, το $\langle \mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n \rangle$ είναι το *μοναδικό* ομογενές μεγιστοτικό ιδεώδες τού πολυωνυμικού δακτυλίου $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$.)

Ασκήσεις

Α-3-9. Έστω ότι τα V και W είναι δυο προβολικά αλγεβρικά σύνολα εντός τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$. Να αποδειχθεί ότι $V = W \Longleftrightarrow \mathbf{I}_+(V) = \mathbf{I}_+(W)$.

Α-3-10. Έστω I ένα ομογενές ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$. Για το ριζικό $\mathrm{Rad}(I)$ τού I (το οποίο είναι ομογενές επί τη βάσει τής ασκήσεως **Α-3-5**) να αποδειχθεί η ισότητα $\mathbf{V}_+(I) = \mathbf{V}_+(\mathrm{Rad}(I))$.

Α-3-11. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(a) Για κάθε προβολικό αλγεβρικό σύνολο $\varnothing \neq V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ ισχύει η ισότητα

$$\mathbf{I}(\mathbf{C}(V)) = \mathbf{I}_+(V).$$

(b) Για κάθε ομογενές ιδεώδες $I \subseteq \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ με $\mathbf{V}_+(I) \neq \varnothing$ ισχύει η ισότητα

$$\mathbf{C}(\mathbf{V}_+(I)) = \mathbf{V}(I) \ (\subseteq \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}}).$$

Α-3-12. Έστω $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_m$ η αποσύνθεση ενός προβολικού αλγεβρικού συνόλου $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ σε ανάγωγες συνιστώσες. Να αποδειχθεί ότι η

$$\mathbf{C}(V) = \mathbf{C}(V_1) \cup \mathbf{C}(V_2) \cup \cdots \cup \mathbf{C}(V_m)$$

είναι η αποσύνθεση τού συσχετικού κώνου $\mathbf{C}(V)$ τού οριζομένου υπεράνω τού V σε ανάγωγες συνιστώσες.

Α-3-13. Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση $\phi_{_i}$ (βλ. (3.1)) αποτελεί ομοιομορφισμό (ως προς την τοπολογία Zariski) μεταξύ των $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ και $U_i := \{[a_0 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \,|a_i \neq 0_{\mathbf{k}}\}$ για οιονδήποτε $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Α-3-14. Έστω $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \supseteq V \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} W \subseteq \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$ μια επιρριπτική απεικόνιση μεταξύ δυο προβολικών αλγεβρικών συνόλων V και W. Εάν το V είναι προβολική ποικιλότητα και η φ συνεχής ως προς την τοπολογία Zariski, να αποδειχθεί ότι και το W είναι προβολική ποικιλότητα.

Α-3-15. Εάν τα $\mathbb{H}_1, \ldots, \mathbb{H}_m$ είναι m υπερεπίπεδα εντός τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ και $1 \leq m \leq n$, να αποδειχθεί ότι $\mathbb{H}_1 \cap \cdots \cap \mathbb{H}_m \neq \varnothing$.

Α-3-16. (a) Να αποδειχθεί ότι κάθε σημείο $P = [a_0 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ καθορίζει το υπερεπίπεδο

$$\mathbb{H} := \mathbb{H}(a_0, \ldots, a_n) := \mathbf{V}_+(a_0\mathsf{X}_0 + \cdots + a_n\mathsf{X}_n) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$$

(πρβλ. 3.3.25 (b)) και ότι επάγονται αμφιρρίψεις:

$$\{\text{υπερεπίπεδα εντός τού } \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}\} \quad \longleftrightarrow \quad \{\text{σημεία τού } \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}\}$$

$$\mathbb{H}(a_0, \ldots, a_n) \longmapsto [a_0 : \ldots : a_n] =: \mathbb{H}^\vee,$$

$$\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \ni P = [a_0 : \ldots : a_n] \longmapsto \mathbb{H}(a_0, \ldots, a_n) =: P^\vee.$$

(b) Να αποδειχθεί ότι για οιαδήποτε $\mathbb{H}$, P από τα ανωτέρω σύνολα ισχύουν οι σχέσεις

$$P^{\vee\vee} = P, \quad \mathbb{H}^{\vee\vee} = \mathbb{H}, \;\; P \in \mathbb{H} \Longleftrightarrow \mathbb{H}^\vee \in P^\vee.$$

(Πρόκειται για την περιώνυμη ιδιότητα τού *δυϊσμού τού προβολικού χώρου* $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$.)

(c) Γενικότερα, εάν ο $\mathcal{V}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος διαστάσεως $n+1$ υπεράνω τού $\mathbf{k}$, το σύνολο

$$\mathbb{P}(\mathcal{V})^\vee := \{\mathbb{P}(\mathcal{W})\,|\mathcal{W} \text{ διανυσματικός } \mathbf{k}\text{-υπόχωρος τού } \mathcal{V} \text{ διαστάσεως } n\}$$

καλείται **δυϊκός τού προβολικού χώρου** $\mathbb{P}(\mathcal{V})$. Να αποδειχθεί η ύπαρξη μιας φυσικής αμφιρρίψεως

$$\mathbb{P}(\mathcal{V})^\vee \longleftrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{V}^\vee),$$

όπου $\mathcal{V}^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathcal{V}, \mathbf{k})$ ο δυϊκός διανυσματικός χώρος τού $\mathcal{V}$.

(d) Έστω $\mathcal{V}$ ένας διανυσματικός χώρος διαστάσεως $n+1$ υπεράνω τού $\mathbf{k}$ και έστω $\mathcal{W}$ ένας υπόχωρός του διαστάσεως $m+1$, όπου $m < n$. Εάν ο $\pi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}/\mathcal{W}$ είναι ο φυσικός επιμορφισμός και το

$$\mathcal{W}^\perp := \{\beta \in \mathcal{V}^\vee\,|\beta(w) = 0_{\mathcal{V}}, \forall w \in \mathcal{W}\}$$

το δυϊκό συμπλήρωμα τού $\mathcal{W}$, να αποδειχθεί ότι ο κανονιστικός ισομορφισμός διανυσματικών χώρων

$$\pi^\vee : (\mathcal{V}/\mathcal{W})^\vee \longrightarrow \mathcal{W}^\perp, \;\; \pi^\vee(\vartheta) := \vartheta \circ \pi, \;\; \forall \vartheta \in (\mathcal{V}/\mathcal{W})^\vee,$$

επάγει μια αμφίρριψη

$$\left\{\begin{array}{c} m\text{-διάστατοι} \\ \text{προβολικοί} \\ \text{υπόχωροι τού } \mathbb{P}(\mathcal{V}) \end{array}\right\} \ni \mathbb{P}(\mathcal{W}) \quad \longleftrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{W}^\perp) \in \left\{\begin{array}{c} (n-m-1)\text{-διάστατοι} \\ \text{προβολικοί} \\ \text{υπόχωροι τού } \mathbb{P}(\mathcal{V})^\vee \end{array}\right\}.$$

3.4 Ρητές Συναρτήσεις και Μορφισμοί

3.4.1 Ορισμός. Έστω $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο. Ο πηλικοδακτύλιος

$$\boxed{\Gamma_{\text{ομ.}}(V) := \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]\,/\,\mathbf{I}_+(V)}$$

καλείται **ομογενής δακτύλιος (των) συντεταγμένων τού** V.

3.4.2 Σημείωση. (a) Είναι προφανές ότι ο $\Gamma_{\text{ομ.}}(V)$ είναι ο δακτύλιος συντεταγμένων $\Gamma(\mathbf{C}(V))$ τού συσχετικού κώνου $\mathbf{C}(V) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{n+1}$ τού οριζομένου υπεράνω τού V.

(b) Επειδή το ιδεώδες $\mathbf{I}_+(V)$ είναι ομογενές, ο $\Gamma_{\text{ομ.}}(V)$ είναι βαθμολογημένος δακτύλιος, δεχόμενος τη βαθμολόγηση

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{ομ.}}(V) &= \bigoplus_{d\geq 0}(\mathbf{k}[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_n]_d + \mathbf{I}_+(V))/\mathbf{I}_+(V)\\ &\cong \bigoplus_{d\geq 0}\mathbf{k}[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_n]_d/(\mathbf{k}[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_n]_d \cap \mathbf{I}_+(V))\end{aligned}$$

(βλ. πρόταση 3.2.8).

(c) Όπως προαναφέραμε στην αρχή τής ενότητας 3.3, δεν υπάρχει κανένα μη σταθερό στοιχείο τού $\Gamma_{\text{ομ.}}(V)$ που να ορίζει μια συνάρτηση $V \longrightarrow \mathbf{k}$. Ως εκ τούτου, για τα προβολικά αλγεβρικά σύνολα *δεν υφίσταται ανάλογο τής εννοίας τής πολυωνυμικής συναρτήσεως* (και κατ' επέκτασιν *δεν υφίσταται ανάλογο* τής προτάσεως 2.1.3)!

(d) Έστω $V \subseteq \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n$ μια προβολική ποικιλότητα. Κατά την πρόταση 3.3.13 ο $\Gamma_{\text{ομ.}}(V)$ είναι ακεραία περιοχή. Τα περισσότερα στοιχεία τού σώματος κλασμάτων $\mathbf{Fr}(\Gamma_{\text{ομ.}}(V))$ δεν μπορούν να θεωρηθούν ως συναρτήσεις. Ωστόσο, υπάρχει ένα απλό «τέχνασμα» που χρησιμοποιείται προκειμένου κανείς να απομονώσει από το «μικρό» σύνολο των στοιχείων, τα οποία καθορίζουν συναρτήσεις, εκείνα που οφείλουν να παίξουν τον ρόλο των «ρητών συναρτήσεων» επί τής V (κατ' αναλογίαν τού 2.4.1): Θεωρώντας τά στοιχεία

$$\frac{\overline{G}}{\overline{H}} \in \mathbf{Fr}(\Gamma_{\text{ομ.}}(V)),\ \overline{G} = G + \mathbf{I}_+(V),\ \overline{H} = H + \mathbf{I}_+(V) \in \Gamma_{\text{ομ.}}(V),\ H \notin \mathbf{I}_+(V),$$

τα οποία διαθέτουν *ίδιο βαθμό* d (ως προς τη βαθμολόγηση (b) τής ακεραίας περιοχής $\Gamma_{\text{ομ.}}(V)$), παρατηρούμε ότι για κάθε $P = [a_0 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n$ και κάθε $\lambda \in \mathbf{k}\smallsetminus\{0_{\mathbf{k}}\}$ ισχύουν οι ισότητες

$$\tfrac{\overline{G}}{\overline{H}}(\lambda(a_0,\ldots,a_n)) = \tfrac{G(\lambda(a_0,\ldots,a_n))}{F(\lambda(a_0,\ldots,a_n))} = \tfrac{\lambda^d G(a_0,\ldots,a_n)}{\lambda^d F(a_0,\ldots,a_n)} = \tfrac{G(a_0,\ldots,a_n)}{F(a_0,\ldots,a_n)},$$

πράγμα που σημαίνει ότι *η τιμή* τού $\frac{\overline{G}}{\overline{H}}$ στο P είναι *ανεξάρτητη* τής επιλογής των εκάστοτε εκπροσώπων των ομογενών συντεταγμένων τού P. Τούτο μάς οδηγεί στη θέσπιση τού ακολούθου ορισμού:

3.4.3 Ορισμός. Έστω $V \subseteq \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n$ μια προβολική ποικιλότητα. Το ομογενές σώμα κλασμάτων

$$\boxed{\mathbf{k}(V) := \mathbf{Fr}_{\text{ομ.}}(\Gamma_{\text{ομ.}}(V)) = \left\{ \tfrac{\overline{G}}{\overline{H}} \in \mathbf{Fr}(\Gamma_{\text{ομ.}}(V)) \,\middle|\, \deg(\overline{G}) = \deg(\overline{H}) \right\}}$$

τής βαθμολογημένης ακεραίας περιοχής $\Gamma_{\text{ομ.}}(V)$ (υπό την έννοια τού ορισμού 3.2.12 (a)) καλείται **σώμα των ρητών συναρτήσεων** επί τής V (και κάθε στοιχείο τού $\mathbf{k}(V)$ **ρητή συνάρτηση** επί τής V). Προφανώς,

$$\mathbf{k} \subseteq \mathbf{k}(V) \subseteq \mathbf{Fr}(\Gamma_{\text{ομ.}}(V)),\ \text{αλλά}\ \Gamma_{\text{ομ.}}(V) \nsubseteq \mathbf{k}(V).$$

3.4.4 Ορισμός. Έστω $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ μια προβολική ποικιλότητα. Λέμε ότι μια ρητή συνάρτηση $f \in \mathbf{k}(V)$ επί τής V είναι **κανονική στο σημείο** P όταν ορίζεται σε αυτό, ήτοι όταν δέχεται παράσταση $f = \frac{\overline{G}}{\overline{H}}$ με $\overline{H}(P) := H(P) \neq 0_{\mathbf{k}}$. Ως **πεδίο ορισμού** μιας $f \in \mathbf{k}(V)$ ορίζεται το σύνολο

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) := \{P \in V \mid \text{η } f \text{ είναι κανονική στο σημείο } P\}}$$

και ως **ιδεώδες των παρονομαστών της** το ιδεώδες

$$\boxed{J_f^{\pi\alpha\varrho} := \left\{\overline{H} \in \Gamma_{\text{ομ.}}(V) \;\middle|\; \overline{H}f \in \Gamma_{\text{ομ.}}(V)\right\}}$$

τού $\Gamma_{\text{ομ.}}(V)$. Το σύνολο

$$\boxed{\mathrm{Pol}(f) := V \smallsetminus \mathrm{Dom}(f)}$$

καλείται **σύνολο των πόλων** τής f (και κάθε στοιχείο του **πόλος** τής f). Τέλος, θέτουμε

$$\boxed{\mathcal{O}_{V,P} := \{f \in \mathbf{k}(V) \mid \text{ η } f \text{ είναι κανονική στο σημείο } P\}.} \tag{3.7}$$

3.4.5 Πρόταση. *Εάν το P είναι ένα σημείο μιας προβολικής ποικιλότητας $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, τότε ισχύουν τα εξής:*

(a) *Ο δακτύλιος $\mathcal{O}_{V,P}$ αποτελεί την ομογενή τοπικοποίηση τού $\Gamma_{\text{ομ.}}(V)$ στο ομογενές, πρώτο ιδεώδες*

$$\mathbf{I}_{V,+}(\{P\}) := \left\{\overline{F} \in \Gamma_{\text{ομ.}}(V) \;\middle|\; F \in \mathbf{I}_+(\{P\})\right\} = \left\{\overline{F} \in \Gamma_{\text{ομ.}}(V) \;\middle|\; F(P) = 0_{\mathbf{k}}\right\}$$

(βλ. 3.2.12 (c)), *δηλαδή*

$$\boxed{\mathcal{O}_{V,P} = \Gamma_{\text{ομ.}}(V)_{(\mathbf{I}_{V,+}(\{P\}))}.}$$

(b) *Ο $\mathcal{O}_{V,P}$ είναι τοπικός ναιτεριανός δακτύλιος (και, επιπροσθέτως, ακεραία περιοχή) με το*

$$\boxed{\mathfrak{m}_{V,P} := \mathbf{I}_{V,+}(\{P\})\Gamma_{\text{ομ.}}(V)_{(\mathbf{I}_{V,+}(\{P\}))} = \{f \in \mathcal{O}_{V,P} \mid f(P) = 0_{\mathbf{k}}\}}$$

ως (το μοναδικό) μεγιστοτικό του ιδεώδες και

$$\boxed{\mathcal{O}_{V,P}/\mathfrak{m}_{V,P} \cong \mathbf{Fr}_{\text{ομ.}}(\Gamma_{\text{ομ.}}(V)/\mathbf{I}_{V,+}(\{P\})) \cong \Gamma_{\text{ομ.}}(V)/\mathbf{I}_{V,+}(\{P\}) \cong \mathbf{k}.}$$

(Ο δακτύλιος $\mathcal{O}_{V,P}$ αναφέρεται, ιδιαιτέρως, ως ***ο τοπικός δακτύλιος τής*** V ***στο*** P.)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a) Προφανώς,

$$\mathcal{O}_{V,P} = \left\{ f = \frac{\overline{G}}{\overline{H}} \in \mathbf{k}(V) \;\middle|\; H(P) \neq 0_{\mathbf{k}} \right\}$$

$$= \left\{ f = \frac{\overline{G}}{\overline{H}} \in \mathbf{k}(V) \;\middle|\; \overline{H} \in \Gamma_{\text{ομ.}}(V) \smallsetminus \mathbf{I}_{V,+}(\{P\}) \right\} = \Gamma_{\text{ομ.}}(V)_{(\mathbf{I}_{V,+}(\{P\}))}.$$

(b) Το ότι ο $\mathcal{O}_{V,P}$ είναι τοπικός ναιτεριανός δακτύλιος (και, επιπροσθέτως, ακεραία περιοχή) έπεται από το (a), το (c) τής σημειώσεως 3.2.12, το πόρισμα 2.3.19 και τις ασκήσεις **A-2-20** και **A-3-6**. Το (μοναδικό) μεγιστοτικό ιδεώδες $\mathfrak{m}_{V,P}$ τού τοπικού δακτυλίου $\mathcal{O}_{V,P}$ είναι (σύμφωνα με το 3.2.12 (c)) το $\mathbf{I}_{V,+}(\{P\})\Gamma_{\text{ομ.}}(V)_{(\mathbf{I}_{V,+}(\{P\}))}$ που ισούται με

$$\left\{ \tfrac{\overline{G}}{\overline{H}} \in \Gamma_{\text{ομ.}}(V)_{(\mathbf{I}_{V,+}(\{P\}))} \;\middle|\; \overline{G} \in \mathbf{I}_{V,+}(\{P\}),\ \overline{H} \in \Gamma_{\text{ομ.}}(V) \smallsetminus \mathbf{I}_{V,+}(\{P\}) \right\}$$

$$= \left\{ f = \tfrac{\overline{G}}{\overline{H}} \in \mathcal{O}_{V,P} \;\middle|\; G(P) = 0_{\mathbf{k}},\ H(P) \neq 0_{\mathbf{k}} \right\} = \{ f \in \mathcal{O}_{V,P} \mid f(P) = 0_{\mathbf{k}} \}.$$

Σε ό,τι αφορά στους ανωτέρω αναγραφόμενους ισομορφισμούς σωμάτων: ο πρώτος μάς είναι γνωστός από την προηγηθείσα σημείωση 3.2.12 (c), ο δεύτερος είναι προφανής, διότι η ακεραία περιοχή $\Gamma_{\text{ομ.}}(V)/\mathbf{I}_{V,+}(\{P\})$ είναι αφ' εαυτής σώμα, ενώ ο τρίτος έπεται ύστερα από εφαρμογή τού 1ου θεωρήματος ισομορφισμών δακτυλίων 1.1.10 για τον επιμορφισμό αποτιμήσεως

$$\Gamma_{\text{ομ.}}(V) \ni \overline{F} \longmapsto F(P) \in \mathbf{k}$$

που έχει το ιδεώδες $\mathbf{I}_{V,+}(\{P\})$ ως πυρήνα του. □

3.4.6 Ορισμός. Έστω U ένα μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο μιας προβολικής ποικιλότητας $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$. Συμβολίζουμε ως

$$\boxed{\mathcal{O}_V(U) := \{ f \in \mathbf{k}(V) \mid U \subseteq \mathrm{Dom}(f) \}}$$

τον δακτύλιο ($\mathbf{k}$-άλγεβρα) ***των κανονικών συναρτήσεων επί τού*** U. (Η συνολοθεωρητική ισότητα $\mathcal{O}_V(U) = \bigcap_{P \in U} \mathcal{O}_{V,P}$ είναι προφανής.)

3.4.7 Ορισμός. Μια συνεχής απεικόνιση $\varphi : V \longrightarrow W$ (ως προς την τοπολογία Zariski) μεταξύ δυο προβολικών ποικιλοτήτων $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ και $W \subseteq \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$ καλείται **μορφισμός** όταν για κάθε κατά Zariski ανοικτό $U \subseteq W$ και κάθε $f \in \mathcal{O}_W(U)$ ισχύει $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_V(\varphi^{-1}(U))$. Ένας μορφισμός $\varphi : V \longrightarrow W$ καλείται **ισομορφισμός** όταν υπάρχει ένας μορφισμός $\psi : W \longrightarrow V$ για τον οποίο ισχύουν οι ισότητες

$$\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_V, \quad \varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_W.$$

Λέμε ότι οι V, W είναι **ισόμορφες** (και χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $V \cong W$) όταν υφίσταται ένας ισομορφισμός μεταξύ αυτών. (Η "$\cong$" αποτελεί προφανώς μια σχέση ισοδυναμίας.) Επιπροσθέτως, κάθε ισομορφισμός έχων ως πεδίο ορισμού και ως πεδίο τιμών του την ίδια προβολική ποικιλότητα V καλείται **αυτομορφισμός τής** V.

3.4.8 Πρόταση. *Έστω $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \supseteq V \xrightarrow{\varphi} W \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ μια απεικόνιση μεταξύ προβολικών ποικιλοτήτων. Για κάθε $i \in \{0, \ldots, n\}$ θέτουμε $W_i := W \cap U_i$, όπου*

$$U_i = U_i(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}) := \{[a_0 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \, | a_i \neq 0_{\mathbf{k}}\}$$

(βλ. 3.1.3). *Τότε η φ είναι μορφισμός εάν και μόνον εάν οι περιορισμοί*

$$\varphi|_{\varphi^{-1}(W_i)} : \varphi^{-1}(W_i) \longrightarrow W_i$$

είναι μορφισμοί συσχετικών ποικιλοτήτων[12] *για κάθε $i \in \{0, \ldots, n\}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Άμεση από το γεγονός ότι η κανονικότητα συναρτήσεων είναι μια τοπική ιδιότητα. □

3.4.9 Παράδειγμα. Η απεικόνιση $\varphi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbf{V}_+(\mathsf{X}_1^2 - \mathsf{X}_0\mathsf{X}_2) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ που ορίζεται από τον τύπο

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \ni [a_0 : a_1] \longmapsto \varphi([a_0 : a_1]) := \left[a_0^2 : a_0 a_1 : a_1^2\right] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$

είναι ισομορφισμός προβολικών ποικιλοτήτων έχων την $\psi : \mathbf{V}_+(\mathsf{X}_1^2 - \mathsf{X}_0\mathsf{X}_2) \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

$$\psi([a_0 : a_1 : a_2]) = \begin{cases} [a_0 : a_1], & \text{όταν } a_0 \neq 0, \\ [a_1 : a_2], & \text{όταν } a_1 \neq 0, \end{cases}$$

ως αντίστροφό του.

3.4.10 Σημείωση. (a) Εάν η απεικόνιση $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \supseteq V \xrightarrow{\varphi} W \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι μορφισμός προβολικών ποικιλοτήτων και $P \in V$, $Q := \varphi(P)$, τότε επάγεται ένας ομομορφισμός τοπικών δακτυλίων

$$\widehat{\varphi}_P : \mathcal{O}_{W,Q} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,P}, \ \ f \longmapsto \widehat{\varphi}_P(f) := f \circ \varphi.$$

Η άσκηση **A-3-19** περιγράφει το πότε η απεικόνιση φ είναι ισομορφισμός συναρτήσει των $\{\widehat{\varphi}_P \, | P \in V\}$.

(b) Κάθε ισομορφισμός μεταξύ δυο προβολικών ποικιλοτήτων είναι πάντοτε αμφιρριπτική και κατά Zariski αμφισυνεχής απεικόνιση· αντιθέτως, ένας αμφιρριπτικός και κατά Zariski αμφισυνεχής μορφισμός μεταξύ δυο προβολικών ποικιλοτήτων δεν είναι κατ' ανάγκην ισομορφισμός.

(c) Εάν οι $V \subseteq \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$ και $W \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι ισόμορφες προβολικές ποικιλότητες, οι ομογενείς δακτύλιοι συντεταγμένων τους $\Gamma_{\text{ομ.}}(V)$ και $\Gamma_{\text{ομ.}}(W)$ *δεν είναι κατ' ανάγκην ισόμορφοι*, σε αντίθεση με ό,τι συμβαίνει με τις συσχετικές ποικιλότητες (πρβλ. πόρισμα 2.1.18 και άσκηση **A-3-20**).

(d) Η *κατηγορία των* **k**-*προβολικών ποικιλοτήτων* (με μορφισμούς/ισομορφισμούς της τους ανωτέρω ορισθέντες στο 3.4.7) θα συμβολίζεται ως $\mathbf{k}$-$\mathfrak{PVar}$.

[12]Εν προκειμένω, ο όρος «συσχετική ποικιλότητα» νοείται *μέχρις ομοιομορφισμού* (βλ. άσκηση **A-3-13**) ή *μέχρις* (κατά τι γενικευμένου) *ισομορφισμού* (βλ. 3.8.3 και 3.8.9).

• Η έννοια τής *κανονικής συναρτήσεως* επί ενός μη κενού, κατά Zariski ανοικτού υποσυνόλου οιουδήποτε προβολικού (όχι κατ' ανάγκην αναγώγου) αλγεβρικού συνόλου $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, καθώς και η έννοια τού *μορφισμού* μεταξύ τέτοιων υποσυνόλων γενικεύονται ως ακολούθως:

3.4.11 Ορισμός. Έστω Y ένα μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο ενός προβολικού αλγεβρικού συνόλου $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ και έστω $P \in Y$. Μια συνάρτηση $f : Y \longrightarrow \mathbf{k}$ καλείται **κανονική συνάρτηση στο** P όταν υπάρχουν ένα κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο U τού Y με $P \in U$, καθώς και δυο ομογενή πολυώνυμα $G, H \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ *ιδίου βαθμού*, τα οποία πληρούν τις εξής συνθήκες:

$$H(Q) \neq 0_{\mathbf{k}}, \quad f(Q) = \frac{G(Q)}{H(Q)}, \; \forall Q \in U.$$

Η συνάρτηση $f : Y \longrightarrow \mathbf{k}$ καλείται **κανονική συνάρτηση επί τού** Y όταν είναι κανονική σε *κάθε* σημείο $P \in Y$. (Οι κανονικές συναρτήσεις επί τού Y συγκροτούν μια $\mathbf{k}$-άλγεβρα.)

3.4.12 Ορισμός. Μια απεικόνιση $V \supseteq Y \xrightarrow{\varphi} Z \subseteq W$ μεταξύ δυο μη κενών, κατά Zariski ανοικτών υποσυνόλων Y, Z προβολικών αλγεβρικών συνόλων $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ και $W \subseteq \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$ καλείται **μορφισμός** όταν είναι συνεχής (ως προς την τοπολογία Zariski) και για κάθε κανονική συνάρτηση $f : U \longrightarrow \mathbf{k}$ ορισμένη επί ενός κατά Zariski ανοικτού υποσυνόλου τού Z η σύνθεση

$$f \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbf{k}$$

είναι μια κανονική συνάρτηση επί τού $\varphi^{-1}(U)$. Ένας μορφισμός τέτοιου είδους καλείται **ισομορφισμός** όταν υπάρχει ένας μορφισμός $\psi : Z \longrightarrow Y$ για τον οποίο ισχύουν οι ισότητες

$$\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_Y, \quad \varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_Z.$$

(Ο συμβολισμός $Y \cong Z$ δηλοί και σε αυτήν την περίπτωση ότι υφίσταται ένας ισομορφισμός μεταξύ αυτών.)

3.4.13 Σημείωση. Η (κατά τρόπο φυσικό δομούμενη) *κατηγορία των προβολικών αλγεβρικών συνόλων* εντός προβολικών χώρων υπεράνω ενός σώματος $\mathbf{k}$ (με μορφισμούς/ισομορφισμούς της τους ανωτέρω ορισθέντες στο 3.4.12) θα συμβολίζεται εφεξής ως $\mathbf{k}$-$\mathfrak{PASets}$.

Ασκήσεις

Α-3-17. Έστω $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ μια προβολική ποικιλότητα και έστω $f \in \mathbf{k}(V)$. Να αποδειχθεί ότι το $\mathrm{Dom}(f)$ είναι κατά Zariski ανοικτό (και πυκνό) υποσύνολο τού V. (*Υπόδειξη*: $\mathrm{Pol}(f) = \left\{ P \in V \;\middle|\; H(P) = 0_{\mathbf{k}},\ \forall \overline{H} \in J_f^{\pi\alpha\varrho} \right\}$.)

Α-3-18. Εάν η $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \supseteq V \xrightarrow{\varphi} W \subseteq \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$ είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ προβολικών ποικιλοτήτων, να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση

$$\mathbf{k}(W) \ni f \longmapsto f \circ \varphi \in \mathbf{k}(V)$$

αποτελεί ισομορφισμό σωμάτων.

Α-3-19. Έστω $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \supseteq V \xrightarrow{\varphi} W \subseteq \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$ ένας μορφισμός μεταξύ προβολικών ποικιλοτήτων. Να αποδειχθεί ότι ο φ είναι ισομορφισμός εάν και μόνον εάν ο φ είναι ομοιομορφισμός (ως προς την τοπολογία Zariski) και οι ομομορφισμοί τοπικών δακτυλίων $\widehat{\varphi}_P : \mathcal{O}_{W,\varphi(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,P}$ ισομορφισμοί για κάθε σημείο $P \in V$.

Α-3-20. Οι ομογενείς δακτύλιοι συντεταγμένων δεν είναι αναλλοίωτοι ως προς τους ισομορφισμούς: Να αποδειχθεί ότι

$$\Gamma_{\text{ομ.}}\left(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\right) \ncong \Gamma_{\text{ομ.}}\left(\mathbf{V}_+(\mathsf{X}_1^2 - \mathsf{X}_0\mathsf{X}_2)\right)$$

παρότι $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \cong \mathbf{V}_+(\mathsf{X}_1^2 - \mathsf{X}_0\mathsf{X}_2)$ (βλ. παράδειγμα 3.4.9).

$\boxed{3.5}$ Προβολικές αλλαγές συντεταγμένων

Κάθε γραμμική συσχετική αλλαγή συντεταγμένων τού $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}}$ είναι τής μορφής

$$T = T_{\mathcal{A}} : \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}},\ \ (\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n) \longmapsto \mathcal{A}\,(\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n)^{\intercal},$$

όπου

$$\mathcal{A} = (a_{i\,j})_{0 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{GL}\,(n+1, \mathbf{k}),$$

στέλνει μονοδιάστατους $\mathbf{k}$-υπόχωρους τού $\mathbf{k}^{n+1}$ να απεικονίζονται σε μονοδιάστατους $\mathbf{k}$-υπόχωρους τού $\mathbf{k}^{n+1}$ και επάγει μια αμφίρριψη

$$\Psi_{\mathcal{A}} : \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}},\ \ [\mathsf{X}_0 : \ldots : \mathsf{X}_n] \longmapsto [\mathcal{A}\,(\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n)^{\intercal}] := [\sum_{j=0}^{n} a_{0\,j}\mathsf{X}_j : \ldots : \sum_{j=0}^{n} a_{n\,j}\mathsf{X}_j].$$

3.5.1 Λήμμα. (a) $\Psi_{\lambda\mathcal{A}} = \Psi_{\mathcal{A}},\ \ \forall \mathcal{A} \in \mathrm{GL}\,(n+1, \mathbf{k})\,,\ \forall \lambda \in \mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\}.$
(b) $\Psi_{\mathcal{A}} \circ \Psi_{\mathcal{B}} = \Psi_{\mathcal{A}\mathcal{B}},\ \forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbf{k})\,.$
(c) $\Psi_{\mathcal{A}}^{-1} = \Psi_{\mathcal{A}^{-1}},\ \forall \mathcal{A} \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbf{k})\,.$
(d) $\Psi_{\mathcal{A}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}} \Longleftrightarrow \mathcal{A} \in \left\{ \lambda \cdot 1_{\mathrm{GL}(n+1,\mathbf{k})} \ \middle|\ \lambda \in \mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\} \right\}.$

3.5.2 Ορισμός. Κάθε αμφίρριψη τής μορφής $\Psi_{\mathcal{A}}$, όπου $\mathcal{A} \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbf{k})$, καλείται **προβολική αλλαγή συντεταγμένων τού** $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$.

Επειδή για οιουσδήποτε $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbf{k})$ έχουμε

$$\Psi_{\mathcal{A}} = \Psi_{\mathcal{B}} \Longleftrightarrow \Psi_{\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}} \Longleftrightarrow \mathcal{A}\mathcal{B}^{-1} \in \left\{ \lambda \cdot 1_{\mathrm{GL}(n+1,\mathbf{k})} \ \middle|\ \lambda \in \mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\} \right\},$$

δημιουργείται ένας ισομορφισμός ομάδων

$$\boxed{\mathrm{PGL}(n+1, \mathbf{k}) \ni \overline{\mathcal{A}} \longmapsto \Psi_{\mathcal{A}} \in \left\{ \begin{array}{c} \text{προβολικές αλλαγές} \\ \text{συντεταγμένων τού } \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \end{array} \right\}}$$

όπου

$$\boxed{\mathrm{PGL}(n+1, \mathbf{k}) := \mathrm{GL}\,(n+1, \mathbf{k})\,/\left\{ \lambda \cdot 1_{\mathrm{GL}(n+1,\mathbf{k})} \middle| \lambda \in \mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\} \right\}}$$

η λεγομένη **προβολική γενική γραμμική ομάδα** βαθμού $n+1$.

3.5.3 Λήμμα. *Έστω $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο. Εάν $\mathcal{A} \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbf{k})$, τότε η εικόνα*

$$\Psi_{\mathcal{A}}(V) = \{\Psi_{\mathcal{A}}([\mathsf{X}_0 : \ldots : \mathsf{X}_n]) \mid [\mathsf{X}_0 : \ldots : \mathsf{X}_n] \in V\} \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$$

τού V μέσω τής $\Psi_{\mathcal{A}}$ είναι ωσαύτως προβολικό αλγεβρικό σύνολο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Υποθέτοντας ότι $V = \mathbf{V}_+(F_1, \ldots, F_\kappa)$, για κάποια ομογενή πολυώνυμα

$$F_1, \ldots, F_\kappa \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n],$$

και θέτοντας $\mathcal{A}^{-1} = (b_{i\,j})_{0 \leq i,j \leq n}$, ορίζουμε τα πολυώνυμα $G_j = F_j \circ T_{\mathcal{A}^{-1}}$, ήτοι τα

$$G_j(\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n) := F_j\left(\sum_{j=0}^{n} b_{0\,j}\mathsf{X}_j, \ldots, \sum_{j=0}^{n} b_{n\,j}\mathsf{X}_j \right),\ \forall j \in \{1, \ldots, \kappa\},$$

και παρατηρούμε ότι $\Psi_{\mathcal{A}}(V) = \mathbf{V}_+(G_1, \ldots, G_\kappa)$. □

3.5.4 Λήμμα. *Κάθε προβολική αλλαγή συντεταγμένων $\Psi_{\mathcal{A}}$ τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι ομοιομορφισμός (ως προς την τοπολογία Zariski).*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προφανώς,

$$\Psi_{\mathcal{A}} \text{ συνεχής} \Leftrightarrow \Psi_{\mathcal{A}^{-1}} \text{ ανοικτή και } \Psi_{\mathcal{A}^{-1}} \text{ συνεχής} \Leftrightarrow \Psi_{\mathcal{A}} \text{ ανοικτή.}$$

Έστω $U \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ ένα κατά Zariski ανοικτό σύνολο. Τότε υπάρχουν ομογενή πολυώνυμα $F_1, \ldots, F_\kappa \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$U = \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \smallsetminus \mathbf{V}_+(F_1, \ldots, F_\kappa) \Longrightarrow \Psi_{\mathcal{A}}(U) = \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \smallsetminus \Psi_{\mathcal{A}}(\mathbf{V}_+(F_1, \ldots, F_\kappa)),$$

με την τελευταία ισότητα ισχύουσα λόγω τής αμφιρριπτικότητας τής $\Psi_{\mathcal{A}}$. Κατά το λήμμα 3.5.3 το $\Psi_{\mathcal{A}}(\mathbf{V}_+(F_1, \ldots, F_\kappa))$ είναι προβολικό αλγεβρικό σύνολο και -ως εκ τούτου- κατά Zariski κλειστό σύνολο. Άρα το $\Psi_{\mathcal{A}}(V)$ είναι κατά Zariski ανοικτό σύνολο, η $\Psi_{\mathcal{A}}$ ανοικτή και η $\Psi_{\mathcal{A}^{-1}}$ συνεχής. Εργαζόμενοι με τον $\mathcal{A}^{-1}$ αντί τού $\mathcal{A}$ αποδεικνύουμε με την ίδια συλλογιστική ότι η $\Psi_{\mathcal{A}}$ είναι ωσαύτως συνεχής. □

3.5.5 Λήμμα. *Έστω $\varphi : \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ μια απεικόνιση τής μορφής*

$$\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \ni [\mathsf{X}_0 : \ldots : \mathsf{X}_m] \overset{\varphi}{\longmapsto} [G_0(\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m) : \ldots : G_n(\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m)] \in \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}},$$

όπου τα $G_0, \ldots, G_n$ είναι ομογενή πολυώνυμα ιδίου βαθμού και χωρίς κοινά σημεία μηδενισμού. Τότε η φ είναι μορφισμός[13].

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για $i \in \{0, \ldots, n\}$ θέτουμε

$$U_i := \{[a_0 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \,|\, a_i \neq 0_{\mathbf{k}}\}$$

(βλ. 3.1.3). Εάν οι

$$\varpi_{[m]} : \mathbb{A}^{m+1}_{\mathbf{k}} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}^{m+1}}\} \longrightarrow \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}, \quad \varpi_{[n]} : \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}^{n+1}}\} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}},$$

είναι οι φυσικές επιρρίψεις (βλ. 3.3.16), τότε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\varpi^{-1}_{[m]}\left(\varphi^{-1}(U_i)\right) \arrow[r, "(G_0,\ldots,G_n)"] \arrow[d, "\varpi_{[m]}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{k} \times \cdots \times \mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\} \times \cdots \times \mathbf{k} \arrow[d, "\varpi_{[n]}"] \\
\varphi^{-1}(U_i) \arrow[r, "\varphi"] & U_i
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό (με τον παράγοντα $\mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\}$ στην i-οστή θέση). Εξ αυτού συνάγουμε ότι οι κανονικές συναρτήσεις επί τού $\varphi^{-1}(U_i)$ είναι ακριβώς εκείνες οι κανονικές συναρτήσεις που παραμένουν αναλλοίωτες υπό τη συνήθη δράση τής πολλαπλασιαστικής

[13] Όπως θα δούμε αργότερα στο θεώρημα 3.11.35, ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή *κάθε* μορφισμός $\varphi : \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι μια απεικόνιση αυτής τής μορφής.

ομάδας $\mathbf{k}\diagdown\{0_{\mathbf{k}}\}$ επί τού $\varpi_{[m]}^{-1}\left(\varphi^{-1}(U_i)\right)$ (πρβλ. 3.1.2 (b)). Κατά συνέπειαν, οι περιορισμοί

$$\varphi|_{\varphi^{-1}(U_i)} : \varphi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i$$

είναι μορφισμοί συσχετικών ποικιλοτήτων για κάθε $i \in \{0, \ldots, n\}$. Αρκεί λοιπόν να εφαρμόσουμε την πρόταση 3.4.8. □

3.5.6 Πρόταση. *Κάθε προβολική αλλαγή συντεταγμένων $\Psi_{\mathcal{A}}$ τού προβολικού χώρου $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι αυτομορφισμός τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βάσει τού λήμματος 3.5.4 κάθε $\Psi_{\mathcal{A}}$ είναι ομοιομορφισμός. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι οι $\Psi_{\mathcal{A}}$ και $\Psi_{\mathcal{A}}^{-1} = \Psi_{\mathcal{A}^{-1}}$ είναι μορφισμοί. Τούτο έπεται απευθείας από το λήμμα 3.5.5. □

Μάλιστα, ισχύει και το αντίστροφο:

3.5.7 Θεώρημα. (Αυτομορφισμοί τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$) *Κάθε αυτομορφισμός τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ οφείλει να είναι μια προβολική αλλαγή συντεταγμένων τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$. Ως εκ τούτου, υφίσταται ένας ισομορφισμός*

$$\boxed{\mathrm{PGL}(n+1,\mathbf{k}) \ni \overline{\mathcal{A}} \overset{\cong}{\longmapsto} \Psi_{\mathcal{A}} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})}$$

μεταξύ τής προβολικής γενικής γραμμικής ομάδας βαθμού $n+1$ και τής ομάδας $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})$ των αυτομορφισμών τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Μια στοιχειώδης απόδειξη δίδεται στο (b) τού θεωρήματος 3.11.35. Για μια άλλη, σύντομη αλλά *μη στοιχειώδη* απόδειξη βλ. R. Hartshorne: *Algebraic Geometry*, GTM, Vol. **52**, Springer-Verlag, 1977, Ch. II., 7.1.1, σελ. 151. □

3.5.8 Πόρισμα. *Έστω $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ μια προβολική ποικιλότητα. Εάν $\mathcal{A} \in \mathrm{GL}(n+1,\mathbf{k})$, τότε ο αυτομορφισμός $\Psi_{\mathcal{A}}$ επάγει ισομορφισμούς δακτυλίων*

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{ομ.}}(\Psi_{\mathcal{A}}(V)) \ni \overline{F} &\longmapsto \overline{F \circ \Psi_{\mathcal{A}}} \in \Gamma_{\text{ομ.}}(V) \\ \mathbf{k}(\Psi_{\mathcal{A}}(V)) \ni f &\longmapsto f \circ \Psi_{\mathcal{A}} \in \mathbf{k}(V), \\ \mathcal{O}_{\Psi_{\mathcal{A}}(V),\Psi_{\mathcal{A}}(P)} \ni f &\longmapsto f \circ \Psi_{\mathcal{A}} \in \mathcal{O}_{V,P}, \quad \forall P \in V. \end{aligned}$$

3.5.9 Ορισμός. Δυο προβολικές ποικιλότητες ή, γενικότερα, δυο προβολικά αλγεβρικά σύνολα $V, W \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ καλούνται **προβολικώς ισοδύναμα** όταν υπάρχει αυτομορφισμός $\Psi_{\mathcal{A}}$ τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, τέτοιος ώστε να ισχύει $\Psi_{\mathcal{A}}(V) = W$. (Προφανώς, η «προβολική ισοδυναμία» αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας.)

Επί παραδείγματι, η προβολική ισοδυναμία χρησιμοποιείται για τον γεωμετρικό χαρακτηρισμό των *προβολικών υπερεπιπέδων* και των *προβολικών τετραγωνικών υπερεπιφανειών*.

3.5.10 Πρόταση. *Όλα τα υπερεπίπεδα $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι προβολικώς ισοδύναμα*[14] (*και ισόμορφα με τον προβολικό χώρο $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbf{k}}$*).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω τυχόν υπερεπίπεδο

$$\mathbb{H} = \mathbf{V}_+(a_0\mathsf{X}_0 + a_1\mathsf{X}_1 + \cdots + a_n\mathsf{X}_n) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}.$$

Επειδή τουλάχιστον ένα από τα $a_i, i \in \{0, \ldots, n\}$, είναι κατ' ανάγκην $\neq 0_{\mathbf{k}}$, μπορούμε δίχως βλάβη τής γενικότητας να υποθέσουμε ότι $a_0 \neq 0_{\mathbf{k}}$. Για την επαλήθευση τού ισχυρισμού είναι αρκετό να δειχθεί ότι το $\mathbb{H}$ είναι προβολικώς ισοδύναμο τού $\mathbf{V}_+(\mathsf{X}_0) \cong \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbf{k}}$. Προς τούτο θεωρούμε τον πίνακα

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ 0_{\mathbf{k}} & 1_{\mathbf{k}} & \cdots & 0_{\mathbf{k}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & \cdots & 1_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \quad \left(\text{με } \mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_0} & -\frac{a_1}{a_0} & \cdots & -\frac{a_n}{a_0} \\ 0_{\mathbf{k}} & 1_{\mathbf{k}} & \cdots & 0_{\mathbf{k}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & \cdots & 1_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \right).$$

Προφανώς, $\Psi_{\mathcal{A}}(\mathbb{H}) = \mathbf{V}_+(\mathsf{X}_0)$. (Εάν $a_i \neq 0_{\mathbf{k}}$ για κάποιο $i \in \{1, \ldots, n\}$, τότε με ανάλογη επιχειρηματολογία δείχνουμε ότι $\Psi_{\mathcal{A}}(\mathbb{H}) = \mathbf{V}_+(\mathsf{X}_i)$ και ελέγχουμε εύκολα ότι τα $\mathbf{V}_+(\mathsf{X}_i)$ και $\mathbf{V}_+(\mathsf{X}_0)$ είναι προβολικώς ισοδύναμα.) □

3.5.11 Ορισμός. Μια προβολική υπερεπιφάνεια $\mathbf{V}_+(F) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, η οποία ορίζεται από ένα ομογενές πολυώνυμο $0 \neq F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ βαθμού 2, καλείται **προβολική τετραγωνική υπερεπιφάνεια**.

3.5.12 Σημείωση. Το ορίζον πολυώνυμο F μιας προβολικής τετραγωνικής υπερεπιφάνειας $\mathbf{V}_+(F) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ γράφεται υπό τη μορφή

$$F = \sum_{0 \leq i,j \leq n} a_{ij}\mathsf{X}_i\mathsf{X}_j \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n] \tag{3.8}$$

Εάν η χαρακτηριστική τού $\mathbf{k}$ είναι $\neq 2$, τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$a_{ij} = a_{ji},\ \forall i, j \in \{0, , \ldots, n\}. \tag{3.9}$$

(Πράγματι· θέτοντας $b_{ij} := \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ παρατηρούμε ότι

$$F = \sum_{0 \leq i,j \leq n} b_{ij}\mathsf{X}_i\mathsf{X}_j$$

με $b_{ij} = b_{ji}$ για οιουσδήποτε $i, j \in \{0, , \ldots, n\}$.)

[14]Γι' αυτόν τον λόγο ο ορισμός 3.3.2 (c) τού *υπερεπιπέδου εντός ενός* $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι συμβατός με τον προηγηθέντα ορισμό τού *προβολικού υπερεπιπέδου* (βλ. 3.1.2 (c)).

3.5.13 Λήμμα. (Διευθετημένη μορφή τετραγωνικών υπερεπιφανειών) *Ας υποθέσουμε ότι η* $\mathbf{V}_+(F) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ *είναι μια προβολική τετραγωνική υπερεπιφάνεια, όπου* χαρ$(\mathbf{k}) \neq 2$ *και το* F *ένα πολυώνυμο με συντελεστές* a_{ij} *όπως στο* (3.8), *ικανοποιούντες τη συνθήκη* (3.9). *Τότε η* $\mathbf{V}_+(F)$ *είναι προβολικώς ισοδύναμη με μια προβολική τετραγωνική υπερεπιφάνεια τής μορφής*

$$\mathbf{V}_+(c_0\mathsf{X}_0^2 + c_1\mathsf{X}_1^2 + \cdots + c_n\mathsf{X}_n^2) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}, \tag{3.10}$$

όπου $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{k}$ *(με τουλάχιστον έναν εξ αυτών* $\neq 0_{\mathbf{k}}$*).*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς θα γίνει αναγωγή τού προβλήματος (στα δύο πρώτα βήματα) στην περίπτωση κατά την οποία $a_{00} \neq 0_{\mathbf{k}}$. Εν συνεχεία θα εφαρμοσθεί η μέθοδος τής «συμπληρώσεως τού τετραγώνου» ως προς τη μεταβλητή X_0.

Βήμα 1ο. Εάν $a_{00} = 0_{\mathbf{k}}$ και εάν $\exists i \in \{1, \ldots, n\} : a_{ii} \neq 0_{\mathbf{k}}$, τότε μέσω τής προβολικής αλλαγής συντεταγμένων

$$\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}},\ [\mathsf{X}_0 : \mathsf{X}_1 : \ldots : \mathsf{X}_n] \longmapsto [\mathsf{X}_i : \mathsf{X}_1 : \ldots : \mathsf{X}_{i-1} : \mathsf{X}_0 : \mathsf{X}_{i+1} : \ldots : \mathsf{X}_n]$$

έχουμε τη δυνατότητα σχηματισμού μιας προβολικής τετραγωνικής υπερεπιφάνειας, η οποία είναι προβολικώς ισοδύναμη τής $\mathbf{V}_+(F)$ και το ορίζον πολυώνυμο τής οποίας διαθέτει μη μηδενικό συντελεστή προ τού X_0^2.

Βήμα 2ο. Εάν $a_{ii} = 0_{\mathbf{k}}, \forall i \in \{0, \ldots, n\}$, και $a_{ij} \neq 0_{\mathbf{k}}$ για κάποιους $i, j \in \{0, \ldots, n\}$, $i \neq j$, τότε (χρησιμοποιώντας και πάλι μια προβολική αλλαγή συντεταγμένων όπως η προηγηθείσα) μπορούμε δίχως βλάβη τής γενικότητας να υποθέσουμε ότι $a_{01} \neq 0_{\mathbf{k}}$. Ως εκ τούτου, μέσω τής προβολικής αλλαγής συντεταγμένων

$$\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}},\ [\mathsf{X}_0 : \mathsf{X}_1 : \mathsf{X}_2 : \ldots : \mathsf{X}_n] \longmapsto [\mathsf{X}_0 : \mathsf{X}_1 + \mathsf{X}_0 : \mathsf{X}_2 : \ldots : \mathsf{X}_n]$$

που αντιστοιχεί στον πίνακα

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & \cdots & 0_{\mathbf{k}} \\ 1_{\mathbf{k}} & 1_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & \cdots & \vdots \\ 0_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & 1_{\mathbf{k}} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0_{\mathbf{k}} \\ 0_{\mathbf{k}} & \cdots & \cdots & 0_{\mathbf{k}} & 1_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \quad \left(\text{με } \mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & \cdots & 0_{\mathbf{k}} \\ -1_{\mathbf{k}} & 1_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & \cdots & \vdots \\ 0_{\mathbf{k}} & 0_{\mathbf{k}} & 1_{\mathbf{k}} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0_{\mathbf{k}} \\ 0_{\mathbf{k}} & \cdots & \cdots & 0_{\mathbf{k}} & 1_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \right)$$

έχουμε εκ νέου τη δυνατότητα σχηματισμού μιας προβολικής τετραγωνικής υπερεπιφάνειας $\cong \mathbf{V}_+(F)$, το ορίζον πολυώνυμο τής οποίας διαθέτει μη μηδενικό συντελεστή προ τού X_0^2.

Βήμα 3ο. Εκ των προαναφερθέντων είναι πρόδηλο ότι δεν θίγεται η γενικότητα εάν υποθέσουμε ότι ο συντελεστής a_{00} στο θεωρούμενο πολυώνυμο F είναι $\neq 0_{\mathbf{k}}$. Παρατηρούμε ότι

$$F(\mathsf{X}_0, \mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n) = a_{00}\mathsf{X}_0^2 + \mathsf{X}_0 G(\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \ldots, \mathsf{X}_n) + H(\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \ldots, \mathsf{X}_n)$$

όπου

$$G(\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \ldots, \mathsf{X}_n) := 2\sum_{i=1}^{n} a_{0i}\mathsf{X}_i, \quad H(\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \ldots, \mathsf{X}_n) := \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}\mathsf{X}_i\mathsf{X}_j,$$

οπότε

$$\begin{aligned} F(\mathsf{X}_0, \mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n) &= a_{00}^{-1}\left(a_{00}\mathsf{X}_0 + \tfrac{1}{2}G(\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \ldots, \mathsf{X}_n)\right)^2 + \Xi(\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \ldots, \mathsf{X}_n) \\ &= a_{00}\left(\mathsf{X}_0 + \sum_{i=1}^{n} a_{00}^{-1}a_{0i}\mathsf{X}_i\right)^2 + \Xi(\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \ldots, \mathsf{X}_n) \end{aligned}$$

όπου

$$\Xi(\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \ldots, \mathsf{X}_n) := H(\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \ldots, \mathsf{X}_n) - \tfrac{1}{4}a_{00}^{-1}G(\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \ldots, \mathsf{X}_n)^2.$$

Ύστερα από την εκτέλεση τής προβολικής αλλαγής συντεταγμένων

$$\Psi_{\mathcal{A}} : \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}, \ [\mathsf{X}_0 : \mathsf{X}_1 : \ldots : \mathsf{X}_n] \longmapsto [\mathsf{X}_0 - \sum_{i=1}^{n} a_{00}^{-1}a_{0i}\mathsf{X}_i : \mathsf{X}_1 : \mathsf{X}_2 : \ldots : \mathsf{X}_n]$$

που αντιστοιχεί στον πίνακα

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1_{\mathbf{k}} & -a_{00}^{-1}a_{01} & \cdots & -a_{00}^{-1}a_{0n} \\ 0_{\mathbf{k}} & 1_{\mathbf{k}} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0_{\mathbf{k}} \\ 0_{\mathbf{k}} & \cdots & 0_{\mathbf{k}} & 1_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \quad \left(\text{με } \mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1_{\mathbf{k}} & a_{00}^{-1}a_{01} & \cdots & a_{00}^{-1}a_{0n} \\ 0_{\mathbf{k}} & 1_{\mathbf{k}} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0_{\mathbf{k}} \\ 0_{\mathbf{k}} & \cdots & 0_{\mathbf{k}} & 1_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \right)$$

λαμβάνουμε

$$\Psi_{\mathcal{A}}(\mathbf{V}_+(F)) = \mathbf{V}_+(a_{00}\mathsf{X}_0^2 + \Xi(\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \ldots, \mathsf{X}_n)).$$

Βήμα 4ο. Εάν $\Xi = 0$, τότε σταματούμε· ειδάλλως επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1-3 για το Ξ (αντί τού F). Έπειτα από το πολύ n επαναλήψεις αυτής τής διαδικασίας καταλήγουμε στην επαλήθευση τού αρχικού ισχυρισμού. □

3.5.14 Σημείωση. (a) Ορισμένοι εκ των συντελεστών $c_0, c_1, \ldots, c_n$ τής προβολικής τετραγωνικής υπερεπιφάνειας (3.10) ενδέχεται να είναι μηδενικοί. Γράφοντας (εν ανάγκη ύστερα από αναδιάταξη των δεικτών των συντελεστών και των μεταβλητών) το ορίζον πολυώνυμο τής (3.10) ως

$$c_0\mathsf{X}_0^2 + c_1\mathsf{X}_1^2 + \cdots + c_\nu\mathsf{X}_\nu^2 = 0, \quad c_i \begin{cases} \neq 0_{\mathbf{k}} & \forall i \in \{0, \ldots, \nu\}, \\ = 0_{\mathbf{k}} & \forall i \in \{\nu+1, \ldots, n\}, \end{cases} \tag{3.11}$$

για κάποιον ν, $0 \leq \nu \leq n$, λέμε ότι η (3.10) (ή οιαδήποτε προβολική τετραγωνική υπερεπιφάνεια που είναι προβολικώς ισοδύναμή της) **έχει βαθμίδα** $\nu+1$. (Το επόμενο λήμμα δείχνει ότι η βαθμίδα είναι «καλώς ορισμένη».)
(b) Η συνθήκη (3.9) σημαίνει ότι ο πίνακας $\mathcal{Q}_F := (a_{ij})_{0\leq i,j\leq n}$ είναι συμμετρικός και ότι

$$F(\mathsf{X}_0,\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n) = (\mathsf{X}_0,\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n)\mathcal{Q}_F(\mathsf{X}_0,\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n)^{\mathsf{T}}.$$

3.5.15 Λήμμα. (Ερμηνεία τής έννοιας τής βαθμίδας) *Έστω* $\mathbf{V}_+(F) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ *μια προβολική τετραγωνική υπερεπιφάνεια, όπου* χαρ$(\mathbf{k}) \neq 2$ *και το* F *ένα πολυώνυμο με συντελεστές* a_{ij} *όπως στο* (3.8), *ικανοποιούντες τη συνθήκη* (3.9). *Τότε ισχύουν τα εξής*:
(a) *Για κάθε* $\mathcal{A} \in \mathrm{GL}(n+1,\mathbf{k})$,

$$\Psi_{\mathcal{A}}(\mathbf{V}_+(F)) = \mathbf{V}_+(G),$$

όπου

$$G := (\mathsf{X}_0,\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n)(\mathcal{A}^{-1})^{\mathsf{T}}\mathcal{Q}_F\mathcal{A}^{-1}(\mathsf{X}_0,\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n)^{\mathsf{T}}.$$

(b) *Η βαθμίδα τής* $\mathbf{V}_+(F)$ *ισούται με τη βαθμίδα τού πίνακα* $\mathcal{Q}_F$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a) Σύμφωνα με όσα έχουν αναφερθεί στην απόδειξη τού λήμματος 3.5.3, $\Psi_{\mathcal{A}}(\mathbf{V}_+(F)) = \mathbf{V}_+(G)$, όπου

$$G(\mathsf{X}_0,\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n) = F(\mathcal{A}^{-1}(\mathsf{X}_0,\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n)^{\mathsf{T}})$$

$$= \left(\mathcal{A}^{-1}(\mathsf{X}_0,\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n)^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}}\mathcal{Q}_F\mathcal{A}^{-1}(\mathsf{X}_0,\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n)^{\mathsf{T}}$$

$$= (\mathsf{X}_0,\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n)(\mathcal{A}^{-1})^{\mathsf{T}}\mathcal{Q}_F\mathcal{A}^{-1}(\mathsf{X}_0,\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n)^{\mathsf{T}}.$$

(b) Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι οι $\mathcal{Q}_F$ και $(\mathcal{A}^{-1})^{\mathsf{T}}\mathcal{Q}_F\mathcal{A}^{-1}$ έχουν ίσες βαθμίδες. (Τούτο έγκειται στο ότι ο εκ δεξιών ή εξ αριστερών πολλαπλασιασμός ενός πίνακα με έναν αντιστρέψιμο πίνακα δεν επηρεάζει τη βαθμίδα[15].) Εάν ο $\mathcal{A} \in \mathrm{GL}(n+1,\mathbf{k})$ είναι εκείνος ο πίνακας, για τον οποίο ισχύει $\Psi_{\mathcal{A}}(\mathbf{V}_+(F)) = \mathbf{V}_+(G)$, όπου

$$G = c_0\mathsf{X}_0^2 + c_1\mathsf{X}_1^2 + \cdots + c_\nu\mathsf{X}_\nu^2$$

όπως στην (3.11), τότε, σύμφωνα με το (a),

$$(\mathcal{A}^{-1})^{\mathsf{T}}\mathcal{Q}_F\mathcal{A}^{-1} = \mathrm{diag}(c_0,c_1,\ldots,c_\nu,\underbrace{0_{\mathbf{k}},\ldots,0_{\mathbf{k}}}_{n-\nu \text{ φορές}}),$$

οπότε $\nu+1 = \mathrm{rank}(\mathcal{Q}_F)$. □

[15]Βλ. π.χ. S.H Friedberg, A.J. Insel & L.E. Spence: *Linear Algebra*, Third Ed., Prentice Hall, 1997, Thm. 3.3, pp. 143-144, ή Σ. Ανδρεαδάκη: *Γραμμική Άλγεβρα*, Αθήνα, 1981, πρόταση 4.3.12, σελ. 119-121.

3.5.16 Θεώρημα. (Ταξινόμηση τετραγωνικών υπερεπιφανειών για k αλγ. κλειστό) *Εάν το* $\mathbf{k}$ *είναι ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα χαρακτηριστικής* $\neq 2$, *τότε ισχύουν τα εξής:*

(a) *Κάθε προβολική τετραγωνική υπερεπιφάνεια* $\mathbf{V}_+(F) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ *βαθμίδας* $\nu+1$ *είναι προβολικώς ισοδύναμη με την*

$$\mathbf{V}_+(\mathsf{X}_0^2+\mathsf{X}_1^2+\cdots+\mathsf{X}_\nu^2) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}. \tag{3.12}$$

(b) *Δυο προβολικές τετραγωνικές υπερεπιφάνειες* $\mathbf{V}_+(F_1), \mathbf{V}_+(F_2) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ *είναι προβολικώς ισοδύναμες εάν και μόνον εάν*

$$\operatorname{rank}(\mathcal{Q}_{F_1}) = \operatorname{rank}(\mathcal{Q}_{F_2}).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a) Κατά το λήμμα 3.5.13 και το (a) τής σημειώσεως 3.5.14 η $\mathbf{V}_+(F)$ είναι προβολικώς ισοδύναμη με μια προβολική τετραγωνική υπερεπιφάνεια τής μορφής

$$\mathbf{V}_+(c_0\mathsf{X}_0^2+c_1\mathsf{X}_1^2+\cdots+c_\nu\mathsf{X}_\nu^2) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}.$$

Επειδή το $\mathbf{k}$ είναι αλγεβρικώς κλειστό, η εξίσωση $\mathsf{X}^2 - c_i = 0$ για $i \in \{0,\ldots,\nu\}$ διαθέτει δύο σημεία μηδενισμού (εν προκειμένω, μια τετραγωνική ρίζα $\neq 0_{\mathbf{k}}$, συμβολιζόμενη ως $\sqrt{c_i}$, μαζί και την αντίθετή της $-\sqrt{c_i}$) *εντός τού* $\mathbf{k}$. Χρησιμοποιώντας τήν προβολική αλλαγή συντεταγμένων $\Psi_{\mathcal{A}}$ που αντιστοιχεί στον πίνακα

$$\mathcal{A} = \operatorname{diag}(\sqrt{c_0},\ldots,\sqrt{c_\nu},\underbrace{0_{\mathbf{k}},\ldots,0_{\mathbf{k}}}_{n-\nu\ \text{φορές}})$$

$$\left(\text{με } \mathcal{A}^{-1} = \operatorname{diag}((\sqrt{c_0})^{-1},\ldots,(\sqrt{c_\nu})^{-1},\underbrace{0_{\mathbf{k}},\ldots,0_{\mathbf{k}}}_{n-\nu\ \text{φορές}})\right)$$

λαμβάνουμε

$$\Psi_{\mathcal{A}}(\mathbf{V}_+(c_0\mathsf{X}_0^2+c_1\mathsf{X}_1^2+\cdots+c_\nu\mathsf{X}_\nu^2)) = \mathbf{V}_+(\mathsf{X}_0^2+\mathsf{X}_1^2+\cdots+\mathsf{X}_\nu^2).$$

(b) Οι $\mathbf{V}_+(F_1), \mathbf{V}_+(F_2)$ είναι προβολικώς ισοδύναμες εάν και μόνον εάν

$$\exists \mathcal{A} \in \mathbf{GL}\,(n+1,\mathbf{k}) : \Psi_{\mathcal{A}}(\mathbf{V}_+(F_1)) = \mathbf{V}_+(F_2). \tag{3.13}$$

Εάν ισχύει η (3.13), τότε

$$\operatorname{rank}(\mathcal{Q}_{F_2}) = \operatorname{rank}((\mathcal{A}^{-1})^{\mathsf{T}}\mathcal{Q}_{F_1}\mathcal{A}^{-1}) = \operatorname{rank}(\mathcal{Q}_{F_1}).$$

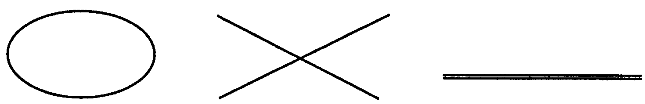
Και αντιστρόφως· εάν

$$\operatorname{rank}(\mathcal{Q}_{F_1}) = \operatorname{rank}(\mathcal{Q}_{F_2}),$$

τότε αμφότερες οι $\mathbf{V}_+(F_1), \mathbf{V}_+(F_2)$ είναι προβολικώς ισοδύναμες με την (3.12), οπότε και η (3.13) είναι αληθής (διότι η «προβολική ισοδυναμία» αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας). $\square$

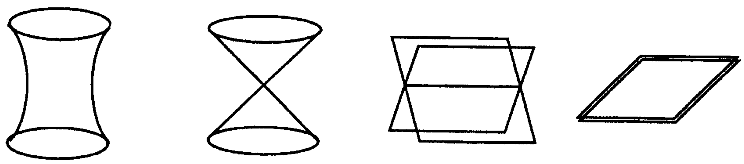
3.5.17 Παραδείγματα. Στο σχήμα **13** καταχωρίζονται συμβολικές εικονογραφήσεις (τού πραγματικού μέρους) όλων των προβολικών τετραγωνικών υπερεπιφανειών εντός των χώρων $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ και $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$.

Στο $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$:



ανάγωγη κωνική τομή (βαθμίδας 3) | ζεύγος ευθειών (βαθμίδας 2) | διπλή ευθεία (βαθμίδας 1)

Στο $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$:



ανάγωγη κωνική τομή (βαθμίδας 4) | (διπλός) κώνος (βαθμίδας 3) | ζεύγος επιπέδων (βαθμίδας 2) | διπλό επίπεδο (βαθμίδας 1)

Σχήμα 13

3.5.18 Σημείωση. Όταν το σώμα $\mathbf{k}$ δεν είναι αλγεβρικώς κλειστό, η βαθμίδα δεν αρκεί για την πλήρη ταξινόμηση των προβολικών τετραγωνικών υπερεπιφανειών. Επί παραδείγματι, όταν $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, $n = 2$, αμφότερες οι $\mathbf{V}_+(\mathsf{X}_0^2 + \mathsf{X}_1^2 + \mathsf{X}_2^2)$ και $\mathbf{V}_+(\mathsf{X}_0^2 + \mathsf{X}_1^2 - \mathsf{X}_2^2)$ έχουν βαθμίδα 3, χωρίς να είναι προβολικώς ισοδύναμες (καθότι η πρώτη είναι κενή και η δεύτερη μη κενή). Ωστόσο, η περίπτωση όπου $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ μπορεί να μελετηθεί με τη βοήθεια γνωστών αποτελεσμάτων τής Γραμμικής Άλγεβρας (βλ. άσκηση **Α-3-26**).

Ασκήσεις

Α-3-21. Να αποδειχθεί το λήμμα 3.5.1.

Α-3-22. Να αποδειχθεί το πόρισμα 3.5.8.

Α-3-23. Εάν το $\{P_1, P_2, P_3\}, \{Q_1, Q_2, Q_3\}$ είναι ένα ζεύγος τριάδων διακεκριμένων σημείων τού $\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει μια μονοσημάντως ορισμένη προβολική αλλαγή συντεταγμένων $\Psi_{\mathcal{A}}$, για την οποία ισχύει $\Psi_{\mathcal{A}}(P_i) = Q_i, \forall i \in \{1, 2, 3\}$.

Α-3-24. Ένα σύνολο $\varnothing \neq V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ καλείται **γραμμική υποποικιλότητα τού** $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ όταν

$$V = \mathbf{V}_+(F_1, \ldots, F_\kappa),$$

για κάποια *πρωτοβάθμια* ομογενή πολυώνυμα $F_1, \ldots, F_\kappa \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$. Για οιαδήποτε γραμμική υποποικιλότητα V τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(a) Εάν η $\Psi_{\mathcal{A}} : \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι μια προβολική αλλαγή συντεταγμένων τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, τότε το $\Psi_{\mathcal{A}}(V)$ είναι μια γραμμική υποποικιλότητα τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$.

(b) Υπάρχει μια προβολική αλλαγή συντεταγμένων $\Psi_{\mathcal{A}}$ τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ και

$$\exists m \in \mathbb{N}_0 : \Psi_{\mathcal{A}}(V) = \mathbf{V}_+(\mathsf{X}_{m+1}, \ldots, \mathsf{X}_n) \cong \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}.$$

(c) Ο μη αρνητικός ακέραιος αριθμός m ο εμφανιζόμενος στο (b) είναι ανεξάρτητος τής επιλογής τής προβολικής αλλαγής συντεταγμένων $\Psi_{\mathcal{A}}$. (Ο εν λόγω m καλείται **διάσταση** τής γραμμικής υποποικιλότητας V.)

Α-3-25. Κάθε γραμμική μονοδιάστατη υποποικιλότητα ενός $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, $n \geq 1$, καλείται (προβολική) **ευθεία** (*εντός τού* $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$). [Τούτος ο ορισμός είναι συμβατός με τον προηγηθέντα 3.1.2 (c).] Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(a) Για δυο σημεία $P = [a_0 : \ldots : a_n]$, $Q = [b_0 : \ldots : b_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, όπου $P \neq Q$, το σύνολο

$$\mathbb{L}(P, Q) := \{[\lambda a_0 + \mu b_0 : \ldots : \lambda a_n + \mu b_n] \mid \lambda, \mu \in \mathbf{k}\ ,\ (\lambda, \mu) \neq (0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}})\}$$

αποτελεί τη μοναδική ευθεία εντός τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ που διέρχεται από αυτά. (Ως εκ τούτου, λέμε ότι το $\mathbb{L}(P, Q)$ είναι **η ευθεία η διερχόμενη από τα** P **και** Q.)

(b) Εάν η $\Psi_{\mathcal{A}} : \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι μια προβολική αλλαγή συντεταγμένων τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, τότε

$$\Psi_{\mathcal{A}}(\mathbb{L}(P, Q)) = \mathbb{L}(\Psi_{\mathcal{A}}(P), \Psi_{\mathcal{A}}(Q)).$$

(c) Εάν οι

$$\mathbb{L}_{\alpha,\beta,\gamma} = \mathbf{V}_+(\alpha\mathsf{X}_0 + \beta\mathsf{X}_1 + \gamma\mathsf{X}_2),\ \ \mathbb{L}_{\alpha',\beta',\gamma'} = \mathbf{V}_+(\alpha'\mathsf{X}_0 + \beta'\mathsf{X}_1 + \gamma'\mathsf{X}_2)$$

είναι δυο ευθείες εντός τού $\mathbb{P}^2_{\mathbf{k}}$, τότε

$$\mathbb{L}_{\alpha,\beta,\gamma} = \mathbb{L}_{\alpha',\beta',\gamma'} \Longleftrightarrow [\alpha : \beta : \gamma] = [\alpha' : \beta' : \gamma']$$

και

$$\mathbb{L}_{\alpha,\beta,\gamma} \neq \mathbb{L}_{\alpha',\beta',\gamma'} \Rightarrow \mathbb{L}_{\alpha,\beta,\gamma} \cap \mathbb{L}_{\alpha',\beta',\gamma'} = \left\{ \left[\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta' & \gamma' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \gamma' & \alpha' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \right] \right\}.$$

(Δηλαδή δυο οιεσδήποτε μη ταυτιζόμενες ευθείες τέμνονται σε ακριβώς ένα σημείο: Πρόκειται για τη γνωστή «κατάργηση» τού «5ου Ευκλειδείου Αιτήματος» στο προβολικό επίπεδο $\mathbb{P}^2_{\mathbf{k}}$.)

(d) Κάθε ευθεία $\mathbb{L}_{\alpha,\beta,\gamma}$ εντός τού $\mathbb{P}^2_{\mathbf{k}}$ μπορεί να απεικονισθεί μέσω μιας προβολικής αλλαγής συντεταγμένων επί τής επ' άπειρον ευθείας $\mathbb{H}^{\infty}_i = \left\{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbf{k}} \,|\, a_i = 0_{\mathbf{k}}\right\}$ για οιονδήποτε $i \in \{0, 1, 2\}$.

(e) Εάν δοθούν δύο σύνολα $\{P_1, P_2, P_3\}, \{Q_1, Q_2, Q_3\}$ τριάδων διακεκριμένων μη συνευθειακών σημείων τού $\mathbb{P}^2_{\mathbf{k}}$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει μια μονοσημάντως ορισμένη προβολική αλλαγή συντεταγμένων $\Psi_{\mathcal{A}}$, για την οποία ισχύει $\Psi_{\mathcal{A}}(P_i) = Q_i, \forall i \in \{1, 2, 3\}$.

(f) Εάν δοθούν δύο σύνολα $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}, \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ τετράδων διακεκριμένων σημείων τού $\mathbb{P}^2_{\mathbf{k}}$, ούτως ώστε να μην υπάρχουν τρία σημεία κείμενα επ' ευθείας σε κανένα εκ των δύο συνόλων, να αποδειχθεί ότι υπάρχει μια μονοσημάντως ορισμένη προβολική αλλαγή συντεταγμένων $\Psi_{\mathcal{A}}$, για την οποία ισχύει $\Psi_{\mathcal{A}}(P_i) = Q_i, \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Α-3-26. *Ταξινόμηση προβολικών τετραγωνικών υπερεπιφανειών εντός τού* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$. Να αποδειχθούν τα εξής:

(a) Κάθε προβολική τετραγωνική υπερεπιφάνεια $\mathbf{V}_+(F) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ βαθμίδας $\nu + 1$ ($\nu =: \nu_F$) είναι προβολικώς ισοδύναμη (μέσω μιας προβολικής αλλαγής συντεταγμένων $\Psi_{\mathcal{A}}$) με την

$$\mathbf{V}_+(\mathsf{X}_0^2 + \mathsf{X}_1^2 + \cdots + \mathsf{X}_\kappa^2 - \mathsf{X}_{\kappa+1}^2 - \cdots - \mathsf{X}_{\nu+\kappa}^2) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$$

όπου $0 \leq \nu + \kappa \leq n$ και $\kappa =: \kappa_F$ κατάλληλος ακέραιος ≥ -1. (*Υπόδειξη*: Να θεωρηθεί ως $\mathcal{A}$ ο πίνακας για τον οποίο ισχύει

$$(\mathcal{A}^{-1})^{\intercal}\, \mathcal{Q}_F \mathcal{A}^{-1} = \mathrm{diag}(c_0, c_1, \ldots, c_\nu, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-\nu \text{ φορές}})$$

όπως στην απόδειξη τού (b) τού λήμματος 3.5.15, καθώς και η τετραγωνική μορφή

$$\mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R},\ (\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n) \longmapsto (\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n)(\mathcal{A}^{-1})^{\intercal}\, \mathcal{Q}_F \mathcal{A}^{-1} (\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n)^{\intercal}.$$

Γράφοντας -εν ανάγκη ύστερα από αναδιάταξη των δεικτών των συντελεστών και των μεταβλητών- το ορίζον πολυώνυμο (3.11) κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να ισχύει

$$c_i \begin{cases} > 0 & \forall i \in \{0, \ldots, \kappa\}, \\ < 0, & \forall i \in \{\kappa + 1, \ldots, \nu\}, \\ = 0, & \forall i \in \{\nu + 1, \ldots, n\}, \end{cases}$$

να εφαρμοσθεί το *θεώρημα αδρανείας τού Sylvester*[16] για την εν λόγω τετραγωνική μορφή προκειμένου να προσδιορισθεί μια νέα βάση τού $\mathbb{R}^{n+1}$, ούτως ώστε ο πίνακας $\mathcal{B}$ ο αντιστοιχών σε αυτή να πληροί τη σχέση

$$(\mathcal{B}^{-1})^{\intercal}((\mathcal{A}^{-1})^{\intercal}\mathcal{Q}_F\mathcal{A}^{-1})\mathcal{B}^{-1} = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{\kappa+1 \text{ φορές}},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{\nu-\kappa \text{ φορές}},\underbrace{0,\ldots,0}_{n-\nu \text{ φορές}}).$$

Ο $\kappa+1$ είναι ο αριθμός των θετικώς προσημασμένων μονάδων.)

(b) Δυο προβολικές τετραγωνικές υπερεπιφάνειες $\mathbf{V}_+(F_1), \mathbf{V}_+(F_2) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ είναι προβολικώς ισοδύναμες εάν και μόνον εάν

$$\nu_{F_1} = \nu_{F_2} \text{ και } \kappa_{F_1} = \kappa_{F_2}.$$

(c) Για $n=2$ και $n=3$ η προκύπτουσα ταξινόμηση είναι αυτή που έχει καταχωρισθεί στους κάτωθι καταλόγους:

Α/Α	**Εξίσωση**	**Υπερεπιφάνεια**	$\lvert\mathrm{sgn}\rvert$	**Βαθμίδα** $\nu+1$
(1)	$\mathsf{X}_0^2=0$	διπλή ευθεία	1	1
(2)	$\mathsf{X}_0^2-\mathsf{X}_1^2=0$	ζεύγος ευθειών	0	2
(3)	$\mathsf{X}_0^2+\mathsf{X}_1^2=0$	διπλό σημείο	2	2
(4)	$\mathsf{X}_0^2+\mathsf{X}_1^2-\mathsf{X}_2^2=0$	ανάγωγη κωνική τομή	1	3
(5)	$\mathsf{X}_0^2+\mathsf{X}_1^2+\mathsf{X}_2^2=0$	$\varnothing$	3	3

Ταξινόμηση για $n=2$.

Α/Α	**Εξίσωση**	**Υπερεπιφάνεια**	$\lvert\mathrm{sgn}\rvert$	**Βαθμίδα** $\nu+1$
(1)	$\mathsf{X}_0^2=0$	διπλό επίπεδο	1	1
(2)	$\mathsf{X}_0^2-\mathsf{X}_1^2=0$	ζεύγος επιπέδων	0	2
(3)	$\mathsf{X}_0^2+\mathsf{X}_1^2=0$	διπλή ευθεία	2	2
(4)	$\mathsf{X}_0^2+\mathsf{X}_1^2-\mathsf{X}_2^2=0$	(διπλός) κώνος	1	3
(5)	$\mathsf{X}_0^2+\mathsf{X}_1^2+\mathsf{X}_2^2=0$	σημείο	3	3
(6)	$\mathsf{X}_0^2+\mathsf{X}_1^2-\mathsf{X}_2^2-\mathsf{X}_3^2=0$	ευθειογενής επιφάνεια	0	4
(7)	$\mathsf{X}_0^2+\mathsf{X}_1^2+\mathsf{X}_2^2-\mathsf{X}_3^2=0$	ανάγωγη κωνική τομή	2	4
(8)	$\mathsf{X}_0^2+\mathsf{X}_1^2+\mathsf{X}_2^2+\mathsf{X}_3^2=0$	$\varnothing$	4	4

Ταξινόμηση για $n=3$.

(Εν προκειμένω, $\lvert\mathrm{sgn}\rvert = \lvert 2(\kappa+1)-(\nu+1)\rvert = \lvert 2\kappa-\nu+1\rvert$.)

[16]Βλ. π.χ. S.H Friedberg, A.J. Insel & L.E. Spence: *Linear Algebra*, Third Ed., Prentice Hall, 1997, Sec. 6.7, pp. 401-405, Σ. Ανδρεαδάκη: *Γραμμική Άλγεβρα*, Αθήνα, 1981, πόρισμα 7.3.18, σελ. 257, ή Κ. Λάκκη: Γραμμική Άλγεβρα, 2η έκδοση, Θεσσαλονίκη, 1984, θεώρημα 4.5, σελ. 210.

3.6 Ομογενοποίηση και Αποομογενοποίηση

Προτού προβούμε σε συστηματική μελέτη τής διασυνδέσεως συσχετικών και προβολικών αλγεβρικών συνόλων θα παρουσιάσουμε τη διαδικασία *ομογενοποιήσεως* και *αποομογενοποιήσεως* πολυωνύμων.

3.6.1 Ορισμός. (a) Έστω $0 \neq F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$, $n \in \mathbb{N}$. Γράφοντας το F ως άθροισμα ομογενών πολυωνύμων

$$F = F_{(0)} + F_{(1)} + \cdots + F_{(d)},\ \deg(F_{(i)}) = i,\ \forall i \in \{0, \ldots, d\},\ F_{(d)} \neq 0,$$

θέτουμε[17]

$$\boxed{F^* := \mathsf{X}_0^d F_{(0)} + \mathsf{X}_0^{d-1} F_{(1)} + \cdots + \mathsf{X}_0 F_{(d-1)} + F_{(d)} \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_d}$$

και ονομάζουμε το F^* **ομογενοποίηση τού** F (ως προς τη νέα μεταβλητή X_0).
(b) Έστω $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_d$, $d \geq 0$. Το

$$\boxed{F_* := F(1_{\mathbf{k}}, \mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n) \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]}$$

καλείται **αποομογενοποίηση τού** F (ως προς τη μεταβλητή X_0).

3.6.2 Σημείωση. (a) Προφανώς, για κάθε $0 \neq F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ (όπως στο 3.6.1 (a)) έχουμε

$$F^* = \mathsf{X}_0^d F\left(\tfrac{\mathsf{X}_1}{\mathsf{X}_0}, \ldots, \tfrac{\mathsf{X}_n}{\mathsf{X}_0}\right) \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_d.$$

(b) Η κανονιστική ένριψη

$$\mathsf{j} : \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}},\ \ (a_1, \ldots, a_n) \longmapsto \mathsf{j}(a_1, \ldots, a_n) := (1_{\mathbf{k}}, a_1, \ldots, a_n),$$

επάγει έναν επιμορφισμό δακτυλίων

$$\mathsf{j}_* : \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] \longrightarrow \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n],\ \ F \longmapsto \mathsf{j}_*(F) := F(1_{\mathbf{k}}, \mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n), \quad (3.14)$$

που έχει το ιδεώδες $\langle 1_{\mathbf{k}} - \mathsf{X}_0 \rangle \subset \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ ως πυρήνα του (βλ. άσκηση **A-3-27**). Κατά συνέπειαν, μέσω τού 1ου θεωρήματος ισομορφισμών δακτυλίων 1.1.10 δημιουργείται ο ισομορφισμός

$$\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] / \langle 1_{\mathbf{k}} - \mathsf{X}_0 \rangle \cong \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n].$$

[17] Επίσης, ακόμη και όταν $F = 0_{\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]}$, ορίζουμε ως F^* το $0_{\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_d}$.

Επιπροσθέτως, εφοδιάζοντας τους δακτυλίους $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n]$ και $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0,\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n]$ με τη συνήθη βαθμολόγηση 3.2.3 (a) διαπιστώνουμε ότι

$$\left(\mathbf{k}[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_n]_d+\langle 1_{\mathbf{k}}-\mathsf{X}_0\rangle\right)/\langle 1_{\mathbf{k}}-\mathsf{X}_0\rangle \subseteq \left(\mathbf{k}[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_n]_{d+1}+\langle 1_{\mathbf{k}}-\mathsf{X}_0\rangle\right)/\langle 1_{\mathbf{k}}-\mathsf{X}_0\rangle$$

για κάθε $d\geq 0$ και

$$\begin{aligned}\bigcup_{d\geq 0}\left(\mathbf{k}[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_n]_d+\langle 1_{\mathbf{k}}-\mathsf{X}_0\rangle\right)/\langle 1_{\mathbf{k}}-\mathsf{X}_0\rangle &= \mathbf{k}[\mathsf{X}_0,\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n]/\langle 1_{\mathbf{k}}-\mathsf{X}_0\rangle\\ &\cong \mathbf{k}[\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n].\end{aligned}$$

3.6.3 Πρόταση. (a) *Εάν τα $F,G\in\mathbf{k}[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_n]$ είναι δυο ομογενή πολυώνυμα, τότε*

$$(F+G)_*=F_*+G_*,\quad (FG)_*=F_*G_*.$$

(b) *Εάν $F\in\mathbf{k}[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_n]_d$, $d\geq 0$, και $\nu:=\max\{i\in\mathbb{N}_0:\mathsf{X}_0^i\mid F\}$, τότε*

$$\mathsf{X}_0^{\nu}(F_*)^*=F.$$

(c) *Για κάθε $F\in\mathbf{k}[\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n]$ ισχύει η ισότητα $(F^*)_*=F$.*

(d) *Για οιαδήποτε $F,G\in\mathbf{k}[\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n]$ ισχύει η ισότητα*

$$\mathsf{X}_0^{\deg(F)+\deg(G)-\deg(F+G)}(F+G)^*=\mathsf{X}_0^{\deg(G)}F^*+\mathsf{X}_0^{\deg(F)}G^*,$$

όπου $\deg(F),\deg(G),\deg(F+G)$ οι συνολικοί βαθμοί των F,G και $F+G$, αντιστοίχως.

(e) *Για οιαδήποτε $F,G\in\mathbf{k}[\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n]$ ισχύει η ισότητα $(FG)^*=F^*G^*$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a) Προφανώς,

$$(F+G)_*=(F+G)(1_{\mathbf{k}},\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n)=F(1_{\mathbf{k}},\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n)+G(1_{\mathbf{k}},\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n)=F_*+G_*$$

και

$$(FG)_*=(F\cdot G)(1_{\mathbf{k}},\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n)=F(1_{\mathbf{k}},\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n)G(1_{\mathbf{k}},\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n)=F_*G_*.$$

(b) Εάν $F=0$, τότε ο ισχυρισμός είναι προφανώς αληθής. Έστω ότι $F\neq 0$. Εξ υποθέσεως, $F=\mathsf{X}_0^{\nu}H$, για κάποιο πολυώνυμο $0\neq H\in\mathbf{k}[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_n]_{d-\nu}$ (πρβλ. άσκηση **A-1-1**), και $F_*=H_*$ (βάσει τού (a)). Επειδή[18] $H_*\neq 0$, γράφοντας το H_* (κατά μονοσήμαντο τρόπο) ως άθροισμα

$$H_*=\Xi_{(0)}+\Xi_{(1)}+\cdots+\Xi_{(d-\nu)}\ (=F_*)$$

[18] Εάν είχαμε $H_*=0$, τότε θα υπήρχε ένα $G\in\mathbf{k}[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_n]$, τέτοιο ώστε να ισχύει η ισότητα $H=G\cdot(\mathsf{X}_0-1)$. Επειδή το X_0-1 δεν είναι ομογενές, το H θα όφειλε να είναι ωσαύτως μη ομογενές (βλ. το (b) τής ασκήσεως **A-1-1**), πράγμα άτοπο!

πολυωνύμων $\Xi_{(i)} \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_i$, $i \in \{0, \ldots, d-\nu\}$, και υποθέτοντας (δίχως βλάβη τής γενικότητας) ότι τουλάχιστον ένα εξ αυτών είναι μη μηδενικό, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \mathsf{X}_0^\nu (F_*)^* &= \mathsf{X}_0^\nu (H_*)^* = \mathsf{X}_0^\nu H(1_{\mathbf{k}}, \mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n)^* \\ &= \mathsf{X}_0^\nu \left(\Xi_{(0)} + \Xi_{(1)} + \cdots + \Xi_{(d-\nu)}\right)^* \\ &= \mathsf{X}_0^\nu \left(\mathsf{X}_0^{d-\nu}\Xi_{(0)} + \mathsf{X}_0^{d-\nu-1}\Xi_{(1)} + \cdots + \Xi_{(d-\nu)}\right) \\ &= \mathsf{X}_0^d \Xi_{(0)} + \mathsf{X}_0^{d-1}\Xi_{(1)} + \cdots + \mathsf{X}_0^\nu \Xi_{(d-\nu)} = F. \end{aligned}$$

(c) Εάν $F = 0$, τότε ο ισχυρισμός είναι προφανώς αληθής. Έστω ότι $F \neq 0$. Γράφοντας το F ως άθροισμα ομογενών πολυωνύμων

$$F = F_{(0)} + F_{(1)} + \cdots + F_{(d)},\ \deg(F_{(i)}) = i,\ \forall i \in \{0, \ldots, d\},\ F_{(d)} \neq 0,$$

έχουμε εξ ορισμού

$$\begin{aligned} (F^*)_* &= (\mathsf{X}_0^d F_{(0)} + \mathsf{X}_0^{d-1} F_{(1)} + \cdots + \mathsf{X}_0 F_{(d-1)} + F_{(d)})_* \\ &= F_{(0)} + F_{(1)} + \cdots + F_{(d)} = F. \end{aligned}$$

(d) Εάν κάποιο εκ των $F, G, F+G$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, τότε η ανωτέρω ισότητα είναι προφανής. Ειδάλλως, κατά το (a) τής σημειώσεως 3.6.2,

$$\begin{aligned} \mathsf{X}_0^{\deg(G)} F^* + \mathsf{X}_0^{\deg(F)} G^* &= \mathsf{X}_0^{\deg(F)+\deg(G)} F\left(\tfrac{\mathsf{X}_1}{\mathsf{X}_0}, .., \tfrac{\mathsf{X}_n}{\mathsf{X}_0}\right) + \mathsf{X}_0^{\deg(F)+\deg(G)} G\left(\tfrac{\mathsf{X}_1}{\mathsf{X}_0}, .., \tfrac{\mathsf{X}_n}{\mathsf{X}_0}\right) \\ &= \mathsf{X}_0^{\deg(F)+\deg(G)} (F+G)\left(\tfrac{\mathsf{X}_1}{\mathsf{X}_0}, \ldots, \tfrac{\mathsf{X}_n}{\mathsf{X}_0}\right). \end{aligned}$$

Επειδή

$$(F+G)\left(\tfrac{\mathsf{X}_1}{\mathsf{X}_0}, \ldots, \tfrac{\mathsf{X}_n}{\mathsf{X}_0}\right) = \mathsf{X}_0^{-\deg(F+G)} (F+G)^*,$$

η ανωτέρω ισότητα είναι (και σε αυτήν την περίπτωση) αληθής.

(e) Εάν κάποιο εκ των F, G είναι το μηδενικό πολυώνυμο, τότε ο ισχυρισμός είναι προφανώς αληθής· ειδάλλως,

$$F^* = \mathsf{X}_0^{\deg(F)} F\left(\tfrac{\mathsf{X}_1}{\mathsf{X}_0}, \ldots, \tfrac{\mathsf{X}_n}{\mathsf{X}_0}\right),\ G^* = \mathsf{X}_0^{\deg(G)} G\left(\tfrac{\mathsf{X}_1}{\mathsf{X}_0}, \ldots, \tfrac{\mathsf{X}_n}{\mathsf{X}_0}\right)$$

και

$$(FG)^* = \mathsf{X}_0^{\deg(FG)} FG\left(\tfrac{\mathsf{X}_1}{\mathsf{X}_0}, \ldots, \tfrac{\mathsf{X}_n}{\mathsf{X}_0}\right).$$

Επειδή $\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G)$, έχουμε $(FG)^* = F^* G^*$. □

3.6.4 Πόρισμα. *Εάν κανείς εξαιρέσει τον πολλαπλασιασμό με δυνάμεις τού X_0, η παραγοντοποίηση ενός ομογενούς πολυωνύμου $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ είναι αυτή τής αποομογενοποιήσεώς του F_*. Ιδιαιτέρως, εάν το $\mathbf{k}$ είναι αλγεβρικώς κλειστό σώμα, τότε κάθε ομογενές πολυώνυμο $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}, \mathsf{Y}]$ με $\deg(F_*) \geq 1$ γράφεται ως γινόμενο πρωτοβαθμίων ομογενών πολυωνύμων.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η επαλήθευση τού πρώτου ισχυρισμού γίνεται κατόπιν χρήσεως των (a) και (b) τής προτάσεως 3.6.3. Όσον αφορά στον δεύτερο, αρκεί να θεωρήσουμε τον μη αρνητικό ακέραιο $\nu := \max\{i \in \mathbb{N}_0 : \mathsf{X}^i \mid F\}$ και να λάβουμε υπ' όψιν ότι το F_* γράφεται υπό τη μορφή

$$F_*(\mathsf{Y}) = \mu \prod_{i=1}^{\kappa} (\mathsf{Y} - \lambda_i)^{m_i},$$

όπου $\mu \in \mathbf{k}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_\kappa \in \mathbf{k}$ τα σαφώς διακεκριμένα σημεία μηδενισμού τού $F_*(\mathsf{Y})$ και $m_i = \mathrm{mult}_{\lambda_i}(F_*)$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, \kappa\}$ (αφού το $\mathbf{k}$ υπετέθη αλγεβρικώς κλειστό). Προφανώς, $F = \mu\, \mathsf{X}^\nu \prod_{i=1}^{\kappa} (\mathsf{Y} - \lambda_i \mathsf{X})^{m_i}$. □

3.6.5 Ορισμός. (a) Εάν το I είναι ένα ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$, τότε ορίζουμε ως **ομογενοποίησή του** (ως προς τη μεταβλητή X_0) το ιδεώδες

$$\boxed{I^* := \langle \{ F^* \mid F \in I \} \rangle \subseteq \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]\,.}$$

(b) Εάν το I είναι ένα ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, τότε ονομάζουμε **αποομογενοποίησή του** (ως προς τη μεταβλητή X_0) το ιδεώδες

$$\boxed{I_* := \mathrm{j}_*(I) \subseteq \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]\,,}$$

όπου j_* ο επιμορφισμός δακτυλίων ο ορισθείς στο 3.6.2 (b).

3.6.6 Πρόταση. *Εάν το I είναι ένα ιδεώδες τού* $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$, *τότε ισχύουν τα εξής:*

(a) *Το I^*είναι ομογενές ιδεώδες τού* $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$.

(b) *Κάθε ομογενές στοιχείο τού I^*είναι τής μορφής $\mathsf{X}_0^\nu F^*$, όπου $\nu \in \mathbb{N}_0$ και $F \in I$. Επιπροσθέτως,*

$$I^* = \langle \{ G \mid G \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_d \,, \text{για κάποιον } d \geq 0 \text{ και } G_* \in I \} \rangle\,.$$

(c) *Εάν $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, τότε $F \in I^* \Rightarrow F_* \in I$. Για ομογενή F ισχύει και η αντίστροφη συνεπαγωγή.*

(d) $(I^*)_* = I$.

(e) $\mathrm{Rad}(I^*) = \mathrm{Rad}(I)^*$.

(f) $(\mathrm{Rad}(I^*))_* = \mathrm{Rad}(I)$.

(g) *Εάν το I είναι ριζικό ιδεώδες (δηλαδή $I = \mathrm{Rad}(I)$), τότε το I^* είναι ριζικό ιδεώδες τού* $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ *(δηλαδή $I^* = \mathrm{Rad}(I^*)$).*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a) Έπεται άμεσα από την ισοδυναμία (a)⇔(b) τής προτάσεως 3.2.8.

(b) Ο πρώτος ισχυρισμός είναι αληθής λόγω τού (b) τής προτάσεως 3.6.3. Εξ αυτού έπεται ότι

$$I^* \subseteq \langle \{G \mid G \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_d \,, \text{για κάποιον } d \geq 0 \text{ και } G_* \in I\} \rangle \,.$$

Και αντιστρόφως· εάν $G \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_d$, $d \geq 0$, και $G_* \in I$, τότε $G = \mathsf{X}_0^\nu F^*$, όπου $\nu \in \mathbb{N}_0$ και $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, οπότε

$$F = (F^*)_* = (\mathsf{X}_0^\nu F^*)_* = G_* \in I \Rightarrow F^* \in I^* \Rightarrow G = \mathsf{X}_0^\nu F^* \in I^*.$$

(c) Εάν $F \in I^*$, τότε $\exists \kappa \in \mathbb{N}$ και $H_1, \ldots, H_\kappa \in I$, $G_1, \ldots, G_\kappa \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, ούτως ώστε να ισχύει

$$F = \sum_{i=1}^{\kappa} G_i H_i^* \Longrightarrow F_* = \sum_{i=1}^{\kappa} G_{i*} (H_i^*)_* = \sum_{i=1}^{\kappa} G_{i*} H_i \in I.$$

(Βλ. 3.6.3 (a), (c).) Επιπροσθέτως, εάν το F είναι ομογενές και υποθέσουμε ότι $F_* \in I$, τότε θέτοντας $\nu := \max\{i \in \mathbb{N}_0 : \mathsf{X}_0^i \mid F\}$ λαμβάνουμε

$$\left.\begin{array}{r} 3.6.3\text{ (b)} \Rightarrow \mathsf{X}_0^\nu (F_*)^* = F_i \\ (F_*)^* \in I^* \end{array}\right\} \Longrightarrow F \in I^*.$$

(d) Εάν $H \in I$, τότε $H = (H^*)_* \in (I^*)_*$ (βλ. 3.6.3 (c)). Άρα $I \subseteq (I^*)_*$. Από την άλλη μεριά, κάθε στοιχείο τού $(I^*)_*$ είναι τής μορφής $\Xi = F_*$, όπου $F \in I^*$. Για οιοδήποτε στοιχείο $\Xi = F_* \in (I^*)_*$ υπάρχουν $\kappa \in \mathbb{N}$ και $H_1, \ldots, H_\kappa \in I$, $G_1, \ldots, G_\kappa \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, με

$$F = \sum_{i=1}^{\kappa} G_i H_i^* \Longrightarrow \Xi = \sum_{i=1}^{\kappa} G_{i*} (H_i^*)_* = \sum_{i=1}^{\kappa} G_{i*} H_i \in I.$$

Άρα ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός $(I^*)_* \subseteq I$.

(e) Λόγω τού (a) και τής ασκήσεως **A-3-5** αμφότερα τα $\mathrm{Rad}(I^*)$ και $\mathrm{Rad}(I)^*$ είναι ομογενή ιδεώδη. Ως εκ τούτου, αρκεί να ελεγχθούν οι εγκλεισμοί για *ομογενή στοιχεία*. Έστω τυχόν *ομογενές* στοιχείο $F \in \mathrm{Rad}(I^*)$. Τότε $\exists m \in \mathbb{N}$:

$$F^m \in I^* \overset{\text{(c)}}{\Longleftrightarrow} (F^m)_* = F_*^m \in I \Rightarrow F_* \in \mathrm{Rad}(I) \overset{\text{(c)}}{\Longleftrightarrow} F \in \mathrm{Rad}(I)^*.$$

Άρα $\mathrm{Rad}(I^*) \subseteq \mathrm{Rad}(I)^*$. Και αντιστρόφως· έστω τυχόν *ομογενές* στοιχείο $F \in \mathrm{Rad}(I)^*$. Τότε κατά το (c),

$$F_* \in \mathrm{Rad}(I) \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : (F_*)^m = (F^m)_* \in I \Rightarrow ((F^m)_*)^* \in I^*.$$

Θέτοντας λοιπόν $\nu := \max\{i \in \mathbb{N}_0 : \mathsf{X}_0^i \mid F^m\}$ λαμβάνουμε

$$\left.\begin{array}{r} ((F_*)^*)^m = ((F^m)_*)^* \in I^* \\ 3.6.3\text{ (b)} \Rightarrow \mathsf{X}_0^\nu \left((F^m)_*\right)^* = F^m \end{array}\right\} \Rightarrow F^m \in I^* \Rightarrow F \in \mathrm{Rad}(I^*).$$

(f) Εφαρμόζοντας το(d) για το ιδεώδες $\mathrm{Rad}(I)$, σε συνδυασμό με το (e), συμπεραίνουμε ότι

$$(\mathrm{Rad}(I^*))_* = (\mathrm{Rad}(I)^*)_* = \mathrm{Rad}(I).$$

(g) Τούτο έπεται άμεσα από το (e). □

3.6.7 Σημείωση. Εάν το I είναι ένα κύριο ιδεώδες τού πολυνυμικού δακτυλίου $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ παραγόμενο από το F, τότε και το I^* είναι κύριο ιδεώδες (παραγόμενο από το F^*). Εντούτοις, εάν έχουμε $I = \langle F_1, \ldots, F_\kappa \rangle$ με $\kappa \geq 2$ *δεν ισχύει πάντοτε η ισότητα* $I^* = \langle F_1^*, \ldots, F_\kappa^* \rangle$! (Βλ. ασκήσεις **A-3-31** και **A-3-32**.)

3.6.8 Πρόταση. *Εάν το I είναι ένα ομογενές ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, τότε*

$$I_* = \{G_* \mid G \in I \cap \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_d \text{, για κάποιον } d \geq 0\}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $I'_* := \{G_* \mid G \in I \cap \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_d \text{, για κάποιον } d \geq 0\}$. Προφανώς, $I'_* \subseteq I_*$. Το I'_* είναι ένα ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, διότι εάν $G_{1*}, G_{2*} \in I'_*$ και (δίχως βλάβη τής γενικότητας) $m := \deg(G_2) - \deg(G_1) \geq 0$, τότε (κατά το (a) τής προτάσεως 3.6.3)

$$G_{1*} - G_{2*} = (\mathsf{X}_0^m G_1 - G_2)_* \in I'_*,$$

ενώ εάν $H \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ και $G_* \in I'_*$, τότε (λόγω των (a) και (b) τής προτάσεως 3.6.3)

$$HG_* = (H^*)_* G_* = (H^* G)_* \in I'_*,$$

$$(\text{διότι } H^*G \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, .., \mathsf{X}_n]_{\deg(H^*)} \cdot (I \cap \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, .., \mathsf{X}_n]_{\deg(G)}) \subseteq I \cap \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, .., \mathsf{X}_n]_{\deg(H^*)+\deg(G)}).$$

Έστω τώρα τυχόν στοιχείο $F_* = \mathrm{j}_*(F)$ τού I_*, όπου $F \in I$. Επειδή το I είναι ομογενές ιδεώδες, υπάρχουν (μοναδικά) ομογενή πολυώνυμα $G_i \in I \cap \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_{d_i}$, $i \in \{1, \ldots, \kappa\}$, $\kappa \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$F = G_1 + \cdots + G_\kappa \Rightarrow F_* = G_{1*} + \cdots + G_{\kappa *}.$$

Κι επειδή $G_{i*} \in I'_*$, $\forall i \in \{1, \ldots, \kappa\}$, και το I'_* είναι ιδεώδες, έχουμε $F_* \in I'_*$. Άρα ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός $I_* \subseteq I'_*$. □

3.6.9 Πόρισμα. *Εάν το I είναι ένα ομογενές ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, τότε $I_{(\mathsf{X}_0)} \cong I_*$, μέσω τού περιορισμού τού ισομορφισμού*

$$\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_{(\mathsf{X}_0)} \ni \tfrac{F}{\mathsf{X}_0^d} \overset{\cong}{\longmapsto} F_* \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n],\ (F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_d,\ d \in \mathbb{N}_0),$$

επί τού $I_{(\mathsf{X}_0)}$, όπου $I_{(\mathsf{X}_0)}$ το αντίστοιχο ιδεώδες τής ομογενούς τοπικοποιήσεως. (Βλ. το (b) τού 3.2.12 και το (c) τής ασκήσεως **A-3-8**).

3.6.10 Πρόταση. *Εάν το I είναι ένα ομογενές ιδεώδες τού $\mathbf{k}\left[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_n\right]$, τότε $I \subseteq (I_*)^*$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω τυχόν $F \in I$. Επειδή το I είναι ομογενές, θα παράγεται από πεπερασμένα ομογενή πολυώνυμα, ας πούμε τα $H_i \in \mathbf{k}\left[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_n\right]_{d_i}$, $i \in \{1,\ldots,\kappa\}$ (βλ. 3.3.3 (b)). Άρα υπάρχουν $G_1,\ldots,G_\kappa \in \mathbf{k}\left[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_n\right]$, ούτως ώστε να ισχύει

$$\left.\begin{array}{r} F = \sum\limits_{i=1}^{\kappa} G_i H_i \\ 3.6.3\,(\mathrm{b}) \Rightarrow H_i = \mathsf{X}_0^{\nu_i}(H_{i*})^* \in (I_*)^* \\ (\nu_i := \max\{\alpha \in \mathbb{N}_0 : \mathsf{X}_0^{\alpha} \mid H_i\}) \end{array}\right\} \Rightarrow F \in (I_*)^*.$$

Κατά συνέπειαν, $I \subseteq (I_*)^*$. □

3.6.11 Σημείωση. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου ο ανωτέρω εγκλεισμός είναι αυστηρός. Επί παραδείγματι, εάν $I = \langle \mathsf{X}_0\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_0\mathsf{X}_2\rangle \subset \mathbf{k}\left[\mathsf{X}_0,\mathsf{X}_1,\mathsf{X}_2\right]$, τότε $\mathsf{X}_1,\mathsf{X}_2 \in (I_*)^* \smallsetminus I$.

3.6.12 Ορισμός. Κάθε ομογενές ιδεώδες I τού $\mathbf{k}\left[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_n\right]$, για το οποίο ισχύει η ισότητα $I = (I_*)^*$, καλείται $(\mathrm{j}_*)^*$-**κλειστό ιδεώδες**.

3.6.13 Πρόταση. *Οι ακόλουθες απεικονίσεις είναι αμφιρριπτικές:*

$$\boxed{\begin{array}{c} \left\{\begin{array}{c}\text{ομογενή } (\mathrm{j}_*)^*\text{-κλειστά} \\ \text{ιδεώδη τού } \mathbf{k}[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_n]\end{array}\right\} \underset{-^*}{\overset{-_*}{\rightleftarrows}} \{\text{ιδεώδη τού } \mathbf{k}[\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n]\} \\ I \longmapsto I_* := \mathrm{j}_*(I), \quad J \longmapsto J^*, \end{array}}$$

και η μία αντίστροφος τής άλλης, ενώ διατηρούν τις σχέσεις εγκλεισμού, δηλαδή

$$[I_1 \subseteq I_2 \Longrightarrow I_{1*} \subseteq I_{2*}], \qquad [J_1 \subseteq J_2 \Longrightarrow J_1^* \subseteq J_2^*].$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η αμφιρριπτικότητα των ανωτέρω απεικονίσεων είναι επακόλουθο τού ορισμού 3.6.12 και τού (d) τής προτάσεως 3.6.6. (Η ιδιότητα τής διατηρήσεως των σχέσεων εγκλεισμού είναι προφανής.) □

3.6.14 Θεώρημα. *Εάν το I είναι ένα ομογενές ιδεώδες τού $\mathbf{k}\left[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_n\right]$, τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(a) *Το I είναι ένα $(\mathrm{j}_*)^*$-κλειστό ιδεώδες.*

(b) *Ο πηλικοδακτύλιος $\mathbf{k}\left[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_n\right]/I$, ιδωμένος ως $\mathbf{k}\left[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_n\right]$-μόδιος, είναι ελεύθερος στρέψεως ως προς τη μεταβλητή X_0, δηλαδή το μονώνυμο X_0 δεν μηδενίζει (πολλαπλασιαζόμενο με αυτό) κανένα μη μηδενικό στοιχείο τού $\mathbf{k}\left[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_n\right]/I$.*

(c) $(\mathsf{X}_0\mathbf{k}\left[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_n\right]) \cap I = \mathsf{X}_0 I$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a)⇒(b): Επειδή η συνήθης βαθμολόγηση τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ επάγει τη βαθμολόγηση

$$\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]/I = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}_0}(\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_d + I)/I$$

τού πηλικοδακτυλίου $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]/I$ (βλ. 3.2.9 (d)), είναι αρκετό να αποδειχθεί ότι το μονώνυμο X_0 δεν μηδενίζει κανένα μη μηδενικό *ομογενές* στοιχείο τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]/I$. Έστω τυχόν $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_d$ ($d \geq 0$). Εάν υποθέσουμε ότι $\mathsf{X}_0 F \in I$, τότε, σύμφωνα με τα (a) και (b) τής προτάσεως 3.6.3,

$$\left.\begin{array}{r} F_* = (\mathsf{X}_0 F)_* \in I_* \\ F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_d \\ I\ (\mathsf{j}_*)^* \text{-κλειστό} \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists \nu \in \mathbb{N}_0 : F = \mathsf{X}_0^\nu (F_*)^* \in (I_*)^* = I = 0_{\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]/I}.$$

(b)⇒(c): Ο εγκλεισμός $(\mathsf{X}_0\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]) \cap I \supseteq \mathsf{X}_0 I$ είναι προφανής, ενώ ο αντίστροφος εγκλεισμός έπεται άμεσα από τη συνθήκη (b).

(c)⇒(a): Λόγω τής προτάσεως 3.6.10 αρκεί να αποδειχθεί ότι $(I_*)^* \subseteq I$. Έστω F ένα ομογενές στοιχείο τού $(I_*)^*$. Κατά το (b) τής προτάσεως 3.6.6, $F = \mathsf{X}_0^l H^*$, όπου $l \in \mathbb{N}_0$ και $H \in I_*$. Εξ ορισμού, $H = G_*$, για κάποιο $G \in I$. Επειδή το I είναι ομογενές ιδεώδες, δεν βλάπτεται η γενικότητα εάν υποθέσουμε ότι το G είναι *ομογενές* στοιχείο τού I. Κατά το (b) τής προτάσεως 3.6.3 $\exists \nu \in \mathbb{N}_0 : G = \mathsf{X}_0^\nu (G_*)^*$. Συνεπώς,

$$\left.\begin{array}{r} F = \mathsf{X}_0^l H^* = \mathsf{X}_0^l (G_*)^* \Rightarrow \mathsf{X}_0^\nu F = \mathsf{X}_0^l G \\ \mathsf{X}_0^l G \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathsf{X}_0^\nu F \in I \overset{\text{(c)}}{\Longrightarrow} F \in I,$$

απ' όπου έπεται ότι $(I_*)^* \subseteq I$. □

3.6.15 Πόρισμα. *Εάν το I είναι ένα ομογενές ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, τότε*

$$(I_*)^* = \{F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n] \,|\, \mathsf{X}_0^\nu F \in I, \text{ για κάποιον } \nu \in \mathbb{N}_0\}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ακολουθώντας τήν απόδειξη τού (c)⇒(a) τού θεωρήματος 3.6.14 έως και την προτελευταία συνεπαγωγή διαπιστώνουμε ότι[19]

$$(I_*)^* \subseteq \{F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n] \,|\, \mathsf{X}_0^\nu F \in I, \text{ για κάποιον } \nu \in \mathbb{N}_0\}.$$

Και αντιστρόφως· έστω $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ με $\mathsf{X}_0^\nu F \in I$, για κάποιον $\nu \in \mathbb{N}_0$. Επειδή το I είναι ομογενές ιδεώδες, δεν βλάπτεται η γενικότητα εάν υποθέσουμε ότι το $\mathsf{X}_0^\nu F$ (και κατ' επέκτασιν, βάσει τής ασκήσεως **A-1-1** (b), και το ίδιο το F) είναι *ομογενές* στοιχείο τού I. Προφανώς, $(\mathsf{X}_0^\nu F)_* = F_* \in I_*$. Θέτοντας $l := \max\{i \in \mathbb{N}_0 : \mathsf{X}_0^i \mid F\}$ λαμβάνουμε

$$\left.\begin{array}{r} 3.6.3\text{ (b)} \Rightarrow \mathsf{X}_0^l (F_*)^* = F \\ F_* \in I_* \Rightarrow (F_*)^* \in (I_*)^* \end{array}\right\} \Longrightarrow F \in (I_*)^*,$$

οπότε $\{F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n] \,|\, \mathsf{X}_0^\nu F \in I, \text{ για κάποιον } \nu \in \mathbb{N}_0\} \subseteq (I_*)^*$. □

[19]Η εν λόγω απόδειξη είχε γίνει μόνον για ομογενή στοιχεία τού $(I_*)^*$. Ωστόσο, η γενική περίπτωση αντιμετωπίζεται κατά προφανή τρόπο.

3.6.16 Πόρισμα. *Έστω I ένα ομογενές ιδεώδες τού* $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$.

(a) *Εάν το I είναι $(\mathrm{j}_*)^*$-κλειστό ιδεώδες, τότε το $\mathrm{Rad}(I)$ είναι ωσαύτως $(\mathrm{j}_*)^*$-κλειστό.*

(b) *Εάν το I είναι $(\mathrm{j}_*)^*$-κλειστό ιδεώδες, τότε $\mathrm{Rad}(I_*) = \mathrm{Rad}(I)_*$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a) Επειδή το $\mathrm{Rad}(I)$ είναι ομογενές ιδεώδες (βλ. άσκηση **A-3-5**), είναι αρκετό (σύμφωνα με το (b) τού θεωρήματος 3.6.14) να αποδειχθεί ότι το μονώνυμο X_0 δεν μηδενίζει κανένα μη μηδενικό *ομογενές* στοιχείο τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]/\mathrm{Rad}(I)$. Έστω τυχόν $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_d$ ($d \geq 0$). Εάν υποθέσουμε ότι $\mathsf{X}_0 F \in \mathrm{Rad}(I)$, τότε

$$\exists m \in \mathbb{N} : (\mathsf{X}_0 F)^m = \mathsf{X}_0 \left(\mathsf{X}_0^{m-1} F^m\right) \in I.$$

Επειδή το I είναι $(\mathrm{j}_*)^*$-κλειστό ιδεώδες, το (b) τού θεωρήματος 3.6.14 μας πληροφορεί ότι $\mathsf{X}_0^{m-1} F^m \in I$. Εάν $m = 1$, τότε σταματούμε· ειδάλλως, εφαρμόζουμε εκ νέου την ίδια επιχειρηματολογία για να δείξουμε ότι ισχύει $\mathsf{X}_0^{m-2} F^m \in I$. Ύστερα από διαδοχική επανάληψη αυτής τής διαδικασίας καταλήγουμε τελικώς στο ότι $F^m \in I \Rightarrow F \in \mathrm{Rad}(I)$. Άρα το $\mathrm{Rad}(I)$ είναι όντως $(\mathrm{j}_*)^*$-κλειστό ιδεώδες.

(b) Έστω τυχόν $F \in \mathrm{Rad}(I_*)$. Τότε $\exists m \in \mathbb{N} : F^m \in I_*$, οπότε (από την υπόθεσή μας και τα (c) και (e) τής προτάσεως 3.6.3)

$$(F^m)^* = (F^*)^m \in (I_*)^* = I \Rightarrow F^* \in \mathrm{Rad}(I) \Rightarrow F = (F^*)_* \in \mathrm{Rad}(I)_*.$$

Άρα $\mathrm{Rad}(I_*) \subseteq \mathrm{Rad}(I)_*$. Επειδή το $\mathrm{Rad}(I)$ είναι ομογενές (βλ. άσκηση **A-3-5**), για την απόδειξη τού αντιστρόφου εγκλεισμού αρκεί να θεωρήσουμε ένα στοιχείο $\Xi = F_*$ τού $\mathrm{Rad}(I)_*$, όπου το F είναι ένα *ομογενές* στοιχείο τού $\mathrm{Rad}(I)$. Τότε $\exists m \in \mathbb{N} : F^m \in I$, οπότε (βάσει τού (a) τής προτάσεως 3.6.3)

$$\Xi^m = (F_*)^m = F_*^m \in I_* \Rightarrow \Xi \in \mathrm{Rad}(I_*).$$

Κατά συνέπειαν, $\mathrm{Rad}(I)_* \subseteq \mathrm{Rad}(I_*)$. □

3.6.17 Πόρισμα. *Έστω ότι τα $F, G \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ είναι δυο μη σταθερά, ομογενή πολυώνυμα χωρίς κοινούς παράγοντες (ήτοι χωρίς ανάγωγα πολυώνυμα ανήκοντα στον $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ που να διαιρούν αμφότερα) και ότι οι $\mathbf{V}_+(F), \mathbf{V}_+(G) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι οι αντίστοιχες προβολικές υπερεπιφάνειες. Εάν*

$$\mathbf{V}_+(F) \cap \mathbf{V}_+(G) \cap \mathbf{V}_+(\mathsf{X}_0) = \varnothing,$$

τότε το $I = \langle F, G \rangle$ είναι ένα $(\mathrm{j}_*)^*$-κλειστό ιδεώδες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Λόγω τού θεωρήματος 3.6.14 αρκεί να δειχθεί ότι το μονώνυμο X_0 δεν μηδενίζει κανένα μη μηδενικό στοιχείο τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]/I$. Ας υποθέσουμε ότι $\mathsf{X}_0 H \in I$, για κάποιο $H \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$. Τότε υπάρχουν $A, B \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$\mathsf{X}_0 H = A \cdot F + B \cdot G,$$

οπότε

$$A(0_{\mathbf{k}}, \mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n) F(0_{\mathbf{k}}, \mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n) = -B(0_{\mathbf{k}}, \mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n) G(0_{\mathbf{k}}, \mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n).$$

Επειδή $\mathbf{V}_+(F) \cap \mathbf{V}_+(G) \cap \mathbf{V}_+(\mathsf{X}_0) = \varnothing$, τα $F(0_{\mathbf{k}}, \mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n)$ και $G(0_{\mathbf{k}}, \mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n)$ δεν διαθέτουν κοινούς παράγοντες (διότι αλλιώς θα διέθεταν κοινά σημεία μηδενισμού). Κι επειδή ο $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ είναι Π.Μ.Π., από την ανωτέρω ισότητα συνάγουμε την ύπαρξη ενός πολυωνύμου $C \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ με

$$A(0_{\mathbf{k}}, \mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n) = C \cdot G(0_{\mathbf{k}}, \mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n),$$
$$B(0_{\mathbf{k}}, \mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n) = -C \cdot F(0_{\mathbf{k}}, \mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n).$$

Κατά συνέπειαν,

$$A - C \cdot G = \mathsf{X}_0 A', \quad B + C \cdot F = \mathsf{X}_0 B',$$

για κατάλληλα $A', B' \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ και, ως εκ τούτου,

$$\mathsf{X}_0 H = A \cdot F + B \cdot G = \mathsf{X}_0 (A' \cdot F + B' \cdot G) \Rightarrow H = A' \cdot F + B' \cdot G.$$

Από την τελευταία ισότητα έπεται το ζητούμενο. □

Ασκήσεις

Α-3-27. Εάν $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, να αποδειχθεί ότι $F = G + H$, όπου το G είναι ομογενές πολυώνυμο και το H ανήκον στο ιδεώδες $\langle 1_{\mathbf{k}} - \mathsf{X}_0 \rangle \subset \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$.

Α-3-28. Εάν τα $F, G \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ είναι ομογενή πολυώνυμα βαθμού d και $d+1$, αντιστοίχως, τα οποία δεν διαθέτουν (μη σταθερούς) κοινούς παράγοντες, να αποδειχθεί ότι το $F + G$ είναι ανάγωγο.

Α-3-29. Εάν τα $F, G \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ είναι ομογενή πολυώνυμα που δεν διαθέτουν (μη σταθερούς) κοινούς παράγοντες, να αποδειχθεί ότι και οι αποομογενοποιήσεις τους F_* και G_* δεν διαθέτουν (μη σταθερούς) κοινούς παράγοντες.

Α-3-30. Έστω ότι οι $G_1, G_2, \ldots$ και $H_1, H_2, \ldots$ είναι δυο ακολουθίες πρωτοβαθμίων ομογενών πολυωνύμων ανηκόντων στον $\mathbf{k}[\mathsf{X}, \mathsf{Y}]$, για τις οποίες $\nexists \lambda \in \mathbf{k} : G_i = \lambda H_i$, για οιονδήποτε $i \geq 0$. Θέτοντας

$$F_{ij} := \begin{cases} 1_{\mathbf{k}}, & \text{όταν } i = j = 0, \\ G_1 \cdot G_2 \cdots G_i, & \text{όταν } j = 0, \\ H_1 \cdot H_2 \cdots H_j, & \text{όταν } i = 0, \\ G_1 \cdot G_2 \cdots G_i \cdot H_1 \cdot H_2 \cdots H_j, & \text{όταν } i, j \geq 1, \end{cases}$$

να αποδειχθεί ότι το σύνολο των $d+1$ πολυωνύμων $\{ F_{ij} | \, i, j \geq 0 : i + j = d \}$ αποτελεί μια βάση τού $\mathbf{k}$-διανυσματικού χώρου $\mathbf{k}\,[\mathsf{X}, \mathsf{Y}]_d$.

Α-3-31. Εάν το $I = \langle F \rangle$ είναι ένα κύριο ιδεώδες τού $\mathbf{k}\,[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$, να αποδειχθεί η ισότητα $I^* = \langle F^* \rangle$.

Α-3-32. Εάν $V := \mathbf{V}(\mathsf{X}_2 - \mathsf{X}_3^2, \mathsf{X}_1 - \mathsf{X}_3^3) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ ($\mathbf{k}$ αλγεβρικώς κλειστό), να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(a) $\mathbf{I}(V) = \left\langle \mathsf{X}_2 - \mathsf{X}_3^2, \mathsf{X}_1 - \mathsf{X}_3^3 \right\rangle$.

(b) $\mathsf{X}_0\mathsf{X}_1 - \mathsf{X}_2\mathsf{X}_3 \in \mathbf{I}(V)^* \subset \mathbf{k}\,[\mathsf{X}_0, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3]$, αλλά

$$\mathsf{X}_0\mathsf{X}_1 - \mathsf{X}_2\mathsf{X}_3 \notin \left\langle \left(\mathsf{X}_2 - \mathsf{X}_3^2\right)^*, \left(\mathsf{X}_1 - \mathsf{X}_3^3\right)^* \right\rangle .$$

Α-3-33. Εάν τα I, I_1, I_2 είναι ιδεώδη τού $\mathbf{k}\,[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$, να αποδειχθεί ότι οι ομογενοποιήσεις τους έχουν τις εξής ιδιότητες:

(a) $(I_1 + I_2)^* = I_1^* + I_2^*$.

(b) $(I_1 I_2)^* = I_1^* I_2^*$.

(c) $(I_1 \cap I_2)^* = I_1^* \cap I_2^*$.

(d) $(I_1 : I_2)^* = I_1^* : I_2^*$.

Α-3-34. Εάν το I είναι ένα πρώτο ιδεώδες τού $\mathbf{k}\,[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$, να αποδειχθεί ότι η ομογενοποίησή του I^* είναι ένα πρώτο ιδεώδες τού $\mathbf{k}\,[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$.

Α-3-35. Εάν τα I_1, I_2 είναι δυο ομογενή ιδεώδη τού $\mathbf{k}\,[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, να αποδειχθεί ότι οι αποομογενοποιήσεις τους έχουν τις εξής ιδιότητες:

(a) $(I_1 + I_2)_* = I_{1*} + I_{2*}$.

(b) $(I_1 I_2)_* = I_{1*} I_{2*}$.

(c) $(I_1 \cap I_2)_* = I_{1*} \cap I_{2*}$.

(d) $(I_1 : I_2)_* = I_{1*} : I_{2*}$.

Α-3-36. Εάν το I είναι ένα ομογενές, $(\mathrm{j}_*)^*$-κλειστό ιδεώδες τού $\mathbf{k}\,[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, να αποδειχθεί ότι οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(a) Το I είναι πρώτο ιδεώδες τού $\mathbf{k}\,[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$.

(b) Η αποομογενοποίησή του I_* είναι πρώτο ιδεώδες τού $\mathbf{k}\,[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$.

3.7 Διασύνδεση Συσχετικών και Προβολικών Αλγεβρικών Συνόλων

Εάν το $W \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ είναι ένα συσχετικό αλγεβρικό σύνολο και J οιοδήποτε ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$, για το οποίο ισχύει $W = \mathbf{V}(J)$, τότε στο W αντιστοιχίζεται κατά τρόπο φυσικό το προβολικό αλγεβρικό σύνολο $V = \mathbf{V}_+(J^*) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ το οριζόμενο μέσω τής ομογενοποιήσεως J^* τού J (ως προς τη μεταβλητή X_0). Και αντιστρόφως· εάν το $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο και I οιοδήποτε ομογενές ιδεώδες τού πολυωνυμικού δακτυλίου $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, για το οποίο ισχύει $V = \mathbf{V}_+(I)$, τότε στο V αντιστοιχίζεται το συσχετικό αλγεβρικό σύνολο $W = \mathbf{V}(I_*) \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ το οριζόμενο μέσω τής αποομογενοποιήσεως I_* τού I (ως προς τη μεταβλητή X_0).

3.7.1 Λήμμα. (a) *Έστω $W \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ ένα συσχετικό αλγεβρικό σύνολο και έστω J οιοδήποτε ιδεώδες τού πολυωνυμικού δακτυλίου $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$, για το οποίο ισχύει $W = \mathbf{V}(J)$. Τότε*

$$\mathbf{V}_+(J^*) = \mathbf{V}_+(\mathrm{Rad}(J^*)) = \mathbf{V}_+(\mathrm{Rad}(J)^*).$$

(b) *Έστω $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο και έστω I οιοδήποτε ομογενές ιδεώδες τού πολυωνυμικού δακτυλίου $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, για το οποίο ισχύει $V = \mathbf{V}_+(I)$. Τότε*

$$\mathbf{V}(I_*) = \mathbf{V}(\mathrm{Rad}(I_*)).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται άμεσα από το 3.6.6 (e) και τις ασκήσεις **A-1-20** και **A-3-10**. □

3.7.2 Θεώρημα. *Οι απεικονίσεις*

$$\boxed{\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \text{συσχετικά αλγεβρικά} \\ \text{σύνολα } W \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \end{array} \right\} \rightleftarrows \left\{ \begin{array}{c} \text{προβολικά αλγεβρικά σύνολα} \\ V = \mathbf{V}_+(I) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \text{ οριζόμενα} \\ \text{από ομογενή } (\mathsf{j}_*)^* \text{-κλειστά} \\ \text{ιδεώδη } I \text{τού } \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n] \end{array} \right\} \\ W = \mathbf{V}(J) \longmapsto V = \mathbf{V}_+(J^*), \\ V = \mathbf{V}_+(I) \longmapsto W = \mathbf{V}(I_*), \end{array}}$$

είναι αμφιρριπτικές και η μία αντίστροφος τής άλλης. Επιπροσθέτως, όταν το $\mathbf{k}$ είναι αλγεβρικώς κλειστό σώμα, αυτές διατηρούν τις σχέσεις εγκλεισμού.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κατ' αρχάς, παρατηρούμε ότι για κάθε ιδεώδες J τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ το J^* είναι $(\mathsf{j}_*)^*$-κλειστό ιδεώδες (διότι $((J^*)_*)^* = J^*$ κατά το (d) τής προτάσεως 3.6.6). Εν συνεχεία, χρησιμοποιώντας τό (d) τής προτάσεως 3.6.6 και τον ορισμό 3.6.12 διαπιστώνουμε ότι οι ανωτέρω απεικονίσεις είναι αμφιρριπτικές και η μία αντίστροφος τής άλλης, καθόσον οι συνθέσεις αυτών

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(J) &\longmapsto \mathbf{V}_+(J^*) \longmapsto \mathbf{V}((J^*)_*) = \mathbf{V}(J),\\ \mathbf{V}_+(I) &\longmapsto \mathbf{V}(I_*) \longmapsto \mathbf{V}_+((I_*)^*) = \mathbf{V}_+(I).\end{aligned}$$

είναι οι ταυτοτικές. Εάν το $\mathbf{k}$ είναι αλγεβρικώς κλειστό σώμα και $\mathbf{V}(J_1) \subseteq \mathbf{V}(J_2)$ για κάποια ιδεώδη J_1, J_2 τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$, τότε, εφαρμόζοντας διαδοχικώς το (1) τής προτάσεως 1.3.1, το θεώρημα 1.8.2, την πρόταση 3.6.13, το (f) τής προτάσεως 3.6.6, το (2) τής προτάσεως 3.3.4 και το (a) τού λήμματος 3.7.1, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(J_1) \subseteq \mathbf{V}(J_2) &\Rightarrow \operatorname{Rad}(J_1) = \mathbf{I}(\mathbf{V}(J_1)) \supseteq \mathbf{I}(\mathbf{V}(J_2)) = \operatorname{Rad}(J_2)\\ &\Rightarrow \operatorname{Rad}(J_1^*) = \operatorname{Rad}(J_1)^* \supseteq \operatorname{Rad}(J_2)^* = \operatorname{Rad}(J_2^*)\\ &\Rightarrow \mathbf{V}_+(J_1^*) = \mathbf{V}_+(\operatorname{Rad}(J_1^*)) \subseteq \mathbf{V}_+(\operatorname{Rad}(J_2^*)) = \mathbf{V}_+(J_2^*).\end{aligned}$$

Υποθέτοντας, κατ' αναλογίαν, ότι $\mathbf{V}_+(I_1) \subseteq \mathbf{V}_+(I_2)$ για κάποια ομογενή $(\mathrm{j}_*)^*$-κλειστά ιδεώδη I_1, I_2 τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση πρώτη: Εάν αμφότερα τα $\mathbf{V}_+(I_1), \mathbf{V}_+(I_2)$ είναι μη κενά, τότε εφαρμόζοντας διαδοχικώς το (1) τής προτάσεως 3.3.8, το θεώρημα 3.3.21, την πρόταση 3.6.13, το πόρισμα 3.6.16, το (3) τής προτάσεως 1.2.3 και το (b) τού λήμματος 3.7.1, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_+(I_1) \subseteq \mathbf{V}_+(I_2) &\Rightarrow \operatorname{Rad}(I_1) = \mathbf{I}_+(\mathbf{V}_+(I_1)) \supseteq \mathbf{I}_+(\mathbf{V}_+(I_2)) = \operatorname{Rad}(I_2)\\ &\Rightarrow \operatorname{Rad}(I_{1*}) = \operatorname{Rad}(I_1)_* \supseteq \operatorname{Rad}(I_2)_* = \operatorname{Rad}(I_{2*})\\ &\Rightarrow \mathbf{V}(I_{1*}) = \mathbf{V}(\operatorname{Rad}(I_{1*})) \subseteq \mathbf{V}(\operatorname{Rad}(I_{2*})) = \mathbf{V}(I_{2*}).\end{aligned}$$

Περίπτωση δεύτερη: Εάν ισχύει $\mathbf{V}_+(I_1) = \varnothing$ και $\mathbf{V}_+(I_2) \neq \varnothing$, τότε, σύμφωνα με το θεώρημα 3.3.19,

$$\operatorname{Rad}(I_1) \in \{\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n], \langle \mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n \rangle\} \Rightarrow \operatorname{Rad}(I_1) \supseteq \operatorname{Rad}(I_2),$$

και οι τελευταίες δύο συνεπαγωγές τής πρώτης περιπτώσεως παραμένουν εν ισχύ. Τέλος, επειδή

$$\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_* = \langle \mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n \rangle_* = \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n],$$

εάν ισχύει $\mathbf{V}_+(I_1) = \mathbf{V}_+(I_2) = \varnothing$, τότε $\mathbf{V}(I_{1*}) = \mathbf{V}(I_{2*}) = \varnothing$ (βλ. 1.2.3 (5)). $\square$

3.7.3 Λήμμα. *Εάν το I είναι ένα ομογενές πρώτο ιδεώδες τού πολυωνυμικού δακτυλίου $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ και $V = \mathbf{V}_+(I) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ το αντίστοιχο προβολικό αλγεβρικό σύνολο, τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(a) *Το I είναι ένα $(\mathrm{j}_*)^*$-κλειστό ιδεώδες.*

(b) $V \subsetneqq \mathbb{H}_0^\infty := \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \smallsetminus U_0 = \mathbf{V}_+(\mathsf{X}_0)$ (βλ. 3.1.3).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a)⇒(b): Υποθέτοντας ότι $V \subseteq \mathbb{H}_0^{\infty}$ ($\Rightarrow \mathsf{X}_0 \in I$), καταλήγουμε στο ότι

$$1_{\mathbf{k}} = \mathsf{j}_*(\mathsf{X}_0) \in I_* \Rightarrow 1_{\mathbf{k}} = \mathsf{j}_*(\mathsf{X}_0)^* \in (I_*)^* = I \Rightarrow I = \mathbf{k}\,[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]\,,$$

ήτοι σε κάτι άτοπο (διότι το I είναι εξ υποθέσεως πρώτο ιδεώδες τού $\mathbf{k}\,[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$).

(b)⇒(a): Επειδή από τη συνθήκη $V \nsubseteq \mathbb{H}_0^{\infty}$ έπεται ότι $\mathsf{X}_0^m \notin I$, $\forall m \in \mathbb{N}_0$, το μονώνυμο X_0 δεν μηδενίζει (πολλαπλασιαζόμενο με αυτό) κανένα μη μηδενικό στοιχείο τού $\mathbf{k}\,[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]\,/I$. Άρα το I είναι ένα $(\mathsf{j}_*)^*$-κλειστό ιδεώδες επί τη βάσει τού θεωρήματος 3.6.14. □

3.7.4 Θεώρημα. *Περιορίζοντας τις απεικονίσεις τού θεωρήματος* 3.7.2*, λαμβάνουμε αμφιρρίψεις:*

$$\boxed{\begin{gathered} \left\{ \begin{array}{c} \text{συσχετικές ποικιλότητες} \\ W \subseteq \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^n \end{array} \right\} \rightleftarrows \left\{ \begin{array}{c} \text{προβολικές ποικιλότητες} \\ V \subseteq \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n \text{ με } V \nsubseteq \mathbb{H}_0^{\infty} \end{array} \right\} \\ W = \mathbf{V}(J) \longmapsto V = \mathbf{V}_+(J^*), \\ V = \mathbf{V}_+(I) \longmapsto W = \mathbf{V}(I_*), \end{gathered}}$$

Μάλιστα, όταν το $\mathbf{k}$ *είναι αλγεβρικώς κλειστό σώμα, αυτοί οι περιορισμοί διατηρούν τις σχέσεις εγκλεισμού.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται από τις προτάσεις 1.6.7, 3.3.13, σε συνδυασμό με το θεώρημα 3.7.2, την άσκηση **A-3-34** και το λήμμα 3.7.3. □

3.7.5 Πρόταση. *Έστω* $W \subseteq \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^n$ *ένα συσχετικό αλγεβρικό σύνολο και έστω* J *ένα ιδεώδες τού πολυωνυμικού δακτυλίου* $\mathbf{k}\,[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$, *τέτοιο ώστε* $W = \mathbf{V}(J)$. *Τότε ισχύουν τα εξής:*

(a) $\phi_0(W) = \mathbf{V}_+\,(J^*) \cap U_0$ (βλ.3.1.3).

(b) *Εάν* $J = \langle F_1, \ldots, F_\kappa \rangle$, *τότε* $\phi_0(W) = \mathbf{V}_+\,(F_1^*, \ldots, F_\kappa^*) \cap U_0$.

(c) $\mathbf{I}(W) = \mathbf{I}_+(\phi_0(W))_*$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a) Για κάθε $P = (a_1, \ldots, a_n) \in W$ έχουμε $\phi_0(P) = [1_{\mathbf{k}} : a_1 : \ldots : a_n] \in U_0$. Επίσης, για κάθε $0 \neq F \in J$ έχουμε

$$F^*(\phi_0(P)) = F(P) = 0_{\mathbf{k}} \Rightarrow \phi_0(P) \in \mathbf{V}_+\,(J^*) \cap U_0.$$

Άρα $\phi_0(W) \subseteq \mathbf{V}_+\,(J^*) \cap U_0$. Και αντιστρόφως· θεωρώντας τυχόν σημείο

$$P = [a_0 : a_1 : \ldots : a_n] = \left[1_{\mathbf{k}} : \tfrac{a_1}{a_0} : \ldots : \tfrac{a_n}{a_0}\right] \in \mathbf{V}_+\,(J^*) \cap U_0$$

παρατηρούμε ότι για κάθε $0 \neq F \in J$ ισχύει

$$\left.\begin{array}{r} 0_{\mathbf{k}} = F^*(P) = F(\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}) \Rightarrow (\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}) \in W \\ P = \phi_0(\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}) \end{array}\right\} \Rightarrow P \in \phi_0(W),$$

οπότε $\mathbf{V}_+(J^*) \cap U_0 \subseteq \phi_0(W)$.

(b) Κατά το (a), $\phi_0(W) = \mathbf{V}_+\left(\langle F_1, \dots, F_\kappa \rangle^*\right) \cap U_0$. Έστω $F \in \langle F_1, \dots, F_\kappa \rangle$. Τότε υπάρχουν πολυώνυμα $G_1, \dots, G_\kappa \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \dots, \mathsf{X}_n]$, ούτως ώστε να ισχύει

$$F = \sum_{i=1}^{\kappa} G_i F_i \Longrightarrow F^* = (\sum_{i=1}^{\kappa} G_i F_i)^*.$$

Κάθε $P \in U_0$ γράφεται υπό τη μορφή $P = [1_{\mathbf{k}} : a_1 : \dots : a_n]$. Εάν λοιπόν $P \in \phi_0(W)$, τότε

$$0_{\mathbf{k}} = F^*(P) = (\sum_{i=1}^{\kappa} G_i F_i)^*(P) = \sum_{i=1}^{\kappa} G_i^*(P) F_i^*(P) \Rightarrow P \in \mathbf{V}_+(F_1^*, \dots, F_\kappa^*) \cap U_0$$

(πρβλ. 3.6.3 (d),(e)). Άρα $\phi_0(W) \subseteq \mathbf{V}_+(F_1^*, \dots, F_\kappa^*) \cap U_0$. Ο αντίστροφος εγκλεισμός αποδεικνύεται παρομοίως.

(c) Επειδή το W είναι εξ υποθέσεως συσχετικό αλγεβρικό σύνολο, έχουμε $W = \mathbf{V}(\mathbf{I}(W))$ (βλ. το (5) (a) τής προτάσεως 1.3.1). Κατόπιν εφαρμογής τού (a) για το $J = \mathbf{I}(W)$ λαμβάνουμε $\phi_0(\mathbf{V}(\mathbf{I}(W))) = \mathbf{V}_+(\mathbf{I}(W)^*) \cap U_0$. Για κάθε $F \in \mathbf{I}(W)$ έχουμε

$$F^* \in \mathbf{I}(W)^* \subseteq \mathbf{I}_+(\mathbf{V}_+(\mathbf{I}(W)^*)) \subseteq \mathbf{I}_+(\phi_0(W))$$

(λόγω τού (3) (a) και τού (1) τής προτάσεως 3.3.8). Συνεπώς, σύμφωνα με το (c) τής προτάσεως 3.6.3,

$$F = (F^*)_* \in \mathbf{I}_+(\phi_0(W))_* \Longrightarrow \mathbf{I}(W) \subseteq \mathbf{I}_+(\phi_0(W))_*.$$

Και αντιστρόφως· για οιοδήποτε $F \in \mathbf{I}_+(\phi_0(W))$ και οιοδήποτε $P \in W$ έχουμε

$$0_{\mathbf{k}} = F(\phi_0(P)) = F_*(P) \Longrightarrow F_* \in \mathbf{I}(W).$$

Άρα $\mathbf{I}_+(\phi_0(W))_* \subseteq \mathbf{I}(W)$. □

3.7.6 Ορισμός. Έστω $W \subseteq \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^n$ ένα συσχετικό αλγεβρικό σύνολο. Ως **προβολική κλειστή θήκη τού** W ορίζουμε το προβολικό αλγεβρικό σύνολο

$$\boxed{\overline{W} := \mathbf{V}_+(\mathbf{I}(W)^*) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n.}$$

3.7.7 Πρόταση. *Έστω* $W \subseteq \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^n$ *ένα συσχετικό αλγεβρικό σύνολο και έστω* J *ένα ιδεώδες τού πολυωνυμικού δακτυλίου* $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \dots, \mathsf{X}_n]$, *τέτοιο ώστε* $W = \mathbf{V}(J)$. *Τότε ισχύουν τα* *εξής*:

(a) $\overline{W} \subseteq \mathbf{V}_+(J^*)$ *και* $\overline{W} = \mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}}(\phi_0(W))$.

(b) $\mathbf{I}_+(\overline{W}) = \mathbf{I}(W)^*$.

(c) *Εάν το* $\mathbf{k}$ *είναι αλγεβρικώς κλειστό σώμα, τότε* $\overline{W} = \mathbf{V}_+(J^*)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a) Έστω $Z \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο (ήτοι ένα κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$) που περιέχει το $\phi_0(W)$. Τότε $\mathbf{I}_+(Z) \subseteq \mathbf{I}_+(\phi_0(W))$ (κατά το (1) τής προτάσεως 3.3.8). Επειδή το $\mathbf{I}_+(Z)$ είναι ομογενές ιδεώδες, αρκεί να θεωρήσουμε ένα *ομογενές* στοιχείο $F \in \mathbf{I}_+(Z)$. Προφανώς,

$$F_* \in \mathbf{I}_+(\phi_0(W))_* = \mathbf{I}(W) \Rightarrow F = \mathsf{X}_0^{\nu}(F_*)^* \in \mathbf{I}(W)^*$$

για κάποιον $\nu \in \mathbb{N}_0$ (βλ. 3.7.5 (c) και 3.6.3 (b)). Άρα

$$\mathbf{I}_+(Z) \subseteq \mathbf{I}(W)^* \Rightarrow Z = \mathbf{V}_+(\mathbf{I}_+(Z)) \supseteq \mathbf{V}_+(\mathbf{I}(W)^*) =: \overline{W}$$

(βλ. 3.3.4 (2) και 3.3.8 (5) (a)). Τούτο σημαίνει ότι το $\overline{W}$ είναι το *ελάχιστο* κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ που περιέχει το $\phi_0(W)$, οπότε $\overline{W} = \mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}}(\phi_0(W))$. Κι επειδή το $\mathbf{V}_+(J^*)$ είναι ένα κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ που περιέχει το $\phi_0(W)$ (βλ. 3.7.5 (a)), έχουμε $\overline{W} \subseteq \mathbf{V}_+(J^*)$.

(b) Για το $Z = \overline{W}$ έχουμε ήδη δείξει στο (a) ότι $\mathbf{I}_+(\overline{W}) \subseteq \mathbf{I}(W)^*$. Από την άλλη μεριά,

$$\mathbf{I}_+(\overline{W}) = \mathbf{I}_+(\mathbf{V}_+(\mathbf{I}(W)^*)) \supseteq \mathbf{I}(W)^*$$

(βλ. 3.3.8 (3) (a)), οπότε ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός.

(c) Κατά το θεώρημα 1.8.2 και το (a) τού λήμματος 3.7.1,

$$\overline{W} = \mathbf{V}_+(\mathbf{I}(\mathbf{V}(J))^*) = \mathbf{V}_+(\mathrm{Rad}(J)^*) = \mathbf{V}_+(J^*),$$

οπότε η προβολική κλειστή θήκη τού W ισούται όντως με το $\mathbf{V}_+(J^*)$. $\square$

3.7.8 Σημείωση. Όταν το $\mathbf{k}$ δεν είναι αλγεβρικώς κλειστό, τότε ενδέχεται ο εγκλεισμός $\overline{W} \subseteq \mathbf{V}_+(J^*)$ να είναι αυστηρός. Επί παραδείγματι, για $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ και

$$J = \left\langle \mathsf{X}^4 + \mathsf{Y}^2 \right\rangle \subset \mathbb{R}[\mathsf{X}, \mathsf{Y}], \ \ W = \mathbf{V}(J) = \{(0,0)\},$$

έχουμε

$$\overline{W} = \{(1,0,0)\} \subsetneqq \{(1,0,0),(0,0,1)\} = \mathbf{V}_+(J^*) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}.$$

3.7.9 Πρόταση. *Έστω* $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ *ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο και έστω* I *ένα ομογενές ιδεώδες τού πολυωνυμικού δακτυλίου* $\mathbf{k}\left[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n\right]$, *τέτοιο ώστε* $V = \mathbf{V}_+(I)$. *Τότε ισχύουν τα εξής*:

(a) $\phi_0(\mathbf{V}(I_*)) = V \cap U_0$.
(b) $\phi_0(\mathbf{V}(I_*)) = \mathbf{V}_+((I_*)^*) \cap U_0$.
(c) *Εάν το* $\mathbf{k}$ *είναι αλγεβρικώς κλειστό, τότε* $\mathbf{V}_+((I_*)^*) = \overline{\mathbf{V}(I_*)}$.
(d) *Εάν το* $\mathbf{k}$ *είναι αλγεβρικώς κλειστό και το* I $(\mathrm{j}_*)^*$*-κλειστό ιδεώδες, τότε* $V = \overline{\mathbf{V}(I_*)}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το (a) είναι προφανές και το (b) συνάγεται από το 3.7.5 (a).
(c) Κατά το θεώρημα 1.8.2 και το (a) τού λήμματος 3.7.1,

$$\overline{\mathbf{V}(I_*)} = \mathbf{V}_+(\mathbf{I}(\mathbf{V}(I_*))^*) = \mathbf{V}_+(\mathrm{Rad}(I_*)^*) = \mathbf{V}_+((I_*)^*).$$

(d) Τούτο έπεται άμεσα από το (c). □

3.7.10 Πόρισμα. *Εάν το* $\mathbf{k}$ *είναι αλγεβρικώς κλειστό σώμα, τότε λαμβάνουμε τις αμφιρρίψεις:*

$$\boxed{\begin{gathered}\left\{\begin{array}{c}\text{συσχετικές ποικιλότητες}\\ W\subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}\end{array}\right\} \rightleftarrows \left\{\begin{array}{c}\text{προβολικές ποικιλότητες}\\ V\subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}\ \text{ με } V\nsubseteq \mathbb{H}^{\infty}_0\end{array}\right\}\\ W\longmapsto V=\overline{W},\\ V\longmapsto W=\phi_0^{-1}(V\cap U_0),\end{gathered}}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από το (c) τής προτάσεως 3.7.7 και τα (b), (c), (d) τής προτάσεως 3.7.9 διαπιστώνουμε ότι οι ανωτέρω απεικονίσεις

$$W = \mathbf{V}(J) \longmapsto V = \overline{W} = \mathbf{V}_+(J^*),$$
$$V = \mathbf{V}_+(I) = \overline{\mathbf{V}(I_*)} = \mathbf{V}_+((I_*)^*) \longmapsto W = \phi_0^{-1}(\mathbf{V}_+((I_*)^*) \cap U_0) = \mathbf{V}(I_*),$$

ταυτίζονται με τις απεικονίσεις τις δοθείσες στο θεώρημα 3.7.4. □

3.7.11 Θεώρημα. *Έστω* $\varnothing \neq W \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ *ένα συσχετικό αλγεβρικό σύνολο. Εάν το* $\mathbf{k}$ *είναι αλγεβρικώς κλειστό σώμα, τότε ισχύουν τα εξής:*
(a) *Η απεικόνιση*

$$\beta : \mathbf{k}\left[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n\right]/\mathbf{I}(W)^* = \Gamma_{\text{ομ.}}(\overline{W}) \longrightarrow \Gamma(W), \quad \overline{F} \longmapsto \beta(\overline{F}) := \overline{F_*},$$

είναι ένας επιμορφισμός δακτυλίων με $\mathrm{Ker}(\beta) = \left\langle 1_{\mathbf{k}} - \overline{\mathsf{X}_0} \right\rangle$, *όπου* $\overline{\mathsf{X}_0}$ *η κλάση υπολοίπων τού* X_0 *εντός τού* $\Gamma_{\text{ομ.}}(\overline{W})$.
(b) *Εάν το* W *είναι συσχετική ποικιλότητα, τότε η* β *επάγει έναν ισομορφισμό σωμάτων*

$$\mathbf{k}\left(\overline{W}\right) \ni \frac{\overline{G}}{\overline{H}} \overset{\cong}{\longmapsto} \frac{\overline{G_*}}{\overline{H_*}} = \frac{\beta(\overline{G})}{\beta(\overline{H})} \in \mathbf{k}\left(W\right),$$

όπου τα $G, H \in \mathbf{k}\left[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n\right]$ *είναι ομογενή πολυώνυμα ιδίου βαθμού και* $H \notin \mathbf{I}_+(\overline{W})$ (πρβλ. ορσ. 3.4.3).

(c) *Εάν το W είναι συσχετική ποικιλότητα, τότε επάγονται, επιπροσθέτως, ισομορφισμοί τοπικών δακτυλίων*:

$$\mathcal{O}_{\overline{W},\phi_0(P)} \ni f \overset{\cong}{\longmapsto} f \circ \phi_0 \in \mathcal{O}_{W,P}, \ \forall P \in W.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a) Ο έλεγχος τού ότι η β αποτελεί έναν επιμορφισμό δακτυλίων είναι εύκολος. Με τη βοήθεια τής ασκήσεως **A-3-27** αποδεικνύεται ότι $\mathrm{Ker}(\beta) = \left\langle 1_{\mathbf{k}} - \overline{\mathsf{X}_0} \right\rangle$.

(b) Τούτο έπεται από την άσκηση **A-3-34**, το (b) τής προτάσεως 3.7.7 και απευθείας χρήση τού ορίζοντος τύπου τής επαγομένης απεικονίσεως.

(c) Πρόκειται για απλή άσκηση. □

3.7.12 Θεώρημα. *Έστω $\varnothing \neq V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο με $V \subsetneq \mathbb{H}_0^\infty$ και έστω I ένα ομογενές πρώτο ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, τέτοιο ώστε $V = \mathbf{V}_+(I)$. Εάν το $\mathbf{k}$ είναι αλγεβρικώς κλειστό σώμα, τότε ισχύουν τα εξής*:

(a) *Η απεικόνιση*

$$\beta : \Gamma_{\text{ομ.}}(V) = \Gamma_{\text{ομ.}}(\overline{\mathbf{V}(I_*)}) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{V}(I_*)), \quad \overline{F} \longmapsto \beta(\overline{F}) := \overline{F_*},$$

είναι ένας επιμορφισμός δακτυλίων με $\mathrm{Ker}(\beta) = \left\langle 1_{\mathbf{k}} - \overline{\mathsf{X}_0} \right\rangle$, *όπου* $\overline{\mathsf{X}_0}$ *η κλάση υπολοίπων τού* X_0 *εντός τού* $\Gamma_{\text{ομ.}}(V)$.

(b) *Εάν το V είναι προβολική ποικιλότητα, τότε η β επάγει έναν ισομορφισμό σωμάτων*

$$\mathbf{k}(V) \ni \frac{\overline{G}}{\overline{H}} \overset{\cong}{\longmapsto} \frac{\overline{G_*}}{\overline{H_*}} = \frac{\beta(\overline{G})}{\beta(\overline{H})} \in \mathbf{k}(\mathbf{V}(I_*)),$$

όπου τα $G, H \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ είναι ομογενή πολυώνυμα ιδίου βαθμού και $H \notin \mathbf{I}_+(V)$ (πρβλ. ορσ. 3.4.3).

(c) *Εάν το V είναι προβολική ποικιλότητα, τότε επάγονται, επιπροσθέτως, ισομορφισμοί τοπικών δακτυλίων*:

$$\mathcal{O}_{V,\phi_0(P)} \ni f \overset{\cong}{\longmapsto} f \circ \phi_0 \in \mathcal{O}_{\mathbf{V}(I_*),P}, \ \forall P \in \mathbf{V}(I_*).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται άμεσα από το λήμμα 3.7.3, το (d) τής προτάσεως 3.7.9 και το θεώρημα 3.7.11. □

3.7.13 Σημείωση. (a) Μέχρι στιγμής, για λόγους συντομίας και τηρήσεως μιας κάποιας συμβολιστικής κομψότητας, εκτελέσαμε αποομογενοποιήσεις πολυωνύμων ή ιδεωδών ανηκόντων στον βαθμολογημένο πολυωνυμικό δακτύλιο $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ μόνον ως προς τη μεταβλητή X_0. Ωστόσο, όταν $n \geq 1$, είναι εμφανές ότι τα παρατεθέντα θεωρητικά αποτελέσματα θα παρέμεναν αναλλοίωτα ακόμη και εάν οι αποομογενοποιήσεις εκτελούντο ως προς οιαδήποτε άλλη μεταβλητή X_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Εν τοιαύτη περιπτώσει, η απεικόνιση (3.14) θα στέλνει κάθε F να απεικονίζεται στο $F(\mathsf{X}_0, \ldots, 1_{\mathbf{k}}, \ldots, \mathsf{X}_n)$ (με το $1_{\mathbf{k}}$ στην

i-οστή θέση) και ένα ομογενές ιδεώδες I τού πολυωνυμικού δακτυλίου $\mathbf{k}\,[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ θα ονομάζεται $(\mathrm{j}_*)^*$-**κλειστό ιδεώδες** όταν ισούται με την ομογενοποίηση τής αποομογενοποιήσεώς του *ως προς τη μεταβλητή* X_i.

(b) Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ ο προβολικός χώρος $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ δέχεται το (κατά Zariski ανοικτό) κάλυμμα

$$\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} = U_0 \cup U_1 \cup \cdots \cup U_n,$$
$$U_i := U_i(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}) := \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \smallsetminus \mathbb{H}^\infty_i = \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \smallsetminus \mathbf{V}_+(\mathsf{X}_i) = \phi_{_i}(\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}),\ \forall i \in \{0, \ldots, n\},$$

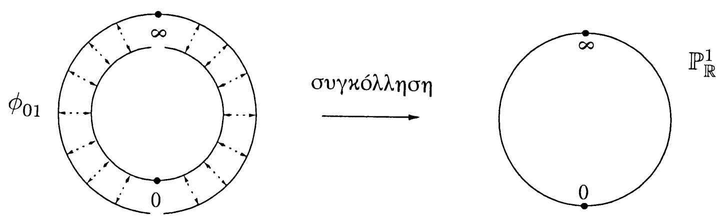
(βλ. (3.1), (3.2) και (3.3)), όπου οι $\phi_{_i}$ είναι ομοιομορφισμοί[20] ως προς την τοπολογία Zariski (βλ. άσκηση **A-3-13**). Επιπροσθέτως, για οιουσδήποτε $i, j \in \{0, \ldots, n\}$, $i \neq j$, με $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, οι συνθέσεις[21]

$$\phi_{ij} := \phi_{_i}^{-1} \circ \phi_j\big|_{\phi_{_j}^{-1}(U_i \cap U_j)} : \phi_j^{-1}(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$$
$$(a_1, \ldots, a_n) \longmapsto \begin{cases} \left(\frac{a_1}{a_{i+1}}, .., \frac{a_i}{a_{i+1}}, \frac{a_{i+2}}{a_{i+1}}, .., \frac{a_j}{a_{i+1}}, \frac{1_{\mathbf{k}}}{a_{i+1}}, \frac{a_{j+1}}{a_{i+1}}, .., \frac{a_n}{a_{i+1}}\right), & \text{όταν } i < j, \\ \left(\frac{a_1}{a_i}, .., \frac{a_j}{a_i}, \frac{1_{\mathbf{k}}}{a_i}, \frac{a_{j+1}}{a_i}, .., \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, .., \frac{a_n}{a_i}\right), & \text{όταν } i > j, \end{cases}$$

αποτελούν ισομορφισμούς (σχεδόν συσχετικών ποικιλοτήτων) μεταξύ των κατά Zariski ανοικτών υποσυνόλων $\phi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$ και $\phi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$, όπου

$$\phi_j^{-1}(U_i \cap U_j) = \begin{cases} \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \smallsetminus \mathbf{V}(\mathsf{X}_{i+1}), & \text{όταν } i < j, \\ \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \smallsetminus \mathbf{V}(\mathsf{X}_j), & \text{όταν } i > j. \end{cases}$$

Ως εκ τούτου, ο $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι ο χώρος που προκύπτει ύστερα από τη συγκόλληση των U_i, $i \in \{0, \ldots, n\}$, μέσω των ϕ_{ij}. Επί παραδείγματι, για $n = 1$ και $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, το σχήμα **14** εξηγεί το πώς δομείται ο $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ ύστερα από συγκόλληση τού $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} \smallsetminus \{0\}$ και τού $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} \smallsetminus \{\infty\}$ μέσω τής $\phi_{01}(t) = \frac{1}{t}$. (Ως "0" συμβολίζεται το $\phi_1^{-1}([0:1])$ και ως "∞" το $\phi_0^{-1}([1:0])$. Ο ισομορφισμός ϕ_{01} απεικονίζει το ένα στο άλλο.)



Σχήμα 14

[20] Στην πραγματικότητα, όπως θα δούμε στην επομένη ενότητα, οι $\phi_{_i}$ είναι και *ισομορφισμοί* (υπό μία κατά τι πιο γενικευμένη έννοια). Βλ. το (b) τού πορίσματος 3.8.7.

[21] Για $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ (και αντιστοίχως, για $\mathbf{k} = \mathbb{C}$) ο $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ καθίσταται **πραγματικό** (και αντιστοίχως, **μιγαδικό**) **πολύπτυγμα** έχων τις ϕ_{ij} ως (τις συνήθεις) *απεικονίσεις μεταβάσεως* από τον έναν χάρτη στον άλλο.

(c) Κάθε προβολικό αλγεβρικό σύνολο $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ δέχεται το «συσχετικό κάλυμμα[22]»

$$V = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_n, \;\; V_i := V \cap U_i, \; \forall i \in \{0, \ldots, n\}.$$

Εάν $V = \mathbf{V}_+(I)$ (όπου I ένα ομογενές πρώτο ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$) και $V_i \neq \varnothing$ για κάποιον $i \in \{0, \ldots, n\}$, τότε το V_i είναι ομοιομορφικό τού $\mathbf{V}(I_{(\mathsf{X}_i)}) \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ (μέσω τής ϕ_i^{-1}), όπου εν προκειμένω το $I_{(\mathsf{X}_i)}$ νοείται ως η αποομογενοποίηση τού I *ως προς τη μεταβλητή* X_i (πρβλ. το (a) τής προτάσεως 3.7.5, το πόρισμα 3.6.9 και το 3.7.13 (a)). Ας σημειωθεί ότι εάν το V είναι προβολική *ποικιλότητα*, τότε το $\mathbf{V}(I_{(\mathsf{X}_i)})$ είναι συσχετική *ποικιλότητα* (ομοιομορφική[23] τού V_i). Επίσης, υποθέτοντας ότι $V \nsubseteq \mathbf{V}_+(\mathsf{X}_i)$ και ότι το $\mathbf{k}$ είναι αλγεβρικώς κλειστό σώμα, λαμβάνουμε

$$\mathbf{k}(V) \cong \mathbf{k}\left(\mathbf{V}(I_{(\mathsf{X}_i)})\right) \cong \mathbf{k}(V_i),$$
$$\mathcal{O}_{V,\phi_i(P)} \cong \mathcal{O}_{\mathbf{V}(I_{(\mathsf{X}_i)}),P}, \;\; \forall P \in \mathbf{V}(I_{(\mathsf{X}_i)}),$$

και

$$\begin{aligned} V &= \overline{\mathbf{V}(I_{(\mathsf{X}_i)})} = \overline{V_i}, \\ \Gamma_{\text{ομ.}}(V) \,/\, \left\langle 1_{\mathbf{k}} - \overline{\mathsf{X}_i} \right\rangle &\cong \Gamma(\mathbf{V}(I_{(\mathsf{X}_i)})) \cong \mathbf{k}[\mathbf{V}(I_{(\mathsf{X}_i)})]. \end{aligned}$$

(πρβλ. θεώρημα 3.7.12).

3.7.14 Παραδείγματα. (a) Το «συσχετικό κάλυμμα» τής επίπεδης τετραγωνικής καμπύλης (ή τετραγωνικής υπερεπιφάνειας) $V = \mathbf{V}_+(\mathsf{XY} - \mathsf{Z}^2) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ συνίσταται από μια παραβολή (με ένα επ' άπειρον σημείο):

$$V_0 = \phi_0(\mathbf{V}(\mathsf{Y} - \mathsf{Z}^2)), \quad V \cap \mathbb{H}_0^\infty = \{[0:1:0]\},$$

μια παραβολή (με ένα επ' άπειρον σημείο):

$$V_1 = \phi_1(\mathbf{V}(\mathsf{X} - \mathsf{Z}^2)), \quad V \cap \mathbb{H}_1^\infty = \{[1:0:0]\},$$

και μια υπερβολή (με δύο επ' άπειρον σημεία):

$$V_2 = \phi_2(\mathbf{V}(\mathsf{XY} - 1_{\mathbf{k}})), \quad V \cap \mathbb{H}_2^\infty = \{[1:0:0], [0:1:0]\}.$$

(b) Το «συσχετικό κάλυμμα» τής επίπεδης τετραγωνικής καμπύλης (ή τετραγωνικής υπερεπιφάνειας) τού Fermat $V = \mathbf{V}_+(\mathsf{X}^2 + \mathsf{Y}^2 - \mathsf{Z}^2) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ συνίσταται από μια υπερβολή (με δύο επ' άπειρον σημεία):

$$V_0 = \phi_0(\mathbf{V}(1 + \mathsf{Y}^2 - \mathsf{Z}^2)), \quad V \cap \mathbb{H}_0^\infty = \{[0:1:1], [0:1:-1]\},$$

[22] Πρβλ. 3.8.12 και 3.8.13.

[23] Επίσης, $V_i \cong \mathbf{V}(I_{(\mathsf{X}_i)})$ (υπό την έννοια τού ορισμού 3.8.3).

μια υπερβολή (με δύο επ' άπειρον σημεία):

$$V_1 = \phi_1(\mathbf{V}(\mathsf{X}^2 + 1 - \mathsf{Z}^2)), \quad V \cap \mathbb{H}_1^\infty = \{[1:0:1], [1:0:-1]\},$$

και έναν κύκλο (με δύο επ' άπειρον σημεία):

$$V_2 = \phi_2(\mathbf{V}(\mathsf{X}^2 + \mathsf{Y}^2 - 1)), \quad V \cap \mathbb{H}_2^\infty = \{[1:i:0], [1:-i:0]\}.$$

3.7.15 Λήμμα. *Έστω $V \subseteq \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n$ μια προβολική ποικιλότητα ($\mathbf{k}$ αλγεβρικώς κλειστό σώμα) με $V \nsubseteq \mathbf{V}_+(\mathsf{X}_i)$, για κάποιον $i \in \{0, \ldots, n\}$, και έστω I ένα ομογενές πρώτο ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, τέτοιο ώστε να ισχύει $V = \mathbf{V}_+(I)$. Τότε υφίσταται ένας κανονιστικός ισομορφισμός δακτυλίων*

$$\boxed{\Gamma_{\text{ομ.}}(V)_{(\overline{\mathsf{X}_i})} \cong \Gamma(\mathbf{V}(I_{(\mathsf{X}_i)})),}$$

όπου

$$\Gamma_{\text{ομ.}}(V)_{(\overline{\mathsf{X}_i})} = \left\{ \frac{\overline{F}}{\overline{\mathsf{X}_i}^\nu} \in \Gamma_{\text{ομ.}}(V)_{\overline{\mathsf{X}_i}} \,\middle|\, \nu \in \mathbb{N}_0,\ F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_\nu \right\}$$

η ομογενής τοπικοποίηση ως προς την κλάση υπολοίπων $\overline{\mathsf{X}_i}$ τής μεταβλητής X_i (βλ. το (b) τού εδαφίου 3.2.12).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρκεί να θεωρήσουμε τον επιμορφισμό δακτυλίων

$$\Gamma_{\text{ομ.}}(V)_{(\overline{\mathsf{X}_i})} \ni \frac{\overline{F}}{\overline{\mathsf{X}_i}^\nu} \longmapsto \overline{F(\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_{i-1}, 1_{\mathbf{k}}, \mathsf{X}_{i+1}, \ldots, \mathsf{X}_n)} \in \Gamma(\mathbf{V}(I_{(\mathsf{X}_i)})).$$

Αυτός έχει ως πυρήνα του το σύνολο

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\overline{F}}{\overline{\mathsf{X}_i}^\nu} \in \Gamma_{\text{ομ.}}(V)_{\overline{\mathsf{X}_i}} \,\middle|\, \begin{array}{c} \nu \in \mathbb{N}_0,\ F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_\nu, \\ F(\mathsf{X}_0, .., \mathsf{X}_{i-1}, 1_{\mathbf{k}}, \mathsf{X}_{i+1}, .., \mathsf{X}_n) \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(I_{(\mathsf{X}_i)})) \end{array} \right\} \\ = & \left\{ \frac{\overline{F}}{\overline{\mathsf{X}_i}^\nu} \in \Gamma_{\text{ομ.}}(V)_{\overline{\mathsf{X}_i}} \,\middle|\, \nu \in \mathbb{N}_0,\ F \in \mathrm{Rad}(I) \cap \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_\nu \right\} \\ = & \left\{ \frac{\overline{F}}{\overline{\mathsf{X}_i}^\nu} \in \Gamma_{\text{ομ.}}(V)_{\overline{\mathsf{X}_i}} \,\middle|\, \nu \in \mathbb{N}_0,\ F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_\nu \cap \mathbf{I}_+(V) \right\} = \{0_{\Gamma_{\text{ομ.}}(V)_{(\overline{\mathsf{X}_i})}}\}. \end{aligned}$$

(Εν προκειμένω, χρησιμοποιήθηκαν οι ισότητες $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I_{(\mathsf{X}_i)})) = \mathrm{Rad}(I_{(\mathsf{X}_i)}) = \mathrm{Rad}(I)_{(\mathsf{X}_i)}$ και $\mathbf{I}_+(V) = \mathrm{Rad}(I)$.) Άρα ο ανωτέρω επιμορφισμός είναι ισομορφισμός. □

3.7.16 Θεώρημα. *Έστω $V \subseteq \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n$ μια προβολική ποικιλότητα. Εάν το $\mathbf{k}$ είναι αλγεβρικώς κλειστό σώμα, τότε κάθε κανονική συνάρτηση επί τής V είναι σταθερή, δηλαδή*

$$\boxed{\mathcal{O}_V(V) \cong \mathbf{k}.}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κατ' αρχάς μπορούμε να υποθέσουμε ότι $V \subsetneqq \mathbf{V}(\mathsf{X}_i) = \mathbb{H}_i^{\infty}$ για *κάθε* δείκτη $i \in \{0, \ldots, n\}$ (διότι αλλιώς αντικαθιστούμε τον χώρο $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ με τον χώρο $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbf{k}}$, βλ. άσκηση **A-3-41**). Έστω I ένα ομογενές πρώτο ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, τέτοιο ώστε να ισχύει $V = \mathbf{V}_+(I)$. Θεωρούμε τυχούσα $f \in \mathcal{O}_V(V)$. Ο περιορισμός $f|_{\mathbf{V}(I_{(\mathsf{X}_i)})}$ τής f επί τής συσχετικής ποικιλότητας $\mathbf{V}(I_{(\mathsf{X}_i)})$ είναι κανονική συνάρτηση για κάθε $i \in \{0, \ldots, n\}$. Κατά την πρόταση 2.1.3, το (b) τής προτάσεως 2.4.28 και το λήμμα 3.7.15,

$$f|_{\mathbf{V}(I_{(\mathsf{X}_i)})} \in \mathcal{O}_{\mathbf{V}(I_{(\mathsf{X}_i)})}(\mathbf{V}(I_{(\mathsf{X}_i)})) \cong \mathbf{k}[\mathbf{V}(I_{(\mathsf{X}_i)})] \cong \Gamma(\mathbf{V}(I_{(\mathsf{X}_i)})) \cong \Gamma_{\text{ομ.}}(V)_{(\overline{\mathsf{X}_i})}\,.$$

Γι' αυτόν τον λόγο μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$f_i := f|_{\mathbf{V}(I_{(\mathsf{X}_i)})} = \frac{\overline{F_i}}{\overline{\mathsf{X}_i}^{\nu_i}} \in \Gamma_{\text{ομ.}}(V)_{\overline{\mathsf{X}_i}}, \;\; F_i \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_{\nu_i},$$

για κάποιον $\nu_i \in \mathbb{N}_0$, οπότε[24]

$$\overline{\mathsf{X}_i}^{\nu_i} f \in \Gamma_{\text{ομ.}}(V)_{\nu_i} = \left\{ \tfrac{\overline{G}}{\overline{H}} \in \mathbf{Fr}(\Gamma_{\text{ομ.}}(V)) \,|\, \deg(\overline{G}) - \deg(\overline{H}) = \nu_i \right\}$$

για κάθε $i \in \{0, \ldots, n\}$. Εν συνεχεία, θεωρούμε έναν φυσικό αριθμό $m > \sum_{i=0}^{n} \nu_i$. Επειδή (κατά το 3.4.2 (b))

$$\Gamma_{\text{ομ.}}(V)_m \cong \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_m / (\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_m \cap \mathbf{I}_+(V)),$$

η προσθετική ομάδα $\Gamma_{\text{ομ.}}(V)_m \subseteq \Gamma_{\text{ομ.}}(V) \subseteq \mathbf{Fr}(\Gamma_{\text{ομ.}}(V))$, ιδωμένη ως $\mathbf{k}$-διανυσματικός χώρος, παράγεται από το σύνολο

$$\mathfrak{E}_{n,m} := \left\{ \overline{\mathsf{X}}_0^{\kappa_0} \cdots \overline{\mathsf{X}}_n^{\kappa_n} \,\middle|\, (\kappa_0, \ldots, \kappa_n) \in \mathbb{N}_0^{n+1} : \sum_{i=0}^{n} \kappa_i = m \right\}.$$

Παρατηρούμε ότι *για κάθε* μονώνυμο $\overline{\mathsf{X}}_0^{\kappa_0} \cdots \overline{\mathsf{X}}_n^{\kappa_n} \in \mathfrak{E}_{n,m}$ υπάρχει τουλάχιστον ένας δείκτης $i_\star \in \{0, \ldots, n\}$ με $\kappa_{i_\star} > \nu_{i_\star}$, διότι αλλιώς θα καταλήγαμε στην αντίφαση

$$[\kappa_i \leq \nu_i, \; \forall i \in \{0, \ldots, n\}] \Rightarrow m = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \leq \sum_{i=0}^{n} \nu_i < m,$$

οπότε το $\left(\overline{\mathsf{X}}_0^{\kappa_0} \cdots \overline{\mathsf{X}}_n^{\kappa_n}\right) \cdot f$ ανήκει στον $\Gamma_{\text{ομ.}}(V)_m$, καθόσον ισούται με το γινόμενο

$$(\overline{\mathsf{X}}_0^{\kappa_0} \cdots \overline{\mathsf{X}}_{i_\star-1}^{\kappa_{i_\star}-1} \overline{\mathsf{X}}_{i_\star}^{\nu_{i_\star}-\kappa_{i_\star}} \overline{\mathsf{X}}_{i_\star+1}^{\kappa_{i_\star}+1} \cdots \overline{\mathsf{X}}_n^{\kappa_n}) \cdot (\overline{\mathsf{X}}_{i_\star}^{\nu_{i_\star}} f) \in \Gamma_{\text{ομ.}}(V)_{m-\nu_{i_\star}} \cdot \Gamma_{\text{ομ.}}(V)_{\nu_{i_\star}} \subseteq \Gamma_{\text{ομ.}}(V)_m\,.$$

Συνεπώς, $\Gamma_{\text{ομ.}}(V)_m \cdot f \subseteq \Gamma_{\text{ομ.}}(V)_m$. Μάλιστα, κάνοντας χρήση πλήρους επαγωγής διαπιστώνουμε ότι

$$\Gamma_{\text{ομ.}}(V)_m \cdot f^l \subseteq \Gamma_{\text{ομ.}}(V)_m\,, \;\; \forall l \in \mathbb{N}.$$

[24]Προσοχή! Επειδή $\mathbf{k}(\mathbf{V}(I_{(\mathsf{X}_i)})) \cong \mathbf{k}(V) \subseteq \mathbf{Fr}(\Gamma_{\text{ομ.}}(V))$, οι f και $f_0, \ldots, f_n$, θεωρούμενες ως στοιχεία τού σώματος $\mathbf{k}(V)$, ταυτίζονται! Ως εκ τούτου, δεν χρειάζεται να κάνουμε διάκριση μεταξύ αυτών των συναρτήσεων.

Ιδιαιτέρως, $\overline{\mathsf{X}}_0^m \cdot f^l \in \Gamma_{\text{ομ.}}(V)_m \subseteq \Gamma_{\text{ομ.}}(V)$, $\forall l \in \mathbb{N}$, απ' όπου έπεται ότι

$$\Gamma_{\text{ομ.}}(V)[f] \subseteq \Gamma_{\text{ομ.}}(V) + \frac{1}{\overline{\mathsf{X}}_0^m} \cdot \Gamma_{\text{ομ.}}(V) \subseteq \mathbf{Fr}(\Gamma_{\text{ομ.}}(V)).$$

Προφανώς, ο δακτύλιος $\Gamma_{\text{ομ.}}(V) + \frac{1}{\overline{\mathsf{X}}_0^m} \cdot \Gamma_{\text{ομ.}}(V)$ αποτελεί έναν πεπερασμένως παραγόμενο $\Gamma_{\text{ομ.}}(V)$-μόδιο. Επειδή ο δακτύλιος $\Gamma_{\text{ομ.}}(V) = \Gamma(\mathbf{C}(V))$ είναι ναιτεριανός (βλ. το (c) τής ασκήσεως **A-1-36**, το (a) τής ασκήσεως **A-3-11** και το (a) τής σημειώσεως 3.4.2), η πρόταση 1.9.11 μας πληροφορεί ότι ο $\Gamma_{\text{ομ.}}(V) + \frac{1}{\overline{\mathsf{X}}_0^m} \cdot \Gamma_{\text{ομ.}}(V)$ είναι ναιτεριανός μόδιος, οπότε ο υπομόδιός του $\Gamma_{\text{ομ.}}(V)[f]$ είναι πεπερασμένως παραγόμενος. Άρα, ως δακτύλιος, ο $\Gamma_{\text{ομ.}}(V)[f]$ είναι (εξ ορισμού) μοδιακώς πεπερασμένως υπεράνω τού $\Gamma_{\text{ομ.}}(V)$. Κατά την πρόταση 1.10.2 η f είναι ακέραιο στοιχείο υπεράνω τού $\Gamma_{\text{ομ.}}(V)$, πράγμα που σημαίνει ότι υφίσταται μια εξίσωση τής μορφής

$$f^\mu + g_1 f^{\mu-1} + \cdots + g_{\mu-1} f + g_\mu = 0_{\Gamma_{\text{ομ.}}(V)},$$

όπου $\mu \in \mathbb{N}$ και $g_1, \ldots, g_\mu \in \Gamma_{\text{ομ.}}(V)$. Η $f = f_0 \in \mathbf{k}(V)$ είναι ομογενές στοιχείο τού ($\mathbb{Z}$-βαθμολογημένου) δακτυλίου $\Gamma_{\text{ομ.}}(V)_{\overline{\mathsf{X}_0}}$ βαθμού 0. Επειδή $\Gamma_{\text{ομ.}}(V)_j \subseteq (\Gamma_{\text{ομ.}}(V)_{\overline{\mathsf{X}_0}})_j$, $\forall j \in \mathbb{Z}$ (πρβλ. 2.3.10, 2.3.11 (b)), μπορούμε δίχως βλάβη τής γενικότητας να υποθέσουμε ότι $g_1, \ldots, g_\mu \in \Gamma_{\text{ομ.}}(V)_0 = \mathbf{k}$ (διότι είναι δυνατόν να αντικαταστήσουμε τις $g_1, \ldots, g_\mu$ με τις 0-στές ομογενείς συνιστώσες τους στην ανωτέρω εξίσωση). Ως εκ τούτου, η f, ως συνάρτηση μηδενίζουσα ένα μονικό πολυώνυμο με συντελεστές ειλημμένους από το $\mathbf{k}$, είναι ένα αλγεβρικό στοιχείο υπεράνω τού (εξ υποθέσεως *αλγεβρικώς κλειστού*) σώματος $\mathbf{k}$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $f \in \mathbf{k}$. □

Ασκήσεις

A-3-37. Εάν το $W \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ είναι ένα συσχετικό αλγεβρικό σύνολο, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(a) Το W είναι συσχετική ποικιλότητα εάν και μόνον εάν το $\overline{W} \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι προβολική ποικιλότητα.

(b) Εάν η $W = \bigcup_{i=1}^{\kappa} W_i$ είναι η αποσύνθεση τού W σε ανάγωγες συνιστώσες, τότε η $\overline{W} = \bigcup_{i=1}^{\kappa} \overline{W_i}$ είναι η αποσύνθεση τής προβολικής κλειστής του θήκης $\overline{W}$ σε ανάγωγες συνιστώσες.

(c) Εάν $W \subsetneqq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$, τότε για κάθε $i \in \{1, \ldots, \kappa\}$ είτε $\overline{W}_i \nsubseteqq \mathbb{H}^\infty_0$ είτε $\mathbb{H}^\infty_0 \nsubseteqq \overline{W}_i$.

A-3-38. Έστω ότι οι $V, V' \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι δυο προβολικές ποικιλότητες με $V \subseteq V' \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, όπου $\mathbf{k}$ ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα. Εάν η V είναι μια προβολική υπερεπιφάνεια, να αποδειχθεί ότι είτε $V' = V$ είτε $V' = \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$.

A-3-39. Έστω ότι το $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι μια προβολική ποικιλότητα ($\mathbf{k}$ αλγεβρικώς κλειστό) και ότι το I είναι ένα ομογενές πρώτο ιδεώδες τού πολυωνυμικού δακτυλίου $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, τέτοιο ώστε να ισχύει $V = \mathbf{V}_+(I)$. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(a) Εάν $\mathbb{H}^\infty_0 \subseteq V$, τότε είτε $V = \mathbb{H}^\infty_0$ είτε $V = \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$.

(b) Εάν $V = \mathbb{H}^\infty_0$, τότε $\mathbf{V}(I_*) = \varnothing$, ενώ εάν $V = \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, τότε $\mathbf{V}(I_*) = \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$.

A-3-40. Έστω ότι το $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο ($\mathbf{k}$ αλγεβρικώς κλειστό) και ότι το I είναι ένα ομογενές ιδεώδες τού πολυωνυμικού δακτυλίου $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, τέτοιο ώστε να ισχύει $V = \mathbf{V}_+(I)$. Υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει ανάγωγη συνιστώσα τού V περιεχόμενη στο $\mathbb{H}^\infty_0$ ή περιέχουσα το $\mathbb{H}^\infty_0$, να αποδειχθεί ότι το $\mathbf{V}(I_*)$ είναι ένα συσχετικό αλγεβρικό σύνολο $\subsetneqq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ και ότι $V = \overline{\mathbf{V}(I_*)}$.

A-3-41. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(a) Εάν το $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι μια προβολική ποικιλότητα, για την οποία ισχύει $V \subseteq \mathbb{H}^\infty_0$, τότε $V \cong V' \subseteq \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbf{k}}$.

(b) Κάθε προβολική ποικιλότητα $V \subseteq \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$ είναι ισόμορφη με μια προβολική ποικιλότητα $V' \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ (για κάποιον $n \in \mathbb{N}_0$), τέτοια ώστε να ισχύει $\mathbb{H}^\infty_i \nsubseteq V'$ για κάθε $i \in \{0, \ldots, n\}$.

A-3-42. Εάν το $\mathbf{k}$ είναι ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα, να προσδιορισθούν όλες οι υποποικιλότητες των προβολικών χώρων $\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ και $\mathbb{P}^2_{\mathbf{k}}$.

A-3-43. Έστω $P := [0_{\mathbf{k}} : 1_{\mathbf{k}} : 0_{\mathbf{k}}] \in \mathbb{P}^2_{\mathbf{k}}$. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο των ευθειών των διερχομένων από το P συνίσταται από τις ευθείες $\{\mathbb{L}_\lambda | \lambda \in \mathbf{k}\}$ και την επ' άπειρον ευθεία $\mathbb{L}^\infty$, όπου

$$\mathbb{L}_\lambda := \mathbf{V}_+(\mathsf{X} - \lambda \mathsf{Z}) = \{[\lambda : t : 1_{\mathbf{k}}] \, | t \in \mathbf{k}\} \cup \{P\}, \quad \mathbb{L}^\infty := \mathbb{H}^\infty_2 = \mathbf{V}_+(\mathsf{Z}).$$

A-3-44. (a) Έστω $[x : y : z] \in \mathbb{P}^2_{\mathbf{k}}$. Να αποδειχθεί ότι το

$$\{(a, b, c) \in \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}} \, | ax + by + cz = 0_{\mathbf{k}}\}$$

είναι ένα υπερεπίπεδο εντός τού $\mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$.

(b) Εάν το $\mathbf{k}$ είναι ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα και το $\mathcal{P}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο τού προβολικού επιπέδου $\mathbb{P}^2_{\mathbf{k}}$, να αποδειχθεί η ύπαρξη μιας ευθείας $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbf{k}}$ μη διερχομένης από κανένα σημείο $P \in \mathcal{P}$.

A-3-45. Έστω $\mathbf{k}$ ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα. Θεωρώντας τή λεγομένη **συσχετική συνεστραμμένη καμπύλη**

$$W := \{(t, t^2, t^3) \in \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}} \mid t \in \mathbf{k}\} = \mathbf{V}(\mathsf{Y} - \mathsf{X}^2, \mathsf{Z} - \mathsf{X}^3) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$$

(πρβλ. ασκήσεις **A-1-47** (b) και **A-3-32**), καθώς και την αντίστοιχη **προβολική συνεστραμμένη καμπύλη**

$$V := \{[u^3 : u^2 t : u t^2 : t^3] \in \mathbb{P}^3_{\mathbf{k}} \mid [u : t] \in \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}\},$$

να αποδειχθούν τα εξής:

(a) $\mathbf{I}_+(V) = \langle \mathsf{XZ} - \mathsf{Y}^2, \mathsf{YT} - \mathsf{Z}^2, \mathsf{XT} - \mathsf{YZ} \rangle \subset \mathbf{k}[\mathsf{X}, \mathsf{Y}, \mathsf{Z}, \mathsf{T}]$.

(b) $V = \overline{W} = W \cup [0_{\mathbf{k}} : 0_{\mathbf{k}} : 0_{\mathbf{k}} : 1_{\mathbf{k}}]$.

A-3-46. Έστω I ένα ομογενές ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ και έστω

$$\operatorname{sat}(I) := \left\{ F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n] \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists \nu \in \mathbb{N}_0 : \mathsf{X}_0^{i_0} \mathsf{X}_1^{i_1} \cdots \mathsf{X}_n^{i_n} F \in I, \\ \text{για κάθε } (i_0, i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}_0^{n+1} \\ \text{με } i_0 + i_1 + \cdots + i_n = \nu \end{array} \right\}$$

ο λεγόμενος **κορεσμός** του. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(a) $\operatorname{sat}(I) = \bigcup_{\nu \geq 0} \left(I : \left\langle \left\{ \mathsf{X}_0^{i_0} \cdots \mathsf{X}_n^{i_n} \,\middle|\, (i_0, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}_0^{n+1} : i_0 + \cdots + i_n = \nu \right\} \right\rangle \right)$.

(b) Το $\operatorname{sat}(I)$ είναι ένα ομογενές ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$.

(c) $I \subseteq \operatorname{sat}(I)$ και $\mathbf{V}_+(I) = \mathbf{V}_+(\operatorname{sat}(I))$.

(Το I καλείται **κεκορεσμένο ιδεώδες** όταν $\operatorname{sat}(I) = I$.)

(d) Το $\operatorname{sat}(I)$ είναι αφ' εαυτού κεκορεσμένο ιδεώδες.

(e) Εάν το $\mathbf{k}$ είναι αλγεβρικώς κλειστό και $I \neq \langle \mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n \rangle$, τότε το $\operatorname{Rad}(I)$ είναι κεκορεσμένο ιδεώδες.

A-3-47. Έστω $0 \neq F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_d$, για κάποιον $d \geq 1$, και έστω

$$\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_{(F)} = \left\{ \tfrac{G}{F^\nu} \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_F \,|\, \nu \in \mathbb{N}_0,\ G \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_{\nu d} \right\}$$

η ομογενής τοπικοποίηση (βλ. 3.2.12 (b)). Εάν το I είναι ένα ομογενές ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, τότε το ιδεώδες

$$I_{(F)} = \left\{ \tfrac{G}{F^\nu} \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_F \,|\, \nu \in \mathbb{N}_0,\ G \in I \cap \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_{\nu d} \right\}$$

τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_{(F)}$ (πρβλ. το (c) τής ασκήσεως **A-3-8**) καλείται **αποομογενοποίηση τού** I **ως προς το** F. (Εάν $F = \mathsf{X}_i \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_1$, για κάποιον $i \in \{0, \ldots, n\}$, τότε το $I_{(\mathsf{X}_i)}$ ταυτίζεται με τη συνήθη αποομογενοποίηση τού I ως προς τη μεταβλητή X_i, διότι για κάθε $G \in I \cap \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_\nu$ έχουμε

$$\tfrac{G}{\mathsf{X}_i^\nu} = G\left(\tfrac{\mathsf{X}_0}{\mathsf{X}_i}, \ldots, \tfrac{\mathsf{X}_n}{\mathsf{X}_i} \right) = G\left(\tfrac{\mathsf{X}_0}{\mathsf{X}_i}, \ldots, \tfrac{\mathsf{X}_{i-1}}{\mathsf{X}_i}, 1_{\mathbf{k}}, \tfrac{\mathsf{X}_{i+1}}{\mathsf{X}_i}, \ldots, \tfrac{\mathsf{X}_n}{\mathsf{X}_i} \right).$$

Πρβλ. 3.6.2, 3.6.9 και 3.7.13 (a).) Λέμε ότι δυο ομογενή ιδεώδη I, I' τού πολυωνυμικού δακτυλίου $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ **συμπίπτουν τοπικώς** όταν

$$I_{(F)} = I'_{(F)}, \ \ \forall F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_d \smallsetminus \{0\} \text{ και } \forall d \geq 1.$$

Να αποδειχθεί ότι για δυο ομογενή ιδεώδη I, I' τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ οι κάτωθι συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(a) Τα I, I' συμπίπτουν τοπικώς.

(b) $I_{(\mathsf{X}_i)} = I'_{(\mathsf{X}_i)}, \forall i \in \{0, \ldots, n\}$.

(c) $\mathrm{sat}(I) = \mathrm{sat}(I')$.

(d) $\exists \kappa \in \mathbb{N}_0 : I \cap \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_m = I' \cap \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]_m$, $\forall m \geq \kappa$.

A-3-48. Έστω ότι το I είναι ένα ομογενές ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ ($\mathbf{k}$ αλγεβρικώς κλειστό) και ότι το $\varnothing \neq V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο. Τότε λέμε ότι

(i) **το I περιγράφει το V συνολοθεωρητικώς** $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} V = \mathbf{V}_+(I)$ (δηλαδή $\mathrm{Rad}(I) = \mathbf{I}_+(V)$),

(ii) **το I περιγράφει το V τοπικώς ιδεωδοθεωρητικώς** $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{sat}(I) = \mathbf{I}_+(V)$,

(iii) **το I περιγράφει το V ομογενώς ιδεωδοθεωρητικώς** $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} I = \mathbf{I}_+(V)$.

Να αποδειχθούν τα εξής:

(a) Για τις ανωτέρω συνθήκες ισχύουν οι συνεπαγωγές (iii)⇒(ii) και (ii)⇒(i).

(b) Εν γένει δεν ισχύουν οι συνεπαγωγές (i)⇒(ii) και (ii)⇒(iii).

3.8 Κατηγορική Ταξινόμηση Ποικιλοτήτων και Αλγεβρικών Συνόλων

Η κατηγορία των προβολικών ($\mathbf{k}$-)ποικιλοτήτων $\mathbf{k}$-$\mathfrak{PVar}$ είναι πλήρης υποκατηγορία τής κατηγορίας $\mathbf{k}$-$\mathfrak{QPVar}$ των λεγομένων «σχεδόν προβολικών ($\mathbf{k}$-)ποικιλοτήτων». Όπως θα εξηγηθεί στην παρούσα ενότητα, η $\mathbf{k}$-$\mathfrak{QPVar}$ μπορεί να θεωρηθεί ως *η ευρύτερη δυνατή κατηγορία ποικιλοτήτων*, ήτοι περιέχουσα (εντός τής κλάσεως των αντικειμένων της) όλα τα είδη των άλλων ποικιλοτήτων που έχουμε συναντήσει μέχρι τούδε.

3.8.1 Ορισμός. Μια **σχεδόν προβολική** ($\mathbf{k}$-)**ποικιλότητα** είναι ένα μη κενό, ανοικτό υποσύνολο (ως προς τη σχετική τοπολογία Zariski) μιας προβολικής ποικιλότητας[25] $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$. (Οι σχεδόν προβολικές ποικιλότητες *είναι πάντοτε ανάγωγες*. Τούτο έπεται από τον ορισμό 3.3.23 (a) και το πόρισμα 1.6.4.)

3.8.2 Σημείωση. (a) Μέχρι στιγμής έχουμε ορίσει μόνον υποποικιλότητες *προβολικών ποικιλοτήτων* (βλ. 3.3.23 (b)). Εάν το Y είναι μια *σχεδόν προβολική ποικιλότητα*, τότε είναι εξ ορισμού ένα κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο μιας προβολικής ποικιλότητας $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$. Κάθε κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο U τής Y είναι και κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο τής $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ (δηλαδή αφ' εαυτού σχεδόν προβολική ποικιλότητα) και καλείται **ανοικτή υποποικιλότητα τής** Y. Κάθε κατά Zariski κλειστό και ανάγωγο υποσύνολο W τής Y καλείται **κλειστή υποποικιλότητα τής** Y. (Εν προκειμένω, $W = \mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_V}(W) \cap Y$

[25] Ως εκ τούτου, κάθε σχεδόν προβολική ποικιλότητα Y είναι ένα **τοπικώς κλειστό υποσύνολο** (ήτοι η τομή ενός ανοικτού και ενός κλειστού υποσυνόλου) **ενός προβολικού χώρου** $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ (διότι $Y = V \cap U$, όπου U ένα ανοικτό υποσύνολο τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$).

και το W είναι κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο τού $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_V}(W)$.) Πρβλ. άσκηση **A-3-51**. Εντός αυτού τού γενικότερου ορισμολογικού πλαισίου, οι υποποικιλότητες μιας προβολικής ποικιλότητας $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, όπως αυτές εισήχθησαν στο 3.3.23 (b), είναι οι *κλειστές υποποικιλότητες τής* V.

(b) Κάθε προβολική ποικιλότητα $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι *προφανώς* σχεδόν προβολική ποικιλότητα (και κλειστή υποποικιλότητα τού περιβάλλοντος προβολικού χώρου $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$). Ωστόσο, η ορθή εγκόλπωση τής $\mathbf{k}$-$\mathfrak{PVar}$ εντός τής $\mathbf{k}$-$\mathfrak{QPVar}$ απαιτεί *γενίκευση* τής εννοίας τής «προβολικής ποικιλότητας» προκειμένου να ορίζεται «μέχρις ισομορφισμού» (όπως συνέβη με την εγκόλπωση τής $\mathbf{k}$-$\mathfrak{AVar}$ εντός τής $\mathbf{k}$-$\mathfrak{QAVar}$, πρβλ. 2.5.18 (b)).

(c) Σημειωτέον ότι έχουμε ήδη ορίσει την έννοια τής *κανονικής συναρτήσεως* επί μη κενών, κατά Zariski ανοικτών υποσυνόλων τόσον *συσχετικών* όσον και *προβολικών* αλγεβρικών συνόλων, καθώς και την έννοια τού *μορφισμού* μεταξύ τέτοιων υποσυνόλων (βλ. 2.4.15, 2.5.16 (d), 3.4.11 και 3.4.12). Επομένως, έχουμε τη δυνατότητα θεσπίσεως τής εννοίας τού *μορφισμού* με πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών του ανήκον σε *οιαδήποτε εκ των ανωτέρω κλάσεων* ως ακολούθως:

3.8.3 Ορισμός. Ας υποθέσουμε ότι τα Y, Z είναι δυο μη κενά, κατά Zariski ανοικτά υποσύνολα **είτε** συσχετικών **είτε** προβολικών αλγεβρικών συνόλων[26]. Μια απεικόνιση $\varphi : Y \longrightarrow Z$ μεταξύ αυτών καλείται **μορφισμός** όταν είναι συνεχής (ως προς την τοπολογία Zariski) και για κάθε κανονική συνάρτηση $f : Z \longrightarrow \mathbf{k}$ επί τού Z η $f \circ \varphi : Y \longrightarrow \mathbf{k}$ είναι μια κανονική συνάρτηση επί τού Y. Ένας μορφισμός τέτοιου είδους καλείται **ισομορφισμός** όταν υπάρχει ένας μορφισμός $\psi : Z \longrightarrow Y$ για τον οποίο ισχύουν οι ισότητες

$$\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_Y, \quad \varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_Z.$$

(Ο συμβολισμός $Y \cong Z$ δηλοί, και σε αυτήν την περίπτωση, ότι υφίσταται ένας ισομορφισμός μεταξύ αυτών.)

3.8.4 Πρόταση. *Έστω Y ένα μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο **είτε** ενός συσχετικού αλγεβρικού συνόλου **είτε** ενός προβολικού αλγεβρικού συνόλου. Εάν το Z είναι ένα μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο ενός **συσχετικού** αλγεβρικού συνόλου εντός τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$, τότε μια απεικόνιση $\varphi : Y \longrightarrow Z$ είναι μορφισμός* (υπό την έννοια τού 3.8.3) *εάν και μόνον εάν υπάρχουν n κανονικές συναρτήσεις*

$$f_1, \ldots, f_n : Y \longrightarrow \mathbf{k}$$

*επί τού Y (που καλούνται, ιδιαιτέρως, **συνιστώσες συναρτήσεις τής** φ), ούτως ώστε να ισχύει*

$$\varphi(P) = (f_1(P), \ldots, f_n(P)), \ \forall P \in Y.$$

[26]Εν προκειμένω, *δεν αποκλείουμε* το ενδεχόμενο το ένα να είναι μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο ενός *συσχετικού* αλγεβρικού συνόλου και το άλλο να είναι μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο ενός *προβολικού* αλγεβρικού συνόλου!

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν η $\varphi : Y \longrightarrow Z$ είναι μορφισμός και εάν υποθέσουμε ότι οι $\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n$ είναι οι συναρτήσεις συντεταγμένων τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$, τότε αρκεί να θέσουμε

$$f_j := \mathsf{X}_j|_Z \circ \varphi, \ \ \forall j \in \{1, \ldots, n\},$$

καθότι οι συναρτήσεις $\mathsf{X}_j|_Z$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, είναι κανονικές επί τού Z. Και αντιστρόφως· ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν n κανονικές συναρτήσεις

$$f_1, \ldots, f_n : Y \longrightarrow \mathbf{k}$$

επί τού Y, ούτως ώστε να ισχύει

$$\varphi(P) = (f_1(P), \ldots, f_n(P)), \ \ \forall P \in Y,$$

και ότι $Y \subseteq \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$. Θα δείξουμε εν πρώτοις ότι η φ είναι συνεχής. Έστω $P \in Y$ και έστω U ένα κατά Zariski ανοικτή περιοχή τού $\varphi(P)$. Δίχως βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το είναι τής μορφής

$$U = Z_g := Z \smallsetminus \mathbf{V}(G) = \{ Q \in Z | \, G(Q) \neq 0_{\mathbf{k}} \},$$

για κάποια $g \in \mathbf{k}[Z] \cong \mathbf{k}[\mathsf{Z}_1, \ldots, \mathsf{Z}_n]$ με $\overline{G} = \theta_Z(g)$ (βλ. 2.4.2 και πρόταση 2.4.9). Έστω V μια κατά Zariski ανοικτή περιοχή τού P με $V \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}} \hookrightarrow \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$ (και το $\mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ θεωρούμενο ως ανοικτό υποσύνολο τού $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$, για κατάλληλον m), τέτοια ώστε η f_j να γράφεται ως κλάσμα

$$H_j(P') \neq 0_{\mathbf{k}}, \ \ \ f_j(P') = \frac{G_j(P')}{H_j(P')}, \ \ \forall P' \in V,$$

όπου $G_j, 0 \neq H_j \in \mathbf{k}[\mathsf{Y}_1, \ldots, \mathsf{Y}_m] \cong \mathbf{k}[\mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}]$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$. Τότε η ρητή συνάρτηση

$$\Xi := g\left(\frac{G_1}{H_1}, \ldots, \frac{G_n}{H_n}\right) \in \mathbf{k}\left(\mathsf{Y}_1, \ldots, \mathsf{Y}_m\right)$$

εκφράζεται ως κλάσμα

$$\Xi = \frac{\widetilde{G}}{\left(\prod\limits_{j=1}^{n} H_j\right)^l}, \quad \widetilde{G} \in \mathbf{k}[\mathsf{Y}_1, \ldots, \mathsf{Y}_m],$$

για κάποιον κατάλληλο $l \in \mathbb{N}_0$. Επομένως,

$$\Xi(P) = g(f_1(P), \ldots, f_n(P)) = g(\varphi(P)) \neq 0_{\mathbf{k}},$$

διότι $\varphi(P) \in U = Z_g$. Επιπροσθέτως, το

$$\begin{aligned} V \cap \varphi^{-1}(U) &= \{P' \in V \mid \varphi(P') \in U\} \\ &= \{P' \in V \mid g(\varphi(P')) \neq 0_{\mathbf{k}}\} \\ &= \left\{P' \in V \,\middle|\, \widetilde{G}(\varphi(P')) \neq 0_{\mathbf{k}}\right\} \end{aligned}$$

είναι μια κατά Zariski ανοικτή περιοχή τού P με $\varphi(V \cap \varphi^{-1}(U)) \subseteq U$. Άρα η φ είναι συνεχής.

Εν συνεχεία θεωρούμε τυχούσα κανονική συνάρτηση $s : U = Z_g \longrightarrow \mathbf{k}$. Αρκεί να αποδειχθεί ότι η $s \circ (\varphi|_{\varphi^{-1}(U)}) : \varphi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbf{k}$ είναι κανονική συνάρτηση. Έστω και πάλι $V \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}} \hookrightarrow \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$ μια κατά Zariski ανοικτή περιοχή τού $P \in \varphi^{-1}(U)$ εντός τού Y, ούτως ώστε η f_j να γράφεται ως κλάσμα

$$H_j|_V \neq 0_{\mathbf{k}}, \quad f_j|_V = \frac{G_j}{H_j},$$

όπου $G_j, 0 \neq H_j \in \mathbf{k}[\mathsf{Y}_1, \ldots, \mathsf{Y}_m] \cong \mathbf{k}[\mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}]$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$. Επειδή (κατά το (a) τής προτάσεως 2.4.9 και το (c) τής προτάσεως 2.4.28),

$$\mathcal{O}_Z(U) \cong \mathbf{k}[Z_g] \cong \mathbf{k}[Z]_g \cong \mathbf{k}[\mathsf{Z}_1, \ldots, \mathsf{Z}_n]_g,$$

έχουμε $s = \frac{q}{g^\nu}$, για κάποια $q \in \mathbf{k}[Z]$ και κάποιον $\nu \in \mathbb{N}_0$. Εξ αυτού έπεται ότι η συνάρτηση

$$s \circ (\varphi|_{V \cap \varphi^{-1}(U)}) = \frac{q\left(\frac{G_1}{H_1}, \ldots, \frac{G_n}{H_n}\right)}{g^\nu\left(\frac{G_1}{H_1}, \ldots, \frac{G_n}{H_n}\right)}$$

είναι κανονική επί τού $V \cap \varphi^{-1}(U)$. Άρα η $\varphi : Y \longrightarrow Z$ είναι μορφισμός. □

3.8.5 Πρόταση. *Έστω Y ένα μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο **είτε** ενός συσχετικού αλγεβρικού συνόλου **είτε** ενός προβολικού αλγεβρικού συνόλου. Εάν το Z είναι ένα μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο ενός **προβολικού** αλγεβρικού συνόλου εντός τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, τότε μια απεικόνιση $\varphi : Y \longrightarrow Z$ είναι μορφισμός* (υπό την έννοια τού 3.8.3) *εάν και μόνον εάν για κάθε σημείο $P \in Y$ υπάρχουν ένα κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο $U \subseteq Y$ με $P \in U$, καθώς και $n+1$ κανονικές συναρτήσεις*

$$f_0, \ldots, f_n : Y \longrightarrow \mathbf{k}$$

*επί τού Y (που καλούνται, ιδιαιτέρως, **τοπικές συνιστώσες συναρτήσεις τής** φ), ούτως ώστε να ισχύει*

$$\varphi(Q) = [f_0(Q) : \ldots : f_n(Q)], \ \ \forall Q \in U.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε $j, i \in \{0, \ldots, n\}$ θεωρούμε τα σύνολα

$$Z_j := U_j(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}) \cap Z, \;\; Y_j := \varphi^{-1}(Z_j),$$

(βλ. 3.1.3), καθώς και τις κανονικές συναρτήσεις

$$\vartheta_i : Z_j \longrightarrow \mathbf{k}, \;\; [a_0 : \ldots : a_n] \longmapsto \vartheta_i([a_0 : \ldots : a_n]) := \frac{a_i}{a_j}.$$

Προφανώς,

$$Y = Y_0 \cup Y_1 \cup \cdots \cup Y_n.$$

Για οιοδήποτε σημείο $P \in Y_j$, $j \in \{0, \ldots, n\}$, έχουμε

$$\varphi(P) = [f_0(P) : \ldots : f_n(P)],$$

όπου $f_i := \vartheta_i \circ \varphi : Y_j \longrightarrow \mathbf{k}$ για κάθε $i \in \{0, \ldots, n\}$. Εάν η $\varphi : Y \longrightarrow Z$ είναι μορφισμός, τότε το Y_j είναι κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο τού Y και οι f_i, $i \in \{0, \ldots, n\}$, κανονικές συναρτήσεις.

Αντιστρόφως τώρα· ας υποθέσουμε ότι για κάθε σημείο $P \in Y_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, υπάρχουν ένα κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο $X_j \subseteq Y$ με $P \in X_j$, καθώς και $n+1$ κανονικές συναρτήσεις

$$f_0, \ldots, f_n : Y_j \longrightarrow \mathbf{k}$$

επί τού Y_j, ούτως ώστε να ισχύει

$$\varphi(P) = [f_0(P) : \ldots : f_n(P)], \;\; \forall P \in X_j.$$

Μιμούμενοι τη μέθοδο που ακολουθήσαμε στην απόδειξη τής προτάσεως 3.8.4 διαπιστώνουμε ότι η $\varphi|_{X_j}$ είναι συνεχής (ως προς την τοπολογία Zariski). Εάν το V_j είναι ένα κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο τού Z_j, $\beta : V_j \longrightarrow \mathbf{k}$ μια κανονική συνάρτηση επί τού V_j και $Q \in \varphi^{-1}(V_j)$, τότε υπάρχει μια κατά Zariski ανοικτή περιοχή $W_j \subseteq V_j$ τού $\varphi(Q)$ με $\varphi^{-1}(W_j) \cap X_j \neq \varnothing$, καθώς και ομογενή πολυώνυμα G, $0 \neq H \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ ιδίου βαθμού, ούτως ώστε να ισχύει

$$H(a_0, \ldots, a_n) \neq 0_{\mathbf{k}}, \;\; \beta([a_0 : \ldots : a_n]) = \tfrac{G(a_0, \ldots, a_n)}{H(a_0, \ldots, a_n)}, \; \forall [a_0 : \ldots : a_n] \in W_j.$$

Κατά συνέπειαν, για οιοδήποτε σημείο $P \in \varphi^{-1}(W_j) \cap X_j$ έχουμε

$$H(f_0(P), \ldots, f_n(P)) \neq 0_{\mathbf{k}}, \;\; \beta(\varphi(P)) = \tfrac{G(f_0(P), \ldots, f_n(P))}{H(f_0(P), \ldots, f_n(P))}.$$

Επειδή οι κανονικές συναρτήσεις οι οριζόμενες επί τού (κατά Zariski ανοικτού συνόλου) $\varphi^{-1}(W_j) \cap X_j$ δομούν μια $\mathbf{k}$-άλγεβρα, ο αριθμητής και ο παρονομαστής τού ανωτέρω κλάσματος και -κατ' επέκτασιν- και το ίδιο το κλάσμα αποτελούν κανονικές συναρτήσεις στο σημείο P. Ως εκ τούτου, η σύνθεση

$$\beta \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(W_j)\cap X_j} : \varphi^{-1}(W_j) \cap X_j \longrightarrow \mathbf{k}$$

είναι μια κανονική συνάρτηση και η $\varphi|_{Y_j} : Y_j \longrightarrow Z_j$ μορφισμός για κάθε $j \in \{0, \ldots, n\}$. Τέλος, επειδή το $(Y_j)_{0\leq j\leq n}$ αποτελεί ένα κατά Zariski ανοικτό κάλυμμα τού Y, η ίδια η $\varphi : Y \longrightarrow Z$ είναι ωσαύτως μορφισμός επί τη βάσει τού (a) τής ασκήσεως **A-3-52**. □

3.8.6 Πόρισμα. *Ας υποθέσουμε ότι τα Y, Z είναι δυο μη κενά, κατά Zariski ανοικτά υποσύνολα **είτε** συσχετικών **είτε** προβολικών αλγεβρικών συνόλων και ότι η $\varphi : Y \longrightarrow Z$ είναι ένας μορφισμός (υπό την έννοια τού* 3.8.3). *Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(a) *Εάν το U είναι ένα μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο τού Y, τότε ο περιορισμός $\varphi|_U : U \longrightarrow Z$ είναι μορφισμός.*

(b) *Εάν το U είναι ένα μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο τού Z, τότε ο περιορισμός $\varphi|_{\varphi^{-1}(U)} : \varphi^{-1}(U) \longrightarrow U$ είναι μορφισμός.*

(c) *Εάν η $\varphi : Y \longrightarrow Z$ είναι ισομορφισμός (υπό την έννοια τού* 3.8.3), *τότε είναι ομοιομορφισμός (ως προς την τοπολογία Zariski).*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το (a) (και, αντιστοίχως, το (b)) έπεται από το ότι οι περιορισμοί των συνιστωσών (ή τοπικών συνιστωσών) συναρτήσεων τής φ επί τού U (και, αντιστοίχως, επί τού $\varphi^{-1}(U)$) είναι κανονικές συναρτήσεις και από τις προτάσεις 3.8.4 και 3.8.5. Το (c) είναι προφανές από τους ορισμούς. □

3.8.7 Πόρισμα. *Έστω $n \in \mathbb{N}_0$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(a) *Η επιρριπτική απεικόνιση*

$$\mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}^{n+1}}\} \ni (a_0, \ldots, a_n) \longmapsto \varpi(a_0, \ldots, a_n) := [a_0 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$$

(βλ. 3.3.16) *είναι μορφισμός.*

(b) *Οι απεικονίσεις*

$$\phi_i : \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow U_i = U_i(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}), \;\; \phi_i^{-1} : U_i = U_i(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}) \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},$$

(βλ. 3.1.3) *είναι ισομορφισμοί για κάθε $i \in \{0, \ldots, n\}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a) Οι τοπικές συνιστώσες συναρτήσεις

$$f_i := \vartheta_i \circ \varpi : \varpi^{-1}(U_j(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})) \longrightarrow \mathbf{k}, \;\; (a_0, \ldots, a_n) \longmapsto \frac{a_i}{a_j},$$

τής ϖ είναι κανονικές για οιουσδήποτε $i, j \in \{0, \ldots, n\}$. Αρκεί λοιπόν η εφαρμογή τής προτάσεως 3.8.5.

(b) Κατ' αναλογίαν, οι τοπικές συνιστώσες συναρτήσεις των ϕ_i και οι συνιστώσες συναρτήσεις των ϕ_i^{-1} είναι κανονικές, οπότε αρκεί η εφαρμογή των προτάσεων 3.8.5 και 3.8.4, αντιστοίχως. □

3.8.8 Πόρισμα. (a) *Κάθε κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο ενός συσχετικού αλγεβρικού συνόλου είναι ισόμορφο με ένα κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο ενός προβολικού αλγεβρικού συνόλου.*

(b) *Κάθε σχεδόν συσχετική ποικιλότητα είναι ισόμορφη με μια σχεδόν προβολική ποικιλότητα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a) Έστω Y ένα κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο ενός συσχετικού αλγεβρικού συνόλου V εντός ενός συσχετικού χώρου $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$. Δίχως βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $Y \neq \varnothing$. Επειδή (σύμφωνα με το (b) τού πορίσματος 3.8.7 και το (c) τού πορίσματος 3.8.6) η $\phi_0 : \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow U_0(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})$ είναι ισομορφισμός και -κατ' επέκτασιν- ομοιομορφισμός, το σύνολο $\phi_0(Y) \subseteq \phi_0(V) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι ένα κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο τού προβολικού αλγεβρικού συνόλου $\phi_0(V)$, όπου

$$\phi_0\big|_Y : \phi_0^{-1}(\phi_0(Y)) = Y \longrightarrow \phi_0(Y), \quad \phi_0\big|_V : \phi_0^{-1}(\phi_0(V)) = V \longrightarrow \phi_0(V),$$

ισομορφισμοί (επί τη βάσει τού (b) τού πορίσματος 3.8.6).

(b) Τούτο έπεται άμεσα από το (a) και τα πορίσματα 1.6.6 και 1.6.4. □

3.8.9 Ορισμός. Εάν το Y είναι μια σχεδόν (**k**-)προβολική ποικιλότητα, τότε, λαμβάνοντας υπ' όψιν το (b) τού πορίσματος 3.8.8, λέμε ότι το Y είναι

(a) **συσχετική ποικιλότητα** όταν είναι ισόμορφο (εντός τής κατηγορίας **k**-$\mathfrak{QPVar}$) με μια συσχετική ποικιλότητα,

(b) **σχεδόν συσχετική ποικιλότητα** όταν είναι ισόμορφο (εντός τής **k**-$\mathfrak{QPVar}$) με μια σχεδόν συσχετική ποικιλότητα, και

(c) **προβολική ποικιλότητα** όταν είναι ισόμορφο (εντός τής **k**-$\mathfrak{QPVar}$) με μια προβολική ποικιλότητα.

3.8.10 Σημείωση. Στην άσκηση **A-2-34** είχε παρατεθεί ένα παράδειγμα μιας σχεδόν συσχετικής αλλά μη συσχετικής ποικιλότητας. Κατ' αναλογίαν, στην άσκηση **A-3-49** παρατίθεται ένα παράδειγμα μιας σχεδόν προβολικής ποικιλότητας, η οποία δεν είναι *ούτε* προβολική *ούτε* συσχετική ποικιλότητα (υπό την έννοια τού ορισμού 3.8.9).

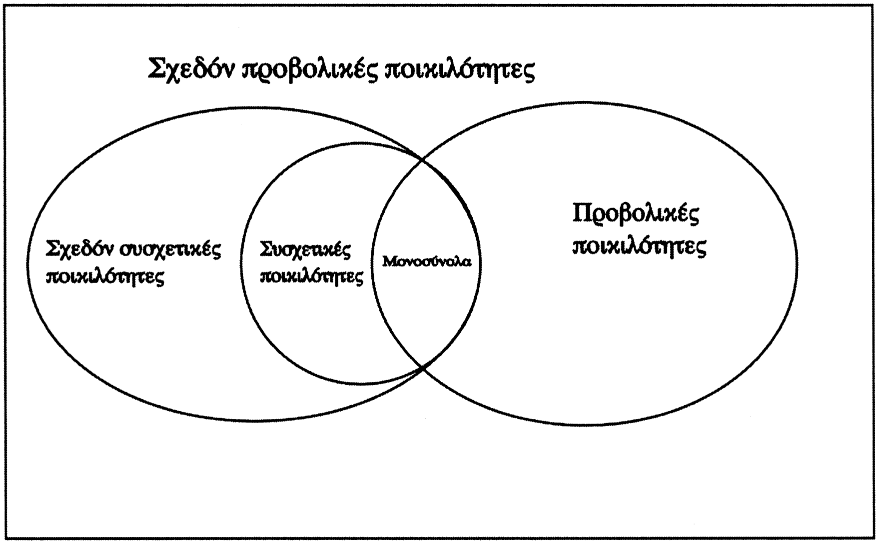
3.8.11 Πρόταση. *Εάν μια συσχετική ποικιλότητα είναι ισόμορφη (εντός τής* **k**-$\mathfrak{QPVar}$*) με μια προβολική ποικιλότητα, τότε αποτελείται από ένα και μόνον σημείο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω V μια προβολική ποικιλότητα. Κατά το θεώρημα 3.7.16 έχουμε $\mathcal{O}_V(V) \cong \mathbf{k}$. Εάν η V είναι ισόμορφη με μια συσχετική ποικιλότητα, τότε, σύμφωνα με το (b) τής προτάσεως 2.4.28 και την πρόταση 2.1.3,

$$\mathcal{O}_V(V) \cong \mathbf{k}[V] \cong \Gamma(V) \cong \mathbf{k}.$$

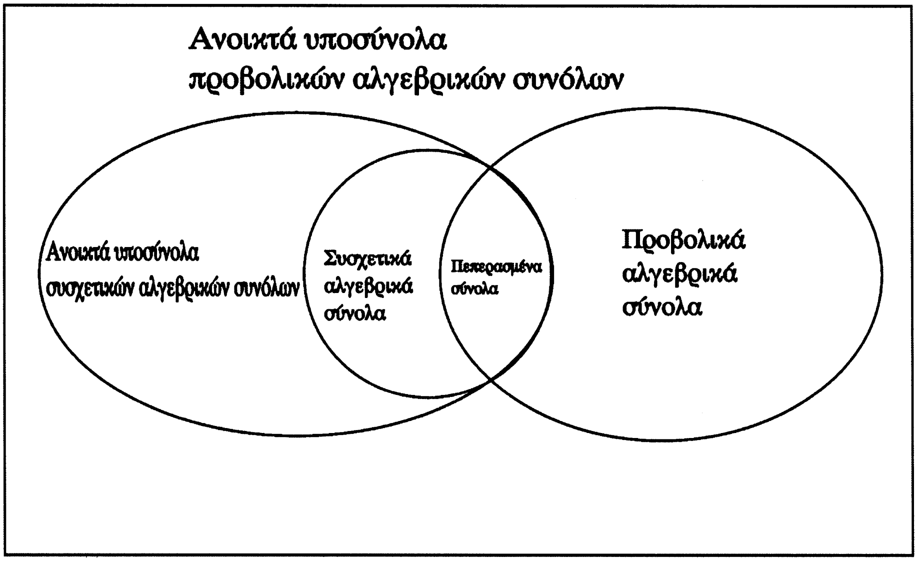
Κατά την άσκηση **A-2-2** ο τελευταίος ισομορφισμός ισοδυναμεί με το ότι η V αποτελείται από ένα και μόνον σημείο. □

Επί τη βάσει των ανωτέρω, έχουμε τη δυνατότητα «ταξινομήσεως» των κλάσεων αντικειμένων των κατηγοριών $\mathbf{k}$-$\mathfrak{AVar}$, $\mathbf{k}$-$\mathfrak{QAVar}$, $\mathbf{k}$-$\mathfrak{PVar}$ και $\mathbf{k}$-$\mathfrak{QPVar}$ όπως υποδεικνύεται στο σχήμα **15**.



Σχήμα 15

Αναφερόμενοι εφεξής (απλώς) σε κάποια **ποικιλότητα**, θα εννοούμε είτε μια συσχετική είτε μια σχεδόν συσχετική είτε μια προβολική είτε μια σχεδόν προβολική ποικιλότητα (ορισμένη υπεράνω ενός παγιωμένου σώματος $\mathbf{k}$). Εξάλλου, λαμβανομένου υπ' όψιν ότι οι ανάγωγες συνιστώσες προβολικών αλγεβρικών συνόλων είναι προβολικές ποικιλότητες, μπορούμε να επεκτείνουμε την εν λόγω «ταξινόμηση ποικιλοτήτων» σε μια ευρύτερη «ταξινόμηση (ανοικτών υποσυνόλων) αλγεβρικών συνόλων» (ανηκόντων στις κλάσεις Ob($\mathbf{k}$-$\mathfrak{AASets}$) ή Ob($\mathbf{k}$-$\mathfrak{PASets}$), βλ. σχήμα **16**).



Σχήμα 16

Η επόμενη πρόταση γενικεύει το λήμμα 2.5.30, και μας πληροφορεί ότι οιαδήποτε «ποικιλότητα» ή οιοδήποτε μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο ενός «αλγεβρικού συνόλου» είναι «*τοπικώς μια συσχετική ποικιλότητα*».

3.8.12 Πρόταση. *Έστω Y ένα μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο ενός προβολικού αλγεβρικού συνόλου $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$. Τότε το Y διαθέτει ένα κάλυμμα απαρτιζόμενο από κατά Zariski ανοικτά υποσύνολά του, καθένα των οποίων είναι αφ' εαυτού μια συσχετική ποικιλότητα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε τους ισομορφισμούς $\phi_i^{-1} : U_i = U_i(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}) \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ για κάθε $i \in A$, όπου $A := \{i \in \{0, \ldots, n\} \,|\, Y \cap U_i \neq \varnothing\}$. Προφανώς,

$$Y = \bigcup \{Y \cap U_i \,|\, i \in A\} \Rightarrow \phi_i^{-1}(Y) = \bigcup \{\phi_i^{-1}(Y \cap U_i) \,|\, i \in A\}.$$

Η εικόνα $\phi_i^{-1}(Y \cap U_i)$ είναι κατά Zariski ανοικτή εντός τού συσχετικού αλγεβρικού συνόλου $\phi_i^{-1}(V \cap U_i) \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$. Άρα το $\phi_i^{-1}(V \cap U_i) \smallsetminus \phi_i^{-1}(Y \cap U_i)$ είναι ένα κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού $\phi_i^{-1}(V \cap U_i)$ (και, κατ' επέκτασιν, και ολοκλήρου $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$), οπότε υπάρχει ένα ιδεώδες $I_i \subseteq \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\phi_i^{-1}(V \cap U_i) \smallsetminus \phi_i^{-1}(Y \cap U_i) = \mathbf{V}(I_i).$$

Εξ αυτού έπεται ότι

$$\begin{aligned}\phi_i^{-1}(Y \cap U_i) &= \phi_i^{-1}(V \cap U_i) \smallsetminus \mathbf{V}(I_i) = \phi_i^{-1}(V \cap U_i) \smallsetminus \bigcap_{F \in I_i} \mathbf{V}(F) \\ &= \bigcup_{F \in I_i} \left(\phi_i^{-1}(V \cap U_i) \smallsetminus \mathbf{V}(F)\right) \\ &= \bigcup \left\{ \phi_i^{-1}(V \cap U_i)_f \;\middle|\; f = \theta^{-1}_{\phi_i^{-1}(V \cap U_i)}(\overline{F}) \;, F \in I_i \right\},\end{aligned}$$

με καθένα των $\phi_i^{-1}(V \cap U_i)_f$ συσχετική ποικιλότητα (βλ. το (a) τής προτάσεως 2.4.9). Επομένως, το

$$\left\{ \phi_i(W_{i.f}) \;\middle|\; i \in A,\;\; f = \theta^{-1}_{\phi_i^{-1}(V \cap U_i)}(\overline{F}),\;\; F \in I_i \right\},$$

όπου $W_{i.f} := \phi_i^{-1}(V \cap U_i)_f$ είναι ένα κατά Zariski ανοικτό κάλυμμα τού Y απαρτιζόμενο από συσχετικές ποικιλότητες (βλ. πορίσματα 3.8.7 (b) και 1.6.6). □

3.8.13 Σημείωση. Στην περίπτωση κατά την οποία κανείς εργάζεται με ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, αρκεί να θεωρήσει το «συσχετικό κάλυμμα»

$$V = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_n,\;\; V_i := V \cap U_i,\; \forall i \in \{0, \ldots, n\},$$

(όπου V_i κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο τού V), το οποίο εισήχθη στο (c) τής σημειώσεως 3.7.13.

3.8.14 Πρόταση. *Έστω Y ένα μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο ενός προβολικού αλγεβρικού συνόλου $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ και έστω $A := \{i \in \{0, \ldots, n\} \,|Y \cap U_i \neq \varnothing\}$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(a) *Εάν το Y είναι ανάγωγο, τότε τα $\phi_i^{-1}(Y \cap U_i) \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ είναι ανάγωγα για κάθε $i \in A$.*

(b) *Εάν τα $\phi_i^{-1}(Y \cap U_i) \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ είναι ανάγωγα για κάθε $i \in A$ και*

$$Y \cap U_i \cap U_j \neq \varnothing,\; \forall i, j \in A,$$

τότε και το Y είναι ανάγωγο.

Απόδειξη. Αυτή, λόγω τού πορίσματος 1.6.4, αρκεί να δοθεί για $Y = V$.

(a) Εάν το V είναι ανάγωγο, τότε για κάθε $i \in A$ το $V \cap U_i$ είναι κατά Zariski ανοικτό υποσύνολό του και το $\phi_i^{-1}(V \cap U_i) \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ ανάγωγο επί τη βάσει των πορισμάτων 1.6.4 και 1.6.6.

(b) Εάν τα $\phi_i^{-1}(V \cap U_i) \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ είναι ανάγωγα για κάθε $i \in A$, τότε και τα $V \cap U_i$ είναι ανάγωγα (και κατ' επέκτασιν συνεκτικά, πρβλ. 1.6.6 και 1.6.3). Επειδή εξ υποθέσεως ισχύει

$$(V \cap U_i) \cap (V \cap U_j) = V \cap U_i \cap U_j \neq \varnothing,\; \forall i, j \in A,$$

το $V = \bigcup_{i \in A} (V \cap U_i)$ είναι κατ' ανάγκην συνεκτικό[27]. Έστω W ένα μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο τού V. Αρκεί να δειχθεί ότι το W είναι πυκνό στο V (βλ. 1.6.2 (b)). Ορίζουμε τα σύνολα

$$B := \{i \in A \,|W \cap U_i \neq \varnothing\}$$

και

$$V_1 := \bigcup_{i \in B} (V \cap U_i),\ V_2 := \bigcup_{j \in A \smallsetminus B} (V \cap U_j).$$

Προφανώς, $V_1 \neq \varnothing$ και $V = V_1 \cup V_2$. Ας υποθέσουμε ότι $V_2 \neq \varnothing$. Λόγω τής συνεκτικότητας τού V έχουμε $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$. Έστω τυχόν $P \in V_1 \cap V_2$. Τότε $\exists i_\bullet \in B, j_\bullet \in A \smallsetminus B$ με

$$P \in V \cap U_{i_\bullet} \cap U_{j_\bullet},\ \ W \cap U_{i_\bullet} \neq \varnothing,\ \ W \cap U_{j_\bullet} = \varnothing.$$

Το $W \cap U_{i_\bullet}$, όντας μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο τού $U_{i_\bullet}$, είναι πυκνό στο $U_{i_\bullet}$. Από την αλλη μεριά, το $U_{i_\bullet} \cap U_{j_\bullet}$, όντας μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο τού $U_{i_\bullet}$, είναι πυκνό στο $U_{i_\bullet}$, οπότε $W \cap U_{i_\bullet} \cap U_{j_\bullet} \neq \varnothing$, κάτι *που αντιφάσκει* προς το ότι $W \cap U_{j_\bullet} = \varnothing$. Κατά συνέπειαν,

$$V_2 = \varnothing \Rightarrow A = B = \{i \in \{0, \ldots, n\} \,|W \cap U_i \neq \varnothing\}.$$

Έστω τώρα Z τυχόν μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο τού V. Για να δειχθεί ότι το W είναι πυκνό στο V είναι αρκετό να δειχθεί ότι $W \cap Z \neq \varnothing$. Εάν $Q \in Z$, τότε $\exists i_\circ \in A : Q \in V \cap U_{i_\circ}$. Επειδή $Q \in Z \cap U_{i_\circ}$, το $Z \cap U_{i_\circ}$, όντας μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο τού $V \cap U_{i_\circ}$, είναι πυκνό στο $V \cap U_{i_\circ}$, οπότε

$$W \cap Z \cap U_{i_\circ} \neq \varnothing \Rightarrow W \cap Z \neq \varnothing,$$

κάτι που επαληθεύει τον αρχικό ισχυρισμό. □

Ασκήσεις

A-3-49. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $\mathbb{P}^2_{\mathbf{k}} \smallsetminus \{[0_{\mathbf{k}} : 0_{\mathbf{k}} : 1_{\mathbf{k}}]\}$ είναι μια σχεδόν προβολική ποικιλότητα, η οποία δεν είναι ούτε προβολική ούτε συσχετική ποικιλότητα (υπό την έννοια τού ορισμού 3.8.9).

A-3-50. Έστω Y ένα μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο ενός προβολικού αλγεβρικού συνόλου $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$. Να αποδειχθεί ότι για μια συνάρτηση $f : Y \longrightarrow \mathbf{k}$ οι ακόλουθες

[27] Τούτο είναι γνωστό από τη Γενική Τοπολογία. (Βλ. π.χ. S. Willard: *General Topology*, Addison-Wesley Pub. Co., 1970, Thm. 26.7 (c), σελ. 192-193.)

συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(a) Η f είναι κανονική (υπό την έννοια τού 3.4.11) επί τού Y.

(b) Η σύνθεση $f \circ \varpi|_{\varpi^{-1}(Y)} : \varpi^{-1}(Y) \longrightarrow \mathbf{k}$ είναι μια κανονική συνάρτηση επί τής σχεδόν συσχετικής ποικιλότητας $\varpi^{-1}(Y)$, όπου

$$\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{n+1} \diagdown \{0_{\mathbf{k}^{n+1}}\} \ni (a_0, \ldots, a_n) \longmapsto \varpi(a_0, \ldots, a_n) := [a_0 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n$$

η φυσική επίρριψη (βλ. 3.3.16).

(c) Η σύνθεση $f \circ \phi_i|_{\phi_i{}^{-1}(Y \cap U_i)} : \phi_i{}^{-1}(Y \cap U_i) \longrightarrow \mathbf{k}$ είναι μια κανονική συνάρτηση επί τής σχεδόν συσχετικής ποικιλότητας $\phi_i{}^{-1}(Y \cap U_i)$, για κάθε $i \in \{0, \ldots, n\}$ για τον οποίο ισχύει $Y \cap U_i \neq \varnothing$, όπου

$$\phi_i : \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^n \longrightarrow U_i = U_i(\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n), \;\; i \in \{0, \ldots, n\},$$

οι συναρτήσεις οι ορισθείσες στη σημείωση 3.1.3.

A-3-51. Έστω U μια ανοικτή υποποικιλότητα μιας σχεδόν προβολικής ποικιλότητας Y και έστω W μια κλειστή υποποικιλότητα τής U (υπό την έννοια τού 3.8.2 (a)). Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(a) Το $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_Y}(W)$ είναι μια κλειστή υποποικιλότητα τής Y.

(b) Η W είναι μια ανοικτή υποποικιλότητα τής $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_Y}(W)$.

A-3-52. Έστω $\varphi : Y \longrightarrow Z$ μια απεικόνιση μεταξύ δυο σχεδόν προβολικών ποικιλοτήτων. Εάν οι Y, Z δέχονται καλύμματα

$$Y = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda, \quad Z = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$$

απαρτιζόμενα από ανοικτές υποποικιλότητες με $\varphi(U_\lambda) \subseteq V_\lambda$, $\forall \lambda \in \Lambda$, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(a) Η φ είναι μορφισμός εάν και μόνον εάν οι περιορισμοί $\varphi|_{U_\lambda}$ είναι μορφισμοί για κάθε $\lambda \in \Lambda$.

(b) Εάν τα U_λ, V_λ είναι συσχετικές ποικιλότητες για κάθε $\lambda \in \Lambda$, τότε η φ είναι μορφισμός εάν και μόνον εάν $\widetilde{\varphi}|_{\mathbf{k}[V_\lambda]}(\mathbf{k}[V_\lambda]) \subseteq \mathbf{k}[U_\lambda]$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$.

A-3-53. Έστω $\varphi : Y \longrightarrow Z$ μια απεικόνιση μεταξύ δυο σχεδόν προβολικών ποικιλοτήτων. Εάν οι $Y' \subseteq Y$, $Z' \subseteq Z$ είναι (ανοικτές ή κλειστές) υποποικιλότητες και $\varphi(Y') \subseteq Z'$, να αποδειχθεί ότι ο περιορισμός $\varphi|_{Y'}$ είναι μορφισμός. (*Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιηθούν οι ασκήσεις **A-3-52** και **A-2-12**.)

3.9 Γινόμενα, Γραφήματα και Πληρότητα

Όπως έχει ήδη προαναφερθεί στο κεφάλαιο 2, το καρτεσιανό γινόμενο δυο συσχετικών ή σχεδόν συσχετικών ποικιλοτήτων (και, αντιστοίχως, δυο συσχετικών αλγεβρικών συνόλων) αποτελεί αφ' εαυτού μια συσχετική ή σχεδόν συσχετική ποικιλότητα (και, αντιστοίχως, ένα συσχετικό αλγεβρικό σύνολο) και είναι κατηγορικό (βλ. ασκήσεις **A-1-15** και **A-2-15**, και σημειώσεις 2.1.33 (a) και 2.5.17 (c)). Στην περίπτωση θεωρήσεως προβολικών ή σχεδόν προβολικών ποικιλοτήτων ή, γενικότερα, κατά Zariski ανοικτών υποσυνόλων προβολικών αλγεβρικών συνόλων, το αντίστοιχο αποτέλεσμα ναι μεν παραμένει εν ισχύ (με κάποιες παραλλαγές), αλλά η απαιτούμενη αποδεικτική μέθοδος είναι διαφορετική. Τούτο έγκειται στο ότι, εν αντιθέσει προς την ισότητα $\mathbb{A}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} = \mathbb{A}^{m+n}_{\mathbf{k}}$, έχουμε $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \neq \mathbb{P}^{m+n}_{\mathbf{k}}$ (όταν $m, n \geq 1$). Επί παραδείγματι, εντός τού $\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ οι ευθείες $\mathbb{L}_P := \{P\} \times \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ και $\mathbb{L}_Q := \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}} \times \{Q\}$, $P, Q \in \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$, είναι «παράλληλες» (ήτοι δεν τέμνονται) όταν $P \neq Q$, ενώ αντιθέτως εντός τού $\mathbb{P}^2_{\mathbf{k}}$ δυο τυχούσες, μη ταυτιζόμενες ευθείες διαθέτουν πάντοτε ένα (και μόνον) σημείο τομής (βλ. άσκηση **A-3-25** (c)).

3.9.1 Ορισμός. Εάν $m, n \in \mathbb{N}_0$ και

$$l := (m+1)(n+1) - 1 = mn + m + n,$$

τότε ορίζεται η **απεικόνιση τού Segre**

$$\sigma_{m,n} : \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{P}^l_{\mathbf{k}},$$

$$([a_0 : \ldots : a_m], [b_0 : \ldots : b_n]) \longmapsto [c_{00} : \ldots : c_{ij} : \ldots : c_{mn}], \; c_{ij} := a_i b_j,$$

όπου οι δείκτες των συντεταγμένων των εικόνων είναι διατεταγμένοι λεξικογραφικώς. (Η $\sigma_{m,n}$ είναι «καλώς ορισμένη», διότι η αντικατάσταση τού στοιχείου a_i με το λa_i, $\forall i \in \{0, \ldots, m\}$, και τού b_j με το μb_j, $\forall j \in \{0, \ldots, n\}$, όπου $\lambda, \mu \in \mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\}$, συνεπάγεται - για την εικόνα- την αντικατάσταση τού $a_i b_j$ με το $\lambda\mu a_i b_j$, η οποία προσδιορίζει το *ίδιο σημείο* τού προβολικού χώρου $\mathbb{P}^l_{\mathbf{k}}$.)

3.9.2 Λήμμα. *Η $\sigma_{m,n}$ είναι ενριπτική απεικόνιση.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $\sigma_{m,n}([a_0 : \ldots : a_m], [b_0 : \ldots : b_n]) = \sigma_{m,n}([a'_0 : \ldots : a'_m], [b'_0 : \ldots : b'_n])$, τότε $\exists \lambda \in \mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\} : c_{ij} = a_i b_j = \lambda a'_i b'_j = \lambda c'_{ij}, \forall (i,j) \in \{0, \ldots, m\} \times \{0, \ldots, n\}$, και

$$\exists i_\bullet \in \{0, \ldots, m\}, \; j_\bullet \in \{0, \ldots, n\} : a_{i_\bullet} \neq 0_{\mathbf{k}}, \; b_{j_\bullet} \neq 0_{\mathbf{k}}.$$

Επομένως,

$$\left.\begin{array}{l} a_i = \left(\lambda \frac{b'_{j_\bullet}}{b_{j_\bullet}}\right) a'_i, \; \forall i \in \{0, \ldots, m\} \\ b_j = \left(\lambda \frac{a'_{i_\bullet}}{a_{i_\bullet}}\right) b'_j, \; \forall j \in \{0, \ldots, n\} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} [a_0 : \ldots : a_m] = [a'_0 : \ldots : a'_m] \\ [b_0 : \ldots : b_n] = [b'_0 : \ldots : b'_n] \end{array}\right\}$$

και η $\sigma_{m,n}$ είναι όντως ενριπτική απεικόνιση. □

3.9.3 Λήμμα. $\mathrm{Im}(\sigma_{m,n}) = \mathrm{Seg}_{m,n}$, *όπου*

$$\boxed{\mathrm{Seg}_{m,n} := \begin{cases} \mathbb{P}^l_{\mathbf{k}}, & \text{όταν } mn = 0, \\ \mathbf{V}_+\left(\left\{\mathsf{T}_{ir}\mathsf{T}_{js} - \mathsf{T}_{is}\mathsf{T}_{jr} \;\middle|\; \begin{array}{l} i,j \in \{0,..,m\}, i<j, \\ r,s \in \{0,..,n\}, r<s \end{array}\right\}\right) \subset \mathbb{P}^l_{\mathbf{k}}, & \text{όταν } mn \neq 0. \end{cases}}$$

Κατά συνέπειαν, όταν $mn \neq 0$, η εικόνα $\mathrm{Seg}_{m,n}$ τής $\sigma_{m,n}$ είναι ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο περιγραφόμενο ως χώρος των κοινών σημείων μηδενισμού $\binom{m+1}{2}\binom{n+1}{2}$ ομογενών πολυωνύμων βαθμού 2 εντός τού $\mathbb{P}^l_{\mathbf{k}}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Όταν $mn = 0$, τότε ο ισχυρισμός είναι προφανώς αληθής. Ας υποθέσουμε ότι $mn \neq 0$. Εν πρώτοις παρατηρούμε ότι $\mathrm{Seg}_{m,n} \subseteq \mathrm{Im}(\sigma_{m,n})$. Πράγματι· εάν

$$[c_{00} : \ldots : c_{mn}] \in \mathrm{Seg}_{m,n},$$

τότε

$$\exists i_\bullet \in \{0,\ldots,m\},\ j_\bullet \in \{0,\ldots,n\} : c_{i_\bullet\, j_\bullet} \neq 0_{\mathbf{k}},$$

οπότε θέτοντας $a_i := \frac{c_{i\, j_\bullet}}{c_{i_\bullet\, j_\bullet}}$ και $b_j := \frac{c_{i_\bullet\, j}}{c_{i_\bullet\, j_\bullet}}$ λαμβάνουμε

$$a_i b_j = \frac{c_{i\, j_\bullet} c_{i_\bullet\, j}}{c^2_{i_\bullet\, j_\bullet}} = \frac{c_{i\, j} c_{i_\bullet\, j_\bullet}}{c^2_{i_\bullet\, j_\bullet}} = \lambda c_{i\, j}, \quad \lambda := \frac{1_{\mathbf{k}}}{c_{i_\bullet\, j_\bullet}} \in \mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\}.$$

για κάθε $(i,j) \in \{0,\ldots,m\} \times \{0,\ldots,n\}$. Τούτο σημαίνει ότι

$$\mathrm{Im}(\sigma_{m,n}) \ni \sigma_{m,n}\left([a_0 : \ldots : a_m], [b_0 : \ldots : b_n]\right) = [c_{00} : \ldots : c_{mn}].$$

Εν συνεχεία, θα αποδείξουμε ότι ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός. Για διευκόλυνσή μας κατά το χειρισμό στοιχείων τού $\mathbb{P}^l_{\mathbf{k}}$ θα χρησιμοποιήσουμε πίνακες. Συγκεκριμένα, θα εκλάβουμε τον $\mathbb{P}^l_{\mathbf{k}}$ ως τον προβολικό χώρο

$$\mathbb{P}^l_{\mathbf{k}} = \mathbb{P}\left(\mathrm{Mat}_{(m+1)\times(n+1)}(\mathbf{k})\right)$$

που αντιστοιχεί στον $\mathbf{k}$-διανυσματικό χώρο $\mathrm{Mat}_{(m+1)\times(n+1)}(\mathbf{k})$ των $(m+1)\times(n+1)$-πινάκων με εγγραφές ειλημμένες από το σώμα $\mathbf{k}$ (βλ. 3.1.1) και κάθε σημείο

$$[c_{00} : \ldots : c_{mn}] \in \mathbb{P}^l_{\mathbf{k}}$$

ως την κλάση ισοδυναμίας $[\mathcal{C}]$ τού πίνακα

$$\mathcal{C} = (c_{ij})_{0\leq i\leq m,\, 0\leq j\leq n} = \begin{pmatrix} c_{00} & \cdots & c_{0n} \\ c_{10} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m0} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Εάν $[\mathcal{C}] = [(c_{ij})] \in$Im$(\sigma_{m,n})$, τότε υπάρχουν ένας στηλοπίνακας $\mathcal{A}$ και ένας γραμμοπίνακας $\mathcal{B}$,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{(m+1)\times 1}(\mathbf{k}),\ \ \mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{1\times(n+1)}(\mathbf{k}),$$

βαθμίδας[28] rank$(\mathcal{A})$ = rank$(\mathcal{B}) = 1$ για τους οποίους ισχύει $\mathcal{C} = \mathcal{AB}$. Επειδή[29]

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{rank}(\mathcal{A}) + \mathrm{rank}(\mathcal{B}) - 1 \leq \mathrm{rank}(\mathcal{C}) \leq \min\{\mathrm{rank}(\mathcal{A}), \mathrm{rank}(\mathcal{B})\} \\ \mathrm{rank}(\mathcal{A}) = \mathrm{rank}(\mathcal{B}) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{rank}(\mathcal{C}) = 1,$$

όλοι οι (2×2)-υποπίνακες τού $\mathcal{C}$ έχουν ορίζουσα[30] $= 0_{\mathbf{k}}$. Άρα Im$(\sigma_{m,n}) \subseteq$ Seg$_{m,n}$. □

Μέσω τής *αμφιρρίψεως* $\sigma_{m,n} : \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathrm{Seg}_{m,n}$ (θεωρώντας τήν εικόνα της Seg$_{m,n}$ ως πεδίο τιμών της!) καθορίζεται κατά τρόπο φυσικό μια *τοπολογία Zariski* $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})$ επί τού καρτεσιανού γινομένου $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ και -συνακολούθως- *κανονικές συναρτήσεις* επί των ανοικτών υποσυνόλων κλειστών συνόλων τού $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$. Ως εκ τούτου, είναι δυνατή η επέκταση τής εννοίας τού *μορφισμού* και τού *ισομορφισμού* με πεδίο ορισμού ή/και πεδίο τιμών κάποιο μη κενό, ανοικτό υποσύνολο ενός κλειστού υποσυνόλου τού $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ (ως προς την $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})$).

3.9.4 Ορισμός. Έστω $m, n \in \mathbb{N}_0$ και έστω

$$l := (m+1)(n+1) - 1 = mn + m + n.$$

(a) Η **τοπολογία Zariski** $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})$ επί τού καρτεσιανού γινομένου $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \supseteq U \in \mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}) \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \sigma_{m,n}(U) \in \mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_{\mathrm{Seg}_{m,n}}\,,}$$

όπου $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_{\mathrm{Seg}_{m,n}}$ η σχετική τοπολογία τής Seg$_{m,n}$ ως προς τη *συνήθη* τοπολογία Zariski $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}} = \mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^l_{\mathbf{k}})$ την ορισθείσα επί τού $\mathbb{P}^l_{\mathbf{k}}$, βλ. 3.3.5).

(b) Εάν το Y είναι ένα μη κενό, ανοικτό υποσύνολο ενός κλειστού υποσυνόλου τού καρτεσιανού γινομένου $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ (ως προς την $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})$) και $(P, Q) \in Y$, τότε μια συνάρτηση $f : Y \longrightarrow \mathbf{k}$ καλείται **κανονική συνάρτηση στο** (P, Q) (και, αντιστοίχως, **κανονική συνάρτηση επί τού** Y) $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ η σύνθεση

$$f \circ \sigma^{-1}_{m,n}|_{\sigma_{m,n}(Y)} : \sigma_{m,n}(Y) \longrightarrow \mathbf{k}$$

[28] Τούτο οφείλεται στο ότι ένα τουλάχιστον εκ των a_i και ένα τουλάχιστον εκ των b_j είναι $\neq 0_{\mathbf{k}}$.

[29] Βλ. π.χ. Σ. Ανδρεαδάκη: *Γραμμική Άλγεβρα*, Αθήνα 1981, πρόταση 4.3.12, σελ. 119-121.

[30] Βλ. π.χ. Σ. Ανδρεαδάκη: *Γραμμική Άλγεβρα*, Αθήνα 1981, θεώρημα 5.3.5, σελ. 160-161.

είναι κανονική συνάρτηση στο $\sigma_{m,n}(P,Q)$ (και, αντιστοίχως, κανονική συνάρτηση επί τού $\sigma_{m,n}(Y)$) υπό τη συνήθη έννοια (βλ. 3.4.11).

(c) Ας υποθέσουμε ότι τα Y, Z είναι δυο μη κενά, ανοικτά υποσύνολα **είτε** ενός κλειστού υποσυνόλου τού $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ (ως προς την $\mathcal{T}_{\text{Zar}}(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})$) **είτε** ενός προβολικού αλγεβρικού (= κλειστού) συνόλου εντός τού $\mathbb{P}^l_{\mathbf{k}}$ (ως προς την $\mathcal{T}_{\text{Zar}}(\mathbb{P}^l_{\mathbf{k}})$). Μια απεικόνιση $\varphi : Y \longrightarrow Z$ μεταξύ αυτών καλείται **μορφισμός** όταν είναι συνεχής (ως προς τις εκάστοτε σχετικές τοπολογίες Zariski με τις οποίες είναι εφοδιασμένα τα Y, Z) και για κάθε κανονική συνάρτηση $f : Z \longrightarrow \mathbf{k}$ επί τού Z η $f \circ \varphi : Y \longrightarrow \mathbf{k}$ είναι μια κανονική συνάρτηση επί τού Y. Ένας μορφισμός τέτοιου είδους καλείται **ισομορφισμός** όταν υπάρχει ένας μορφισμός $\psi : Z \longrightarrow Y$ για τον οποίο ισχύουν οι ισότητες

$$\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_Y, \quad \varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_Z.$$

(Ο συμβολισμός $Y \cong Z$ δηλοί και σε αυτήν την περίπτωση ότι υφίσταται ένας ισομορφισμός μεταξύ αυτών.)

Ενδέχεται να «ξενίζει» κατά τι ορισμένους αναγνώστες το γεγονός ότι η τοπολογία Zariski επί τού καρτεσιανού γινομένου $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ εισήχθη χωρίς τη διαμεσολάβηση τού χαρακτηρισμού καθενός των κλειστών υποσυνόλων της ως *αλγεβρικού συνόλου*. Στην πραγματικότητα, τούτο είναι *εφικτό*, υπό την προϋπόθεση ότι τα ομογενή πολυώνυμα υποκαθίστανται με *διομογενή*.

3.9.5 Ορισμός. Ένα πολυώνυμο $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m, \mathsf{Y}_0, \ldots, \mathsf{Y}_n]$ καλείται **διομογενές πολυώνυμο διβαθμού** $(d_1, d_2) \in (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) \cup \{(-\infty, -\infty)\}$ όταν είναι **είτε** τής μορφής[31]

$$F = \sum_{i_0+\cdots+i_m=d_1} \; \sum_{j_0+\cdots+j_n=d_2} \lambda_{(i_0,\ldots,i_m,j_0,\ldots,j_n)} \mathsf{X}_0^{i_0} \cdots \mathsf{X}_m^{i_m} \cdot \mathsf{Y}_0^{j_0} \cdots \mathsf{Y}_n^{j_n},$$

$\lambda_{(i_0,\ldots,i_m,j_0,\ldots,j_n)} \in \mathbf{k}$, δηλαδή

$$F \in (\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m])\,[\mathsf{Y}_0, \ldots, \mathsf{Y}_n]_{d_2} \cap (\mathbf{k}[\mathsf{Y}_0, \ldots, \mathsf{Y}_n])\,[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m]_{d_1}$$

με $(d_1, d_2) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ **είτε** το μηδενικό πολυώνυμο με $d_1 = d_2 = -\infty$.

(a) Το **σύνολο των σημείων μηδενισμού** ενός τέτοιου F εντός τού $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ θα συμβολίζεται ως

$$\boxed{\mathbf{V}_+^{\text{διομ.}}(F) := \{([a_0 : .. : a_m], [b_0 : .. : b_n]) \in \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \,|\, F(a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_n) = 0_{\mathbf{k}}\}.}$$

Εάν το $\mathcal{S}$ είναι οιοδήποτε σύνολο *διομογενών* πολυωνύμων, θέτουμε

$$\boxed{\mathbf{V}_+^{\text{διομ.}}(\mathcal{S}) := \{(P, Q) \in \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \mid F(P, Q) = 0_{\mathbf{k}}, \, \forall F \in \mathcal{S}\} = \bigcap_{F \in \mathcal{S}} \mathbf{V}_+(F).}$$

[31] Τούτο σημαίνει ότι είναι ομογενές βαθμού d_1 ως προς τις μεταβλητές $\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m$ και *ταυτοχρόνως* ομογενές βαθμού d_2 ως προς τις μεταβλητές $\mathsf{Y}_0, \ldots, \mathsf{Y}_n$.

(Όταν το $\mathcal{S}$ συμβαίνει να είναι πεπερασμένο, π.χ. $\mathcal{S} = \{F_1, \ldots, F_\kappa\}$, συνήθως αντί τού $\mathbf{V}_+^{\text{διομ.}}(\{F_1, \ldots, F_\kappa\})$ γράφουμε $\mathbf{V}_+^{\text{διομ.}}(F_1, \ldots, F_\kappa)$).

(b) Ένα υποσύνολο $V \subseteq \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^m \times \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n$ καλείται **αλγεβρικό σύνολο** εντός τού $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^m \times \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n$ όταν υπάρχει ένα σύνολο διομογενών πολυωνύμων $\mathcal{S}$ από τον $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m, \mathsf{Y}_0, \ldots, \mathsf{Y}_n]$, ούτως ώστε να ισχύει η ισότητα $V = \mathbf{V}_+^{\text{διομ.}}(\mathcal{S})$.

(c) Για κάθε υποσύνολο $X \neq \varnothing$ τού $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^m \times \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n$ θεωρούμε τα πολυώνυμα τα οποία μηδενίζονται επί τού X. Αυτά τα πολυώνυμα συγκροτούν ένα ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m, \mathsf{Y}_0, \ldots, \mathsf{Y}_n]$, το οποίο ονομάζεται **το ιδεώδες τού** X και συμβολίζεται ως $\mathbf{I}_+^{\text{διομ.}}(X)$, ήτοι[32]

$$\boxed{\mathbf{I}_+^{\text{διομ.}}(X) := \left\{ F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m, \mathsf{Y}_0, \ldots, \mathsf{Y}_n] \;\middle|\; \begin{array}{c} F(a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_n) = 0_{\mathbf{k}}, \\ \forall\, ([a_0 : \ldots : a_m], [b_0 : \ldots : b_n]) \in X \end{array} \right\}.}$$

Η άσκηση **Α-3-54** (c) μας πληροφορεί ότι το $\mathbf{I}_+^{\text{διομ.}}(X)$ οφείλει να είναι *διομογενές ιδεώδες* .

3.9.6 Θεώρημα. *Ένα σύνολο* $V \subseteq \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^m \times \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n$ *είναι κλειστό ως προς την* $\mathcal{T}_{\text{Zar}}(\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^m \times \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n)$ *(δηλαδή το* $\sigma_{m,n}(V)$ *είναι κλειστό υποσύνολο τού* $\text{Seg}_{m,n} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^l$ *ως προς την* $\mathcal{T}_{\text{Zar}}|_{\text{Seg}_{m,n}}$*) εάν και μόνον εάν είναι αλγεβρικό υπό την έννοια τού ορισμού* 3.9.5 (b).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κατ' αρχάς υποθέτουμε ότι το $\sigma_{m,n}(V)$ είναι κλειστό υποσύνολο τού $\text{Seg}_{m,n} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^l$. Τότε υπάρχουν ομογενή πολυώνυμα $F_1, \ldots, F_\kappa$ ως προς τις μεταβλητές $\mathsf{T}_{00}, \ldots, \mathsf{T}_{mn}$ με $\deg(F_\varrho) = d_\varrho$, $\forall \varrho \in \{1, \ldots, \kappa\}$, ούτως ώστε να ισχύει

$$\sigma_{m,n}(V) = \mathbf{V}_+(F_1, \ldots, F_\kappa) \cap \text{Seg}_{m,n}.$$

Εξ αυτού έπεται ότι

$$V = \mathbf{V}_+^{\text{διομ.}}(F_1 \circ \sigma_{m,n}, \ldots, F_\kappa \circ \sigma_{m,n}) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^m \times \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n,$$

με καθένα των $F_\varrho \circ \sigma_{m,n}$ διομογενές διβαθμού (d_ϱ, d_ϱ), $\forall \varrho \in \{1, \ldots, \kappa\}$. Πράγματι· υποθέτοντας δίχως βλάβη τής γενικότητας ότι $d_\varrho \in \mathbb{N}_0$, $\forall \varrho \in \{1, \ldots, \kappa\}$, αρκεί να θεωρήσουμε ένα μονώνυμο

$$\prod_{0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n} \mathsf{T}_{ij}^{\nu_{ij}} : \sum_{0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n} \nu_{ij} = d_\varrho \;\; (\nu_{ij} \in \mathbb{N}_0,\; \varrho \in \{1, \ldots, \kappa\}),$$

και να παρατηρήσουμε ότι

$$\left(\prod_{0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n} \mathsf{T}_{ij}^{\nu_{ij}} \right) \circ \sigma_{m,n} = \prod_{0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n} (\mathsf{X}_i \mathsf{Y}_j)^{\nu_{ij}} = \prod_{0 \leq i \leq m} \mathsf{X}_i^{\nu_i'} \prod_{0 \leq j \leq n} \mathsf{Y}_j^{\nu_j''},$$

[32] Για $X = \varnothing$ θέτουμε $\mathbf{I}_+^{\text{διομ.}}(\varnothing) := \langle \mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m, \mathsf{Y}_0, \ldots, \mathsf{Y}_n \rangle$.

όπου $\nu'_i := \sum_{0\leq j\leq n} \nu_{ij}, \nu''_j := \sum_{0\leq i\leq m} \nu_{ij}, \forall (i,j) \in \{0,\ldots,m\} \times \{0,\ldots,n\}$, και

$$\sum_{0\leq i\leq m} \nu'_i = \sum_{0\leq j\leq n} \nu''_j = d_\varrho .$$

Άρα το V είναι αλγεβρικό υπό την έννοια τού ορισμού 3.9.5 (b). Και αντιστρόφως· εάν αυτό είναι αλγεβρικό, τότε θα υπάρχουν *πεπερασμένα* διομογενή πολυώνυμα $G_1,\ldots,G_\mu$ ως προς τις μεταβλητές $\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_m,\mathsf{Y}_0,\ldots,\mathsf{Y}_n$ (βλ. άσκηση **A-3-54** (d)), ούτως ώστε να ισχύει

$$V = \mathbf{V}_+^{\text{διομ.}}(G_1,\ldots,G_\mu).$$

Ύστερα από πολλαπλασιασμό των $G_1,\ldots,G_\mu$ με αρκούντως πολλά μονώνυμα $\prod_{0\leq i\leq m} \mathsf{X}_i^{\alpha_i}, \prod_{0\leq j\leq n} \mathsf{Y}_j^{\beta_j}$ είναι δυνατόν να γράψουμε το V υπό τη μορφή

$$V = \mathbf{V}_+^{\text{διομ.}}(H_1,\ldots,H_\mu),$$

με καθένα των H_ϱ διομογενές διβαθμού (d_ϱ, d_ϱ), $\forall \varrho \in \{1,\ldots,\mu\}$. Αρκεί λοιπόν, υποθέτοντας δίχως βλάβη τής γενικότητας ότι $d_\varrho \in \mathbb{N}_0$, $\forall \varrho \in \{1,\ldots,\mu\}$, να αποδειχθεί η ύπαρξη ομογενών πολυωνύμων F_ϱ (ως προς τις μεταβλητές $\mathsf{T}_{00},\ldots,\mathsf{T}_{mn}$) βαθμού d_ϱ με

$$F_\varrho \circ \sigma_{m,n} = H_\varrho, \;\; \forall \varrho \in \{1,\ldots,\mu\}.$$

Προς τούτο θεωρούμε ένα μονώνυμο

$$E_\varrho = \prod_{0\leq i\leq m} \mathsf{X}_i^{\nu_i} \prod_{0\leq j\leq n} \mathsf{Y}_j^{\xi_j} : \sum_{0\leq i\leq m} \nu_i = \sum_{0\leq j\leq n} \xi_j = d_\varrho \;\; (\nu_i, \xi_j \in \mathbb{N}_0, \; \varrho \in \{1,\ldots,\mu\})$$

και θέτουμε

$$\begin{aligned} i_\bullet &:= \min\{\, i \in \{0,\ldots,m\} \,|\, \nu_i \neq 0\}, \\ j_\bullet &:= \min\{\, j \in \{0,\ldots,n\} \,|\, \xi_j \neq 0\}, \\ d'_\varrho &:= \min\{i_\bullet, j_\bullet\}. \end{aligned}$$

Προφανώς,

$$\mathsf{T}_{i_\bullet j_\bullet} \circ \sigma_{m,n} = \mathsf{X}_{i_\bullet} \mathsf{Y}_{j_\bullet} \Rightarrow E_\varrho = (\mathsf{T}_{i_\bullet j_\bullet} \circ \sigma_{m,n})^{d'_\varrho} E'_\varrho,$$

όπου E'_ϱ ένα μονώνυμο διβαθμού $(d_\varrho - d'_\varrho, d_\varrho - d'_\varrho)$. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία (με το E'_ϱ στη θέση τού E_ϱ) καταλήγουμε (ύστερα από πεπερασμένου πλήθους βήματα) στο ότι $E_\varrho = \widetilde{E}_\varrho \circ \sigma_{m,n}$, όπου το $\widetilde{E}_\varrho$ παριστά ένα μονώνυμο βαθμού d_ϱ ως προς τις μεταβλητές $\mathsf{T}_{00},\ldots,\mathsf{T}_{mn}$. Μέσω αυτής τής μεθόδου κατασκευάζονται ομογενή πολυώνυμα F_ϱ (ως προς τις μεταβλητές $\mathsf{T}_{00},\ldots,\mathsf{T}_{mn}$) βαθμού d_ϱ με

$$F_\varrho \circ \sigma_{m,n} = H_\varrho, \;\; \forall \varrho \in \{1,\ldots,\mu\}.$$

Επομένως,

$$\sigma_{m,n}(V) = \mathbf{V}_+(F_1, \ldots, F_\mu) \cap \mathrm{Seg}_{m,n},$$

οπότε το $\sigma_{m,n}(V)$ είναι όντως κλειστό υποσύνολο τού $\mathrm{Seg}_{m,n} \subseteq \mathbb{P}^l_{\mathbf{k}}$. □

3.9.7 Σημείωση. (a) Μέσω τού θεωρήματος 3.9.6 γίνεται αντιληπτό ότι υπάρχει η δυνατότητα διατυπώσεως και αποδείξεως προτάσεων και θεωρημάτων που αφορούν σε αλγεβρικά σύνολα εντός τού $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ και είναι ανάλογα εκείνων που περιέχονται στις ενότητες 3.3, 3.4, 3.6 και 3.7. Οι ασκήσεις **A-3-54 - A-3-61** δρουν υποβοηθητικώς στην κατάρτιση αυτού τού «προγράμματος». Βεβαίως, η συνέχιση και ολοκλήρωσή του επαφίεται στη φιλοπραγμοσύνη ορισμένων αναγνωστών.

(b) Ό,τι έχει προαναφερθεί στους ορισμούς 3.9.4, 3.9.5 και στο (a) γενικεύεται κατά τρόπο φυσικό και για **πλειοπροβολικούς χώρους**, ήτοι για καρτεσιανά γινόμενα τής μορφής

$$\mathbb{P}^{m_1}_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^{m_2}_{\mathbf{k}} \times \cdots \times \mathbb{P}^{m_\nu}_{\mathbf{k}}, \ \ \nu \in \mathbb{N}, \ \ (m_1, \ldots, m_\nu) \in \mathbb{N}_0^\nu,$$

ή ακόμη και για **μικτούς χώρους**, ήτοι για καρτεσιανά γινόμενα τής μορφής

$$\mathbb{P}^{m_1}_{\mathbf{k}} \times \cdots \times \mathbb{P}^{m_\nu}_{\mathbf{k}} \times \mathbb{A}^{n_1}_{\mathbf{k}} \times \cdots \times \mathbb{A}^{n_\kappa}_{\mathbf{k}}, \ (\nu, \kappa) \in \mathbb{N}^2, \ (m_1, \ldots, m_\nu, n_1, \ldots, n_\kappa) \in \mathbb{N}_0^{\nu+\kappa}.$$

Επί παραδείγματι, τα κλειστά σύνολα τής τοπολογίας Zariski $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}})$ τού καρτεσιανού γινομένου $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ είναι εκείνα τα οποία μπορούν να παρασταθούν ως σύνολα κοινών σημείων μηδενισμού πεπερασμένου πλήθους πολυωνύμων ανηκόντων στον $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m, \mathsf{Y}_1, \ldots, \mathsf{Y}_n]$ που είναι ομογενή ως προς τις πρώτες $m+1$ μεταβλητές $\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m$ (αλλά χωρίς να πληρούν οιαδήποτε άλλη συνθήκη ως προς τις επακολουθούσες n μεταβλητές $\mathsf{Y}_1, \ldots, \mathsf{Y}_n$).

3.9.8 Θεώρημα. *Η απεικόνιση* $\sigma_{m,n} : \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathrm{Seg}_{m,n}$ *είναι ισομορφισμός υπό την έννοια τού ορισμού* 3.9.4 (c).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. **Βήμα 1ο**. Έστω τυχόν σημείο $[c_{00} : \ldots : c_{mn}] \in \mathrm{Seg}_{m,n}$. Τότε

$$\exists (i,j) \in \{0, \ldots, m\} \times \{0, \ldots, n\} : c_{ij} \neq 0_{\mathbf{k}}.$$

Οι απεικονίσεις

$$\pi_{m,n,[1]} : \mathrm{Seg}_{m,n} \longrightarrow \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}, \ \ [c_{00} : \ldots : c_{ij} : \ldots : c_{mn}] \longmapsto [c_{0j} : \ldots : c_{ij} : \ldots : c_{mj}]$$

και

$$\pi_{m,n,[2]} : \mathrm{Seg}_{m,n} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}, \ \ [c_{00} : \ldots : c_{ij} : \ldots : c_{mn}] \longmapsto [c_{i0} : \ldots : c_{ij} : \ldots : c_{in}]$$

είναι μορφισμοί μεταξύ προβολικών αλγεβρικών συνόλων (βλ. πρόταση 3.8.5). Θέτοντας

$$\left(\pi_{m,n,[1]},\pi_{m,n,[2]}\right):\mathrm{Seg}_{m,n}\longrightarrow\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}\times\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}},\;\;P\longmapsto\left(\pi_{m,n,[1]}(P),\pi_{m,n,[2]}(P)\right),$$

διαπιστώνουμε ότι

$$\left(\sigma_{m,n}\circ\left(\pi_{m,n,[1]},\pi_{m,n,[2]}\right)\right)(P)=\sigma_{m,n}\left(\pi_{m,n,[1]}(P),\pi_{m,n,[2]}(P)\right)=P,\;\;\forall P\in\mathrm{Seg}_{m,n},$$

και

$$\begin{aligned}\left(\left(\pi_{m,n,[1]},\pi_{m,n,[2]}\right)\circ\sigma_{m,n}\right)(P,Q)&=\left(\pi_{m,n,[1]}\left(\sigma_{m,n}\left(P,Q\right)\right),\pi_{m,n,[2]}\left(\sigma_{m,n}\left(P,Q\right)\right)\right)\\&=(P,Q)\end{aligned}$$

για κάθε $(P,Q)\in\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}\times\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, οπότε

$$\sigma_{m,n}\circ\left(\pi_{m,n,[1]},\pi_{m,n,[2]}\right)=\mathrm{Id}_{\mathrm{Seg}_{m,n}},\;\;\left(\pi_{m,n,[1]},\pi_{m,n,[2]}\right)\circ\sigma_{m,n}=\mathrm{Id}_{\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}\times\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}},$$

και $\sigma^{-1}_{m,n}=(\pi_{m,n,[1]},\pi_{m,n,[2]})$.

Βήμα 2ο. Η $\sigma_{m,n}$ είναι συνεχής. Προς τούτο αρκεί να αποδείξουμε ότι αντιστρέφει κατά Zariski κλειστά σύνολα σε κλειστά (ως προς την $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_{\mathrm{Seg}_{m,n}}$). Έστω W ένα κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού προβολικού αλγεβρικού συνόλου $\mathrm{Seg}_{m,n}$. Τότε υπάρχουν ομογενή πολυώνυμα $F_1,\ldots,F_\kappa$ ως προς τις μεταβλητές $\mathsf{T}_{00},\ldots,\mathsf{T}_{mn}$ με $\deg(F_\varrho)=d_\varrho$, $\forall\varrho\in\{1,\ldots,\kappa\}$, ούτως ώστε να ισχύει

$$W=\mathbf{V}_+(F_1,\ldots,F_\kappa)\cap\mathrm{Seg}_{m,n}.$$

Εξ αυτού έπεται ότι

$$\sigma^{-1}_{m,n}(W)=\mathbf{V}_+^{\text{διομ.}}(F_1\circ\sigma_{m,n},\ldots,F_\kappa\circ\sigma_{m,n})\subseteq\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}\times\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}},$$

με καθένα των $F_\varrho\circ\sigma_{m,n}$ διομογενές διβαθμού (d_ϱ,d_ϱ), $\forall\varrho\in\{1,\ldots,\kappa\}$ (όπως στην απόδειξη τού θεωρήματος 3.9.6).

Βήμα 3ο. Η $\sigma^{-1}_{m,n}=(\pi_{m,n,[1]},\pi_{m,n,[2]})$ είναι συνεχής, διότι καθεμιά των απεικονίσεων $\pi_{m,n,[1]},\pi_{m,n,[2]}$ είναι συνεχής.

Βήμα 4ο. Εάν η $f:\mathrm{Seg}_{m,n}\longrightarrow\mathbf{k}$ είναι μια κανονική συνάρτηση επί τού $\mathrm{Seg}_{m,n}$, τότε

$$f=(f\circ\sigma_{m,n})\circ\sigma^{-1}_{m,n},$$

οπότε η $f\circ\sigma_{m,n}:\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}\times\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}\longrightarrow\mathbf{k}$ είναι κανονική συνάρτηση επί τού $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}\times\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ (βλ. 3.9.4 (b), (c)). Άρα η $\sigma_{m,n}$ είναι μορφισμός. Επίσης, η $\sigma^{-1}_{m,n}=(\pi_{m,n,[1]},\pi_{m,n,[2]})$ είναι μορφισμός, διότι καθεμιά των απεικονίσεων $\pi_{m,n,[1]},\pi_{m,n,[2]}$ είναι (όπως προείπαμε) μορφισμός (βλ. και το (b) τής ασκήσεως **A-3-66**). □

3.9.9 Πόρισμα. *Η εικόνα* $\mathrm{Seg}_{m,n} \subseteq \mathbb{P}^l_{\mathbf{k}}$ *τής* $\sigma_{m,n}$ *αποτελεί μια προβολική ποικιλότητα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή το ιδεώδες $\mathbf{I}^{\text{διομ.}}_{+}(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}) = \{0\}$ τού $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} = \mathbf{V}^{\text{διομ.}}_{+}(0_{\mathbf{k}})$ είναι πρώτο, το $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, σύμφωνα με την άσκηση **A-3-57**, είναι ανάγωγο (ως προς την $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})$). Λόγω τής συνεχείας τής $\sigma_{m,n}$ το προβολικό αλγεβρικό σύνολο $\mathrm{Seg}_{m,n}$ είναι ωσαύτως ανάγωγο (βλ. πόρισμα 1.6.6). □

3.9.10 Ορισμός. Η προβολική ποικιλότητα $\mathrm{Seg}_{m,n}$ καλείται **ποικιλότητα τού Segre (τού τύπου** (m,n)**)**. Επίσης, λόγω των ανωτέρω, η απεικόνιση $\sigma_{m,n} : \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \hookrightarrow \mathbb{P}^l_{\mathbf{k}}$ τού Segre (με εικόνα της την $\mathrm{Seg}_{m,n}$) η ορισθείσα στο 3.9.1, καλείται -ιδιαιτέρως- **εμφύτευση τού Segre**.

3.9.11 Πρόταση. (Εσώτερος γεωμετρικός χαρακτηρισμός τής $\mathrm{Seg}_{m,n}$) *Η ποικιλότητα* $\mathrm{Seg}_{m,n}$ *τού Segre περιέχει μια οικογένεια* $(\mathbb{M}_P)_{P\in\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}}$ *n-διάστατων γραμμικών υποποικιλοτήτων τού* $\mathbb{P}^l_{\mathbf{k}}$*, καθώς και μια οικογένεια* $(\mathbb{M}'_Q)_{Q\in\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}}$ *m-διάστατων γραμμικών υποποικιλοτήτων τού* $\mathbb{P}^l_{\mathbf{k}}$*, με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(a) $\mathbb{M}_{P_1} \cap \mathbb{M}_{P_2} = \varnothing$, *όταν* $P_1 \neq P_2$.

(b) $\mathbb{M}'_{Q_1} \cap \mathbb{M}'_{Q_2} = \varnothing$, *όταν* $Q_1 \neq Q_2$.

(c) $\mathbb{M}_P \cap \mathbb{M}'_Q = \{\text{ένα σημείο}\}, \forall (P,Q) \in \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$.

(d) *Η* $\mathrm{Seg}_{m,n}$ *γράφεται ως αποσυνδετή ένωση των μελών καθεμιάς των εν λόγω οικογενειών:*

$$\boxed{\mathrm{Seg}_{m,n} = \coprod_{P\in\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}} \mathbb{M}_P = \coprod_{Q\in\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}} \mathbb{M}'_Q.}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε $P \in \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$ και κάθε $Q \in \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ θεωρούμε τους περιορισμούς

$$\sigma^Q_{m,n,[1]} := \sigma_{m,n}|_{\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}\times\{Q\}} : \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \{Q\} \longrightarrow \mathrm{Seg}_{m,n},$$
$$\sigma^P_{m,n,[2]} := \sigma_{m,n}|_{\{P\}\times\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}} : \{P\} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathrm{Seg}_{m,n},$$

τής $\sigma_{m,n}$ και θέτουμε

$$\mathbb{M}_P := \mathrm{Im}(\sigma^P_{m,n,[2]}),\ \ \mathbb{M}'_Q := \mathrm{Im}(\sigma^Q_{m,n,[1]}),\ \forall (P,Q) \in \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}.$$

Επειδή (σύμφωνα με το θεώρημα 3.9.8) η $\sigma_{m,n}$ είναι ισομορφισμός, έχουμε

$$\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \xrightarrow[\sigma_{m,n}]{\cong} \mathbb{M}_P \subseteq \mathbb{P}^l_{\mathbf{k}},\quad \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \xrightarrow[\sigma_{m,n}]{\cong} \mathbb{M}'_Q \subseteq \mathbb{P}^l_{\mathbf{k}},\ \forall (P,Q) \in \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}},$$

και οι ιδιότητες (a) και (b) είναι προφανείς. Επιπροσθέτως, κάθε $\mathbb{M}_P$ είναι γραμμική υποποικιλότητα τού $\mathbb{P}^l_{\mathbf{k}}$ (βλ. άσκηση **A-3-24**), διότι εάν $P = [a_0 : .. : a_m]$, τότε

$$\mathbb{M}_P = \mathbf{V}_+\left(\left\{ a_i\mathsf{T}_{is} - a_j\mathsf{T}_{ir},\ a_j\mathsf{T}_{jr} - a_i\mathsf{T}_{js} \;\middle|\; \begin{array}{l} i,j \in \{0,..,m\}, i<j, \\ r,s \in \{0,..,n\}, r<s \end{array} \right\}\right).$$

(Κατ' αναλογίαν, κάθε $\mathbb{M}'_Q$ είναι ωσαύτως γραμμική υποικιλότητα τού $\mathbb{P}^l_{\mathbf{k}}$.) Η ισχύς τής ιδιότητας (c) έπεται από το ότι (εκ κατασκευής)

$$\mathbb{M}_P \cap \mathbb{M}'_Q = \{\sigma_{m,n}(P,Q)\}\,,\ \forall (P,Q) \in \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}.$$

Εξάλλου,

$$\mathrm{Im}(\sigma_{m,n}) = \coprod_{P \in \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}} \mathrm{Im}(\sigma^P_{m,n,[2]}) = \coprod_{Q \in \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}} \mathrm{Im}(\sigma^Q_{m,n,[1]}),$$

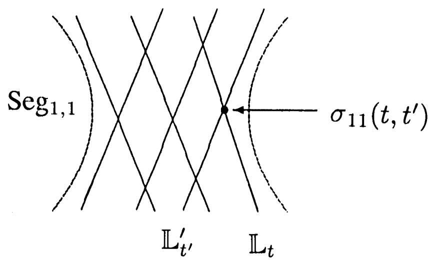
οπότε η ποικιλότητα $\mathrm{Seg}_{m,n}$ τού Segre έχει και η ιδιότητα (d). □

3.9.12 Σημείωση. Οι προβολικές ποικιλότητες οι δομούμενες όπως η $\mathrm{Seg}_{m,n}$ καλούνται **γραμμωτές** (ή **ριγωτές** ή **χαρακωτές**) **ποικιλότητες** (ruled varieties). Πρόκειται για εκείνες τις ποικιλότητες που μπορούν να παρασταθούν ως ορμαθοί γραμμικών υποποικιλοτήτων τους, υπό τον όρο ότι αυτές οι γραμμικές υποποικιλότητες είναι τοποθετημένες εντός τους σε σχηματισμούς που θυμίζουν γραμμές τραβηγμένες με χάρακα (κανόνα) ή ρίγες και -ταυτοχρόνως- παραμετρούνται μέσω άλλων γραμμικών υποποικιλοτήτων.

3.9.13 Παράδειγμα. Η $\mathrm{Seg}_{1,1} = \mathbf{V}_+(\mathsf{T}_{00}\mathsf{T}_{11} - \mathsf{T}_{01}\mathsf{T}_{10}) \subset \mathbb{P}^3_{\mathbf{k}}$ είναι μια προβολική τετραγωνική υπερεπιφάνεια (κωνική τομή βαθμίδας 4, όταν χαρ$(\mathbf{k}) \neq 2$) που περιέχει δυο οικογένειες ευθειών $(\mathbb{L}_t)_{t\in\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}}$, $(\mathbb{L}'_t)_{t\in\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}}$ εντός τού $\mathbb{P}^3_{\mathbf{k}}$ (παραμετρούμενες μέσω ενός $t \in \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$, βλ. σχήμα **17**) με τις ακόλουθες ιδιότητες:

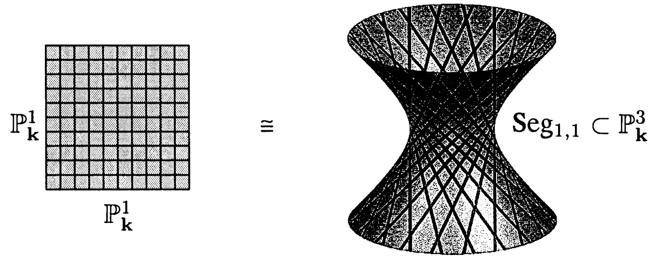
$$\begin{aligned} &\mathbb{L}_{t_1} \neq \mathbb{L}_{t_2} \Longrightarrow \mathbb{L}_{t_1} \cap \mathbb{L}_{t_2} = \varnothing, \\ &\mathbb{L}'_{t_1} \neq \mathbb{L}'_{t_2} \Longrightarrow \mathbb{L}'_{t_1} \cap \mathbb{L}'_{t_2} = \varnothing, \\ &\mathbb{L}_t \cap \mathbb{L}'_{t'} = \{\sigma_{1,1}(t,t')\}\,, \forall t,t' \in \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}, \end{aligned}$$

και $\mathrm{Seg}_{1,1} = \coprod_{t\in\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}} \mathbb{L}_t = \coprod_{t\in\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}} \mathbb{L}'_t$. (Κατά συνέπειαν, δυο τυχούσες μη ταυτιζόμενες ευθείες εντός τού $\mathbb{P}^3_{\mathbf{k}}$ που αποτελούν μέλη τής μίας εκ των δύο οικογενειών είναι *παράλληλες* μεταξύ τους, ήτοι δεν τέμνονται. Πρβλ. με το (c) τής ασκήσεως **A-3-25**.)



Σχήμα 17

Σημειωτέον ότι ενίοτε, λόγω τής ανωτέρω δομήσεως τής $\mathrm{Seg}_{1,1}$, λέμε ότι αυτή είναι **ευθειογενής** κωνική τομή. Το σχήμα **18** υποδηλοί ακριβέστερα (μέσω συμβολικής εικονογραφήσεως για $\mathbf{k} = \mathbb{R}$) τον τρόπο με τον οποίο το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ εμφυτεύεται μέσω τής $\sigma_{1,1}$ εντός τού $\mathbb{P}^3_{\mathbf{k}}$.



Σχήμα 18

3.9.14 Θεώρημα. *Εάν $X \subseteq \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$ και $Y \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, τότε ισχύουν τα εξής:*
(a) $\sigma_{m,n}(X \times Y) = \pi^{-1}_{m,n,[1]}(X) \cap \pi^{-1}_{m,n,[2]}(Y)$.
(b) *Εάν το X είναι κλειστό σύνολο ως προς την $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}})$ και το Y είναι κλειστό σύνολο ως προς την $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})$, τότε η εικόνα $\sigma_{m,n}(X \times Y)$ τού καρτεσιανού γινομένου $X \times Y$ μέσω τής $\sigma_{m,n}$ είναι κλειστό σύνολο ως προς την $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^l_{\mathbf{k}})$ που περιέχεται στην ποικιλότητα $\mathrm{Seg}_{m,n}$ τού Segre.*
(c) *Εάν το X είναι ένα ανοικτό υποσύνολο ενός κλειστού σύνολου ως προς την $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}})$ και το Y είναι ένα ανοικτό υποσύνολο ενός κλειστού σύνολου ως προς την $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})$, τότε η εικόνα $\sigma_{m,n}(X \times Y)$ τού καρτεσιανού γινομένου $X \times Y$ μέσω τής $\sigma_{m,n}$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο ενός κλειστού συνόλου ως προς την $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^l_{\mathbf{k}})$ που περιέχεται στην ποικιλότητα $\mathrm{Seg}_{m,n}$ τού Segre.*
(d) *Έστω X ένα ανοικτό υποσύνολο ενός κλειστού σύνολου ως προς την $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}})$ και έστω Y ένα ανοικτό υποσύνολο ενός κλειστού σύνολου ως προς την $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})$. Εάν τα X, Y είναι ανάγωγα, τότε και το καρτεσιανό γινόμενό τους $X \times Y$ είναι ανάγωγο ως προς την $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_{X \times Y}(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})$ (και η εικόνα $\sigma_{m,n}(X \times Y)$ τού $X \times Y$ μέσω τής $\sigma_{m,n}$ ανάγωγη ως προς την $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_{\mathrm{Seg}_{m,n}}$).*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το (a) έπεται από το ότι $\sigma^{-1}_{m,n} = (\pi_{m,n,[1]}, \pi_{m,n,[2]})$. Τα (b) και (c) έπονται από το (a) λόγω τού ότι οι $\pi_{m,n,[1]}$ και $\pi_{m,n,[2]}$ είναι συνεχείς.
(d) Ας υποθέσουμε ότι το $X \times Y$ γράφεται ως ένωση

$$X \times Y = Z_1 \cup Z_2$$

δυο κλειστών συνόλων Z_1, Z_2 ως προς την $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_{X \times Y}(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})$. Το $X \times Y$ είναι ισόμορφο (μέσω τής $\sigma_{m,n}$) με το

$$\sigma_{m,n}(X \times Y) = \sigma_{m,n}(Z_1) \cup \sigma_{m,n}(Z_2).$$

Επίσης, για κάθε $Q \in Y$ το X είναι ισόμορφο (μέσω τής $\iota_1 : X \longrightarrow X \times \{Q\}, P \mapsto (P, Q)$) με το $X \times \{Q\} = ((X \times \{Q\}) \cap Z_1) \cup ((X \times \{Q\}) \cap Z_2)$, καθώς και με το

$$\begin{aligned}\sigma_{m,n}(X \times \{Q\}) &= \sigma^{Q}_{m,n,[1]}(X \times \{Q\}) \\ &= (\sigma_{m,n}(X \times \{Q\}) \cap \sigma_{m,n}(Z_1)) \cup (\sigma_{m,n}(X \times \{Q\}) \cap \sigma_{m,n}(Z_2)).\end{aligned}$$

Άρα το $\sigma_{m,n}(X \times \{Q\})$ είναι ανάγωγο (και τα $\sigma_{m,n}(Z_1), \sigma_{m,n}(Z_2)$ κλειστά) ως προς $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_{\mathrm{Seg}_{m,n}}$, πράγμα που σημαίνει ότι ισχύει είτε $\sigma_{m,n}(X \times \{Q\}) \subseteq \sigma_{m,n}(Z_1)$ είτε $\sigma_{m,n}(X \times \{Q\}) \subseteq \sigma_{m,n}(Z_2)$. Από την άλλη μεριά, για κάθε $P \in X$ το Y είναι ισόμορφο μέσω τής

$$\iota_2 : Y \longrightarrow \{P\} \times Y, \;\; Q \mapsto (P, Q),$$

με το $\{P\} \times Y$, καθώς και με το $\sigma_{m,n}(\{P\} \times Y) = \sigma^{P}_{m,n,[2]}(\{P\} \times Y)$. Για $i = 1, 2$ και $P \in X$ το

$$\left(\sigma^{P}_{m,n,[1]} \circ \iota_2\right)^{-1}(\sigma_{m,n}(Z_i)) = \{Q \in Y \;| \sigma_{m,n}(P, Q) \subseteq \sigma_{m,n}(Z_i)\}$$

είναι κλειστό ως προς την $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_Y \, (\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})$. Κατά συνέπειαν, και τα

$$Y_i := \bigcap_{P \in X} \left(\sigma^{P}_{m,n,[1]} \circ \iota_2\right)^{-1}(\sigma_{m,n}(Z_i)) = \{Q \in Y \;| \sigma_{m,n}(X \times \{Q\}) \subseteq \sigma_{m,n}(Z_i)\},$$

$i = 1, 2$, είναι κλειστά ως προς την $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_Y \, (\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})$ (ως τομή κλειστών). Επειδή $Y = Y_1 \cup Y_2$ και το Y υπετέθη ανάγωγο, έχουμε είτε $Y = Y_1$ είτε $Y = Y_2$ (βλ. πρόταση 1.6.2). Εξ αυτού έπεται ότι είτε $\sigma_{m,n}(X \times Y) = \sigma_{m,n}(Z_1)$ είτε $\sigma_{m,n}(X \times Y) = \sigma_{m,n}(Z_2)$ και, ως εκ τούτου, λόγω τού θεωρήματος 3.9.8, ότι είτε $X \times Y = Z_1$ είτε $X \times Y = Z_2$. Άρα το $X \times Y$ είναι όντως ανάγωγο. □

3.9.15 Ορισμός. Εάν τα X, Y είναι δυο μη κενά, κατά Zariski ανοικτά υποσύνολα προβολικών αλγεβρικών συνόλων, τότε ένα **κατηγορικό γινόμενο** των X και Y είναι μια τριάδα (W, p_X, p_Y) αποτελούμενη από ένα μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο W ενός προβολικού αλγεβρικού συνόλου και δυο μορφισμούς $p_X : W \longrightarrow X$ και $p_Y : W \longrightarrow Y$ (υπό την έννοια τού ορισμού 3.4.12), οι οποίοι καλούνται **προβολές** επί των X και Y, αντιστοίχως, ούτως ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη *καθολική συνθήκη*:

Εάν το Z είναι ένα μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο ενός προβολικού αλγεβρικού συνόλου και οι $\varphi_1 : Z \longrightarrow X$, $\varphi_2 : Z \longrightarrow Y$ δυο μορφισμοί, τότε υπάρχει μονοσημάντως *ορισμένος μορφισμός* $h : Z \longrightarrow W$ *που καθιστά το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[ddl, "\varphi_1"'] \arrow[d, "h"] \arrow[ddr, "\varphi_2"] & \\
& W \arrow[dl, "p_Y"] \arrow[dr, "p_X"'] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό. (Σύμφωνα με την επόμενη πρόταση, εάν ένα κατηγορικό γινόμενο των X, Y υπάρχει, τότε είναι μονοσημάντως ορισμένο *μέχρις ισομορφισμού*.)

3.9.16 Πρόταση. (Μοναδικότητα κατηγορικού γινομένου) *Εάν τα* X, Y *είναι δυο μη κενά, κατά Zariski ανοικτά υποσύνολα προβολικών αλγεβρικών συνόλων και* (W, p_X, p_Y), (W', p'_X, p'_Y) *δυο κατηγορικά γινόμενα των* X *και* Y, *τότε υφίσταται μονοσημάντως ορισμένος ισομορφισμός* $h : W \longrightarrow W'$ *που καθιστά το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
& W \arrow[dl, "p_X"'] \arrow[dr, "p_Y"] \arrow[dd, "h", "\cong"'] & \\
X \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & {} & Y \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"'] \\
& W' \arrow[ul, "p'_X"] \arrow[ur, "p'_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή αμφότερα τα (W, p_X, p_Y) και (W', p'_X, p'_Y) ικανοποιούν την καθολική συνθήκη τού 3.9.15, εφαρμόζοντας αυτή τη συνθήκη για $Z = W'$, $\varphi_1 = p'_X$, $\varphi_2 = p'_Y$ και $Z = W$, $\varphi_1 = p_X$, $\varphi_2 = p_Y$, αντιστοίχως, κατασκευάζουμε τον μονοσημάντως ορισμένο μορφισμό $h' : W' \longrightarrow W$ για τον οποίο ισχύει $p_X \circ h' = p'_X$ και $p_Y \circ h' = p'_Y$, καθώς και τον μονοσημάντως ορισμένο μορφισμό $h : W \longrightarrow W'$ για τον οποίο ισχύει

$p'_X \circ h = p_X$ και $p'_Y \circ h = p_Y$.

$$\begin{tikzcd}
& W \arrow[dl, "p_X"'] \arrow[dr, "p_Y"] \arrow[dd, bend left, "h"] & \\
X \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & {} \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & Y \\
& W' \arrow[ul, "p'_X"] \arrow[ur, "p'_Y"'] \arrow[uu, bend left, "h'"] &
\end{tikzcd}$$

Λόγω αυτής τής μοναδικότητας έχουμε

$$\left.\begin{array}{r} p_X \circ \mathrm{Id}_W = p_X = p'_X \circ h = p_X \circ h' \circ h \\ p_Y \circ \mathrm{Id}_W = p_Y = p'_Y \circ h = p_Y \circ h' \circ h \end{array}\right\} \Rightarrow h' \circ h = \mathrm{Id}_W$$

και

$$\left.\begin{array}{r} p'_X \circ \mathrm{Id}_{W'} = p'_X = p_X \circ h' = p'_X \circ h \circ h' \\ p'_Y \circ \mathrm{Id}_{W'} = p'_Y = p_Y \circ h' = p'_Y \circ h \circ h' \end{array}\right\} \Rightarrow h \circ h' = \mathrm{Id}_{W'},$$

οπότε αμφότεροι οι h, h' είναι ισομορφισμοί (και ο ένας αντίστροφος τού άλλου). □

3.9.17 Πρόταση. **(Ύπαρξη κατηγορικού γινομένου)** *Εάν τα X, Y είναι δυο μη κενά, κατά Zariski ανοικτά υποσύνολα προβολικών αλγεβρικών συνόλων, τότε η τριάδα*

$$(\sigma_{m,n}(X \times Y), p_X, p_Y),$$

όπου

$$\left\{ \begin{array}{l} p_X : \sigma_{m,n}(X \times Y) \longrightarrow X, \quad p_X := \mathrm{pr}_X \circ \sigma_{m,n}^{-1}\big|_{\sigma_{m,n}(X \times Y)} \\ p_Y : \sigma_{m,n}(X \times Y) \longrightarrow Y, \quad p_Y := \mathrm{pr}_Y \circ \sigma_{m,n}^{-1}\big|_{\sigma_{m,n}(X \times Y)} \end{array} \right\}$$

και $\mathrm{pr}_X : X \times Y \longrightarrow X$, $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ οι συνήθεις (συνολοθεωρητικές) προβολές, συνιστά ένα κατηγορικό γινόμενο των X και Y.

Απόδειξη. Εάν το Z είναι ένα κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο ενός προβολικού αλγεβρικού συνόλου και οι $\varphi_1 : Z \longrightarrow X$, $\varphi_2 : Z \longrightarrow Y$ δυο μορφισμοί, τότε (κατά το θεώρημα 3.9.8 και την άσκηση **A-3-66** (b)) η απεικόνιση

$$h : Z \longrightarrow \sigma_{m,n}(X \times Y), \quad P \longmapsto h(P) := \sigma_{m,n}\left(\varphi_1(P), \varphi_2(P)\right),$$

είναι μορφισμός που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "\varphi_2"] & \\
X & \sigma_{m,n}(X \times Y) \arrow[l, "p_X"'] \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "\sigma_{m,n}^{-1}"', "\cong"] & Y \\
 & X \times Y \arrow[ul, "\mathrm{pr}_X"] \arrow[ur, "\mathrm{pr}_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό, διότι

$$\begin{aligned}
(p_X \circ h)(P) &= (\mathrm{pr}_X \circ \sigma_{m,n}^{-1}|_{\sigma_{m,n}(X\times Y)})(\sigma_{m,n}(\varphi_1(P), \varphi_2(P))) \\
&= \mathrm{pr}_X(\varphi_1(P), \varphi_2(P)) = \varphi_1(P), \ \forall P \in Z,
\end{aligned}$$

οπότε $p_X \circ h = \varphi_1$ και (παρομοίως) $p_Y \circ h = \varphi_2$. Μάλιστα, ο h είναι ο μοναδικός μορφισμός με αυτήν την ιδιότητα, διότι για οιονδήποτε μορφισμό $h' : Z \longrightarrow \sigma_{m,n}(X \times Y)$ με $p_X \circ h' = \varphi_1$ και $p_Y \circ h' = \varphi_2$ έχουμε

$$\left.\begin{array}{c} p_X \circ h' = \varphi_1 = p_X \circ h \\ p_Y \circ h' = \varphi_2 = p_Y \circ h \end{array}\right\} \Rightarrow h(P) = \sigma_{m,n}((p_X \circ h')(P), (p_Y \circ h')(P))$$

$$\Rightarrow \sigma_{m,n}^{-1}|_{\sigma_{m,n}(X\times Y)}(h(P)) = \left(\mathrm{pr}_X(\sigma_{m,n}^{-1}(h'(P))), \mathrm{pr}_Y(\sigma_{m,n}^{-1}(h'(P)))\right)$$

$$= \sigma_{m,n}^{-1}|_{\sigma_{m,n}(X\times Y)}(h'(P)) \Rightarrow h(P) = h'(P), \ \forall P \in Z,$$

ήτοι $h = h'$. Άρα η τριάδα $(\sigma_{m,n}(X \times Y), p_X, p_Y)$ συνιστά ένα κατηγορικό γινόμενο των X και Y. □

3.9.18 Σημείωση. Συγκεφαλαιώνοντας, υπογραμμίζουμε ότι, βάσει των όσων προαναφέρθησαν, το καρτεσιανό γινόμενο $X \times Y$ οιωνδήποτε $\mathbf{k}$-ποικιλοτήτων X, Y είναι μια $\mathbf{k}$-ποικιλότητα εφοδιασμένη με τη φυσική τοπολογία Zariski την αποκτώμενη μέσω τού ισομορφισμού $\sigma_{m,n}$. Τα κλειστά της υποσύνολα μπορούν να μελετηθούν **είτε** μέσω διομογενών πολυωνύμων **είτε** μέσω τής «υλοποιήσεώς» της $\sigma_{m,n}(X \times Y)$ εντός τού $\mathbb{P}^l_{\mathbf{k}}$.

3.9.19 Ορισμός. Έστω X μια $\mathbf{k}$-ποικιλοτήτα. Ως **διαγώνιος** τής X ορίζεται το σύνολο

$$\boxed{\Delta_X := \{\,(P,P) \mid P \in X\} \subseteq X \times X.}$$

3.9.20 Λήμμα. *Η διαγώνιος $\Delta_{\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}}$ τού προβολικού χώρου $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$ είναι κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$ και ο μορφισμός*

$$d_{\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}} : \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \longrightarrow \Delta_{\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}},\ P \longmapsto (P,P)\,,$$

ισομορφισμός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η διαγώνιος $\Delta_{\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}}$ είναι προφανώς κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού καρτεσιανού γινομένου $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$, διότι

$$\Delta_{\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}} = \left\{ ([a_0 : .. : a_m]\,, [b_0 : .. : b_m]) \in \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \;\middle|\; \begin{array}{c} a_i b_j = a_j b_i, \\ \forall i,j \in \{0,..,m\} \end{array} \right\}.$$

Επιπροσθέτως, ο $d_{\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}}$ δέχεται τον μορφισμό

$$\mathrm{pr}_{\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}}\big|_{\Delta_{\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}}} : \Delta_{\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}} \longrightarrow \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}},\ \ (P,P) \longmapsto P,$$

ως αντίστροφό του. □

3.9.21 Πρόταση. *Η διαγώνιος Δ_X οιασδήποτε $\mathbf{k}$-ποικιλότητας X είναι κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού $X \times X$ και ο μορφισμός*

$$d_X : X \longrightarrow \Delta_X,\ P \longmapsto (P,P)\,,$$

ισομορφισμός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η X μπορεί να θεωρηθεί ως κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο $X \subseteq V \subseteq \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$ μιας προβολικής ποικιλότητας V εντός ενός προβολικού χώρου $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$. Σύμφωνα με το λήμμα 3.9.20 η $\Delta_{\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}}$ είναι κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$, οπότε η διαγώνιος

$$\Delta_V = (V \times V) \cap \Delta_{\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}}$$

αποτελεί ένα κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού $V \times V$ και η διαγώνιος

$$\Delta_X = (X \times X) \cap \Delta_V$$

ένα κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού $X \times X$. Επιπροσθέτως, ο d_X δέχεται τον μορφισμό

$$\mathrm{pr}_X|_{\Delta_X} : \Delta_X \longrightarrow X,\ \ (P,P) \longmapsto P,$$

ως αντίστροφό του. □

3.9.22 Ορισμός. Έστω $\varphi : X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός μεταξύ $\mathbf{k}$-ποικιλοτήτων. Ως **γράφημα** τού φ ορίζεται το σύνολο

$$\boxed{\mathrm{Gr}\,(\varphi) := \{\,(P,Q) \in X \times Y \mid Q = \varphi\,(P)\}\,.}$$

Η επόμενη πρόταση γενικεύει την άσκηση **A-2-36** για οιεσδήποτε $\mathbf{k}$-ποικιλότητες.

3.9.23 Πρόταση. *Έστω $\varphi : X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός μεταξύ $\mathbf{k}$-ποικιλοτήτων. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(a) *Το $\mathrm{Gr}(\varphi)$ είναι κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού $X \times Y$.*

(b) $\mathrm{Gr}(\varphi) \cong X$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a) Επειδή οι φ και Id_Y είναι μορφισμοί, είναι μορφισμός και το γινόμενό τους

$$\varphi \times \mathrm{Id}_Y : X \times Y \longrightarrow Y \times Y.$$

Ως μορφισμός η $\varphi\times\ \mathrm{Id}_Y$ είναι κατά Zariski συνεχής, οπότε αντιστρέφει κλειστά υποσύνολα τού $Y \times Y$ σε κλειστά υποσύνολα τού $X \times Y$. Άρα το γράφημα

$$\mathrm{Gr}\,(\varphi) = (\varphi \times \mathrm{Id}_Y)^{-1}\,(\Delta_Y)$$

τού φ είναι ένα κλειστό υποσύνολο τής $X \times Y$ (διότι η Δ_Y είναι κλειστό υποσύνολο τού $Y \times Y$ επί τη βάσει τής προτάσεως 3.9.21).

(b) Ο μορφισμός

$$\mathrm{pr}_X|_{\mathrm{Gr}(\varphi)} : \mathrm{Gr}\,(\varphi) \longrightarrow X,\ (P,Q) \longmapsto P,$$

δέχεται τον μορφισμό

$$X \longrightarrow \mathrm{Gr}\,(\varphi)\,,\ \ P \longmapsto (P, \varphi\,(P)),$$

ως αντίστροφό του. □

3.9.24 Ορισμός. Μια $\mathbf{k}$-ποικιλότητα X καλείται **πλήρης ποικιλότητα** όταν για οιαδήποτε $\mathbf{k}$-ποικιλότητα Y η προβολή $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ τού $X \times Y$ επί τής Y είναι κλειστή απεικόνιση[33] (δηλαδή απεικονίζει κατά Zariski κλειστά υποσύνολα τού $X \times Y$ σε κατά Zariski κλειστά υποσύνολα τού Y).

3.9.25 Παράδειγμα. Η συσχετική ευθεία $\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ δεν είναι πλήρης, διότι η προβολή

$$\mathrm{pr}_{\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}} : \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$$

απεικονίζει το $\mathbf{V}(\mathsf{XY} - 1)$ στο μη κλειστό υποσύνολο $\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\}$ τού $\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$.

[33] Εάν $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ και εάν θεωρήσουμε τις $\mathbb{C}$-ποικιλότητες εφοδιασμένες με τη συνήθη (ισχυρή) τοπολογία, τότε μια τέτοια ποικιλότητα είναι *πλήρης* εάν και μόνον εάν είναι *συμπαγής*!

3.9.26 Πρόταση. *Κατά Zariski κλειστά υποσύνολα πλήρων* $\mathbf{k}$*-ποικιλοτήτων είναι πλήρη.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω X ένα κατά Zariski κλειστό υποσύνολο μιας πλήρους $\mathbf{k}$-ποικιλότητας V και έστω Y τυχούσα $\mathbf{k}$-ποικιλότητα. Τότε το $X \times Y$ είναι κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού $V \times Y$ και η προβολή $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ αποτελεί περιορισμό τής προβολής $\mathrm{pr}_Y : V \times Y \longrightarrow Y$ (που είναι εξ υποθέσεως κλειστή) στο $X \times Y$. Κατά συνέπειαν, και το X είναι μια πλήρης $\mathbf{k}$-ποικιλότητα. □

3.9.27 Πρόταση. *Εάν οι V, W είναι δυο πλήρεις* $\mathbf{k}$*-ποικιλότητες, τότε και το καρτεσιανό γινόμενό τους $V \times W$ είναι πλήρης* $\mathbf{k}$*-ποικιλότητα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω Y τυχούσα $\mathbf{k}$-ποικιλότητα. Τότε η προβολή $\mathrm{pr}_Y : (V \times W) \times Y \longrightarrow Y$ αποτελεί τη σύνθεση των προβολών

$$\mathrm{pr}_{W\times Y} : V \times (W \times Y) \longrightarrow W \times Y, \quad \mathrm{pr}_Y : W \times Y \longrightarrow Y$$

(που είναι εξ υποθέσεως κλειστές απεικονίσεις). Άρα το καρτεσιανό γινόμενο $V \times W$ είναι πλήρης $\mathbf{k}$-ποικιλότητα. □

3.9.28 Λήμμα. *Εάν το* $\mathbf{k}$ *είναι αλγεβρικώς κλειστό σώμα, τότε η προβολή*

$$\mathrm{pr}_{\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}} : \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$$

είναι κλειστή απεικόνιση.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας υποθέσουμε ότι οι $\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m$ είναι οι συναρτήσεις συντεταγμένων τού $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$ και οι $\mathsf{Y}_0, \ldots, \mathsf{Y}_n$ οι συναρτήσεις συντεταγμένων τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$. Έστω V ένα κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$. Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα 3.9.6 και την άσκηση **A-3-54** (d), $V = \mathbf{V}_+^{\text{διομ.}}(F_1, \ldots, F_\kappa)$, όπου $\kappa \in \mathbb{N}$ και $F_1, \ldots, F_\kappa$ διομογενή πολυώνυμα ανήκοντα στον $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m, \mathsf{Y}_0, \ldots, \mathsf{Y}_n]$. Αρκεί να δείξουμε ότι η εικόνα $\mathrm{pr}_{\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}}(V)$ τού V μέσω τής προβολής $\mathrm{pr}_{\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}}$ είναι κατά Zariski κλειστή εντός τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$. Δίχως βλάβη τής γενικότητας (ενδεχομένως κατόπιν πολλαπλασιασμού των $F_1, \ldots, F_\kappa$ με κατάλληλα, επιπρόσθετα μονώνυμα) μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλα τα $F_1, \ldots, F_\kappa$ είναι *τού ιδίου διβαθμού* (d, d').

Για κάθε $[b_0 : .. : b_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ και κάθε ακέραιο αριθμό $\nu \geq 1$ θεωρούμε τον ομομορφισμό $\mathbf{k}$-διανυσματικών χώρων[34]

$$\Phi_\nu(b_0, \ldots, b_n) : \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m]_{\nu-d} \times \cdots \times \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m]_{\nu-d} \longrightarrow \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m]_\nu$$

$$(G_1(\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m), \ldots, G_\kappa(\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m)) \longmapsto \sum_{j=1}^{\kappa} G_j(\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m) F_j(\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m, b_0, \ldots, b_n)$$

[34]Κατ' ουσίαν θα χρειασθούμε μόνον τους ακεραίους ν που είναι $\geq d$. Τυπικώς, για $\nu < d$, ο $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m]_{\nu-d}$ θα μπορούσε να εκληφθεί ως ο τετριμμένος $\mathbf{k}$-διανυσματικός χώρος.

και θέτουμε

$$\gamma_\nu := \dim_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_m]_{\nu-d}\times\cdots\times\mathbf{k}[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_m]_{\nu-d}) = \kappa\cdot\binom{\nu-d+m}{m}$$

και

$$\delta_\nu := \dim_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_m]_{\nu}) = \binom{\nu+m}{m}.$$

Ως προς δύο παγιωμένες βάσεις των ανωτέρω $\mathbf{k}$-διανυσματικών χώρων ο ομομορφισμός

$$\Phi_\nu(b_0,\ldots,b_n):\mathbf{k}^{\gamma_\nu}\longrightarrow\mathbf{k}^{\delta_\nu},\ \ (\lambda_1,\ldots,\lambda_{\gamma_\nu})\longmapsto\mathcal{A}(\lambda_1,\ldots,\lambda_{\gamma_\nu})^{\mathsf{T}}$$

ορίζεται μέσω ενός πίνακα $\mathcal{A}\in\mathrm{Mat}_{\delta_\nu\times\gamma_\nu}(\mathbf{k})$, οι εγγραφές τού οποίου δεν είναι τίποτα άλλο παρά αποτιμήσεις κατάλληλων ομογενών πολυωνύμων τού $\mathbf{k}[\mathsf{Y}_0,\ldots,\mathsf{Y}_n]_{d'}$ στο $[b_0:..:b_n]$. Κατά συνέπειαν,

$$[b_0:..:b_n]\notin\mathrm{pr}_{\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}}(V)\Leftrightarrow\left\{[\mathsf{X}_0:..:\mathsf{X}_m]\in\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}\;\middle|\;\begin{array}{c}F_j(\mathsf{X}_0,..,\mathsf{X}_m,b_0,..,b_n)=0_{\mathbf{k}},\\ \forall j\in\{1,\ldots,\kappa\}\end{array}\right\}=\varnothing$$

$$\begin{array}{lll}\Leftrightarrow & \exists\nu\in\mathbb{N}:\langle\mathsf{X}_0,..,\mathsf{X}_m\rangle^\nu\subseteq\langle\{F_j(\mathsf{X}_0,..,\mathsf{X}_m,b_0,..,b_n)\ |j\in\{1,..,\kappa\}\}\rangle & (\text{βλ. 3.3.19 (c)})\\ \Leftrightarrow & \exists\nu\in\mathbb{N}:\mathbf{k}[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_m]_\nu\subseteq\langle\{F_j(\mathsf{X}_0,..,\mathsf{X}_m,b_0,..,b_n)\ |j\in\{1,..,\kappa\}\}\rangle & \\ \Leftrightarrow & \exists\nu\in\mathbb{N}:\ \text{ο }\Phi_\nu(b_0,\ldots,b_n)\text{ είναι επιμορφισμός} & (\text{εκ κατασκευής})\\ \Leftrightarrow & \exists\nu\in\mathbb{N}:\ \mathrm{rank}(\mathcal{A})=\delta_\nu & (\text{από Γρ. Άλγεβρα})\end{array}$$

και, ως εκ τούτου, $[b_0:..:b_n]\in\mathrm{pr}_{\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}}(V)\Leftrightarrow$ οι ορίζουσες των $(\delta_\nu\times\delta_\nu)$-υποπινάκων τού $\mathcal{A}$ είναι $=0_{\mathbf{k}}$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$. Εξ αυτού συνάγουμε ότι

$$\mathrm{pr}_{\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}}(V)=\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}}\left\{[b_0:..:b_n]\in\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}\;\middle|\;\begin{array}{c}\text{οι ορίζουσες των}\\ (\delta_\nu\times\delta_\nu)\text{-υποπινάκων}\\ \text{τού }\mathcal{A}\text{ είναι }=0_{\mathbf{k}}\end{array}\right\},$$

οπότε το $\mathrm{pr}_{\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}}(V)$ τού V είναι κατά Zariski κλειστό (ως τομή κλειστών). □

3.9.29 Λήμμα. *Εάν το $\mathbf{k}$ είναι αλγεβρικώς κλειστό σώμα, τότε ο προβολικός χώρος $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$ είναι πλήρης $\mathbf{k}$-ποικιλότητα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω Y τυχούσα $\mathbf{k}$-ποικιλότητα. Η Y μπορεί να θεωρηθεί ως κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο μιας προβολικής ποικιλότητας εντός ενός προβολικού χώρου $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$. Εάν το V είναι κλειστό ως προς την $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_{\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}\times Y}(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}\times\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})$, τότε υπάρχει ένα κλειστό υποσύνολο V' τού $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}\times\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ (ως προς την $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}\times\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})$), ούτως ώστε να ισχύει

$$V=(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}\times Y)\cap V'\Rightarrow\mathrm{pr}_Y(V)=Y\cap\mathrm{pr}_{\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}}(V').$$

Κατά το λήμμα 3.9.28 το $\mathrm{pr}_{\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}}(V')$ είναι κλειστό υποσύνολο τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ (ως προς την $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})$). Άρα το $\mathrm{pr}_Y(V)$ είναι κλειστό υποσύνολο τής Y (ως προς τη σχετική τοπολογία $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_Y(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})$). □

3.9.30 Θεώρημα. *Εάν υποθέσουμε ότι το* $\mathbf{k}$ *είναι ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα, τότε κάθε προβολική* $\mathbf{k}$*-ποικιλότητα είναι πλήρης.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω X μια προβολική $\mathbf{k}$-ποικιλότητα και έστω Y τυχούσα $\mathbf{k}$-ποικιλότητα. Θα δείξουμε ότι η προβολή $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ επί τής Y είναι κλειστή απεικόνιση. Η X είναι κατά Zariski κλειστό υποσύνολο ενός προβολικού χώρου $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$. Εάν το V είναι κλειστό ως προς την $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_{X\times Y}(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times Y)$, τότε είναι κλειστό και ως προς την $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times Y)$, οπότε (βάσει τού λήμματος 3.9.29) το $\mathrm{pr}_Y(V) \subseteq Y$ είναι κλειστό ως προς την $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(Y)$. □

3.9.31 Πόρισμα. *Η εικόνα οιουδήποτε μορφισμού* $\mathbf{k}$*-ποικιλοτήτων* $\varphi : X \longrightarrow Y$, *όπου* X *προβολική ποικιλότητα και* $\mathbf{k}$ *αλγεβρικώς κλειστό σώμα, είναι κλειστή (ως προς την τοπολογία Zariski) και πλήρης.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε την προβολή $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ επί τής Y. Επειδή το γράφημα $\mathrm{Gr}(\varphi)$ τού φ είναι κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού $X \times Y$ και ισόμορφο τής *πλήρους* $\mathbf{k}$-ποικιλότητας X (βλ. 3.9.23 και 3.9.30), η εικόνα

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(X) = \mathrm{pr}_Y(\mathrm{Gr}\,(\varphi)) \subseteq Y$$

τού φ είναι κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού Y. Για τον έλεγχο τής πληρότητάς της θεωρούμε τυχούσα $\mathbf{k}$-ποικιλότητα W και τυχόν κατά Zariski κλειστό υποσύνολο Z τού $\varphi(X) \times W$. (Το Z είναι προφανώς κατά Zariski κλειστό υποσύνολο και τού $Y \times W$.) Αρκεί να δείξουμε ότι το $Z' := \mathrm{pr}_W(Z)$ είναι κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού W. Προς τούτο ορίζουμε ως pr_{13} και pr_{23} τις προβολές τού $X \times Y \times W$ επί των $X \times W$ και $Y \times W$, αντιστοίχως. Ο περιορισμός $\mathrm{pr}_{13}|_{\mathrm{Gr}(\varphi)\times W}$ τής pr_{13} είναι ισομορφισμός μεταξύ των $\mathrm{Gr}(\varphi) \times W$ και $X \times W$. Το

$$Z'' := \mathrm{pr}_{23}^{-1}\,(Z) \cap (\mathrm{Gr}\,(\varphi) \times W)$$

είναι κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού $\mathrm{Gr}(\varphi) \times W$ και το $\mathrm{pr}_{23}\,(Z'')$ κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού $X \times W$. Επειδή η X είναι πλήρης, το $Z' = \mathrm{pr}_W(\mathrm{pr}_{23}\,(Z''))$ είναι όντως κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού W. □

3.9.32 Σημείωση. Το πόρισμα 3.9.31 δεν ισχύει εν γένει όταν το X δεν είναι προβολικό. Επί παραδείγματι, ο μορφισμός

$$\varphi : \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}},\ \ \varphi(a,b) := (a, ab),\ \forall (a,b) \in \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}},$$

έχει το σύνολο $\varphi(\mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}) = \left\{ (a,b) \in \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}} \,\middle|\, a \neq 0_{\mathbf{k}} \right\} \cup \{(0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}})\}$ ως εικόνα του, το οποίο δεν είναι ούτε αλγεβρικό ούτε καν σχεδόν συσχετική ποικιλότητα.

3.9.33 Πόρισμα. *Ας υποθέσουμε ότι το* $\mathbf{k}$ *είναι ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα και ότι η* X *είναι μια πλήρης* $\mathbf{k}$*-ποικιλότητα. Τότε κάθε κανονική συνάρτηση* $f : X \longrightarrow \mathbf{k}$ *ορισμένη επί ολοκλήρου τής* X *οφείλει να είναι σταθερή συνάρτηση.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κάθε κανονική συνάρτηση f ορισμένη επί ολοκλήρου τής X εκλαμβάνεται ως μορφισμός $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$. Σύμφωνα με τα πορίσματα 1.6.6 και 3.9.31 η εικόνα της $f(X)$ είναι ένα *ανάγωγο* και *κατά Zariski κλειστό* υποσύνολο τού $\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$. Βάσει τού 3.9.25 η συσχετική ευθεία $\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ δεν είναι πλήρης. Κατά συνέπειαν, λόγω τού πορίσματος 3.9.31 έχουμε $f(X) \subsetneqq \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$. Αυτό, συνδυαζόμενο με την άσκηση **A-1-8**, σημαίνει ότι το $f(X)$ είναι κατ' ανάγκην μονοσύνολο. □

3.9.34 Σημείωση. Προφανώς, μέσω τού θεωρήματος 3.9.30 και τού πορίσματος 3.9.33 προκύπτει μια δεύτερη, κατά τι ευκολότερη απόδειξη τού θεωρήματος 3.7.16.

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι ισχύει και το αντίστροφο τού 3.9.30.

3.9.35 Θεώρημα. *Εάν υποθέσουμε ότι το* $\mathbf{k}$ *είναι ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα, τότε κάθε πλήρης* $\mathbf{k}$*-ποικιλότητα είναι προβολική.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω X μια πλήρης $\mathbf{k}$-ποικιλότητα και έστω $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ η ένθεσή της σε κάποιον προβολικό χώρο. Από την πρόταση 3.9.23 γνωρίζουμε ότι το γράφημα $\mathrm{Gr}(i)$ τής i είναι κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού $X \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ και ισόμορφο τής X. Επειδή

$$X \cong i(X) = \mathrm{pr}_{\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}}(\mathrm{Gr}\,(i)) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}},$$

η X είναι κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, δηλαδή προβολική ποικιλότητα. □

3.9.36 Σημείωση. Στο σημείο αυτό προσήκει η παράθεση ενός επεξηγηματικού σχολίου που αφορά στο θεώρημα 3.9.35. Εντός τού πλαισίου τής *σύγχρονης* Αλγεβρικής Γεωμετρίας είθισται να εργαζόμαστε, μεταξύ άλλων, και με **αφηρημένες k-ποικιλότητες** (όπου $\mathbf{k}$ αλγεβρικώς κλειστό σώμα), ήτοι με *διαχωρισμένες* $\mathbf{k}$*-προποικιλότητες* (separated prevarieties over $\mathbf{k}$) στην ορολογία τών A. Weil, D. Mumford κ.ά. ή -ισοδυνάμως- με *ανηγμένα ανάγωγα διαχωρισμένα διασχήματα πεπερασμένου τύπου υπεράνω τού* $\mathbf{k}$ (reduced irreducible separated schemes of finite type over $\mathbf{k}$) στην (νεότερη) ορολογία τού A. Grothendieck (και των μεταγενέστερων αλγεβρογεωμετρών). Η κλάση των αφηρημένων $\mathbf{k}$-ποικιλοτήτων είναι *ευρύτερη* τής κλάσεως των (σχεδόν προβολικών) $\mathbf{k}$-ποικιλοτήτων[35] που χρησιμοποιούνται στις παρούσες σημειώσεις. Θα πρέπει να τονισθεί ιδιαιτέρως ότι το θεώρημα 3.9.35 παύει να ισχύει για αφηρημένες $\mathbf{k}$-ποικιλότητες, καθότι υπάρχουν παραδείγματα *πλήρων αφηρημένων* $\mathbf{k}$*-ποικιλοτήτων* (*διαστάσεως* ≥ 2) *που δεν είναι προβολικές*! Οι κατασκευές των πρώτων παραδειγμάτων (δισδιαστάτων ιδιαζόντων και τρισδιαστάτων μη ιδιαζόντων) μη προβολικών, πλήρων αφηρημένων $\mathbf{k}$-ποικιλοτήτων οφείλονται στους M. Nagata[36] και H. Hironaka[37].

[35] Βλ. R. Hartshorne: *Algebraic Geometry*, GTM, Vol. **52**, Springer-Verlag, 1977, σελ. 105.

[36] Βλ. M. Nagata: *On the imbeddings of abstract surfaces in projective varieties*, Mem. Coll. Sci. Kyoto **30** (1957), 231-235, και *Existence theorems for non-projective complete algebraic varieties*, Illinois Jour. Math. **2** (1958), 490-498.

[37] Βλ. H. Hironaka: *On the theory of birational blow-up* (PhD Thesis), Harvard University, 1960. (Πρβλ. R. Hartshorne: *Algebraic Geometry*, GTM, Vol. **52**, Springer-Verlag, 1977, Appendix B, Ex. 3.4.1, σελ. 443-444.)

Ασκήσεις

Α-3-54. Ένα ιδεώδες I τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_m,\mathsf{Y}_0,\ldots,\mathsf{Y}_n]$ καλείται **διομογενές ιδεώδες** όταν παράγεται από διομογενή πολυώνυμα (πιθανώς διαφορετικών διβαθμών) τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_m,\mathsf{Y}_0,\ldots,\mathsf{Y}_n]$. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(a) Έστω $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{k}[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_m,\mathsf{Y}_0,\ldots,\mathsf{Y}_n]$ ένα σύνολο διομογενών πολυωνύμων και έστω $I := \langle \mathcal{S} \rangle$. Τότε $\mathbf{V}_+^{\text{διομ.}}(\mathcal{S}) = \mathbf{V}_+^{\text{διομ.}}(I)$. (*Υπόδειξη*: Πρβλ. 3.3.3 (a).)

(b) Κάθε μη τετριμμένο, διομογενές ιδεώδες I τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_m,\mathsf{Y}_0,\ldots,\mathsf{Y}_n]$ παράγεται από πεπερασμένα (μη μηδενικά) διομογενή πολυώνυμα. (*Υπόδειξη*: Πρβλ. 3.3.3 (b)).

(c) Για οιοδήποτε υποσύνολο $X \subseteq \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^m \times \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n$ το $\mathbf{I}_+^{\text{διομ.}}(X)$ είναι διομογενές ιδεώδες.

(d) Κάθε αλγεβρικό σύνολο $V \subseteq \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^m \times \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n$ (υπό την έννοια τού ορισμού 3.9.5 (b)) είναι τής μορφής $V = \mathbf{V}_+^{\text{διομ.}}(F_1,\ldots,F_\kappa)$, όπου $\kappa \in \mathbb{N}$ και $F_1,\ldots,F_\kappa$ διομογενή πολυώνυμα ανήκοντα στον $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_m,\mathsf{Y}_0,\ldots,\mathsf{Y}_n]$.

Α-3-55. Να αποδειχθούν τα ανάλογα των προτάσεων 3.3.4 και 3.3.8, και τού πορίσματος 3.3.9 για τα αλγεβρικά σύνολα εντός τού $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^m \times \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n$ (υπό την έννοια τού 3.9.5 (b)) και για τα διομογενή ιδεώδη αυτών.

Α-3-56. Για οιοδήποτε υποσύνολο $X \subseteq \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^m \times \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n$ να αποδειχθεί η ισότητα

$$\mathbf{V}_+^{\text{διομ.}}(\mathbf{I}_+^{\text{διομ.}}(X)) = \mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^m \times \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n)}(X).$$

(Πρόκειται για το ανάλογο τής προτάσεως 3.3.10.)

Α-3-57. Να αποδειχθεί ότι ένα αλγεβρικό σύνολο $V \subseteq \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^m \times \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n$ (υπό την έννοια τού ορισμού 3.9.5 (b)) είναι ανάγωγο (ως προς την $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^m \times \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n)$) εάν και μόνον εάν το (διομογενές) ιδεώδες του $\mathbf{I}_+^{\text{διομ.}}(V)$ είναι πρώτο. (Πρόκειται για το ανάλογο τής προτάσεως 3.3.13.)

Α-3-58. Να αποδειχθεί ότι το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^m \times \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n$ (εφοδιασμένο με την $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^m \times \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n)$) είναι ένας ναιτεριανός τοπολογικός χώρος και -ως εκ τούτου- κάθε αλγεβρικό υποσύνολο εντός αυτού δέχεται μια (μονοσημάντως ορισμένη) αποσύνθεση σε ανάγωγες συνιστώσες. (*Υπόδειξη*: Πρβλ. 3.3.14 και 3.3.15.)

Α-3-59. Έστω Y ένα μη κενό, ανοικτό υποσύνολο ενός κλειστού υποσυνόλου τού καρτεσιανού γινομένου $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^m \times \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n$ (ως προς την $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^m \times \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n)$) και έστω $(P,Q) \in Y$. Να αποδειχθεί ότι μια συνάρτηση $f : Y \longrightarrow \mathbf{k}$ είναι κανονική συνάρτηση στο σημείο (P,Q) (υπό την έννοια τού ορισμού 3.9.4 (b)) εάν και μόνον εάν υπάρχουν ένα ανοικτό υποσύνολο U τού Y με $(P,Q) \in U$, καθώς και δυο διομογενή πολυώνυμα $G,H \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_m,\mathsf{Y}_0,\ldots,\mathsf{Y}_n]$ *ιδίου διβαθμού*, τα οποία πληρούν τις εξής συνθήκες:

$$H(P',Q') \neq 0_{\mathbf{k}}, \quad f(P',Q') = \frac{G(P',Q')}{H(P',Q')}, \ \forall (P',Q') \in U.$$

A-3-60. Έστω V ένα κλειστό και ανάγωγο υποσύνολο τού $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ (ως προς την $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})$). Ο πηλικοδακτύλιος

$$\boxed{\Gamma_{\text{διομ.}}(V) := \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m, \mathsf{Y}_0, \ldots, \mathsf{Y}_n] \,/\, \mathbf{I}_+^{\text{διομ.}}(V)}$$

καλείται **διομογενής δακτύλιος (των) συντεταγμένων τού** V (και, σύμφωνα με την άσκηση **A-3-57**, είναι ακεραία περιοχή). Το σώμα

$$\boxed{\mathbf{k}(V) := \left\{ \tfrac{\overline{G}}{\overline{H}} \in \mathbf{Fr}(\Gamma_{\text{διομ.}}(V)) \,\middle|\, \text{τα } G, H \text{ έχουν τον ίδιο διβαθμό} \right\}}$$

καλείται **σώμα των ρητών συναρτήσεων** επί τού V (και κάθε στοιχείο τού $\mathbf{k}(V)$ **ρητή συνάρτηση** επί τού V). Επίσης, για κάθε σημείο $(P, Q) \in V$, θέτουμε

$$\boxed{\mathcal{O}_{V,(P,Q)} := \left\{ f \in \mathbf{k}(V) \,\middle|\, \begin{array}{c} \text{η } f \text{ είναι κανονική στο σημείο } (P,Q) \\ \text{(υπό την έννοια τού ορισμού 3.9.4 (b))} \end{array} \right\}.}$$

Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $\mathcal{O}_{V,(P,Q)}$ είναι ένας τοπικός ναιτεριανός δακτύλιος (και, επιπροσθέτως, ακεραία περιοχή), με το

$$\mathfrak{m}_{V,P} := \left\{ f \in \mathcal{O}_{V,(P,Q)} \mid f(P,Q) = 0_{\mathbf{k}} \right\}$$

ως (το μοναδικό) μεγιστοτικό του ιδεώδες και $\mathcal{O}_{V,P}/\mathfrak{m}_{V,P} \cong \mathbf{k}$. (Πρόκειται για το ανάλογο τής προτάσεως 3.4.5. Ο $\mathcal{O}_{V,(P,Q)}$ αναφέρεται, ιδιαιτέρως, ως **ο τοπικός δακτύλιος τού** V **στο** (P,Q).)

A-3-61. Έστω $m, n \in \mathbb{N}_0$ και έστω $l := mn + m + n$ (όπως στο 3.9.1). Θεωρούνται τα συνήθη ανοικτά καλύμματα

$$U_i(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}) := \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \smallsetminus \mathbf{V}_+(\mathsf{X}_i) = \{[a_0 : \ldots : a_m] \in \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \,| a_i \neq 0_{\mathbf{k}}\},$$

$$U_j(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}) := \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \smallsetminus \mathbf{V}_+(\mathsf{Y}_j) = \{[b_0 : \ldots : b_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \,| b_j \neq 0_{\mathbf{k}}\},$$

$$U_{ij}(\mathbb{P}^l_{\mathbf{k}}) := \mathbb{P}^l_{\mathbf{k}} \smallsetminus \mathbf{V}_+(\mathsf{T}_{ij}),\ (i,j) \in \{0, \ldots, m\} \times \{0, \ldots, n\},$$

των $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}, \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ και $\mathbb{P}^l_{\mathbf{k}}$, αντιστοίχως, (βλ. 3.1.3), καθώς και οι απεικονίσεις

$$\phi_{ij} : \mathbb{A}^{m+n}_{\mathbf{k}} \longrightarrow U_i(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}) \times U_j(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})$$

$$(P,Q) \overset{\phi_{ij}}{\longmapsto} ([a_0 : .. : a_{i-1} : 1_{\mathbf{k}} : a_{i+1} : .. : a_m], [b_0 : .. : b_{j-1} : 1_{\mathbf{k}} : b_{j+1} : .. : b_n]),$$

όπου $P = (a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_m)$, $Q = (b_0, \ldots, b_{j-1}, b_{j+1}, \ldots, b_n)$. Να αποδειχθούν (ή απαντηθούν) τα ακόλουθα:

(a) Οι $\phi_{ij}, (i,j) \in \{0,\ldots,m\} \times \{0,\ldots,n\}$, είναι ισομορφισμοί και

$$\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} = \bigcup_{i=0}^{m} \bigcup_{j=0}^{n} U_i(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}) \times U_j(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}).$$

(b) Συναρτήσει των συσχετικών συντεταγμένων των $U_i(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}) \times U_j(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})$, $U_{ij}(\mathbb{P}^l_{\mathbf{k}})$ η απεικόνιση $\sigma_{m,n}$ τού Segre δίδεται από τον τύπο

$$\sigma_{m,n}(P,Q) = \begin{pmatrix} a_0b_0 & \cdots & a_0b_{j-1} & a_0 & a_0b_{j+1} & \cdots & a_0b_n \\ a_1b_0 & \cdots & a_1b_{j-1} & a_1 & a_1b_{j+1} & \cdots & a_1b_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1}b_0 & \cdots & a_{i-1}b_{j-1} & a_{i-1} & a_{i-1}b_{j+1} & \cdots & a_{i-1}b_n \\ b_0 & \cdots & b_{j-1} & 1_{\mathbf{k}} & b_{j+1} & \cdots & b_n \\ a_{i+1}b_0 & \cdots & a_{i+1}b_{j-1} & a_{i+1} & a_{i+1}b_{j+1} & \cdots & a_{i+1}b_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_mb_0 & \cdots & a_mb_{j-1} & a_m & a_mb_{j+1} & \cdots & a_mb_n \end{pmatrix}$$

(όπου $P = [a_0 : .. : a_m]$, $Q = [b_0 : .. : b_n]$ με $a_i = b_j = 1_{\mathbf{k}}$), η $\sigma_{m,n}|_{U_i(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}) \times U_j(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})}$ είναι ισομορφισμός και

$$\sigma_{m,n}(U_i(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}) \times U_j(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})) = \mathrm{Seg}_{m,n} \cap U_{ij}(\mathbb{P}^l_{\mathbf{k}}) \cong \mathbb{A}^{m+n}_{\mathbf{k}} \subseteq \mathbb{A}^l_{\mathbf{k}}.$$

(c) $U \in \mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})$ εάν και μόνον εάν

$$\sigma_{m,n}\left(U \cap (U_i(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}) \times U_j(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}))\right) \in \mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_{\sigma_{m,n}(U_i(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}) \times U_j(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}))}(\mathbb{A}^{m+n}_{\mathbf{k}})$$

για κάθε ζεύγος δεικτών $(i,j) \in \{0,\ldots,m\} \times \{0,\ldots,n\}$.

(d) Εάν το Y είναι ένα μη κενό, ανοικτό υποσύνολο ενός κλειστού υποσυνόλου τού καρτεσιανού γινομένου $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ (ως προς την τοπολογία $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})$), τότε μια συνάρτηση $f : Y \longrightarrow \mathbf{k}$ είναι κανονική (υπό την έννοια τού ορισμού 3.9.4 (b)) εάν και μόνον εάν η σύνθεση

$$f \circ \sigma^{-1}_{m,n}|_{\sigma_{m,n}\left(U \cap \left(U_i(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}) \times U_j(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})\right)\right)} : \sigma_{m,n}\left(U \cap (U_i(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}) \times U_j(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}))\right) \longrightarrow \mathbf{k}$$

είναι κανονική συνάρτηση $\forall (i,j) \in \{0,\ldots,m\} \times \{0,\ldots,n\}$.

(e) Πώς ορίζεται «διπλή» ομογενοποίηση ενός ιδεώδους $I \subseteq \mathbf{k}[\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_m,\mathsf{Y}_1,\ldots,\mathsf{Y}_n]$ και πώς «διπλή» αποομογενοποίηση ενός ιδεώδους $I \subseteq \mathbf{k}[\mathsf{X}_0,\ldots,\mathsf{X}_m,\mathsf{Y}_0,\ldots,\mathsf{Y}_n]$; (Πρβλ. ορισμούς 3.6.5.)

(f) Πώς ορίζεται η «διπροβολική» κλειστή θήκη (εντός τού $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$) ενός συσχετικού αλγεβρικού συνόλου $W \subseteq \mathbb{A}^{m+n}_{\mathbf{k}}$; (Πρβλ. 3.7.6.)

(g) Εάν το $\mathbf{k}$ είναι αλγεβρικώς κλειστό, τότε υφίστανται αμφιρρίψεις

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{συσχετικές ποικιλότητες} \\ W \subseteq \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{m+n} \end{array} \right\} \rightleftarrows \left\{ \begin{array}{c} \text{ανάγωγα αλγεβρικά σύνολα} \\ V \subseteq \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^{m} \times \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^{n} \\ \text{με } V \cap (U_i(\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^{m}) \times U_j(\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^{n})) \neq \varnothing \end{array} \right\}.$$

A-3-62. Εάν οι X, Y είναι δυο σχεδόν προβολικές ποικιλότητες, να αποδειχθεί ότι υφίσταται ένας ισομορφισμός τοπικών δακτυλίων:

$$\boxed{\mathcal{O}_{X\times Y,(P,Q)} \cong (\mathcal{O}_{X,P} \otimes_{\mathbf{k}} \mathcal{O}_{Y,Q})_{\mathfrak{m}_{X,P}\cdot\mathcal{O}_{Y,Q}+\mathfrak{m}_{Y,Q}\cdot\mathcal{O}_{Y,Q}}\,,\ \forall (P,Q) \in X \times Y,}$$

όπου $\mathfrak{m}_{X,P}$ (και αντιστοίχως, $\mathfrak{m}_{Y,Q}$) το μεγιστοτικό ιδεώδες τού $\mathcal{O}_{X,P}$ (και αντιστοίχως, τού $\mathcal{O}_{Y,Q}$). (*Υπόδειξη*: Να αποδειχθεί εν πρώτοις ότι ισχύει η ισότητα $\mathfrak{m}_{X,P}\cdot\mathcal{O}_{Y,Q}+\mathfrak{m}_{Y,Q}\cdot\mathcal{O}_{Y,Q} = \{ f \in \mathcal{O}_{X,P} \otimes_{\mathbf{k}} \mathcal{O}_{Y,Q} | \, f(P;Q) = 0_{\mathbf{k}} \}$.)

A-3-63. Έστω $\mathrm{Seg}_{1,1} = \mathrm{Im}\,(\sigma_{1,1}) = \mathbf{V}_+ (\mathsf{T}_{00}\mathsf{T}_{11} - \mathsf{T}_{01}\mathsf{T}_{10}) \subset \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^3$ (βλ. 3.9.13). Να αποδειχθούν τα εξής:

(a) Η $\mathrm{Seg}_{1,1}$ περιέχει και άλλες (κλειστές) υποποικιλότητες πέραν των ευθειών $(\mathbb{L}_t)_{t\in\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^1}$, $(\mathbb{L}_t')_{t\in\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^1}$.

(b) Η τοπολογία $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^1)$ η επαγόμενη από την $\sigma_{1,1}$ επί τού $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^1$ δεν ταυτίζεται με την τοπολογία γινομένου (όταν καθένα των αντιτύπων $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^1$ είναι εφοδιασμένο με την τοπολογία Zariski $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^1)$).

A-3-64. Εάν οι U, U' είναι δυο ανοικτές υποποικιλότητες μιας σχεδόν προβολικής ποικιλότητας Y με $U \cap U' \neq \varnothing$, να αποδειχθούν τα εξής:

(a) $U \cap U' \cong (U \times U') \cap \Delta_Y$.

(b) Εάν αμφότερες οι U, U' είναι συσχετικές ποικιλότητες (υπό την έννοια τού ορισμού 3.8.9), τότε η τομή τους $U \cap U'$ είναι συσχετική ποικιλότητα.

A-3-65. Η τομή δυο προβολικών ποικιλοτήτων ενδέχεται να μην είναι προβολική ποικιλότητα: Να αποδειχθεί ότι η τομή

$$\mathbf{V}(\mathsf{X}_0^2 - \mathsf{X}_1\mathsf{X}_2) \cap \mathbf{V}(\mathsf{X}_0\mathsf{X}_1 - \mathsf{X}_2\mathsf{X}_3) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$$

είναι η ένωση μιας συνεστραμμένης κυβικής καμπύλης και μιας ευθείας.

A-3-66. Έστω ότι οι X, Y είναι τυχούσες $\mathbf{k}$-ποικιλότητες. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(a) Οι προβολές

$$\mathrm{pr}_X : X \times Y \longrightarrow X, \quad \mathrm{pr}_Y : X \times Y \longrightarrow Y$$

είναι μορφισμοί.

(b) Έστω Z μια $\mathbf{k}$-ποικιλότητα. Εάν οι $\varphi_1 : Z \longrightarrow X$, $\varphi_2 : Z \longrightarrow Y$ είναι μορφισμοί, τότε η απεικόνιση

$$(\varphi_1, \varphi_2) : Z \longrightarrow X \times Y, \ \ (\varphi_1, \varphi_2)(P) := (\varphi_1(P), \varphi_2(P)), \ \forall P \in Z,$$

είναι μορφισμός.

(c) Έστω ότι οι X', Y' είναι δυο $\mathbf{k}$-ποικιλότητες. Εάν οι

$$\varphi_1 : X' \longrightarrow X, \ \ \varphi_2 : Y' \longrightarrow Y$$

παριστούν μορφισμούς, τότε η απεικόνιση

$$\varphi_1 \times \varphi_2 : X' \times Y' \longrightarrow X \times Y, \ \ (\varphi_1 \times \varphi_2)(P, Q) := (\varphi_1(P), \varphi_2(Q)), \ \forall (P, Q) \in X' \times Y',$$

είναι μορφισμός.

A-3-67. Εάν οι $\varphi_1, \varphi_2 : X \longrightarrow Y$ είναι μορφισμοί $\mathbf{k}$-ποικιλοτήτων, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(a) Το $\{ P \in X | \, \varphi_1(P) = \varphi_2(P)\}$ είναι ένα κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού X.

(b) Εάν το U είναι ένα μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο τού X και $\varphi_1|_U = \varphi_2|_U$, τότε $\varphi_1 = \varphi_2$.

3.10 Κλασικές Κατασκευές Προβολικών Ποικιλοτήτων

Σκοπός αυτής τής ενότητας είναι η αύξηση τού αποθέματός μας σε παραδείγματα κλασικών προβολικών ποικιλοτήτων. Συγκεκριμένα, γίνεται παρουσίαση τής κατασκευής τών ποικιλοτήτων τού Veronese, τών ποικιλοτήτων τού Grassmann και τών κυκλημάτων τού Schubert.

(i) Έστω ότι οι $n \in \mathbb{N}_0$ και $d \in \mathbb{N}$ είναι δοθέντες. Ως γνωστόν, ο $\mathbf{k}$-διανυσματικός χώρος $\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \dots, \mathsf{X}_n]_d$ (όπου $\mathbf{k}$ το σώμα αναφοράς μας) έχει διάσταση $\binom{n+d}{d}$ και το σύνολο $\mathrm{Mov}(\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \dots, \mathsf{X}_n])_d$ των μονωνύμων $\mathsf{X}_0^{\alpha_0} \cdots \mathsf{X}_n^{\alpha_n}$ βαθμού d ως μία βάση του (βλ. 3.2.3 (a)). Έστω

$$\mathcal{E}_{n,d} = \left\{ \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^{n+1} \middle| \, \alpha_0 + \cdots + \alpha_n = d \right\}$$

το σύνολο των εκθετών τών στοιχείων τού $\mathrm{Mov}(\mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \dots, \mathsf{X}_n])_d$. Για κάθε

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{E}_{n,d}$$

εισάγουμε τη συντόμευση

$$\mathsf{X}^{\boldsymbol{\alpha}} := \mathsf{X}_0^{\alpha_0} \cdots \mathsf{X}_n^{\alpha_n}$$

και υποθέτουμε ότι έχουμε εφοδιάσει το $\mathcal{E}_{n,d}$ με μια παγιωμένη διάταξη. Τις περισσότερες φορές είθισται να χρησιμοποιούμε τη λεξικογραφική διάταξη (κατά φθίνουσα σειρά):

$$\boldsymbol{\alpha}_0 = (d, 0, \ldots, 0) \succ_{\text{lex}} \boldsymbol{\alpha}_1 \succ_{\text{lex}} \boldsymbol{\alpha}_2 \succ_{\text{lex}} \cdots \succ_{\text{lex}} \boldsymbol{\alpha}_{\binom{n+d}{d}} = (0, \ldots, 0, d)\,.$$

3.10.1 Ορισμός. Εάν $n \in \mathbb{N}_0$ και $d \in \mathbb{N}$, τότε η

$$\boldsymbol{\nu}_{n,d} : \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}_{\mathbf{k}}, \;\; [t_0 : .. : t_n] \longmapsto [\{\, t^{\boldsymbol{\alpha}} \,|\, \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{E}_{n,d}\}]$$

καλείται **απεικόνιση τού Veronese**. Η $\boldsymbol{\nu}_{n,d}$ είναι «καλώς ορισμένη», διότι η αντικατάσταση τού στοιχείου t_i με το λt_i, $\forall i \in \{0, \ldots, n\}$, όπου $\lambda \in \mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\}$, συνεπάγεται (για την εικόνα) την αντικατάσταση καθενός $t^{\boldsymbol{\alpha}}$ με το $\lambda^d t^{\boldsymbol{\alpha}}$, η οποία προσδιορίζει το *ίδιο σημείο* τού προβολικού χώρου $\mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}_{\mathbf{k}}$.

3.10.2 Λήμμα. *Η $\boldsymbol{\nu}_{n,d}$ είναι ενριπτική απεικόνιση.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $[\{\, t^{\boldsymbol{\alpha}} \,|\, \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{E}_{n,d}\}] = [\{\, u^{\boldsymbol{\alpha}} \,|\, \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{E}_{n,d}\}]$, τότε

$$\exists \lambda \in \mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\} : t^{\alpha} = (\lambda u)^{\alpha} = \lambda^d u^{\alpha} \Rightarrow t_i = \lambda u_i, \; \forall i \in \{0, \ldots, n\},,$$

απ' όπου έπεται ότι $[t_0 : .. : t_n] = [u_0 : .. : u_n]$. □

3.10.3 Λήμμα. *Εάν υποθέσουμε ότι οι $\{\, \mathsf{T}_{\boldsymbol{\alpha}} \,|\, \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{E}_{n,d}\}$ είναι οι συναρτήσεις συντεταγμένων τού $\mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}_{\mathbf{k}}$, τότε $\mathrm{Im}(\boldsymbol{\nu}_{n,d}) = \mathrm{Ver}_{n,d}$, όπου*

$$\boxed{\mathrm{Ver}_{n,d} := \mathbf{V}_+\left(\left\{ \mathsf{T}_{\boldsymbol{\alpha}} \mathsf{T}_{\boldsymbol{\beta}} - \mathsf{T}_{\boldsymbol{\alpha}'} \mathsf{T}_{\boldsymbol{\beta}'} \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}' \in \mathcal{E}_{n,d} : \\ \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}' + \boldsymbol{\beta}' \end{array} \right\}\right) \subset \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}_{\mathbf{k}}.}$$

Κατά συνέπειαν, η εικόνα $\mathrm{Ver}_{n,d}$ τής $\boldsymbol{\nu}_{n,d}$ είναι ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο περιγραφόμενο ως χώρος των κοινών σημείων μηδενισμού ομογενών πολυωνύμων βαθμού 2 εντός τού $\mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}_{\mathbf{k}}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κάθε ομογενής συντεταγμένη τής εικόνας $\mathrm{Im}(\boldsymbol{\nu}_{n,d})$ είναι τής μορφής $t^{\boldsymbol{\alpha}}$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{E}_{n,d}$. Για οιουσδήποτε

$$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}' \in \mathcal{E}_{n,d} : \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}' + \boldsymbol{\beta}'$$

έχουμε

$$t^{\boldsymbol{\alpha}} t^{\boldsymbol{\beta}} = t^{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}} = t^{\boldsymbol{\alpha}'+\boldsymbol{\beta}'} = t^{\boldsymbol{\alpha}'} t^{\boldsymbol{\beta}'},$$

οπότε $\mathrm{Im}(\boldsymbol{\nu}_{n,d}) \subseteq \mathrm{Ver}_{n,d}$. Ας υποθέσουμε, αντιστρόφως, ότι

$$[\{\, \xi_{\boldsymbol{\alpha}} \,|\, \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{E}_{n,d}\}] \in \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}_{\mathbf{k}} : \xi_{\boldsymbol{\alpha}} \xi_{\boldsymbol{\beta}} = \xi_{\boldsymbol{\alpha}'} \xi_{\boldsymbol{\beta}'}$$

για οιουσδήποτε $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}' \in \mathcal{E}_{n,d} : \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}' + \boldsymbol{\beta}'$. Εάν

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{E}_{n,d} : \xi_{\boldsymbol{\alpha}} \neq 0_{\mathbf{k}},$$

τότε $\xi_{\boldsymbol{\alpha}'} \neq 0_{\mathbf{k}}$ για όλους τους πολυδείκτες $\boldsymbol{\alpha}' \in \mathcal{E}_{n,d}$ για τους οποίους ισχύει $\boldsymbol{\alpha}' \leq 2\boldsymbol{\alpha}$ (όπου το "$\leq$" νοείται *κατά συντεταγμένες*), καθότι

$$\xi_{\boldsymbol{\alpha}}^2 = \xi_{\boldsymbol{\alpha}'}\xi_{\boldsymbol{\beta}'}, \ \forall \boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}' \in \mathcal{E}_{n,d} : 2\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}' + \boldsymbol{\beta}'.$$

Έστω $i \in \{0, \ldots, n\}$ ο δείκτης εκείνος για τον οποίο έχουμε

$$\alpha_i = \min \{ \alpha_j | \, j \in \{0, \ldots, n\} : \alpha_j \neq 0 \}.$$

Εάν υπάρχει άλλος δείκτης $k \in \{0, \ldots, n\} \smallsetminus \{i\}$ με $\alpha_k \neq 0$, τότε

$$\boldsymbol{\alpha}' := (..., \underbrace{0}_{i\text{-οστή θέση}}, ..., \underbrace{\alpha_i + \alpha_k}_{k\text{-στή θέση}}, ...) \leq 2\boldsymbol{\alpha},$$

οπότε (επί τη βάσει των όσων προείπαμε) $\xi_{\boldsymbol{\alpha}'} \neq 0_{\mathbf{k}}$. Επαναλαμβάνοντας αυτήν τη διαδικασία καταλήγουμε σε έναν πολυδείκτη

$$de_i = (0, ..., 0, \underbrace{d}_{i\text{-οστή θέση}}, ...) : \xi_{de_i} \neq 0_{\mathbf{k}},$$

όπου $e_j := (0, ..., 0, \underbrace{1}_{j\text{-οστή θέση}}, 0, ...0), \ \forall j \in \{0, \ldots, n\}$. Θέτοντας

$$t_j := \xi_{e_j + (d-1)e_i}, \ \forall j \in \{0, \ldots, n\},$$

διαπιστώνουμε για το $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{E}_{n,d}$ τα εξής: Όταν $\boldsymbol{\alpha} = de_i$, τότε $\xi_{\boldsymbol{\alpha}} = t_i$, ενώ όταν $\boldsymbol{\alpha} \neq de_i$ και $\alpha_\varrho > 0$ (για κάποιον ϱ), τότε

$$\begin{array}{ll} \xi_{\boldsymbol{\alpha}} t_i = \xi_{\boldsymbol{\alpha}'} t_\varrho & \text{με } \boldsymbol{\alpha}' := \boldsymbol{\alpha} + e_i - e_\varrho \\ \xi_{\boldsymbol{\alpha}'} t_i = \xi_{\boldsymbol{\alpha}''} t_\varrho & \text{με } \boldsymbol{\alpha}'' := \boldsymbol{\alpha}' + e_i - e_\varrho = \boldsymbol{\alpha} + 2e_i - 2e_\varrho \\ \vdots & \text{κ.ο.κ.} \\ \xi_{\boldsymbol{\alpha}} t_i^{\alpha_\varrho} = \xi_{\boldsymbol{\beta}} t_\varrho^{\alpha_\varrho} & \text{με } \boldsymbol{\beta} := \boldsymbol{\alpha} + \alpha_\varrho e_i - \alpha_\varrho e_\varrho, \ \beta_\varrho = 0, \end{array}$$

οπότε $\xi_{\boldsymbol{\alpha}} = \left(\frac{t_\varrho}{t_i}\right)^{\alpha_\varrho} \xi_{\boldsymbol{\beta}}$. Επαναλαμβάνοντας αυτήν τη διαδικασία διαπιστώνουμε ότι

$$\xi_{\boldsymbol{\alpha}} = \xi_{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \left(\frac{t_0}{t_i}\right)^{\alpha_0} \cdots \left(\frac{t_{i-1}}{t_i}\right)^{\alpha_{i-1}} \left(\frac{t_{i+1}}{t_i}\right)^{\alpha_{i+1}} \cdots \left(\frac{t_n}{t_i}\right)^{\alpha_n}$$

με $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + \left(\sum_{\varrho \in \{0, \ldots, n\} \smallsetminus \{i\}} \alpha_\varrho \right) e_i - \left(\sum_{\varrho \in \{0, \ldots, n\} \smallsetminus \{i\}} \alpha_\varrho \right) e_j = de_i$ (διότι $\alpha_0 + \cdots + \alpha_n = d$). Άρα τελικώς,

$$\xi_{\boldsymbol{\alpha}} = \left(\frac{t_i}{t_i^d}\right) t_0^{\alpha_0} \cdots t_n^{\alpha_n} = \left(\frac{t_i}{t_i^d}\right) t^{\boldsymbol{\alpha}} \Rightarrow \boldsymbol{\nu}_{n,d}\left([t_0 : .. : t_n]\right) = [\{ \xi^{\boldsymbol{\alpha}} \,|\, \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{E}_{n,d}\}],$$

απ' όπου έπεται ότι $\mathrm{Ver}_{n,d} \subseteq \mathrm{Im}(\boldsymbol{\nu}_{n,d})$. □

3.10.4 Θεώρημα. *Η $\boldsymbol{\nu}_{n,d}$ καθορίζει έναν ισομορφισμό μεταξύ των $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ και $\mathrm{Ver}_{n,d}$. Ως εκ τούτου, το $\mathrm{Ver}_{n,d}$ αποτελεί μια προβολική ποικιλότητα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η $\boldsymbol{\nu}_{n,d} : \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathrm{Ver}_{n,d}$ (έχοντας περιορίσει το πεδίο τιμών της στο $\mathrm{Ver}_{n,d}$) είναι αμφιρριπτική επί τη βάσει των λημμάτων 3.10.2 και 3.10.3. Επίσης, λόγω τού τύπου τού ορισμού της, είναι και μορφισμός (βλ. πρόταση 3.8.5). Η αντίστροφός της ορίζεται ως εξής: Έστω τυχόν σημείο $[\{ t^{\boldsymbol{\alpha}} \,|\, \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{E}_{n,d}\}] \in \mathrm{Ver}_{n,d}$. Επειδή τουλάχιστον μία εκ των ομογενών συντεταγμένων του τής μορφής $t^{(0,..,0,d,0,..,0)}$ οφείλει να είναι $\neq 0_{\mathbf{k}}$, μπορούμε (ενδεχομένως ύστερα από μια μετάταξη συντεταγμένων) να υποθέσουμε δίχως βλάβη τής γενικότητας ότι $t^{(d,0,\ldots,0)} \neq 0_{\mathbf{k}}$. Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι η απεικόνιση

$$\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^{\binom{n+d}{d}-1} \supset \mathrm{Ver}_{n,d} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$$

$$[\{ t^{\boldsymbol{\alpha}} \,|\, \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{E}_{n,d}\}] \longmapsto \left[t^{(d,0,\ldots,0)} : t^{(d-1,1,0,\ldots,0)} : t^{(d-1,0,1,0\ldots,0)} : .. : t^{(d-1,0,\ldots,0,1)}\right]$$

είναι όντως η αντίστροφος τής $\boldsymbol{\nu}_{n,d}$. Η εν λόγω απεικόνιση είναι εκ κατασκευής μορφισμός (βλ. πρόταση 3.8.5). Τέλος, από το λήμμα 3.10.3, τη συνέχεια τής $\boldsymbol{\nu}_{n,d}$, την αναγωγιμότητα τού ιδίου τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ και το πόρισμα 1.6.6 συμπεραίνουμε ότι το $\mathrm{Ver}_{n,d}$ αποτελεί μια προβολική ποικιλότητα. □

3.10.5 Ορισμός. Η προβολική ποικιλότητα $\mathrm{Ver}_{n,d}$ καλείται **ποικιλότητα τού Veronese** (**διαστάσεως** n και **τάξεως** d). Επίσης, λόγω των προναφερθέντων, η απεικόνιση τού Veronese $\boldsymbol{\nu}_{n,d} : \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^{\binom{n+d}{d}-1}$ (με εικόνα της την $\mathrm{Ver}_{n,d}$) η ορισθείσα στο 3.9.1, καλείται -ιδιαιτέρως- **εμφύτευση τού Veronese**.

3.10.6 Παραδείγματα. (a) Για $n = 1, d = 2$, η ποικιλότητα Veronese είναι η *κωνική τομή*

$$\mathrm{Ver}_{1,2} = \left\{ \left[t^2 : tu : u^2\right] \,\middle|\, [t:u] \in \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}} \right\} = \mathbf{V}_+\left(\mathsf{Y}^2 - \mathsf{XZ}\right) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbf{k}}$$

εντός τού $\mathbb{P}^2_{\mathbf{k}}$ που είναι ισόμορφη τής προβολικής ευθείας $\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$.
(b) Για $n = 1, d = 3$, η ποικιλότητα Veronese είναι η *συνεστραμμένη (κυβική) προβολική καμπύλη*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ver}_{1,3} &= \{[t^3 : t^2u : tu^2 : u^3] \in \mathbb{P}^3_{\mathbf{k}} \mid [t:u] \in \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}\} \\ &= \mathbf{V}_+\left(\mathsf{XZ}-\mathsf{Y}^2, \mathsf{YT}-\mathsf{Z}^2, \mathsf{XT}-\mathsf{YZ}\right) \cong \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}} \subset \mathbb{P}^3_{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

εντός τού $\mathbb{P}^3_{\mathbf{k}}$ που έχουμε συναντήσει στην άσκηση **A-3-45**.
(c) Γενικότερα, για $n = 1, d \geq 2$, η ποικιλότητα Veronese παριστά την εμφύτευση

$$\begin{aligned}\mathrm{Ver}_{1,d} &= \{[t^d : t^{d-1}u : \ldots : tu^{d-1} : u^d] \in \mathbb{P}^d_{\mathbf{k}} \mid [t:u] \in \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}\} \\ &= \left\{ [\mathsf{T}_0, \ldots, \mathsf{T}_d] \in \mathbb{P}^d_{\mathbf{k}} \,\middle|\, \mathrm{rank}\begin{pmatrix} \mathsf{T}_0 & \cdots & \mathsf{T}_{d-1} \\ \mathsf{T}_1 & \cdots & \mathsf{T}_d \end{pmatrix} = 1 \right\}\end{aligned}$$

τής προβολικής ευθείας $\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ «τάξεως d» (ως τομή $\binom{d}{2}$ προβολικών τετραγωνικών υπερεπιφανειών) εντός τού $\mathbb{P}^d_{\mathbf{k}}$ που καλείται, ιδιαιτέρως, **ρητή ορθόθετη καμπύλη εντός τού $\mathbb{P}^d_{\mathbf{k}}$ υπό τη συνήθη της μορφή** (Πρβλ. άσκηση **Α-3-68**).

(d) Για $n = d = 2$ η

$$\begin{aligned} \mathrm{Ver}_{2,2} &= \left\{[t^2 : tu : tw : u^2 : uw : w^2] \in \mathbb{P}^5_{\mathbf{k}} \;\middle|\; [t:u:w] \in \mathbb{P}^2_{\mathbf{k}}\right\} \\ &= \left\{ [\mathsf{T}_0 : .. : \mathsf{T}_5] \in \mathbb{P}^5_{\mathbf{k}} \;\middle|\; \mathrm{rank}\begin{pmatrix} \mathsf{T}_0 & \mathsf{T}_1 & \mathsf{T}_2 \\ \mathsf{T}_1 & \mathsf{T}_3 & \mathsf{T}_4 \\ \mathsf{T}_2 & \mathsf{T}_4 & \mathsf{T}_5 \end{pmatrix} = 1 \right\} \end{aligned}$$

καλείται **επιφάνεια τού Veronese**. (Επεξήγηση τού πώς προκύπτει η δεύτερη ισότητα: Επειδή

$$\boldsymbol{\nu}_{n,d}([t:u:w]) = [t^d : tu : tw : u^2 : uw : w^2]$$

$$= [\xi_{(2,0,0)} : \xi_{(1,1,0)} : \xi_{(1,0,1)} : \xi_{(0,2,0)} : \xi_{(0,1,1)} : \xi_{(0,0,2)}],$$

όπου $\xi_{(i,j,k)} := t^i u^j w^k$, $(i,j,k) \in \mathcal{E}_{2,2}$, οι εξισώσεις

$$\xi_{(i_1,j_1,k_1)}\xi_{(i_2,j_2,k_2)} = \xi_{(i'_1,j'_1,k'_1)}\xi_{(i'_2,j'_2,k'_2)},$$

με

$$\left\{ \begin{array}{l} (i_1,j_1,k_1),(i_2,j_2,k_2),(i'_1,j'_1,k'_1),(i'_2,j'_2,k'_2) \in \mathcal{E}_{2,2} : \\ (i_1,j_1,k_1)+(i_2,j_2,k_2) = (i'_1,j'_1,k'_1)+(i'_2,j'_2,k'_2) \end{array} \right\}$$

καθορίζουν την $\mathrm{Ver}_{2,2}$. Έπειτα από αντικατάσταση των πολυδεικτών

$$(2,0,0),(1,1,0),(1,0,1),(0,2,0),(0,1,1),(0,0,2)$$

(κατά σειράν) με τους απλούς δείκτες $0,1,2,3,4,5$ αυτές μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_0\xi_5 = \xi_2^2, \\ \xi_0\xi_3 = \xi_1^2, \\ \xi_3\xi_5 = \xi_4^2, \\ \xi_1\xi_5 = \xi_2\xi_4, \\ \xi_0\xi_4 = \xi_1\xi_2. \end{array} \right\}$$

Προφανώς, μέσω αυτών εκφράζονται τα σημεία $[\xi_0 : \ldots : \xi_5]$ τού $\mathbb{P}^5_{\mathbf{k}}$ για τα οποία ισχύει

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_1 & \xi_3 & \xi_4 \\ \xi_2 & \xi_4 & \xi_5 \end{pmatrix} = 1,$$

εξ ου και η παράσταση που δέχεται η $\mathrm{Ver}_{2,2}$ ως *οριζουσιακή ποικιλότητα*[38]).

(e) Κατ' αναλογίαν, για $n \geq 1$ και $d = 2$, αποδεικνύεται ότι η $\mathrm{Ver}_{n,2}$ είναι η οριζουσιακή ποικιλότητα

$$\mathrm{Ver}_{n,2} = \left\{ [\mathsf{T}_0 : .. : \mathsf{T}_{\binom{n+2}{2}}] \in \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^{\binom{n+2}{2}-1} \;\middle|\; \mathrm{rank} \begin{pmatrix} \mathsf{T}_0 & \mathsf{T}_1 & \cdots & \cdots & \mathsf{T}_n \\ \mathsf{T}_1 & \mathsf{T}_{n+1} & \cdots & \cdots & \mathsf{T}_{2n} \\ \mathsf{T}_2 & \mathsf{T}_{n+2} & \mathsf{T}_{2n+1} & \cdots & \mathsf{T}_{3n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathsf{T}_n & \mathsf{T}_{2n} & \mathsf{T}_{3n-1} & \cdots & \mathsf{T}_{\binom{n+2}{2}} \end{pmatrix} = 1 \right\}.$$

3.10.7 Πρόταση. *Έστω* $\mathbf{V}_+(F) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n$ *μια υπερεπιφάνεια οριζόμενη από ένα ομογενές πολυώνυμο* $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ *βαθμού* $d \geq 1$. *Εάν το* $V \subseteq \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n$ *είναι ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο με* $V \cap \mathbf{V}_+(F) \neq \varnothing$, *τότε*

$$V \cap \mathbf{V}_+(F) \cong \boldsymbol{\nu}_{n,d}(V) \cap \boldsymbol{\nu}_{n,d}(\mathbf{V}_+(F)) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^{\binom{n+d}{d}-1},$$

όπου το $\boldsymbol{\nu}_{n,d}(\mathbf{V}_+(F))$ *είναι ένα υπερεπίπεδο εντός τού* $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^{\binom{n+d}{d}-1}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $F = \sum_{\boldsymbol{\alpha}} \lambda_{\boldsymbol{\alpha}} \mathsf{X}^{\boldsymbol{\alpha}}$, τότε θέτοντας $H := \sum_{\boldsymbol{\alpha}} \lambda_{\boldsymbol{\alpha}} \mathsf{T}_{\boldsymbol{\alpha}}$ διαπιστώνουμε άμεσα ότι

$$\boldsymbol{\nu}_{n,d}(\mathbf{V}_+(F)) = \boldsymbol{\nu}_{n,d}(\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n) \cap \mathbf{V}_+(H),$$

οπότε

$$F(t_0, \ldots, t_n) = 0_{\mathbf{k}} \Longleftrightarrow H(\boldsymbol{\nu}_{n,d}(t_0, \ldots, t_n)) = 0_{\mathbf{k}},$$

πράγμα που σημαίνει ότι $\boldsymbol{\nu}_{n,d}(V \cap \mathbf{V}_+(F)) = \boldsymbol{\nu}_{n,d}(V) \cap \boldsymbol{\nu}_{n,d}(\mathbf{V}_+(F))$. □

3.10.8 Σημείωση. Εφαρμόζοντας το «τέχνασμα» τής προτάσεως 3.10.7 είναι δυνατόν να γίνει αναγωγή προβλημάτων που σχετίζονται με *τμήσεις υπερεπιφανειών* $V \cap \mathbf{V}_+(F)$ σε προβλήματα που αφορούν σε *τμήσεις υπερεπιπέδων* $\boldsymbol{\nu}_{n,d}(V) \cap \boldsymbol{\nu}_{n,d}(\mathbf{V}_+(F))$.

(ii) Έστω $\mathbf{k}$ το σώμα αναφοράς μας και έστω $n \in \mathbb{N}$. Για οιονδήποτε $m \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq m \leq n$, συμβολίζουμε ως $\mathrm{Grass}(m; n)$ *το σύνολο των* m*-διάστατων υποχώρων τού διανυσματικού χώρου* $\mathbf{k}^n$. Γενικότερα, εάν ο $\mathcal{V}$ είναι ένας n-διάστατος $\mathbf{k}$-διανυσματικός χώρος, ορίζουμε το σύνολο

$$\boxed{\mathrm{Grass}_m(\mathcal{V}) := \{\mathcal{W} \,|\, \mathcal{W}\ m\text{-διάστατος διανυσματικός υπόχωρος τού } \mathcal{V}\}\,.}$$

[38]Ως **οριζουσιακές ποικιλότητες** (determinantal varieties) εντός ενός συσχετικού χώρου $\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^n$ (και αντιστοίχως, εντός ενός προβολικού χώρου $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n$) ορίζονται οι συσχετικές (και αντιστοίχως, οι προβολικές) ποικιλότητες οι οποίες μπορούν να περιγραφούν ως χώροι των κοινών σημείων μηδενισμού οριζουσών πινάκων εχόντων συντεταγμένες (και αντιστοίχως, ομογενείς συντεταγμένες) ως εγγραφές τους.

Προφανώς, $\mathrm{Grass}(m;n) = \mathrm{Grass}_m(\mathbf{k}^n)$, $\mathrm{Grass}(1;n) = \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^{n-1}$ και $\mathrm{Grass}_1(\mathcal{V}) = \mathbb{P}(\mathcal{V})$. Εάν ο $\mathcal{W}$ είναι ένας m-διάστατος διανυσματικός υπόχωρος τού $\mathbf{k}^n$, τότε ο $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ είναι ένας $(m-1)$-διάστατος προβολικός υπόχωρος τού $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^{n-1}$(βλ. 3.1.1). Κατά συνέπειαν, υφίσταται μια αμφίρριψη

$$\mathrm{Grass}(m;n) \ni \mathcal{W} \longleftrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{W}) \in \mathbb{G}(m-1;n-1) := \left\{ \begin{array}{c} (m-1)\text{-διάστατοι} \\ \text{προβολικοί} \\ \text{υπόχωροι τού } \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^{n-1} \end{array} \right\}.$$

Πρόθεσή μας είναι να αποδείξουμε ότι το σύνολο $\mathrm{Grass}(m;n)$ καθίσταται κατά τρόπο φυσικό μια προβολική ποικιλότητα. Προς τούτο αρκεί να εφοδιάσουμε κάθε m-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο $\mathcal{W}$ τού $\mathbf{k}^n$ με *κατάλληλες συναρτήσεις συντεταγμένων*. Σε κάθε πίνακα

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbf{k})$$

βαθμίδας m, οι γραμμές τού οποίου παράγουν τον $\mathcal{W}$, αντιστοιχούμε εντός τού

$$\mathbf{k}^{\binom{n}{m}} = \left\{ \lambda_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)} \,|\, 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n \right\}$$

το διάνυσμα

$$\mathbf{Pl}\,(\mathcal{A}) := \left(\det(a_{\nu i_\mu})_{1\leq \nu,\mu \leq m}\right)_{1\leq i_1 < \cdots < i_m \leq n}.$$

Για κάθε πολυδείκτη $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_m)$ καλούμε την ορίζουσα

$$p_{\mathbf{i}} := \det(a_{\nu i_\mu})_{1\leq \nu,\mu\leq m}$$

κατά Plücker i-οστή συντεταγμένη τού $\mathcal{A}$. Σημειωτέον ότι

$$\mathrm{rank}(A) = m \Longleftrightarrow \mathbf{Pl}\,(\mathcal{A}) \neq 0_{\mathbf{k}^{\binom{n}{m}}}.$$

Εξάλλου, εάν ο $\mathcal{B} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbf{k})$ είναι ένας άλλος πίνακας, οι γραμμές τού οποίου παράγουν τον $\mathcal{W}$, τότε

$$\exists \mathcal{C} \in \mathrm{GL}\,(m,\mathbf{k}) : \mathcal{B} = \mathcal{C}\cdot\mathcal{A}.$$

Εάν λοιπόν για κάθε πολυδείκτη $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_m)$ συμβολίσουμε ως $\mathcal{A}_{\mathbf{i}}$ (και αντιστοίχως, ως $\mathcal{B}_{\mathbf{i}}$) τον πίνακα τον συνιστώμενο από τις στήλες τού $\mathcal{A}$ (και αντιστοίχως, τού $\mathcal{B}_{\mathbf{i}}$) τις ευρισκόμενες στις θέσεις $i_1, \ldots, i_m$, τότε

$$\mathcal{B}_{\mathbf{i}} = \mathcal{C}\cdot\mathcal{A}_{\mathbf{i}} \Rightarrow \det(\mathcal{B}_{\mathbf{i}}) = \det(\mathcal{C})\det(\mathcal{A}_{\mathbf{i}}) \Rightarrow \mathbf{Pl}\,(\mathcal{B}) = \det(\mathcal{C})\mathbf{Pl}\,(\mathcal{A}),$$

οπότε μεταβαίνοντας στον προβολικό χώρο

$$\mathbb{P}(\mathbf{k}^{\binom{n}{m}}) = \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^{\binom{n}{m}-1} = (\mathbf{k}^{\binom{n}{m}} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}^{\binom{n}{m}}}\})/(\mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\})$$

λαμβάνουμε (σε επίπεδο κλάσεων ισοδυναμίας):

$$[\mathbf{Pl}\,(\mathcal{A})] = [\mathbf{Pl}\,(\mathcal{B})].$$

Κατά συνέπειαν, *ανεξαρτήτως τής εκάστοτε επιλογής τού πίνακα* $\mathcal{A}$, ορίζεται ένα σημείο

$$\mathbf{Pl}\,(\mathcal{W}) := [\mathbf{Pl}\,(\mathcal{A})] = [\{p_{\mathbf{i}}\,|\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_m) : 1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n\}] \in \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^{\binom{n}{m}-1}$$

για κάθε m-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο $\mathcal{W}$ τού $\mathbf{k}^n$, το οποίο καλείται -ιδιαιτέρως- **κατά Plücker σημείο τού** $\mathcal{W}$, καθώς και μια απεικόνιση

$$\boxed{\mathbf{Pl} = \mathbf{Pl}_m^n : \text{Grass}(m; n) \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^{\binom{n}{m}-1},\ \mathcal{W} \longmapsto \mathbf{Pl}\,(\mathcal{W})\,.}$$

3.10.9 Λήμμα. *Η απεικόνιση* $\mathbf{Pl} = \mathbf{Pl}_m^n$ *είναι ενριπτική.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι οι $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{Mat}_{m\times n}(\mathbf{k})$ είναι δυο πίνακες βαθμίδας m με

$$\mathbf{Pl}\,(\mathcal{B}) = \lambda \cdot \mathbf{Pl}\,(\mathcal{A})$$

για κάποιο $\lambda \in \mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\}$. Δίχως βλάβη τής γενικότητας (ήτοι ύστερα από πιθανή αναδιάταξη δεικτών) μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\det(\mathcal{A}_{(1,\dots,m)}) \neq 0_{\mathbf{k}} \Rightarrow \det(\mathcal{B}_{(1,\dots,m)}) = \lambda \cdot \det(\mathcal{A}_{(1,\dots,m)}) \neq 0_{\mathbf{k}}.$$

Προφανώς,

$$\mathcal{A}_{(1,\dots,m)}^{-1}\mathcal{A} = \left(1_{\text{Mat}_{m\times m}(\mathbf{k})} \mid \mathcal{A}'\right),$$
$$\mathcal{B}_{(1,\dots,m)}^{-1}\mathcal{B} = \left(1_{\text{Mat}_{m\times m}(\mathbf{k})} \mid \mathcal{B}'\right),$$

για κάποιους πίνακες $\mathcal{A}', \mathcal{B}' \in \text{Mat}_{m\times(n-m)}(\mathbf{k})$, οπότε

$$\begin{aligned}
\mathbf{Pl}\left(1_{\text{Mat}_{m\times m}(\mathbf{k})} \mid \mathcal{B}'\right) &= \det(\mathcal{B}_{(1,\dots,m)}^{-1})\mathbf{Pl}\,(\mathcal{B}) \\
&= \lambda^{-1} \cdot \det(\mathcal{A}_{(1,\dots,m)}^{-1}) \cdot \lambda \cdot \mathbf{Pl}\,(\mathcal{A}) \\
&= \mathbf{Pl}\left(1_{\text{Mat}_{m\times m}(\mathbf{k})} \mid \mathcal{A}'\right).
\end{aligned}$$

Μάλιστα, εάν $\mathcal{A}' = (a_{ij}), \mathcal{B}' = (b_{ij})$ (όπου $1 \leq i \leq m$, $m+1 \leq j \leq n$), τότε

$$\begin{aligned}
\pm a_{ij} &= \det(e^1, \dots, e^{i-1}, e^{i+1}, \dots, e^m, a^j) \\
&= \det(e^1, \dots, e^{i-1}, e^{i+1}, \dots, e^m, b^j) = \pm b_{ij},
\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $\mathcal{A}_{(1,\dots,m)}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{B}_{(1,\dots,m)}^{-1}\mathcal{B}$, πράγμα που σημαίνει ότι οι γραμμές των $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ παράγουν τον ίδιο διανυσματικό υπόχωρο $\mathcal{W}$ τού $\mathbf{k}^n$. $\square$

3.10.10 Λήμμα. *Η εικόνα* $\mathbf{Pl}(\mathrm{Grass}(m;n))$ *τού* $\mathrm{Grass}(m;n)$ *μέσω τής* $\mathbf{Pl}$ *είναι ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο περιγραφόμενο ως χώρος των κοινών σημείων μηδενισμού ομογενών πολυωνύμων βαθμού* 2 *εντός τού* $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^{\binom{n}{m}-1}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. **Βήμα 1ο.** Κατ' αρχάς θα παριγραφούν οι περιώνυμες *σχέσεις τού Plücker*. Έστω $\mathcal{W} \in \mathrm{Grass}(m;n)$ και έστω

$$\mathbf{Pl}\,(\mathcal{W}) = [\{p_{\mathbf{i}}\,|\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_m) : 1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n\}].$$

Για *οιουσδήποτε* δείκτες $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\}$ το $p_{\mathbf{i}} \in \mathbf{k}$, $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_m)$, ορίζεται ως

$$p_{\mathbf{i}} := \det(a_{\nu i_\mu})_{1 \leq \nu, \mu \leq m},$$

όπου ο $\mathcal{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbf{k})$ είναι ένας πίνακας, οι γραμμές τού οποίου παράγουν τον $\mathcal{W}$. Εν προκειμένω,

$$p_{\mathbf{i}} = \begin{cases} 0_{\mathbf{k}}, & \text{όταν } \exists \nu, \mu \in \{1, \ldots, m\}, \nu \neq \mu : i_\nu = i_\mu, \\ \mathrm{sign}(\sigma) p_{\mathbf{i}_\sigma}, & \begin{array}{l} \text{για κάθε } \sigma \in \mathfrak{S}_m \text{ με } i_{\sigma(1)} < \cdots < i_{\sigma(m)} \\ (\text{όπου } \mathbf{i}_\sigma := (i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(m)})). \end{array} \end{cases} \tag{3.15}$$

Για οιουσδήποτε $i_1, \ldots, i_{m-1}, j_1, \ldots, j_{m+1} \in \{1, \ldots, n\}$ ισχύουν οι *σχέσεις τού Plücker*:

$$\sum_{\varrho=1}^{m+1} (-1)^{\varrho}\, p_{(i_1, \ldots, i_{m-1}, j_\varrho)} \cdot p_{(j_1, \ldots, \widehat{j_\varrho}, \ldots, j_{m+1})} = 0_{\mathbf{k}} \tag{3.16}$$

(όπου το «καπελάκι» δηλοί ότι ο υποκείμενος δείκτης παραλείπεται). Για την απόδειξη τής ισότητας (3.16) αρκεί να θεωρήσουμε τον τύπο τού αναπτύγματος τής ορίζουσας

$$p_{(i_1, \ldots, i_{m-1}, j_\varrho)} = \begin{vmatrix} a_{1\,i_1} & \cdots & a_{1\,i_{m-1}} & a_{1\,j_\varrho} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m\,i_1} & \cdots & a_{m\,i_{m-1}} & a_{m\,j_\varrho} \end{vmatrix} = \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu a_{\nu\,j_\varrho},$$

όπου

$$\alpha_\nu := (-1)^{m+\nu} \begin{vmatrix} a_{1\,i_1} & \cdots & \cdots & a_{1\,i_{m-1}} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{\nu-1\,i_1} & \cdots & \cdots & a_{\nu-1\,i_{m-1}} \\ a_{\nu+1\,i_1} & \cdots & \cdots & a_{\nu+1\,i_{m-1}} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m\,i_1} & \cdots & \cdots & a_{m\,i_{m-1}} \end{vmatrix},$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\sum_{\varrho=1}^{m+1} (-1)^{\varrho}\, p_{(i_1, \ldots, i_{m-1}, j_\varrho)} \cdot p_{(j_1, \ldots, \widehat{j_\varrho}, \ldots, j_{m+1})} = \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu \sum_{\varrho=1}^{m+1} (-1)^{\varrho}\, a_{\nu\,j_\varrho} \cdot p_{(j_1, \ldots, \widehat{j_\varrho}, \ldots, j_{m+1})} = 0_{\mathbf{k}},$$

διότι

$$0_{\mathbf{k}} = \begin{vmatrix} a_{\nu\, j_1} & \cdots & a_{\nu\, j_{m+1}} \\ a_{1\, j_1} & \cdots & a_{1\, j_{m+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m\, j_1} & \cdots & a_{m\, j_{m+1}} \end{vmatrix} = \sum_{\varrho=1}^{m+1} (-1)^{\varrho}\, a_{\nu\, j_{\varrho}} \cdot p_{(j_1,\dots,\widehat{j_{\varrho}},\dots,j_{m+1})}.$$

Βήμα 2ο. Το αριστερό μέλος καθεμιάς των σχέσεων (3.16) πρόκειται να εκληφθεί ως ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού 2 ως προς τις «μεταβλητές»

$$\{p_{\mathbf{i}}\,|\mathbf{i} = (i_1,\dots,i_m) : 1 \le i_1 < \cdots < i_m \le n\}.$$

Μάλιστα, θα εξακολουθήσουμε να τηρούμε τις συμβάσεις (3.15), ούτως ώστε το $p_{\mathbf{i}}$ να ορίζεται για *οιουσδήποτε* πολυδείκτες $\mathbf{i} \in \{1,\dots,n\}^m$. Για

$$\mathbf{i} = (i_1,\dots,i_{m-1}),\ \ \mathbf{j} = (j_1,\dots,j_{m+1})$$

θέτουμε

$$F_{\mathbf{i}\,\mathbf{j}} := \sum_{\varrho=1}^{m+1} (-1)^{\varrho}\, p_{(i_1,..,i_{m-1},j_{\varrho})} \cdot p_{(j_1,..,\widehat{j_{\varrho}},..,j_{m+1})} \in \mathbf{k}[\{p_{\mathbf{l}}\,|\mathbf{l} = (l_1,..,l_m), 1 \le l_1 < \cdots < l_m \le n\}].$$

Θα αποδείξουμε ότι *για οιοδήποτε σημείο*

$$P := [\{p_{\mathbf{l}}\,|\mathbf{l} = (l_1,\dots,l_m) : 1 \le l_1 < \cdots < l_m \le n\}] \in \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^{\binom{n}{m}-1},$$

το οποίο αποτελεί θέση μηδενισμού των $F_{\mathbf{i}\,\mathbf{j}}$, $\forall \mathbf{i} = (i_1,\dots,i_{m-1})$, $\mathbf{j} = (j_1,\dots,j_{m+1})$, *υπάρχει ένας διανυσματικός υπόχωρος* $\mathcal{W}$ *τού* $\mathbf{k}^n$, *ούτως ώστε να ισχύει*

$$\mathbf{Pl}\,(\mathcal{W}) = P.$$

Δίχως βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p_{(1,\dots,m)} \neq 0_{\mathbf{k}}$. Επειδή τα $F_{\mathbf{i}\,\mathbf{j}}$ είναι ομογενή, μπορούμε, επιπροσθέτως, να υποθέσουμε ότι $p_{(1,\dots,m)} = 1_{\mathbf{k}}$. Θέτοντας

$$a_{\nu\mu} := (-1)^{m+\nu}\, p_{(1,\dots,\widehat{\nu},\dots,m,\mu)},\ \ \forall (\nu,\mu) \in \{1,\dots,n\} \times \{m+1,\dots,n\},$$

και θεωρώντας τόν πίνακα

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 1_{\mathbf{k}} & & 0_{\mathbf{k}} & a_{1\,m+1} & \cdots & a_{1\,n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0_{\mathbf{k}} & & 1_{\mathbf{k}} & a_{m\,m+1} & \cdots & a_{m\,n} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbf{k})$$

θα δείξουμε ότι $[\mathbf{Pl}\,(\mathcal{A})] = P$ (οπότε ο ζητούμενος $\mathcal{W}$ θα είναι ο διανυσματικός υπόχωρος τού $\mathbf{k}^n$ που θα παράγεται από τις γραμμές τού $\mathcal{A}$). Από τον ορισμό τού $\mathcal{A}$ παρατηρούμε ότι η κατά Plücker $\mathbf{l}$-οστή συντεταγμένη του (που θα τη συμβολίσουμε ως $\mathbf{Pl}\,(\mathcal{A})_{\mathbf{l}}$) ισούται με

$$\mathbf{Pl}\,(\mathcal{A})_{\mathbf{l}} = p_{\mathbf{l}}, \quad \begin{cases} \text{για κάθε } \mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_m),\ 1 \leq l_1 < \cdots < l_m \leq n, \\ \text{για τον οποίο ισχύει } \sharp(\{l_1, \ldots, l_m\} \cup \{1, \ldots, m\}) \leq m+1. \end{cases}$$

Έστω $\kappa \in \{1, \ldots, m\}$ και έστω

$$\mathfrak{L}_\kappa := \left\{ \mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_m) \;\middle|\; \begin{array}{c} 1 \leq l_1 < \cdots < l_m \leq n, \\ \sharp(\{l_1, \ldots, l_m\} \cup \{1, \ldots, m\}) \leq m + \kappa \end{array} \right\}.$$

Αρκεί να δειχθεί η ισότητα $\mathbf{Pl}\,(\mathcal{A})_{\mathbf{l}} = p_{\mathbf{l}}$ για κάθε $\mathbf{l} \in \mathfrak{L}_\kappa$ και για κάθε $\kappa \in \{1, \ldots, m\}$. Επειδή αυτή είναι αληθής για $\kappa = 1$, θα εργασθούμε επαγωγικώς επί τού κ. Ας υποθέσουμε ότι για κάποιον $\kappa \in \{1, \ldots, m-1\}$ (όταν $m \geq 2$) ισχύει

$$\mathbf{Pl}\,(\mathcal{A})_{\mathbf{l}} = p_{\mathbf{l}}, \ \ \forall\, \mathbf{l} \in \mathfrak{L}_\kappa. \tag{3.17}$$

Έστω τυχών πολυδείκτης $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_m) \in \mathfrak{L}_{\kappa+1} \smallsetminus \mathfrak{L}_\kappa$. Εξ υποθέσεως,

$$\begin{aligned} 0_{\mathbf{k}} &= F_{(l_1, \ldots, \widehat{l_\kappa}, \ldots, l_m)(1, \ldots, m, l_\kappa)}(P) \\ &= \sum_{\varrho=1}^{m+1} (-1)^\varrho\, p_{(l_1, \ldots, \widehat{l_\kappa}, \ldots, l_m, \varrho)} \cdot p_{(1, \ldots, \widehat{\varrho}, \ldots, m, l_\kappa)} + (-1)^{\kappa+1}\, p_{\mathbf{l}}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Εξάλλου, σύμφωνα με όσα προαναφέρθησαν στο 1ο βήμα, έχουμε

$$0_{\mathbf{k}} = \sum_{\varrho=1}^{m+1} (-1)^\varrho\, \mathbf{Pl}\,(\mathcal{A})_{(l_1, \ldots, \widehat{l_\kappa}, \ldots, l_m, \varrho)} \cdot \mathbf{Pl}\,(\mathcal{A})_{(1, \ldots, \widehat{\varrho}, \ldots, m, l_\kappa)} + (-1)^{\kappa+1}\, \mathbf{Pl}\,(\mathcal{A})_{\mathbf{l}}. \tag{3.19}$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (3.18) και (3.19), και λαμβάνοντας υπ' όψιν την επαγωγική υπόθεση (3.17), συνάγουμε ότι

$$(-1)^{\kappa+1}\, \mathbf{Pl}\,(\mathcal{A})_{\mathbf{l}} = (-1)^{\kappa+1}\, p_{\mathbf{l}} \Rightarrow \mathbf{Pl}\,(\mathcal{A})_{\mathbf{l}} = p_{\mathbf{l}}, \ \ \forall \mathbf{l} \in \mathfrak{L}_{\kappa+1}.$$

Βήμα 3ο. Από ό,τι απεδείχθη στο 2ο βήμα συμπεραίνουμε ότι

$$\boxed{\mathbf{Pl}(\mathrm{Grass}(m;n)) = \mathbf{V}_+\left(\left\{ F_{\mathbf{i}\mathbf{j}} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathbf{i} \in \{1, \ldots, n\}^{m-1} \\ \mathbf{j} \in \{1, \ldots, n\}^{m+1} \end{array} \right\}\right) \subset \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^{\binom{n}{m}-1},}$$

οπότε η εικόνα τού $\mathrm{Grass}(m;n)$ μέσω τής $\mathbf{Pl}$ είναι όντως ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο περιγραφόμενο ως χώρος των κοινών σημείων μηδενισμού ομογενών πολυωνύμων βαθμού 2 εντός τού $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^{\binom{n}{m}-1}$. □

3.10.11 Λήμμα. *Εάν για κάθε* $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_m)$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n$, *θέσουμε*

$$U_{\mathbf{i}} := \left\{ \left[\left\{ p_{\mathbf{l}} \;\middle|\; \begin{array}{c} \mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_m) : \\ 1 \leq l_1 < \cdots < l_m \leq n \end{array} \right\} \right] \in \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^{\binom{n}{m}-1} \,|\mathbf{l} \neq \mathbf{i} \right\},$$

τότε η απεικόνιση

$$\phi_{\mathbf{i}} : \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{m(n-m)} \longrightarrow \mathbf{Pl}(\mathrm{Grass}(m;n)) \cap U_{\mathbf{i}}$$

η οριζόμενη από τον τύπο

$$\phi_{\mathbf{i}} \begin{pmatrix} a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,n-m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m\,1} & \cdots & a_{m\,n-m} \end{pmatrix} := \left[\mathbf{Pl} \begin{pmatrix} b_{1\,1} & \cdots & b_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m\,1} & \cdots & b_{m\,n} \end{pmatrix} \right],$$

όπου $1 \leq j_1 < \cdots < j_{n-m} \leq n$, $\{j_1, \ldots, j_{n-m}\} = \{1, \ldots, n\} \smallsetminus \{i_1, \ldots, i_m\}$ *και*

$$\begin{cases} b_{\iota\, j_\nu} := a_{i\,\nu}, \forall \nu \in \{1, \ldots, n-m\} \\ b_{\iota\, i_\nu} := \delta_{i\,\nu} \text{ (δέλτα τού Kronecker)}, \forall \nu \in \{1, \ldots, m\}, \\ \iota \in \{1, \ldots, m\}, \end{cases}$$

αποτελεί έναν ισομορφισμό συσχετικών ποικιλοτήτων.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα δώσουμε την απόδειξη μόνον όταν $\mathbf{i} = (1, \ldots, m)$. (Οι λοιπές περιπτώσεις μελετώνται παρομοίως.) Εν προκειμένω, η απεικόνιση

$$\phi_{(1,\ldots,m)} : \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{m(n-m)} \longrightarrow \mathbf{Pl}(\mathrm{Grass}(m;n)) \cap U_{(1,\ldots,m)}$$

ορίζεται από τον τύπο

$$\phi_{(1,\ldots,m)} \begin{pmatrix} a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,n-m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m\,1} & \cdots & a_{m\,n-m} \end{pmatrix} := \left[\mathbf{Pl} \begin{pmatrix} 1_{\mathbf{k}} & & 0_{\mathbf{k}} & a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,n-m} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0_{\mathbf{k}} & & 1_{\mathbf{k}} & a_{m\,1} & \cdots & a_{m\,n-m} \end{pmatrix} \right],$$

και είναι προφανώς αμφιρριπτική· είναι όμως και μορφισμός, καθόσον οι (τοπικές) συνιστώσες συναρτήσεις της είναι κανονικές (βλ. πρόταση 3.8.5). Η αντίστροφός της

$$\phi_{(1,\ldots,m)}^{-1} : \mathbf{Pl}(\mathrm{Grass}(m;n)) \cap U_{(1,\ldots,m)} \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{m(n-m)}$$

ορίζεται (επί τη βάσει των όσων ειπώθηκαν στο 2ο βήμα τής αποδείξεως τού λήμματος 3.10.10) από τον τύπο

$$\left[\left\{ p_{\mathbf{l}} \;\middle|\; \begin{array}{c} \mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_m) : \\ 1 \leq l_1 < \cdots < l_m \leq n \end{array} \right\} \right] \longmapsto \mathcal{A} = (a_{\nu\,\mu})_{1 \leq \nu \leq m, m+1 \leq \mu \leq n},$$

όπου

$$a_{\nu\,\mu} = (-1)^{m+\nu} \frac{p_{(1,\ldots,\widehat{\nu},\ldots,m,m+\mu)}}{p_{(1,\ldots,m)}},$$

οπότε και αυτή είναι μορφισμός (για τον ίδιο λόγο). □

3.10.12 Σημείωση. Επειδή η $\mathbf{Pl} = \mathbf{Pl}_m^n$ είναι αμφιρριπτική επί τής εικόνας της, το σύνολο $\mathrm{Grass}(m;n)$ μπορεί να εκληφθεί αφ' εαυτού ως προβολικό σύνολο (όπως συνέβη με το $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^m \times \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n$ μέσω τής αμφιρρίψεως $\sigma_{m,n}$ στον ορισμό 3.9.4) και μάλιστα ως «ισόμορφο» τού $\mathbf{Pl}(\mathrm{Grass}(m;n))$.

3.10.13 Θεώρημα. *Το* $\mathbf{Pl}(\mathrm{Grass}(m;n))$ *είναι μια προβολική ποικιλότητα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κατά τα προηγηθέντα λήμματα 3.10.9 και 3.10.10 το $\mathbf{Pl}(\mathrm{Grass}(m;n))$ είναι προβολικό αλγεβρικό σύνολο εντός τού $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^{\binom{n}{m}-1}$. Κατά το λήμμα 3.10.11,

$$\mathbf{Pl}(\mathrm{Grass}(m;n)) \cap U_{\mathbf{i}} \cong \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{m(n-m)},$$

για κάθε πολυδείκτη $\mathbf{i}$. Θεωρούμε δυο πολυδείκτες

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= (i_1, \ldots, i_m), \ 1 \le i_1 < \cdots < i_m \le n, \\ \mathbf{j} &= (j_1, \ldots, j_m), \ 1 \le j_1 < \cdots < j_m \le n, \end{aligned}$$

για τους οποίους ισχύει $U_{\mathbf{i}} \cap U_{\mathbf{j}} \neq \varnothing$. Εάν

$$\begin{aligned} \{i_1, \ldots, i_m\} \cap \{j_1, \ldots, j_m\} &= \{\kappa_1, \ldots, \kappa_s\}, \\ \{i_1, \ldots, i_m\} \smallsetminus \{\kappa_1, \ldots, \kappa_s\} &= \left\{\beta_1, \ldots, \beta_{m-s}\right\}, \\ \{j_1, \ldots, j_m\} \smallsetminus \{\kappa_1, \ldots, \kappa_s\} &= \left\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-s}\right\}, \end{aligned}$$

τότε είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι

$$\phi_{(\kappa_1, \ldots, \kappa_s)}\left(e^{\kappa_1}, \ldots, e^{\kappa_s}, e^{\beta_1+\gamma_1}, \ldots, e^{\beta_{m-s}+\gamma_{m-s}}\right) \in \mathbf{Pl}(\mathrm{Grass}(m;n)) \cap U_{\mathbf{i}} \cap U_{\mathbf{j}},$$

οπότε $\mathbf{Pl}(\mathrm{Grass}(m;n)) \cap U_{\mathbf{i}} \cap U_{\mathbf{j}} \neq \varnothing$ και είναι δυνατή η εφαρμογή τής προτάσεως 3.8.14 προκειμένου να αποδειχθεί ότι το $\mathbf{Pl}(\mathrm{Grass}(m;n))$ είναι μια προβολική ποικιλότητα. $\square$

3.10.14 Ορισμός. Η προβολική ποικιλότητα $\mathbf{Pl}(\mathrm{Grass}(m;n))$ (ή το ίδιο το $\mathrm{Grass}(m;n)$, πρβλ. 3.10.12) καλείται **ποικιλότητα τού Grassmann (τού τύπου** $(m;n)$**)**. Επίσης, λόγω των προαναφερθέντων, η απεικόνιση $\mathbf{Pl} = \mathbf{Pl}_m^n : \mathrm{Grass}(m;n) \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^{\binom{n}{m}-1}$ καλείται, ιδιαιτέρως, **κατά Plücker εμφύτευση τής** $\mathrm{Grass}(m;n)$ **εντός τού** $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^{\binom{n}{m}-1}$.

3.10.15 Παράδειγμα. Για $n \geq 4$ το $\mathrm{Grass}(2;n)$ $(\longleftrightarrow \mathbb{G}(1;n-1))$ μπορεί να θεωρηθεί ως ο χώρος παραμετρήσεως των ευθειών τού $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^{n-1}$. Η ποικιλότητα τού Grassmann $\mathbf{Pl}(\mathrm{Grass}(2;n))$ περιγράφεται ως χώρος των κοινών σημείων μηδενισμού ομογενών $\binom{n}{4}$ πολυωνύμων βαθμού 2 εντός τού $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^{\binom{n}{2}-1}$. Όταν $n=4$, τότε

$$\mathbf{Pl}(\mathrm{Grass}(2;n)) = \mathbf{V}_+\left(\mathsf{X}_0\mathsf{X}_5 - \mathsf{X}_1\mathsf{X}_4 + \mathsf{X}_2\mathsf{X}_3\right) \subset \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^5.$$

3.10.16 Σημείωση. Για περαιτέρω μελέτη και εφαρμογές των ποικιλοτήτων τού Grassmann οι αναγνώστες παραπέμπονται σε ειδικότερη βιβλιογραφία, όπως π.χ. στα ακόλουθα:

1) W.V.D Hodge & D. Pedoe: *Methods of Algebraic Geometry*, Vol. **II**, Cambridge University Press, 1952, Ch. XIV, σελ. 309-387.

2) S.L. Kleiman & D. Laksov: *Schubert Calculus*, Amer. Math. Monthly **79** (10), 1972, σελ. 1061-1082.

3) P. Griffiths & J. Harris: *Principles of Algebraic Geometry,* Wiley, 1977, Ch. 1, Sec. 5, σελ. 193-211.

4) J. Harris: *Algebraic Geometry. A First Course*, GTM, Vol. **133**, Springer-Verlag, 1992, Lecture 6, σελ. 63-71.

5) W. Fulton: *Young Tableaux*, London Math. Soc. Student Texts, Vol. **35**, 1997, Ch. 9, σελ. 131-153.

(iii) Έστω **k** το σώμα αναφοράς μας και έστω $n \in \mathbb{N}$. Εάν για $l \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq l \leq n$, θέσουμε

$$\mathcal{V}_l := \mathbf{k}^l \times \{0_{\mathbf{k}^{n-l}}\} \hookrightarrow \mathbf{k}^n,$$

τότε προκύπτει μια *σημαία* διανυσματικών υποχώρων

$$\{0\} = \mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{V}_n = \mathbf{k}^n \tag{3.20}$$

τού $\mathbf{k}^n$(καθότι $\dim_{\mathbf{k}}(\mathcal{V}_l) = l$). Επίσης, εάν $\mathcal{W} \in \mathrm{Grass}(m;n)$, τότε η

$$\{0\} = \mathcal{W} \cap \mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{W} \cap \mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{W} \cap \mathcal{V}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{W} \cap \mathcal{V}_n = \mathcal{W}$$

είναι μια (αύξουσα) ακολουθία διανυσματικών υποχώρων τού $\mathcal{W}$. Λέμε ότι ο $\mathcal{W}$ είναι *τοποθετημένος σε γενική θέση ως προς τη σημαία* (3.20) όταν η τομή $\mathcal{W} \cap \mathcal{V}_l$ έχει την ελάχιστη δυνατή διάσταση για κάθε $l \in \{1, \ldots, n\}$, δηλαδή όταν

$$\dim_{\mathbf{k}}(\mathcal{W} \cap \mathcal{V}_l) = \begin{cases} 0, & \text{για } l \in \{1, \ldots, n-m\}, \\ m + l - n, & \text{για } l \in \{n-m+1, \ldots, n\}. \end{cases}$$

Για *τυχόντα* $\mathcal{W}$ έχουμε

$$0 \leq \dim_{\mathbf{k}}(\mathcal{W} \cap \mathcal{V}_{l+1}) - \dim_{\mathbf{k}}(\mathcal{W} \cap \mathcal{V}_l) \leq 1.$$

Κατά συνέπειαν, υπάρχει μια ακολουθία δεικτών

$$1 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_m \leq n$$

για τα στοιχεία τής οποίας ισχύει

$$\begin{cases} \dim_{\mathbf{k}}(\mathcal{W}\cap\mathcal{V}_{\sigma_1-1}) & = & 0 \\ \dim_{\mathbf{k}}(\mathcal{W}\cap\mathcal{V}_{\sigma_1}) & = & 1 \\ & \vdots & \\ \dim_{\mathbf{k}}(\mathcal{W}\cap\mathcal{V}_{\sigma_2-1}) & = & 1 \\ \dim_{\mathbf{k}}(\mathcal{W}\cap\mathcal{V}_{\sigma_2}) & = & 2 \\ & \vdots & \\ \dim_{\mathbf{k}}(\mathcal{W}\cap\mathcal{V}_{\sigma_i-1}) & = & i-1 \\ \dim_{\mathbf{k}}(\mathcal{W}\cap\mathcal{V}_{\sigma_i}) & = & i \\ & \text{κ.ο.κ.} & \\ & \vdots & \end{cases}$$

3.10.17 Ορισμός. Η διατεταγμένη m-άδα $(\sigma_1,\dots,\sigma_m)$ ονομάζεται **σύμβολο Schubert τού** $\mathcal{W}$ **εντός τής** $\mathrm{Grass}(m;n)$.

3.10.18 Πρόταση. *Το σύνολο*

$$\boxed{\Sigma(\sigma_1,\dots,\sigma_m) := \{\mathcal{W}\in \mathrm{Grass}(m;n)\,|\dim_{\mathbf{k}}(\mathcal{W}\cap\mathcal{V}_{\sigma_i})\geq i\}}$$

(που καλείται ***κύκλημα Schubert*** *αντιστοιχούμενο στο σύμβολο* $(\sigma_1,\dots,\sigma_m)$*) είναι μια (κλειστή) υποποικιλότητα*[39] *τής* $\mathrm{Grass}(m;n)$ $(\cong \mathbf{Pl}(\mathrm{Grass}(m;n)))$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε διανυσματικό υπόχωρο $\mathcal{Y}$ τού $\mathbf{k}^n$ διαστάσεως $v := \dim_{\mathbf{k}}(\mathcal{Y})$ και κάθε $d\in\mathbb{N}_0$, $0\leq d\leq \min(m,\nu)$, το σύνολο

$$\Sigma_d(\mathcal{Y}) := \{\mathcal{W}\in \mathrm{Grass}(m;n)\,|\dim_{\mathbf{k}}(\mathcal{W}\cap\mathcal{Y})\geq d\}$$

είναι μια (κλειστή) υποποικιλότητα τής $\mathrm{Grass}(m;n)$. Έστω $\{y_1,\dots,y_\nu\}$ μια βάση τού $\mathcal{Y}$ και έστω $\{w_1,\dots,w_m\}$ μια βάση τού $\mathcal{W}$. Η συνθήκη $\dim_{\mathbf{k}}(\mathcal{W}\cap\mathcal{Y})\geq d$ ισοδυναμεί με τη συνθήκη $\dim_{\mathbf{k}}(\mathcal{W}+\mathcal{Y})\geq m+\nu-d$ η οποία, με τη σειρά της, ισοδυναμεί με την

$$\mathrm{rank}(y_1,\dots,y_\nu,w_1,\dots,w_m)\leq m+\nu-d,$$

ήτοι με τον μηδενισμό των $(m+\nu-d+1)\times(m+\nu-d+1)$-υποπινάκων τού πίνακα

$$(y_1,\dots,y_\nu,w_1,\dots,w_m)\in \mathrm{Mat}_{n\times(m+\nu)}(\mathbf{k}).$$

Άρα το $\mathbf{Pl}(\Sigma_d(\mathcal{Y}))\cap\mathbf{Pl}(\mathrm{Grass}(m;n))\cap U_{\mathbf{i}}$ είναι κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τού

$$\mathbf{Pl}(\mathrm{Grass}(m;n))\cap U_{\mathbf{i}}$$

[39] Κατ' ουσίαν «ταυτίζουμε» τα $\Sigma(\sigma_1,\dots,\sigma_m)$ με τις εικόνες τους μέσω τής $\mathbf{Pl}$.

για καθε πολυδείκτη $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_m),\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n$ και το

$$\mathbf{Pl}(\Sigma(\sigma_1, \dots, \sigma_m)) = \mathbf{Pl}(\Sigma_1(\mathcal{V}_{\sigma_1})) \cap \cdots \cap \mathbf{Pl}(\Sigma_m(\mathcal{V}_{\sigma_m}))$$

κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τής $\mathbf{Pl}(\mathrm{Grass}(m;n))$. (Για την απόδειξη τής αναγωγιμότητάς του μπορεί να χρησιμοποιηθεί εκ νέου η πρόταση 3.8.14). □

3.10.19 Παραδείγματα. Προφανώς,

$$\Sigma(1, 2, \dots, m) = \{\mathcal{V}_m\},$$

$$\Sigma(n - m + 1, \dots, n) = \mathrm{Grass}(m;n),$$

$$\Sigma(l - m + 1, \dots, l - 1, l) = \mathrm{Grass}_m(\mathcal{V}_l) \subseteq \mathrm{Grass}(m;n),$$

$$\Sigma(1, \dots, \nu, n - m + \nu, \dots, n) = \{\mathcal{W} \in \mathrm{Grass}(m;n)\,|\mathcal{V}_\nu \subseteq \mathcal{W}\} \cong \mathrm{Grass}_{m-\nu}(\mathbf{k}^n/\mathcal{V}_\nu).$$

3.10.20 Σημείωση. Τα κυκλήματα Schubert παίζουν πρωτεύοντα ρόλο κατά τη διαδικασία τού προσδιορισμού τού δακτυλίου συνομολογίας $H^*(\mathrm{Grass}(m;n);\mathbb{Z})$ όταν $\mathbf{k} = \mathbb{C}$. (Βλ. P. Griffiths & J. Harris: *Principles of Algebraic Geometry,* Wiley, 1977, σελ. 193-211.)

Ασκήσεις

A-3-68. Στο 3.10.6 (c) ορίσθηκε η ρητή ορθόθετη καμπύλη $\mathrm{Ver}_{1,d}$ («τάξεως d») εντός τού $\mathbb{P}^d_{\mathbf{k}}$ *υπό τη συνήθη της μορφή*. Εν προκειμένω, ως βάση τού $\mathbf{k}\,[\mathsf{X}_0, \mathsf{X}_1]_d$ έχει προεπιλεγεί το σύνολο

$$\mathrm{Mov}(\mathbf{k}\,[\mathsf{X}_0, \mathsf{X}_1])_d = \{\mathsf{X}_0^d, \mathsf{X}_0^{d-1}\mathsf{X}_1, \dots, \mathsf{X}_0\mathsf{X}_1^{d-1}, \mathsf{X}_1^d\}.$$

Γενικότερα, ως **ρητή ορθόθετη καμπύλη** («τάξεως d») **εντός τού** $\mathbb{P}^d_{\mathbf{k}}$ ορίζεται η εικόνα μιας (κατ' ανάγκην ενριπτικής) απεικονίσεως

$$\varphi : \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}} \hookrightarrow \mathbb{P}^d_{\mathbf{k}},\ \ \varphi([t_0 : t_1]) := [A_0(t_0, t_1) : \ldots : A_0(t_0, t_1)],$$

όπου $\{A_0(\mathsf{X}_0, \mathsf{X}_1), \dots, A_d(\mathsf{X}_0, \mathsf{X}_1)\}$ *οιαδήποτε βάση* τού $\mathbf{k}\,[\mathsf{X}_0, \mathsf{X}_1]_d$. Εάν υποτεθεί ότι

$$A_i(\mathsf{X}_0, \mathsf{X}_1) = \sum_{j=0}^{d} a_{ij}\mathsf{X}_0^{d-j}\mathsf{X}_1^j,\ \ \forall i \in \{0, \dots, d\},$$

να αποδειχθεί ότι η μέσω τού πίνακα $\mathcal{A} = (a_{ij})_{0 \leq i,j \leq d} \in \mathrm{GL}(d+1, \mathbf{k})$ προσδιοριζόμενη προβολική αλλαγή συντεταγμένων $\Psi_{\mathcal{A}} : \mathbb{P}^d_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{P}^d_{\mathbf{k}}$ τού $\mathbb{P}^d_{\mathbf{k}}$ (βλ. 3.5.2) είναι τέτοια, ώστε να ισχύει η ισότητα: $\Psi_{\mathcal{A}} \circ \boldsymbol{\nu}_{1,d} = \varphi$.

A-3-69. Έστω $\mathcal{X}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο τού προβολικού χώρου $\mathbb{P}^d_{\mathbf{k}}$. Λέμε ότι τα σημεία τού $\mathcal{X}$ ***είναι τοποθετημένα σε γενική θέση*** εντός τού $\mathbb{P}^d_{\mathbf{k}}$ όταν για κάθε $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ με $\sharp(\mathcal{Y}) \leq d+1$ έχουμε $\dim(\mathrm{Span}_{\mathbf{k}}(\mathcal{Y})) = \sharp(\mathcal{Y})-1$. (Εάν $\mathcal{Y} = \left\{[a_{i0}, : .. : a_{id}] \in \mathbb{P}^d_{\mathbf{k}} \,|1 \leq i \leq \kappa\right\}$ με $\kappa \leq d+1$, τότε η ανωτέρω συνθήκη ικανοποιείται $\Leftrightarrow$ η βαθμίδα τού πίνακα $(a_{ij})_{1\leq i\leq\kappa, 0\leq j\leq d}$ ισούται με κ.) Δοθέντων $d+3$ σημείων $P_0, P_1, \ldots, P_{d+2}$, τα οποία είναι τοποθετημένα σε γενική θέση εντός τού $\mathbb{P}^d_{\mathbf{k}}$, να αποδειχθεί η ύπαρξη *μονοσημάντως ορισμένης* ρητής ορθόθετης καμπύλης («τάξεως d») εντός τού $\mathbb{P}^d_{\mathbf{k}}$ (υπό την έννοια τής ασκήσεως **A-3-68**) που διέρχεται από καθένα εξ αυτών. (*Υπόδειξη*: Δίχως βλάβη τής γενικότητας μπορεί να υποτεθεί ότι

$$P_j = [0_{\mathbf{k}} : .. : 0_{\mathbf{k}} : \underbrace{1_{\mathbf{k}}}_{j\text{-οστή θέση}} : 0_{\mathbf{k}} : .. : 0_{\mathbf{k}}],\ \forall j \in \{0, \ldots, d\},$$

$$P_{d+1} = [1_{\mathbf{k}} : \ldots : 1_{\mathbf{k}}],\ P_{d+2} = [a_0 : \ldots : a_d]$$

και κατόπιν να τεθεί $A_i(\mathsf{X}_0, \mathsf{X}_1) := \prod_{j\in\{0,\ldots,d\}\smallsetminus\{i\}} \left(\mathsf{X}_0 - a_j^{-1}\mathsf{X}_1\right)$ για κάθε $i \in \{0, \ldots, d\}$.)

A-3-70. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα τής διαγωνίου $\Delta_{\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}} \subset \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ μέσω τής εμφυτεύσεως $\sigma_{n,n}$ τού Segre ισούται με

$$\sigma_{n,n}\left(\Delta_{\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}}\right) = \mathrm{Ver}_{n,2},$$

ήτοι με την οριζουσιακή ποικιλότητα 3.10.6 (e) τού Veronese.

A-3-71. Έστω $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, $n \in \mathbb{N}$, ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού $d \geq 1$, τέτοιο ώστε να ισχύει $\mathbf{V}_+(F) \neq \varnothing$. Να αποδειχθεί ότι το (κατά Zariski ανοικτό) υποσύνολο

$$U(F) := \{[a_0 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \mid F(a_0, \ldots, a_n) \neq 0_{\mathbf{k}}\}$$

τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι ισόμορφο με μια συσχετική ποικιλότητα. (*Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιηθεί καταλλήλως η πρόταση 3.10.7.)

A-3-72. Να προσδιορισθούν τα σύμβολα Schubert $\Sigma(i,j)$ εντός τής Grass$(2;4)$, καθώς και οι προβολικές ποικιλότητες $\mathbf{Pl}(\Sigma(i,j))$ που αντιστοιχούν σε αυτά.

3.11 Ρητές Απεικονίσεις

(i) Η έννοια τής *κανονικής συναρτήσεως* (επί σχεδόν προβολικών ποικιλοτήτων ή επί μη κενών, κατά Zariski ανοικτών υποσυνόλων τους), καθώς και οι έννοιες των *μορφισμών* και *ισομορφισμών* μεταξύ σχεδόν προβολικών ποικιλοτήτων έχουν εισαχθεί στην ενότητα 3.4 (βλ. 3.4.11 και 3.4.12). Εδώ θα εισαχθούν οι έννοιες *τοπικός δακτύλιος σημείου*, *ρητή συνάρτηση*, *ρητή απεικόνιση*, *κυριαρχούσα απεικόνιση* και *αμφίρρητη απεικόνιση* στην κατηγορία $\mathbf{k}$-$\mathfrak{QPVar}$ (γενικεύοντας τις ίδιες έννοιες τις οποίες είχαμε συναντήσει εργαζόμενοι στη «μικρότερη» κατηγορία $\mathbf{k}$-$\mathfrak{QAV}$ar των σχεδόν συσχετικών ποικιλοτήτων στις ενότητες 2.4 και 2.5), υπό το πρίσμα τής κατηγορικής ταξινομήσεως τής ενότητας 3.8.

3.11.1 Πρόταση. *Έστω Y μια σχεδόν προβολική ποικιλότητα και έστω $f : Y \longrightarrow \mathbf{k}$ μια κανονική συνάρτηση επί τής Y* (βλ. 3.4.11).*Τότε η f είναι συνεχής* (*ως προς την τοπολογία Zariski, εάν κανείς ταυτίσει το $\mathbf{k}$ με το $\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$*).

Αποδειξη. Έστω f μια κανονική συνάρτηση επί τής Y. Κατά την άσκηση **A-1-8** τα μη κενά, κλειστά (ως προς την τοπολογία Zariski), γνήσια υποσύνολα τού $\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ είναι πεπερασμένα. Ως εκ τούτου, αρκεί να δειχθεί ότι η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(a)$ οιουδήποτε $a \in \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ είναι κατά Zariski κλειστή. Έστω τυχόν $P \in Y$. Τότε υπάρχουν ένα κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο U τού Y με $P \in U$, καθώς και δυο ομογενή πολυώνυμα $G, H \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ *ιδίου βαθμού*, τα οποία πληρούν τις εξής συνθήκες:

$$H(Q) \neq 0_{\mathbf{k}}, \quad f(Q) = \frac{G(Q)}{H(Q)}, \ \forall Q \in U.$$

Επομένως,

$$f^{-1}(a) \cap U = \left\{ Q \in U \;\middle|\; \frac{G(Q)}{H(Q)} = a \right\}.$$

Είναι λοιπόν αρκετό να δειχθεί ότι το $f^{-1}(a) \cap U$ είναι κατά Zariski κλειστό εντός τού U. Παρατηρώντας ότι

$$f^{-1}(a) \cap U = \mathbf{V}_+(G - aH) \cap U,$$

αποπερατώνουμε την απόδειξη. □

3.11.2 Πόρισμα. *Έστω Y μια σχεδόν προβολική ποικιλότητα. Εάν οι*

$$f_1, f_2 : Y \longrightarrow \mathbf{k}$$

είναι δυο κανονικές συναρτήσεις επί τής Y (υπό την έννοια τού ορισμού 3.4.11) *και το U ένα μη κενό, ανοικτό υποσύνολο τής Y, τότε ισχύει η εξής συνεπαγωγή* :

$$f_1|_U = f_2|_U \Longrightarrow f_1 = f_2.$$

Αποδειξη. Η Y είναι εξ ορισμού ανάγωγη. Επίσης, το U, όντας μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο τής Y είναι ανάγωγο και πυκνό. Εξ υποθέσεως, $(f_1 - f_2)^{-1}(0_{\mathbf{k}}) \supseteq U$, με το $(f_1 - f_2)^{-1}(0_{\mathbf{k}})$ κλειστό εντός τής Y (βλ. απόδειξη τής προτάσεως 3.11.1). Ως εκ τούτου,

$$Y = \mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_Y}(U) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_Y}\big((f_1 - f_2)^{-1}(0_{\mathbf{k}})\big) = (f_1 - f_2)^{-1}(0_{\mathbf{k}}),$$

οπότε

$$(f_1 - f_2)^{-1}(0_{\mathbf{k}}) = Y \Longrightarrow f_1 = f_2$$

(επί ολοκλήρου τής Y). $\square$

3.11.3 Ορισμός. Έστω Y μια σχεδόν προβολική ποικιλότητα. Για κάθε κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο U τής Y ορίζουμε το σύνολο

$$\boxed{\mathcal{O}_Y(U) := \begin{cases} \left\{ f : U \longrightarrow \mathbf{k} \;\middle|\; \begin{array}{c} f \text{ κανονική επί τού } U \\ \text{(υπό την έννοια τού 3.4.11)} \end{array} \right\}, & \text{όταν } U \neq \varnothing, \\ \{0\}, & \text{όταν } U = \varnothing. \end{cases}}$$

Το $\mathcal{O}_Y(U)$ (με τις συνήθεις πράξεις προσθέσεως και πολλαπλασιασμού συναρτήσεων) είναι ένας δακτύλιος. Μάλιστα, ο $\mathcal{O}_Y(U)$, εφοδιασμένος και με τον συνήθη αριθμητικό πολλαπλασιασμό, καθίσταται $\mathbf{k}$-άλγεβρα.

3.11.4 Ορισμός. Έστω Y μια σχεδόν προβολική ποικιλότητα και έστω $P \in Y$. Θέτουμε

$$\mathcal{G}_P := \left\{ \text{ζεύγη } (U, f) \;\middle|\; \begin{array}{c} U \text{ μια κατά Zariski ανοικτή} \\ \text{περιοχή τού } P \text{ και } f \in \mathcal{O}_Y(U) \end{array} \right\}.$$

Λόγω τού πορίσματος 3.11.2 έχουμε τη δυνατότητα ορισμού τής εξής σχέσεως ισοδυναμίας επί τού $\mathcal{G}_P$:

$$\boxed{(U, f) \sim (U', f') \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'} \,.}$$

Θέτοντας

$$\boxed{\mathcal{O}_{Y,P} := \mathcal{G}_P / \sim} \tag{3.21}$$

και συμβολίζοντας ως $[U, f]$ την κλάση ισοδυναμίας οιουδήποτε ζεύγους $(U, f) \in \mathcal{G}_P$ ως προς την "$\sim$", διαπιστώνουμε ότι το σύνολο $\mathcal{O}_{Y,P}$ εφοδιάζεται μέσω των πράξεων

$$\begin{cases} [U, f] + [U', f'] & := & [U \cap U', f + f'], \\ [U, f] \cdot [U', f'] & := & [U \cap U', f \cdot f'], \end{cases}$$

με τη δομή ενός δακτυλίου. Εν συνεχεία, θέτοντας

$$\boxed{\mathfrak{m}_{Y,P} := \{ [U, f] \in \mathcal{O}_{Y,P} \mid f(P) = 0_{\mathbf{k}} \}}$$

και θεωρώντας τον επιμορφισμό αποτιμήσεως

$$\mathcal{O}_{Y,P} \ni [U, f] \longmapsto f(P) \in \mathbf{k},$$

ο οποίος έχει ως πυρήνα του το ιδεώδες $\mathfrak{m}_{Y,P}$, συμπεραίνουμε (μέσω τού 1ου θεωρήματος ισομορφισμών δακτυλίων 1.1.10) ότι $\mathcal{O}_{Y,P}/\mathfrak{m}_{Y,P} \cong \mathbf{k}$, απ' όπου έπεται ότι το $\mathfrak{m}_{Y,P}$ είναι ένα μεγιστοτικό ιδεώδες τού $\mathcal{O}_{Y,P}$ (βλ. θεώρημα 1.1.14). Επιπροσθέτως, επειδή για κάθε $[U,f] \in \mathcal{O}_{Y,P} \smallsetminus \mathfrak{m}_{Y,P}$ υπάρχει μια κατά Zariski ανοικτή περιοχή τού P επί τής οποίας η $\frac{1}{f}$ ορίζει μια κανονική συνάρτηση, η πρόταση 2.3.1 μας πληροφορεί ότι ο $\mathcal{O}_{Y,P}$ είναι τοπικός δακτύλιος με το $\mathfrak{m}_{Y,P}$ ως το μοναδικό μεγιστοτικό του ιδεώδες. Ο δακτύλιος $\mathcal{O}_{Y,P}$ αναφέρεται, ιδιαιτέρως, ως **ο τοπικός δακτύλιος τής** Y **στο** P, ενώ κάθε στοιχείο του καλείται **φύτρο** των κανονικών συναρτήσεων (επί τής Y) **περί το** P.

3.11.5 Παρατήρηση. Στην περίπτωση κατά την οποία το $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι μια προβολική ποικιλότητα και $P \in V$, ταυτίζοντας κάθε $f \in \mathbf{k}(V)$, η οποία είναι κανονική στο P -υπό την έννοια τού ορισμού 3.4.4- με την κλάση ισοδυναμίας $[U,f]$, όπου U μια κατά Zariski ανοικτή περιοχή τού P με $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, συμπεραίνουμε ότι οι ορισμοί (3.7) και (3.21) τού τοπικού δακτυλίου τής V στο P συμπίπτουν.

3.11.6 Ορισμός. Έστω Y μια σχεδόν προβολική ποικιλότητα. Θέτουμε

$$\mathcal{G}_Y := \left\{ \text{ζεύγη } (U,f) \;\middle|\; \begin{array}{c} U \text{ ένα μη κενό κατά Zariski ανοικτό} \\ \text{υποσύνολο τής } Y \text{ και } f \in \mathcal{O}_Y(U) \end{array} \right\}.$$

Λόγω τού πορίσματος 3.11.2 έχουμε τη δυνατότητα ορισμού τής εξής σχέσεως ισοδυναμίας επί τού $\mathcal{G}_Y$:

$$\boxed{(U,f) \sim (U',f') \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'} \,.}$$

Θέτοντας

$$\boxed{\mathrm{Rat}(Y) := \mathcal{G}_Y / \sim}$$

και συμβολίζοντας ως $[U,f]$ την κλάση ισοδυναμίας οιουδήποτε ζεύγους $(U,f) \in \mathcal{G}_Y$ ως προς την ως προς την "$\sim$", διαπιστώνουμε ότι το σύνολο $\mathrm{Rat}(Y)$ εφοδιάζεται μέσω των πράξεων

$$\left\{ \begin{array}{rcl} [U,f] + [U',f'] & := & [U \cap U', f + f'], \\ {[U,f] \cdot [U',f']} & := & [U \cap U', f \cdot f'], \end{array} \right.$$

με τη δομή ενός δακτυλίου. Τα στοιχεία τού $\mathrm{Rat}(Y)$ καλούνται **ρητές συναρτήσεις επί τής** Y.

3.11.7 Σημείωση. Οι έννοιες *πεδίο ορισμού* $\mathrm{Dom}([U,f])$ και *σύνολο πόλων* $\mathrm{Pol}([U,f])$ επεκτείνονται για τα στοιχεία $[U,f]$ τού $\mathrm{Rat}(Y)$ όπως και στην περίπτωση θεωρήσεως ρητών συναρτήσεων επί σχεδόν συσχετικών ποικιλοτήτων (βλ. 2.4.25): Επί τού $\mathcal{G}_Y$ εισάγουμε τη διάταξη

$$(U', f') \preccurlyeq (U, f) \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} U' \subseteq U \text{ και } f|_{U'} = f'.$$

(Δοθείσας τής f' υπάρχει μόνον μία f που πληροί αυτήν την ιδιότητα και το ζεύγος (U, f) μπορεί να εκληφθεί ως *επέκταση τού ζεύγους* (U', f').) Είναι προφανές ότι κάθε ζεύγος $(U, f) \in \mathcal{G}_Y$ διαθέτει ένα *μονοσημάντως ορισμένο* μεγιστοτικό στοιχείο $(U^{\max}, f^{\max})$ ως προς την " $\preccurlyeq$ ". Επίσης,

$$[U_1, f_1] = [U_2, f_2] \Longleftrightarrow U_1^{\max} = U_2^{\max} \text{ και } f_1^{\max} = f_2^{\max}.$$

Αρκεί λοιπόν για οιοδήποτε στοιχείο $[U, f] \in \mathrm{Rat}(Y)$ να θέσουμε

$$\boxed{\mathrm{Dom}([U, f]) := U^{\max}, \quad \mathrm{Pol}([U, f]) := Y \smallsetminus U^{\max}.}$$

3.11.8 Πρόταση. (a) *Ο δακτύλιος* $(\mathrm{Rat}(Y), +, \cdot)$ *είναι ένα σώμα που περιέχει το* $\mathbf{k}$ *(και καλείται, ιδιαιτέρως,* ***σώμα των ρητών συναρτήσεων επί τής*** Y*).*

(b) *Για κάθε μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο* U *τής* Y *έχουμε*

$$\mathrm{Rat}(U) \cong \mathrm{Rat}(Y).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το μεγαλύτερο μέρος τής αποδείξεως τού (a) είναι εύκολο. Σημειωτέον ότι ισχύει $0_{\mathrm{Rat}(Y)} = [Y, 0]$ και $1_{\mathrm{Rat}(Y)} = [Y, 1]$, και ότι για οιοδήποτε στοιχείο

$$[U, f] \in \mathrm{Rat}(Y) \smallsetminus \{0_{\mathrm{Rat}(Y)}\}$$

το $[U \smallsetminus f^{-1}(\{0_{\mathbf{k}}\}), \frac{1}{f}]$ αποτελεί το αντίστροφό του. Το (b) είναι άμεσο επακόλουθο τού πορίσματος 3.11.2. $\square$

3.11.9 Σημείωση. Εάν το Y είναι μια σχεδόν προβολική ποικιλότητα και $P \in Y$, τότε (μέσω περιορισμών συναρτήσεων και εφαρμογής τού πορίσματος 3.11.2) προκύπτουν εμφυτεύσεις δακτυλίων

$$\mathbf{k} \hookrightarrow \mathcal{O}_Y(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}_{Y,P} \hookrightarrow \mathrm{Rat}(Y).$$

3.11.10 Πρόταση. *Για κάθε προβολική ποικιλότητα* $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ *έχουμε* $\mathrm{Rat}(V) \cong \mathbf{k}(V)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απεικόνιση

$$\alpha : \mathbf{k}(V) \longrightarrow \mathrm{Rat}(V), \ \ f \longmapsto \alpha(f) := [\mathrm{Dom}(f), f],$$

αποτελεί ομομορφισμό σωμάτων. Έστω τυχόν $[U, f] \in \mathrm{Rat}(V)$. Εάν η f παρίσταται ως

$$f = \frac{\overline{G}}{\overline{H}}, \ \deg(G) = \deg(H),$$

επί ενός κατά Zariski ανοικτού συνόλου $U' \subseteq U$, λαμβάνουμε

$$\alpha(\tfrac{\overline{G}}{\overline{H}}) = [U', \tfrac{\overline{G}}{\overline{H}}] = [U, f],$$

οπότε η α είναι επιρριπτική. Εξάλλου, εάν $f \in \mathbf{k}(V)$ με $\alpha(f) = [V, 0]$, τότε υπάρχει ένα μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο U τής V, τέτοιο ώστε να ισχύει $f|_U = 0$. Κατά το πόρισμα 2.4.19, $f = 0$ (επί ολοκλήρου τής V), οπότε η α είναι και ενριπτική. $\square$

3.11.11 Ορισμός. Ας υποθέσουμε ότι οι Y, Z είναι δυο σχεδόν προβολικές ποικιλότητες. Θέτουμε

$$\mathcal{G}_{Y,Z} := \left\{ \text{ζεύγη } (U, \varphi_U) \;\middle|\; \begin{array}{c} U \text{ ένα μη κενό, κατά Zariski} \\ \text{ανοικτό υποσύνολο τής } Y \text{ και} \\ \varphi_U : U \longrightarrow Z \text{ ένας } \textit{μορφισμός} \\ \text{(βλ. 3.4.12)} \end{array} \right\}.$$

Λόγω τού (b) τής ασκήσεως **A-3-67** έχουμε τη δυνατότητα ορισμού τής εξής σχέσεως ισοδυναμίας επί τού $\mathcal{G}_{Y,Z}$:

$$\boxed{(U, \varphi_U) \sim (U', \varphi_{U'}) \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \varphi_U|_{U \cap U'} = \varphi_{U'}|_{U \cap U'} \,.}$$

Μια **ρητή απεικόνιση** $\varphi : Y \dashrightarrow Z$ από την Y στην Z είναι μια κλάση ισοδυναμίας $[U, \varphi_U]$ ενός ζεύγους $(U, \varphi_U) \in \mathcal{G}_{Y,Z}$ ως προς την ανωτέρω "$\sim$".

3.11.12 Σημείωση. (a) Έστω $\varphi : Y \dashrightarrow Z$ μια ρητή απεικόνιση μεταξύ δυο σχεδόν προβολικών ποικιλοτήτων. Ως **πεδίο ορισμού** $\mathrm{Dom}(\varphi)$ τής φ νοείται το *μέγιστο* υποσύνολο τής Y επί τού οποίου είναι δυνατόν να ορισθεί ένας εκπρόσωπός της από το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $\mathcal{G}_{Y,Z}/\!\sim$. Τούτο υλοποιείται όπως και στην περίπτωση των ρητών συναρτήσεων (βλ. σημείωση 3.11.7). Ωστόσο, εν συντομία, μπορούμε να το εκφράσουμε και ως εξής:

$$\boxed{\mathrm{Dom}\,(\varphi) = \bigcup \left\{ \begin{array}{c} U \text{ μη κενά, κατά Zariski} \\ \text{ανοικτά υποσύνολα τής } Y \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists (U, \varphi_U) \in \mathcal{G}_{Y,Z} \text{ και η κλάση} \\ \text{ισοδυναμίας τού } (U, \varphi_U) \\ \text{ταυτίζεται με τη δοθείσα} \\ \text{ρητή απεικόνιση } \varphi : Y \dashrightarrow Z \end{array} \right\}.}$$

(b) Είναι προφανές ότι κάθε ρητή απεικόνιση $\varphi : Y \dashrightarrow Z$ μεταξύ σχεδόν προβολικών ποικιλοτήτων μπορεί να ταυτισθεί με την κλάση ισοδυναμίας $[\mathrm{Dom}(\varphi), \varphi_{\mathrm{Dom}(\varphi)}]$. Το συμπλήρωμα $Y \smallsetminus \mathrm{Dom}(\varphi)$ καλείται συνήθως **σύνολο σημείων απροσδιοριστίας** ή **τόπος απροσδιοριστίας τής** φ.

(c) Έστω Y μια σχεδόν προβολική ποικιλότητα και έστω $\varphi : Y \dashrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ τυχούσα ρητή απεικόνιση. Επειδή η $\varphi_{\mathrm{Dom}(\varphi)} : \mathrm{Dom}(\varphi) \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι εξ υποθέσεως μορφισμός, η πρόταση 3.8.5 μας πληροφορεί ότι για κάθε σημείο $P \in \mathrm{Dom}(\varphi)$ υπάρχουν ένα κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο $U \subseteq \mathrm{Dom}(\varphi)$ με $P \in U$, καθώς και $n+1$ κανονικές συναρτήσεις

$$f_0, \dots, f_n : \mathrm{Dom}(\varphi) \longrightarrow \mathbf{k}$$

(με μία τουλάχιστον εξ αυτών μη μηδενική) επί τού $\mathrm{Dom}(\varphi)$, ούτως ώστε να ισχύει

$$\varphi(Q) = [f_0(Q) : \dots : f_n(Q)], \ \forall Q \in U.$$

Κι επειδή $(U, f_j|_U) \in \mathcal{G}_Y, \forall j \in \{0, \dots, n\}$ (βλ. ορισμό 3.11.6), θεωρώντας τό ζεύγος $(U, \varphi_U) \in \mathcal{G}_{Y, \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}}$ ως εκπρόσωπο τής $\varphi : Y \dashrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ *έχουμε τη δυνατότητα να την αναπαριστούμε* ως μια $(n+1)$-άδα $\varphi = [f_0 : \dots : f_n]$ ρητών συναρτήσεων. Επιπροσθέτως, εάν $f_i \neq 0$, τότε

$$\mathrm{Dom}(\varphi) = \bigcap_{j \in \{0, \dots, n\}} \mathrm{Dom}\left(\frac{f_j}{f_i}\right).$$

(d) Κατ' αναλογίαν, για οιαδήποτε σχεδόν προβολική ποικιλότητα Y κάθε ρητή απεικόνιση $\varphi : Y \dashrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ είναι παραστάσιμη ως μια n-άδα $\varphi = (f_1, \dots, f_n)$ ρητών συναρτήσεων (υπό την έννοια τού ορισμού 2.4.24) και

$$\mathrm{Dom}(\varphi) = \bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{Dom}(f_j).$$

3.11.13 Ορισμός. Έστω $\varphi : Y \dashrightarrow Z$ μια ρητή απεικόνιση μεταξύ σχεδόν προβολικών ποικιλοτήτων εκπροσωπούμενη από ένα ζεύγος $(U, \varphi_U) \in \mathcal{G}_{Y,Z}$. Η φ καλείται **κυριαρχούσα απεικόνιση** όταν η εικόνα τής φ_U είναι κατά Zariski πυκνή εντός τής Z. (Η ιδιότητα αυτή είναι *ανεξάρτητη* τής επιλογής τού ζεύγους $(U, \varphi_U) \in \mathcal{G}_{Y,Z}$ που εκπροσωπεί την φ.) Επίσης, η σύνθεση $\psi \circ \varphi$ μιας κυριαρχούσας $\varphi : Y_1 \dashrightarrow Y_2$ και μιας ρητής απεικονίσεως $\psi : Y_2 \dashrightarrow Y_3$ μεταξύ σχεδόν προβολικών ποικιλοτήτων είναι καλώς ορισμένη, διότι $\varphi(\mathrm{Dom}(\varphi)) \cap \mathrm{Dom}(\psi) \neq \varnothing$. (Το $\mathrm{Dom}(\psi)$ είναι μη κενό και κατά Zariski ανοικτό, οπότε η τομή του με το $\varphi(\mathrm{Dom}(\varphi))$ είναι κατ' ανάγκην μη κενή.)

3.11.14 Ορισμός. Μια κυριαρχούσα ρητή απεικόνιση $\varphi : Y \dashrightarrow Z$ μεταξύ σχεδόν προβολικών ποικιλοτήτων καλείται **αμφίρρητη απεικόνιση** όταν υπάρχει κάποια κυριαρχούσα ρητή απεικόνιση $\psi : Z \dashrightarrow Y$ (που καλείται **αντίστροφος** τής φ) για την οποία ισχύουν οι ισότητες[40]

$$\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_Y, \ \varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_Z.$$

[40] Προσοχή! Εν προκειμένω, εννοούνται ισότητες *κλάσεων ισοδυναμίας*!

Και σε αυτήν την περίπτωση θα χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $Y \underset{\text{bir}}{\cong} Z$ για να δηλοί ότι υπάρχει μια αμφίρρητη απεικόνιση μεταξύ των Y και Z. (Εν προκειμένω, οι Y, Z καλούνται **αμφιρρήτως ισοδύναμες**.) Σημειωτέον ότι ορισμένες φορές χρησιμοποιείται και ο όρος **αμφίρρητος μορφισμός** για να δηλοί μια αμφίρρητη απεικόνιση $\varphi : Y \longrightarrow Z$ μεταξύ σχεδόν προβολικών ποικιλοτήτων που είναι *μορφισμός* (χωρίς, ωστόσο, η αντίστροφός της να είναι κατ' ανάγκην μορφισμός).

3.11.15 Λήμμα. *Έστω Y μια σχεδόν προβολική ποικιλότητα και έστω $W \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ μια συσχετική ποικιλότητα. Υποθέτουμε ότι οι $\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n$ είναι συναρτήσεις συντεταγμένων που παράγουν τον $\mathbf{k}[W]$. Τότε μια (συνήθης, συνολοθεωρητική) απεικόνιση $\varphi : Y \longrightarrow W$ είναι μορφισμός (υπό την έννοια τού ορισμού 3.8.3) εάν και μόνον εάν $\mathsf{X}_j \circ \varphi \in \mathcal{O}_Y(Y)$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν η $\varphi : Y \longrightarrow W$ είναι μορφισμός, τότε εξ ορισμού $\mathsf{X}_j \circ \varphi \in \mathcal{O}_Y(Y)$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$. Και αντιστρόφως· εάν ισχύει $\mathsf{X}_j \circ \varphi \in \mathcal{O}_Y(Y)$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$, τότε για κάθε $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ έχουμε $F \circ \varphi \in \mathcal{O}_Y(Y)$. Επειδή $W = \mathbf{V}(\mathbf{I}(W))$ (βλ. το (5) (a) τής προτάσεως 1.3.1) και επειδή οι κανονικές συναρτήσεις είναι συνεχείς ως προς την τοπολογία Zariski, διαπιστώνουμε ότι η φ αντιστρέφει (κατά Zariski) κλειστά σε κλειστά σύνολα, οπότε είναι και η ίδια συνεχής. Τέλος, επειδή οι κανονικές συναρτήσεις επί ανοικτών υποσυνόλων τής W είναι τοπικώς παραστάσιμες ως λόγοι πολυωνύμων, η σύνθεση $f \circ \varphi$, όπου $f \in \mathcal{O}_W(U)$, είναι κανονική για οιοδήποτε κατά Zariski ανοικτού υποσυνόλου τής W. Άρα η $\varphi : Y \longrightarrow W$ είναι μορφισμός. $\square$

3.11.16 Πρόταση. *Έστω Y μια σχεδόν προβολική ποικιλότητα και έστω $W \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ μια συσχετική ποικιλότητα. Τότε υφίσταται μια φυσική αμφίρριψη:*

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{QAVar}}(Y, W) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{Alg}}(\mathbf{k}[W], \mathcal{O}_Y(Y))$$

από το σύνολο των μορφισμών από την Y στην W επί τού συνόλου των αντιστοίχων ομομορφισμών $\mathbf{k}$-αλγεβρών.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κάθε $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{QAVar}}(Y, W)$ επάγει έναν ομομορφισμό $\mathbf{k}$-αλγεβρών

$$\mathcal{O}_W(W) \ni f \longmapsto f \circ \varphi \in \mathcal{O}_Y(Y).$$

Επειδή $\Gamma(W) \cong \mathbf{k}[W] \cong \mathcal{O}_W(W)$ (βλ. πρόταση 2.4.28 (b)), ο τρόπος ορισμού τής φυσικής απεικονίσεως α είναι προφανής. Η αντίστροφός της ορίζεται ως εξής: Δοθέντος ενός ομομορφισμού $\mathbf{k}$-αλγεβρών $h : \Gamma(W) \cong \mathbf{k}[W] \longrightarrow \mathcal{O}_Y(Y)$, συμβολίζουμε ως $\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n$ τις συναρτήσεις συντεταγμένων που παράγουν τον $\mathbf{k}[W]$, ως $\overline{\mathsf{X}}_1, \ldots, \overline{\mathsf{X}}_n$ τις κλάσεις υπολοίπων τους εντός τού $\Gamma(W) = \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]/\mathbf{I}(W)$ και θέτουμε $\xi_j := h(\overline{\mathsf{X}}_j)$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$. Εν συνεχεία ορίζουμε την απεικόνιση

$$\psi = \psi_h : Y \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}, \;\; P \longmapsto \psi(P) := (\xi_1(P), \ldots, \xi_n(P)).$$

Θα δείξουμε ότι $\mathrm{Im}(\psi) \subseteq W$. Επειδή $W = \mathbf{V}(\mathbf{I}(W))$ (βλ. το (5) (a) τής προτάσεως 1.3.1) αρκεί να δειχθεί ότι $F(\psi(P)) = 0_{\mathbf{k}}$ για κάθε $P \in Y$ και για κάθε $F \in \mathbf{I}(W)$. Επειδή

$$F(\psi(P)) = F(\xi_1(P), \ldots, \xi_n(P))$$

και επειδή το F είναι πολυώνυμο και ο h ομομορφισμός $\mathbf{k}$-αλγεβρών, έχουμε

$$F \in \mathbf{I}(W) \Longrightarrow F(\xi_1(P), \ldots, \xi_n(P)) = h(F(\overline{\mathsf{X}}_1, \ldots, \overline{\mathsf{X}}_n))(P) = 0_{\mathbf{k}},$$

οπότε η $\psi = \psi_h$ είναι μια απεικόνιση από την Y στην W επαγόμενη από τον h. Επιπροσθέτως, επειδή $\mathsf{X}_j \circ \psi \in \mathcal{O}_Y(Y)$ (εκ κατασκευής) για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$, το λήμμα 3.11.15 μας πληροφορεί ότι η $\psi = \psi_h$ είναι μορφισμός. Τέλος, είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι η απεικόνιση

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{Alg}}(\mathbf{k}[W], \mathcal{O}_Y(Y)) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Mor}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{QAVar}}(Y, W), \;\; h \longmapsto \beta(h) := \psi_h,$$

είναι η αντίστροφος τής α. □

3.11.17 Πρόταση. *Εάν η $\varphi : Y \longrightarrow Z$ είναι ένας μορφισμός μεταξύ σχεδόν προβολικών ποικιλοτήτων και η εικόνα $\varphi(Y)$ πυκνή (ως προς την τοπολογία Zariski) εντός τής Z, τότε ο ομομορφισμός* $\mathbf{k}$-*αλγεβρών*

$$\mathcal{O}_Z(Z) \ni f \longmapsto f \circ \varphi \in \mathcal{O}_Y(Y)$$

είναι μονομορφισμός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω f τυχόν στοιχείο τού πυρήνα τού ανωτέρω ομομορφισμού $\mathbf{k}$-αλγεβρών. Επειδή η εικόνα $\varphi(Y)$ είναι εξ υποθέσεως πυκνή (ως προς την τοπολογία Zariski) εντός τής Z, έχουμε

$$f \circ \varphi = 0 \Longrightarrow \varphi(Y) \subseteq f^{-1}(0) \Longrightarrow f^{-1}(0) = \varphi(Y) \Longrightarrow f = 0,$$

και ο ισχυρισμός είναι αληθής. □

3.11.18 Πρόταση. *Έστω $\varphi : Y \dashrightarrow Z$ μια κυριαρχούσα ρητή απεικόνιση μεταξύ σχεδόν προβολικών ποικιλοτήτων. Υποθέτουμε ότι η φ είναι η κλάση ισοδυναμίας $[U, \varphi_U]$ ενός ζεύγους $(U, \varphi_U) \in \mathcal{G}_{Y,Z}$* (βλ. 3.11.11). *Τότε η απεικόνιση*

$$\boxed{\widehat{\varphi} : \mathrm{Rat}(Z) \longrightarrow \mathrm{Rat}(Y), \;\; [U', f] \longmapsto \widehat{\varphi}([U', f]) := [\varphi_U^{-1}(U'), f \circ \varphi_U],}$$

αποτελεί έναν $\mathbf{k}$-*ομομορφισμό σωμάτων* (πρβλ. 3.11.6).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $[U', f] \in \mathrm{Rat}(Z)$, τότε $f \in \mathcal{O}_Z(U')$. Επειδή η φ είναι εξ υποθέσεως κυριαρχούσα απεικόνιση, η εικόνα $\varphi_U(U)$ τού U μέσω τής φ_U είναι κατά Zariski πυκνή εντός τής Z, οπότε $\varphi_U(U) \cap U' \neq \varnothing$, πράγμα που σημαίνει ότι το $\varphi_U^{-1}(U')$ είναι *μη κενό*, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο τής Y και η σύνθεση $f \circ \varphi_U$ *ορίζεται* επ' αυτού. (Προφανώς, $f \circ \varphi_U|_{\varphi_U^{-1}(U')} \in \mathcal{O}_Y(\varphi_U^{-1}(U'))$.) Επιπροσθέτως, εάν $[U_1', f_1] = [U_2', f_2]$, τότε

$$f_1|_{U_1' \cap U_2'} = f_2|_{U_1' \cap U_2'} \Longrightarrow \left(f_1 - f_2|_{U_1' \cap U_2'}\right) \circ \varphi_U|_{\varphi_U^{-1}(U_1' \cap U_2')} = 0,$$

οπότε

$$f_1 \circ \varphi_U|_{\varphi_U^{-1}(U_1') \cap \varphi_U^{-1}(U_2')} = f_2 \circ \varphi_U|_{\varphi_U^{-1}(U_1') \cap \varphi_U^{-1}(U_2')}.$$

Άρα η $\widehat{\varphi}$ είναι καλώς ορισμένη. Το ότι η $\widehat{\varphi}$ είναι $\mathbf{k}$-ομομορφισμός σωμάτων επαληθεύεται άμεσα. □

3.11.19 Πρόταση. *Εάν οι $\varphi : Y_1 \dashrightarrow Y_2$ και $\psi : Y_2 \dashrightarrow Y_3$ είναι δυο κυριαρχούσες ρητές απεικονίσεις μεταξύ σχεδόν προβολικών ποικιλοτήτων, τότε και η $\psi \circ \varphi : Y_1 \dashrightarrow Y_3$ είναι κυριαρχούσα ρητή απεικόνιση, και*

$$\widehat{\psi \circ \varphi} = \widehat{\varphi} \circ \widehat{\psi}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η επαλήθευση αυτού τού ισχυρισμού είναι άμεση. □

3.11.20 Πόρισμα. *Εάν η $\varphi : Y \longrightarrow Z$ είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ δυο σχεδόν προβολικών ποικιλοτήτων, τότε ο επαγόμενος* $\mathbf{k}$*-ομομορφισμός σωμάτων* $\widehat{\varphi}$:$\mathrm{Rat}(Z) \longrightarrow \mathrm{Rat}(Y)$ *είναι* $\mathbf{k}$*-ισομορφισμός.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται την πρόταση 3.11.19 και από το ότι ισχύουν οι ισότητες $\widehat{\mathrm{Id}}_Y = \mathrm{Id}_{\mathbf{k}(Y)}$ και $\widehat{\mathrm{Id}}_Z = \mathrm{Id}_{\mathbf{k}(Z)}$. □

3.11.21 Πρόταση. *Έστω ότι οι Y, Z είναι δυο σχεδόν προβολικές ποικιλότητες. Τότε υπάρχει μια φυσική αμφίρριψη*

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c}\text{κυριαρχούσες ρητές}\\ \text{απεικονίσεις } Y \dashrightarrow Z\end{array}\right\} \ni \varphi \longmapsto \widehat{\varphi} \in \left\{\begin{array}{c}\mathbf{k}\text{-ομομορφισμοί σωμάτων}\\ \mathrm{Rat}(Z) \longrightarrow \mathrm{Rat}(Y)\end{array}\right\}}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κατά την πρόταση 3.11.18 κάθε κυριαρχούσα απεικόνιση $\varphi : Y \dashrightarrow Z$ επάγει έναν $\mathbf{k}$-ομομορφισμό σωμάτων $\widehat{\varphi}$. Αρκεί να ορισθεί αντίστροφος τής $\varphi \longmapsto \widehat{\varphi}$. Ας υποθέσουμε ότι η $\Phi : \mathrm{Rat}(Z) \longrightarrow \mathrm{Rat}(Y)$ είναι τυχών $\mathbf{k}$-ομομορφισμός σωμάτων. Σύμφωνα με την πρόταση 3.8.12 η Z διαθέτει κάποιο κατά Zariski ανοικτό κάλυμμα απαρτιζόμενο από συσχετικές ποικιλότητες. Γι' αυτόν τον λόγο δεν επέρχεται βλάβη τής γενικότητας εάν από τούδε και στο εξής υποθέσουμε ότι η Z είναι μια *συσχετική* *ποικιλότητα*. Επιλέγοντας γεννήτορες $z_1, \ldots, z_n$ τής $\mathbf{k}$-άλγεβρας $\mathbf{k}[Z]$ παρατηρούμε ότι οι εικόνες τους $\Phi(z_1), \ldots, \Phi(z_n)$ είναι ρητές συναρτήσεις επί τής Y. Θέτοντας

$$U := \bigcap \{ \mathrm{Dom}(\Phi(z_j)) | \, j \in \{1, \ldots, n\}\} \subseteq Y$$

παρατηρούμε ότι $\Phi_U(z_1), \ldots, \Phi|_U(z_n) \in \mathcal{O}_U(U)$, οπότε η

$$\mathbf{k}[Z] \cong \mathcal{O}_Z(Z) \xrightarrow{\mathfrak{Y}_\Phi} \mathcal{O}_U(U), \;\; z_j \longmapsto \Phi_U(z_j), \; \forall j \in \{1, \ldots, n\},$$

ανήκει στο σύνολο $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{Alg}}(\mathbf{k}[Z], \mathcal{O}_U(U))$ και είναι ενριπτική επί τη βάσει τής προτάσεως 3.11.17. Με τη βοήθεια τής προτάσεως 2.5.25 κατασκευάζουμε έναν μορφισμό $\alpha^{-1}(\mathfrak{Y}_\Phi) \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{QAVar}}(Y, Z)$. Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι οι απεικονίσεις

$$\varphi \longmapsto \widehat{\varphi}, \quad \Phi \longmapsto \alpha^{-1}(\mathfrak{Y}_\Phi)$$

είναι αμφιρρίψεις και η μία αντίστροφος τής άλλης. □

3.11.22 Πρόταση. *Εάν η $\varphi : Y \dashrightarrow Z$ είναι τυχούσα αμφίρρητη απεικόνιση μεταξύ δυο σχεδόν προβολικών ποικιλοτήτων, τότε υπάρχουν μη κενά, κατά Zariski ανοικτά υποσύνολα $U_0 \subseteq Y$ και $U_0' \subseteq Z$, ούτως ώστε η $\varphi|_{U_0}$ να είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ των U_0 και U_0' και* $\mathrm{Rat}(Y) \cong \mathrm{Rat}(Z)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εξ ορισμού υπάρχει κάποια $\psi : Z \dashrightarrow Y$ για την οποία ισχύουν οι ισότητες

$$\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_Y, \; \varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_Z.$$

Ας υποθέσουμε ότι η $\varphi : Y \dashrightarrow Z$ (και αντιστοίχως, η $\psi : Z \dashrightarrow Y$) είναι η κλάση ισοδυναμίας $[U, \varphi_U]$ (και αντιστοίχως, η κλάση ισοδυναμίας $[U', \psi_{U'}]$) επί τη βάσει τού ορισμού 3.11.11. Τότε το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
\psi_{U'}^{-1}(U) \arrow[r, "\psi_{U'}"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & U \arrow[d, "\varphi_U"] \\
Y \arrow[r, "\mathrm{Id}_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

οπότε $\varphi_U \circ \psi_{U'} = \mathrm{Id}_Y|_{\psi_{U'}^{-1}(U)}$. Εν συνεχεία θέτουμε

$$U_0 := \varphi_U^{-1}(\psi_{U'}^{-1}(U)), \;\; U_0' := \psi_{U'}^{-1}(\varphi_U^{-1}(U')), \quad \varphi|_{U_0} := \varphi_U|_{U_0} : U_0 \longrightarrow \psi_{U'}^{-1}(U).$$

Για οιοδήποτε $P \in \psi^{-1}(U)$ έχουμε $\varphi_U(\psi_{U'}(P)) = P$, οπότε $\psi_{U'}^{-1}(U) \subseteq U_0'$. Εξ αυτού έπεται ότι η $\varphi|_{U_0} : U_0 \longrightarrow U_0'$ είναι μορφισμός σχεδόν προβολικών ποικιλοτήτων. Κατ' αναλογίαν αποδεικνύεται ότι και η $\psi|_{U_0'} : U_0' \longrightarrow U_0$ είναι μορφισμός σχεδόν προβολικών ποικιλοτήτων. Προφανώς,

$$\psi|_{U_0'} \circ \varphi|_{U_0} = \mathrm{Id}_{U_0},\ \varphi|_{U_0} \circ \psi|_{U_0'} = \mathrm{Id}_{U_0'}.$$

Εξάλλου, κατά το (b) τής προτάσεως 3.11.8 και το πόρισμα 3.11.20,

$$\mathrm{Rat}(Z) \cong \mathrm{Rat}(U_0') \underset{\widehat{\varphi|_{U_0}}}{\xrightarrow{\cong}} \mathrm{Rat}(U_0) \cong \mathrm{Rat}(Y),$$

κι επομένως $\mathrm{Rat}(Y) \cong \mathrm{Rat}(Z)$. □

3.11.23 Σημείωση. Μεταβαίνοντας από την κατηγορία $\mathbf{k}$-$\mathfrak{QPVar}$ των σχεδόν προβολικών ($\mathbf{k}$-)ποικιλοτήτων στην κατηγορία $\mathbf{k}$-$\mathfrak{QPVar}^{\varkappa.\varrho.\alpha.}$ με

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{QPVar}^{\varkappa.\varrho.\alpha.}) := \mathrm{Ob}(\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{QPVar})$$

και

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{QPVar}^{\varkappa.\varrho.\alpha.}}(Y,Z) := \left\{ \begin{array}{c} \text{κυριαρχούσες ρητές απεικονίσεις} \\ \varphi : Y \dashrightarrow Z \end{array} \right\},$$

οι $\mathbf{k}$-$\mathfrak{QPVar}^{\varkappa.\varrho.\alpha.}$-*ισομορφισμοί* (υπό την έννοια τού ορισμού 2.1.22) είναι ακριβώς οι *αμφίρρητες απεικονίσεις* μεταξύ σχεδόν προβολικών ποικιλοτήτων.

3.11.24 Θεώρημα. (a) *Ο συναρτητής*

$$\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{QPVar}^{\varkappa.\varrho.\alpha} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{πεπερασμένως παραγόμενες} \\ \text{επεκτάσεις τού σώματος } \mathbf{k} \end{array} \right\}$$

ο οριζόμενος μέσω των

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{QPVar}^{\varkappa.\varrho.\alpha}) \ni Y \longmapsto \mathrm{Rat}(Y),$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{QPVar}^{\varkappa.\varrho.\alpha}}(Y,Z) \ni \varphi \longmapsto \widehat{\varphi},$$

είναι ανταλλοίωτος και απολύτως πιστός.

(b) *Όταν το* $\mathbf{k}$ *είναι αλγεβρικώς κλειστό, ο εν λόγω συναρτητής ορίζει μια ανταλλοίωτη ισοδυναμία.*

Αποδειξη. Κατ' αρχάς πρέπει να αιτιολογήσουμε γιατί ο συναρτητής είναι «καλώς ορισμένος». Έστω $Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{QPVar}^{\varkappa.\varrho.\alpha.})$. Τότε $\mathrm{Rat}(Y) \cong \mathrm{Rat}(U)$ για οιοδήποτε κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο U τής Y (βλ. 3.11.8 (b)). Σύμφωνα με την πρόταση 3.8.12 η

Y διαθέτει κάποιο κατά Zariski ανοικτό κάλυμμα απαρτιζόμενο από συσχετικές ποικιλότητες. Γι' αυτόν τον λόγο δεν επέρχεται βλάβη τής γενικότητας εάν υποθέσουμε ότι η ίδια η Y είναι μια *συσχετική ποικιλότητα*. Επομένως, το σώμα $\mathbf{k}(Y)$ των ρητών συναρτήσεων των οριζομένων επί τής Y είναι πεπερασμένως παραγόμενη επέκταση τού $\mathbf{k}$, διότι $\mathbf{k}(Y) \cong \mathbf{Fr}(\mathbf{k}[Y])$. Επιπροσθέτως, $\mathbf{k}(Y) \cong \mathrm{Rat}(Y)$ (βλ. 2.4.28 (a)).

(a) Ο ανωτέρω συναρτητής είναι εκ κατασκευής ανταλλοίωτος. Το ότι είναι και απολύτως πιστός έπεται από την πρόταση 3.11.21.

(b) Κατασκευάζουμε έναν συναρτητή

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{πεπερασμένως παραγόμενες} \\ \text{επεκτάσεις τού σώματος } \mathbf{k} \end{array} \right\} \rightsquigarrow \mathbf{k}\text{-}\mathfrak{QPVar}^{\kappa.\rho.\alpha.}$$

ως εξής: Για κάθε πεπερασμένως παραγόμενη (σωματική) επέκταση L ενός αλγεβρικώς κλειστού σώματος $\mathbf{k}$ έχουμε $L = \mathbf{k}(a_1, \ldots, a_n)$, οπότε ο δακτύλιος $A := \mathbf{k}[a_1, \ldots, a_n]$ είναι μια πεπερασμένως παραγόμενη, ανηγμένη $\mathbf{k}$-άλγεβρα (που είναι ακεραία περιοχή), με $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]/I \cong A = A_{\mathrm{red}}$. Αρκεί λοιπόν στο L να αντιστοιχίσουμε την $\mathbf{V}(I) \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$. (Βλ. σημείωση 2.1.21.) Αυτός ο συναρτητής συντιθέμενος με τον ανωτέρω μάς δίδει τον ταυτοτικό (και τανάπαλιν). Κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτει μια ανταλλοίωτη ισοδυναμία. □

3.11.25 Πόρισμα. (Αλγεβρική ερμηνεία τής αμφίρρητης ισοδυναμίας) *Για οιεσδήποτε σχεδόν προβολικές ποικιλότητες Y, Z οι κάτωθι συνθήκες είναι ισοδύναμες*:

(a) $Y \underset{\mathrm{bir}}{\cong} Z$.

(b) *Υπάρχουν κατά Zariski μη κενά, ανοικτά υποσύνολα $U \subseteq Y$ και $U' \subseteq Z$ με $U \cong U'$.*

(c) $\mathrm{Rat}(Y) \cong \mathrm{Rat}(Z)$ (ως $\mathbf{k}$-άλγεβρες).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Οι συνεπαγωγές (a)⇒(b) και (b)⇒(c) είναι άμεσα επακόλουθα τής προτάσεως 3.11.22, ενώ η συνεπαγωγή (c)⇒(a) έπεται από το (a) τού θεωρήματος 3.11.24 (λόγω τής απόλυτης πιστότητας τού ορισθέντος συναρτητή). □

3.11.26 Παραδείγματα. (a) Επειδή, σύμφωνα με το (b) τού πορίσματος 3.8.7, οι μορφισμοί $\phi_i : \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow U_i(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})$ είναι ισομορφισμοί και το $U_i(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})$ κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, έχουμε $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \underset{\mathrm{bir}}{\cong} \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$.

(b) Γενικότερα, *κάθε σχεδόν προβολική ποικιλότητα είναι αμφιρρήτως ισοδύναμη με μια συσχετική ποικιλότητα*, διότι διαθέτει ένα κάλυμμα απαρτιζόμενο από κατά Zariski ανοικτά υποσύνολά της, καθένα των οποίων είναι αφ' εαυτού μια συσχετική ποικιλότητα (Βλ. πρόταση 3.8.12).

(c) *Κάθε συσχετική ποικιλότητα $W \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ είναι αμφιρρήτως ισοδύναμη με την προβολική κλειστή της θήκη, ήτοι με μια προβολική ποικιλότητα* (βλ. 3.7.6, 3.7.7 (a)), διότι

$$W \xrightarrow{\cong} \phi_0(W) \subseteq \overline{W} = \mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}}(\phi_0(W)) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \Longrightarrow W \underset{\mathrm{bir}}{\cong} \overline{W}.$$

3.11.27 Σημείωση. (Περί τής Αμφίρρητης Γεωμετρίας) Από τα προηγηθέντα παραδείγματα 3.11.26 (αλλά και από τα πιο «απτά» παραδείγματα τού εδαφίου 3.11.30) καθίσταται πρόδηλο το πόσο *ασθενέστερη* είναι η αμφίρρητη ισοδυναμία (ως σχέση ισοδυναμίας) συγκρινόμενη με την ισομορφία μεταξύ ποικιλοτήτων. Ως εκ τούτου, η κλάση των ποικιλοτήτων που είναι αμφιρρήτως ισοδύναμες με μια δοθείσα ποικιλότητα εμπεριέχει κατά κανόνα πολλές διαφορετικές μη ισόμορφες ποικιλότητες.

Στην τελευταία ενότητα τού 1ου κεφαλαίου τού συγγράμματός του (*Algebraic Geometry*, GTM, Vol. **52**, Springer-Verlag, 1977, σελ. 55) ο R. Hartshorne αναφέρει τα εξής: «Σε όλους τους κλάδους των Μαθηματικών υφίστανται καθοδηγητικά προβλήματα, τα οποία, παρότι είναι τόσο δύσκολα που κανείς δεν αναμένει να επιλυθούν πλήρως, εντούτοις δρουν ως κίνητρο για πληθώρα εργασιών και ως μέτρο αποτιμήσεως τής προόδου που σημειώνεται στο πλαίσιο τής εκάστοτε ερευνητικής περιοχής. Στην Αλγεβρική Γεωμετρία ένα τέτοιου είδους πρόβλημα είναι *το πρόβλημα τής ταξινομήσεως*. Στην αυστηρότερη εκδοχή του, τούτο συνίσταται στην ταξινόμηση όλων των ποικιλοτήτων *μέχρις ισομορφισμού*. Το πρόβλημα μπορεί να διαιρεθεί σε τρία μέρη: Στο πρώτο μέρος επιδιώκεται η ταξινόμηση των ποικιλοτήτων *μέχρις αμφίρρητης ισοδυναμίας*. Στο δεύτερο μέρος επιδιώκεται ο προσδιορισμός ενός «καλού» υποσυνόλου μιας κλάσεως αμφίρρητης ισοδυναμίας, όπως είναι π.χ. αυτό των μη ιδιαζουσών προβολικών καμπυλών [στη διάσταση 1], και η ταξινόμηση των μελών του *μέχρις ισομορφισμού*. Το τρίτο μέρος περιλαμβάνει τη μελέτη τής ποιοτικής διαφοροποιήσεως μιας *τυχούσας* ποικιλότητας [δεδομένης διαστάσεως] από τις προηγουμένως θεωρηθείσες «καλές» ποικιλότητες.»

Το τόσο σημαντικό πρόβλημα τής ταξινομήσεως (σχεδόν προβολικών ή και αφηρημένων) ποικιλοτήτων μέχρις αμφίρρητης ισοδυναμίας οδήγησε στη δημιουργία ενός ολόκληρου υποκλάδου τής Αλγεβρικής Γεωμετρίας (αναφερόμενου ενίοτε ως *Αμφίρρητη Γεωμετρία*) που ασχολείται με αυτό και τις πολυδαίδαλες θεωρητικές συνιστώσες του[41]. Η ταξινόμηση μέχρις αμφίρρητης ισοδυναμίας έχει επιτευχθεί πλήρως για ποικιλότητες διαστάσεων 1 και 2, και μερικώς για ποικιλότητες διαστάσεως 3. Η απονομή τού βραβείου Fields στον ιάπωνα μαθηματικό Shigefumi Mori το έτος 1990 για την ολοκλήρωση[42] τής υλοποιήσεως τού *προγράμματος ελαχιστοτικών προτύπων* ή *μοντέλων* (MMP = minimal model program) στη διάσταση 3 καταδεικνύει την αναγνώριση τής σπουδαιότητας τού εν λόγω υποκλάδου από την παγκόσμια μαθηματική κοινότητα. Ωστόσο, σε διαστάσεις ≥ 4 η εικόνα τής *αμφίρρητης χαρτογραφήσεως ποικιλοτήτων* είναι (επί τού παρόντος) αρκετά ασαφής και «πεδίον δόξης λαμπρόν» για όσους μαθηματικούς κατορθώσουν να επιτύχουν εντυπωσιακά ερευνητικά αποτελέσματα επ' αυτής.

3.11.28 Ορισμός. Μια k-ποικιλότητα καλείται **ρητή ποικιλότητα** όταν είναι αμφιρρήτως

[41] Βλ. J. Kollár and Sh. Mori: *Birational Geometry of Algebraic Varieties*, Cambridge University Press, 1998, και K. Matsuki: *Introduction to the Mori Program*, Universitext, Springer-Verlag, 2002.

[42] Βλ. Sh. Mori: *Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds*, Journal of the A.M.S. **1** (1988), 117-253.

ισοδύναμη τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ (ή τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$) για κάποιον $n \in \mathbb{N}_0$.

3.11.29 Σημείωση. Μια μη μονοσημειακή $\mathbf{k}$-ποικιλότητα Y είναι ρητή ποικιλότητα εάν και μόνον εάν $\mathrm{Rat}(Y) \cong \mathbf{k}(\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n)$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$. Πράγματι· αυτή η συνθήκη ικανοποιείται εάν και μόνον εάν υπάρχει ένα κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο U τής Y το οποίο είναι ισόμορφο ενός κατά Zariski ανοικτού υποσυνόλου τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ (βλ. 3.11.25 (c)⇔(b)). Όμως τούτο ισοδυναμεί με το ότι $Y \underset{\mathrm{bir}}{\cong} \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ (βλ. 3.11.25 (b)⇔(a)).

3.11.30 Παραδείγματα. (a) Η συσχετική ποικιλότητα $V = \mathbf{V}\left(\mathsf{Y}^2 - \mathsf{X}^3\right) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$ (*παραβολή τού Neil*, βλ. σχήμα **3**) είναι ρητή, καθότι $V \underset{\mathrm{bir}}{\cong} \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$, αλλά $V \ncong \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ (βλ. 2.5.15 (a)).

(b) Αναλόγως αποδεικνύεται ότι η $V = \mathbf{V}\left(\mathsf{X}^2 - \mathsf{Y}^3, \mathsf{Y}^2 - \mathsf{Z}^3\right) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ (με το $\mathbf{k}$ αλγεβρικώς κλειστό) είναι ρητή ποικιλότητα, καθότι $V \underset{\mathrm{bir}}{\cong} \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$, αλλά $V \ncong \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ (βλ. ασκήσεις **A-1-54**, **A-2-9** και **A-2-33**).

(c) Επίσης, όταν το είναι $\mathbf{k}$ αλγεβρικώς κλειστό και $\chi\alpha\rho(\mathbf{k}) \notin \{2, 3\}$, αποδεικνύεται ότι η *ελλειπτική κυβική καμπύλη*

$$V = \mathbf{V}_+(\mathsf{X}_0\mathsf{X}_2^2 - \mathsf{X}_1(\mathsf{X}_1 - \mathsf{X}_0)(\mathsf{X}_1 - \lambda\mathsf{X}_0)) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbf{k}},\ \lambda \in \mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{k}}\},$$

η οποία αποτελεί την προβολική κλειστή θήκη τής επίπεδης συσχετικής καμπύλης που είχαμε μελετήσει (ως προς την αναγωγιμότητα) στην άσκηση **A-1-49**, *δεν είναι ρητή*[43].

(d) Κατά την πρόταση 3.5.10 όλα τα υπερεπίπεδα $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι ισόμορφα με τον προβολικό χώρο $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbf{k}}$ και, ως εκ τούτου, ρητές ποικιλότητες.

(e) Κατά το θεώρημα 3.9.8, $\mathrm{Seg}_{m,n} \cong \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$. Έστω $l := mn + m + n$. Σύμφωνα με το (b) τής ασκήσεως **A-3-61** και την ισοδυναμία (b)⇔(a) τού πορίσματος 3.11.25 έχουμε

$$\mathrm{Seg}_{m,n} \cap U_{ij}(\mathbb{P}^l_{\mathbf{k}}) \cong \mathbb{A}^{m+n}_{\mathbf{k}} \subseteq \mathbb{A}^l_{\mathbf{k}} \Rightarrow \mathrm{Seg}_{m,n} \underset{\mathrm{bir}}{\cong} \mathbb{A}^{m+n}_{\mathbf{k}} \underset{\mathrm{bir}}{\cong} \mathbb{P}^{m+n}_{\mathbf{k}},$$

οπότε η ποικιλότητα $\mathrm{Seg}_{m,n}$ τού Segre (βλ. 3.9.10) είναι ρητή ποικιλότητα και ισχύει

$$\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \underset{\mathrm{bir}}{\cong} \mathbb{P}^{m+n}_{\mathbf{k}}.$$

Ωστόσο, $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \ncong \mathbb{P}^{m+n}_{\mathbf{k}}$ όταν $m, n \geq 1$.

(f) Η ποικιλότητα $\mathrm{Ver}_{n,d}$ τού Veronese (βλ. 3.10.5) είναι ρητή ποικιλότητα, διότι από το θεώρημα 3.10.4 γνωρίζουμε ότι

$$\mathrm{Ver}_{n,d} \cong \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}.$$

(g) Η ποικιλότητα $\mathbf{Pl}(\mathrm{Grass}(m; n))$ τού Grassmann (βλ. 3.10.14) είναι ρητή ποικιλότητα, διότι σύμφωνα με το λήμμα 3.10.11 και την ισοδυναμία (b)⇔(a) τού πορίσματος 3.11.25 έχουμε $\mathbf{Pl}(\mathrm{Grass}(m; n)) \cap U_{\mathbf{i}} \cong \mathbb{A}^{m(n-m)}_{\mathbf{k}} \Longrightarrow \mathbf{Pl}(\mathrm{Grass}(m; n)) \underset{\mathrm{bir}}{\cong} \mathbb{A}^{m(n-m)}_{\mathbf{k}}$.

[43] Για μια *στοιχειώδη απόδειξη* τού ότι κάθε μη ιδιάζουσα, προβολική επίπεδη καμπύλη $\mathbf{V}_+(F) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, $\deg(F) \geq 3$, είναι *μη ρητή* ποικιλότητα, βλ. C.G. Gibson: *Elementary Geometry of Algebraic Curves*, Cambridge University Press, 1998, σελ. 245-246.

(ii) Η μελέτη ρητών απεικονίσεων μεταξύ *προβολικών ποικιλοτήτων* διευκολύνεται αισθητά όταν κανείς (αντί να εργάζεται με τις κλάσεις ισοδυναμίας τού ορισμού 3.11.11) μεταβαίνει στις *πολυωνυμικές παραστάσεις τους*.

Έστω $V \subseteq \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$ μια προβολική ποικιλότητα. Ας υποθέσουμε ότι τα

$$F_0, \ldots, F_n \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m]_d$$

είναι $n+1$ ομογενή πολυώνυμα *ιδίου βαθμού* $d \geq 0$ και ότι το κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο $U := V \smallsetminus \mathbf{V}_+(F_0, \ldots, F_n)$ τού V είναι *μη κενό*. Τότε η απεικόνιση

$$\varphi_U : U \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}, \;\; P \longmapsto [F_0(P) : \ldots : F_n(P)],$$

είναι ένας μορφισμός (πρβλ. 3.8.5) και η κλάση ισοδυναμίας $[U, \varphi_U]$ τού ζεύγους $(U, \varphi_U) \in \mathcal{G}_{V, \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}}$ ως προς την "$\sim$" (την εισαχθείσα στο εδάφιο 3.11.11) αποτελεί μια ρητή απεικόνιση $\varphi : V \dashrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$. Αυτή η ρητή απεικόνιση φ θα συμβολίζεται, ιδιαιτέρως, ως $[F_0 : \ldots : F_n]_V$ (και απλώς ως $[F_0 : \ldots : F_n]$ όταν $V = \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$). Επί τής κλάσεως όλων των ρητών απεικονίσεων αυτής τής μορφής εισάγουμε την ακόλουθη σχέση ισοδυναμίας:

$$[F_0 : \ldots : F_n]_V \backsim [G_0 : \ldots : G_n]_V \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} F_i G_j - G_i F_j \in \mathbf{I}_+(V), \\ \forall i, j \in \{0, \ldots, n\} \end{bmatrix}. \tag{3.22}$$

Όπως μας πληροφορεί το επόμενο θεώρημα, *κάθε* ρητή απεικόνιση $\varphi : V \dashrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι παραστάσιμη υπό αυτήν τη μορφή.

3.11.31 Θεώρημα. *Υφίσταται μια φυσική αμφίρριψη*

$$\boxed{\left(\left\{ \begin{array}{c} \text{ρητές απεικονίσεις} \\ \text{τής μορφής } [F_0 : \ldots : F_n]_V \end{array} \right\} \Big/ \backsim \right) \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{ρητές απεικονίσεις} \\ \varphi : V \dashrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \end{array} \right\} = \mathcal{G}_{V, \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}} / \sim .}$$

Αποδειξη. Έστω $\varphi : V \dashrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ *τυχούσα* ρητή απεικόνιση. Σύμφωνα με όσα προαναφέρθησαν στο (c) τής σημειώσεως 3.11.12, αυτή μπορεί να αναπαρασταθεί ως μια $(n+1)$-άδα $\varphi = [f_0 : \ldots : f_n]$ ρητών συναρτήσεων

$$f_0, \ldots, f_n \in \mathrm{Rat}(V) \underset{3.11.10}{\cong} \mathbf{k}(V)$$

(με μία τουλάχιστον εξ αυτών μη μηδενική). Θεωρώντας κλασματικές εκπροσωπήσεις τους

$$f_j = \frac{\overline{H_j}}{\overline{\Xi_j}} \in \mathbf{Fr}(\Gamma_{\text{ομ.}}(V)), \; \deg(H_j) = \deg(\Xi_j) = d_j, \; \forall j \in \{0, \ldots, n\},$$

(όπου $\Xi_j \notin \mathbf{I}_+(V), \forall j \in \{0, \ldots, n\}$) και θέτοντας

$$F_j := H_j \cdot \left(\prod_{i \in \{1, \ldots, n\} \smallsetminus \{j\}} \Xi_i \right), \; \forall j \in \{0, \ldots, n\},$$

παρατηρούμε ότι όλα τα $F_j \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m]$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, είναι ομογενή πολυώνυμα βαθμού $\sum_{j=0}^{n} d_j$ και ότι για κάθε $P \in V \smallsetminus \mathbf{V}_+(F_0, \ldots, F_n)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= [f_0(P) : \ldots : f_n(P)] = \left[\tfrac{H_0(P)}{\Xi_0(P)} : \ldots : \tfrac{H_n(P)}{\Xi_n(P)}\right] \\ &= [F_0(P) : \ldots : F_n(P)]. \end{aligned}$$

(Ο εξοβελισμός τού $\mathbf{V}_+(F_0, \ldots, F_n)$ γίνεται για να διασφαλισθεί το ότι $\varphi(P) \in \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$.) Εν συνεχεία, υποθέτοντας ότι

$$F_0, \ldots, F_n \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m]_d, \ \ G_0, \ldots, G_n \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m]_{d'},$$

με

$$V \smallsetminus \mathbf{V}_+(F_0, \ldots, F_n) \neq \varnothing, \quad V \smallsetminus \mathbf{V}_+(G_0, \ldots, G_n) \neq \varnothing,$$

απομένει να αποδειχθεί ότι $[F_0 : \ldots : F_n]_V \backsim [G_0 : \ldots : G_n]_V \Leftrightarrow$ αυτές οι $(n+1)$-άδες πολυωνύμων καθορίζουν την ίδια ρητή απεικόνιση.

"$\Rightarrow$" Εάν $\varphi = [F_0 : \ldots : F_n]_V \backsim [G_0 : \ldots : G_n]_V = \psi$ και εάν

$$V_1 := \{ P \in V \,|\, F_0(P) = \cdots = F_n(P) = 0_{\mathbf{k}} \}, V_2 := \{ P \in V \,|\, G_0(P) = \cdots = G_n(P) = 0_{\mathbf{k}} \},$$

τότε τα V_1, V_2 είναι εξ υποθέσεως αλγεβρικά προβολικά σύνολα περιεχόμενα γνησίως εντός τής V και (επειδή η V είναι ανάγωγο προβολικό αλγεβρικό σύνολο) το $V' := V_1 \cup V_2$ είναι ωσαύτως ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο περιεχόμενο *γνησίως* εντός τής V. Οι φ, ψ είναι μορφισμοί επί τού $V \smallsetminus V'$ και επειδή

$$F_i G_j - G_i F_j \in \mathbf{I}_+(V), \ \ \forall i, j \in \{0, \ldots, n\},$$

έχουμε

$$[F_0(P) : \ldots : F_n(P)] = [G_0(P) : \ldots : G_n(P)], \ \forall P \in V \smallsetminus V' \Rightarrow \varphi = \psi.$$

"$\Leftarrow$" Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο U τής V, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$[F_0(P) : \ldots : F_n(P)] = [G_0(P) : \ldots : G_n(P)], \ \forall P \in U.$$

Για οιοδήποτε $i \in \{0, \ldots, n\} : F_i \notin \mathbf{I}_+(V)$ έχουμε $U \smallsetminus \mathbf{V}_+(F_i) \neq \varnothing$ (αφού το U είναι κατά Zariski πυκνό υποσύνολο τής V) και

$$F_i(P) \neq 0_{\mathbf{k}}, \ \ G_i(P) \neq 0_{\mathbf{k}}, \ \ \forall P \in U \smallsetminus \mathbf{V}_+(F_i).$$

Θέτοντας

$$f_j := \frac{F_j}{F_i} \in \mathcal{O}_V(U \smallsetminus \mathbf{V}_+(F_i)), \ g_j := \frac{G_j}{G_i} \in \mathcal{O}_V(U \smallsetminus \mathbf{V}_+(F_i)), \ \forall j \in \{0, \ldots, n\} \smallsetminus \{i\},$$

λαμβάνουμε την ισότητα των ρητών απεικονίσεων

$$(f_0, .., f_{i-1}, f_{i+1}, .., f_n) = (g_0, .., g_{i-1}, g_{i+1}, .., g_n) : U \smallsetminus \mathbf{V}_+(F_i) \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}.$$

Επειδή $f_j = g_j$ επί τού $U \smallsetminus \mathbf{V}_+(F_i)$ για κάθε $j \in \{0, \ldots, n\} \smallsetminus \{i\}$ και το $U \smallsetminus \mathbf{V}_+(F_i)$ είναι κατά Zariski πυκνό υποσύνολο τής V συνάγουμε ότι

$$(F_i G_j - G_i F_j)|_{U \smallsetminus \mathbf{V}_+(F_i)} = 0 \Rightarrow F_i G_j - G_i F_j \in \mathbf{I}_+(V).$$

Για τους λοιπούς δείκτες i (δηλαδή για εκείνους για τους οποίους ισχύει $F_i \in \mathbf{I}_+(V)$) αυτό είναι προφανές (καθότι κατ' ανάγκην θα ισχύει και $G_i \in \mathbf{I}_+(V)$). □

3.11.32 Σημείωση. (Ρητές απεικονίσεις μεταξύ προβολικών ποικιλοτήτων) Μια ρητή απεικόνιση

$$\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \supseteq V \overset{\varphi}{\dashrightarrow} W \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$$

μεταξύ δυο προβολικών ποικιλοτήτων V και W μπορεί να εκληφθεί ως μια ρητή απεικόνιση $\varphi : V \dashrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ (ή $\varphi = [F_0 : \ldots : F_n]_V$, όπως στο θεώρημα 3.11.31) για την οποία ισχύει $\varphi(\mathrm{Dom}(\varphi)) \subseteq W$. Ακριβέστερα, μια ρητή συνάρτηση τής μορφής $\varphi = [F_0 : \ldots : F_n]_V$ από την V στον $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι ρητή συνάρτηση από την V σε μια προβολική ποικιλότητα $W \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ εάν και μόνον εάν

$$G(F_0, \ldots, F_n) \in \mathbf{I}_+(V), \ \forall G \in \mathbf{I}_+(W).$$

Εν γένει, η $(n+1)$-άδα $(F_0, \ldots, F_n)$ δεν είναι μονοσημάντως ορισμένη μέσω τής φ (λόγω τής παρεμβολής τής σχέσεως ισοδυναμίας (3.22)). Ωστόσο, στην ειδική περίπτωση όπου $V = \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$ και $W = \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ η μοναδικότητα «περισώζεται» *μέχρις πολλαπλασιασμού με κάποιο στοιχείο* $\lambda \in \mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\}$.

3.11.33 Πόρισμα. (Ρητές απεικονίσεις μεταξύ προβολικών χώρων) *Έστω*

$$\varphi : \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \dashrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$$

μια ρητή απεικόνιση. Τότε, μέχρις πολλαπλασιασμού με κάποιο στοιχείο $\lambda \in \mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\}$, *υπάρχει μονοσημάντως ορισμένη* $(n+1)$*-άδα* $(F_0, \ldots, F_n)$ *ομογενών πολυωνύμων* $F_0, \ldots, F_n \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m]$ *ιδίου βαθμού, ούτως ώστε να ισχύει*

$$\varphi = [F_0 : \ldots : F_n], \ \mathrm{Dom}(\varphi) = \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \smallsetminus \mathbf{V}_+(F_0, \ldots, F_n).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η ύπαρξη μιας $(n+1)$-άδας ομογενών πολυωνύμων με αυτήν την ιδιότητα έπεται άμεσα από το θεώρημα 3.11.31. Αρκεί λοιπόν να αποδειχθεί η μοναδικότητά της μέχρις πολλαπλασιασμού με κάποιο στοιχείο $\lambda \in \mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\}$. Ας υποθέσουμε ότι η φ :

$\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \dashrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ εκπροσωπείται από δυο $(n+1)$-άδες $(F_0, \ldots, F_n)$ και $(G_0, \ldots, G_n)$ ομογενών πολυωνύμων

$$F_0, \ldots, F_n, G_0, \ldots, G_n \in \mathbf{k}\,[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m]$$

(ιδίου βαθμού $d \geq 0$). Τότε $[F_0 : \ldots : F_n] \backsim [G_0 : \ldots : G_n]$ και επειδή $\mathbf{I}_+(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}) = \{0\}$ οι συνθήκες (3.22) ισοδυναμούν με τις εξής:

$$F_i G_j = G_i F_j, \ \forall i, j \in \{0, \ldots, n\}. \tag{3.23}$$

Δίχως βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα $\{\, F_j |\, 0 \leq j \leq n\}$ (και, αντιστοίχως, τα $\{\, G_j |\, 0 \leq j \leq n\}$) *δεν διαθέτουν κανένα ανάγωγο πολυώνυμο ως κοινό τους διαιρέτη* (διότι η απαλοιφή των κοινών διαιρετών τους δεν επιφέρει αλλαγή στην κλάση ισοδυναμίας με την οποία ταυτίσαμε την $\varphi : \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \dashrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$). Επειδή

$$(3.23) \Rightarrow F_i G_0 = G_i F_0 \Rightarrow F_0 \mid F_i G_0, \ \forall i \in \{0, \ldots, n\},$$

έχουμε

$$\left.\begin{array}{r} F_0 \mid \text{μκδ}(F_0 G_0, \ldots, F_n G_0) \\ \text{μκδ}(F_0 G_0, \ldots, F_n G_0) \underset{\text{συν.}}{\sim} G_0 \cdot \text{μκδ}(F_0, \ldots, F_n) \\ \text{μκδ}(F_0, \ldots, F_n) \underset{\text{συν.}}{\sim} 1_{\mathbf{k}} \end{array}\right\} \Longrightarrow F_0 \mid G_0.$$

Εναλλάσσοντας τους ρόλους των F_0 και G_0 και επαναλαμβάνοντας την ίδια επιχειρηματολογία συνάγουμε ότι $G_0 \mid F_0$. Κατά συνέπειαν,

$$F_0 \underset{\text{συν.}}{\sim} G_0 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\} = \mathbf{k}^{\times} : F_0 = \lambda G_0$$

και βάσει των (3.23),

$$F_0 G_j = G_0 F_j \Rightarrow \lambda G_0 G_j = G_0 F_j \Rightarrow F_j = \lambda G_j, \ \forall j \in \{0, \ldots, n\},$$

οπότε ο ισχυρισμός είναι όντως αληθής. □

3.11.34 Παράδειγμα. Έστω P ένα σημείο τού προβολικού χώρου $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$ $(m > 1)$ και έστω $\mathbb{H} \subset \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$ ένα υπερεπίπεδο με $P \notin \mathbb{H}$. Ως **προβολή τού** $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$ **επί τού** $\mathbb{H}$ **με κέντρο το** P ορίζεται η απεικόνιση

$$\varpi_P : \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \smallsetminus \{P\} \longrightarrow \mathbb{H}, \ \ Q \longmapsto \varpi_P(Q) := \mathbb{L}(P, Q) \cap \mathbb{H}.$$

(Βλ. σχήμα **19**.) Αυτή είναι μορφισμός και ορίζει μια ρητή απεικόνιση

$$\pi_P : \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \dashrightarrow \mathbb{H} \cong \mathbb{P}^{m-1}_{\mathbf{k}} \ \ (\pi_P = [\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \smallsetminus \{P\}, \varpi_P], \ \mathrm{Dom}(\pi_P) = \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \smallsetminus \{P\}).$$

Πράγματι· επιλέγοντας κατάλληλες ομογενείς συντεταγμένες $\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m$ (ενδεχομένως ύστερα από εκτέλεση μιας προβολικής αλλαγής συντεταγμένων τού $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^m$) μπορούμε να υποθέσουμε ότι $P = [0_{\mathbf{k}} : \ldots : 0_{\mathbf{k}} : 1_{\mathbf{k}}]$ και $\mathbb{H} = V_+(\mathsf{X}_m)$. Εάν

$$Q = [b_0 : \ldots : b_m] \in \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^m \smallsetminus \{P\},$$

τότε $(b_0, \ldots, b_{m-1}) \neq 0_{\mathbf{k}^m}$ και

$$\mathbb{L}(P, Q) = \mathbb{P}(\mathrm{Span}_{\mathbf{k}}(\{(b_0, \ldots, b_m), (0_{\mathbf{k}}, \ldots, 0_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{k}})\})).$$

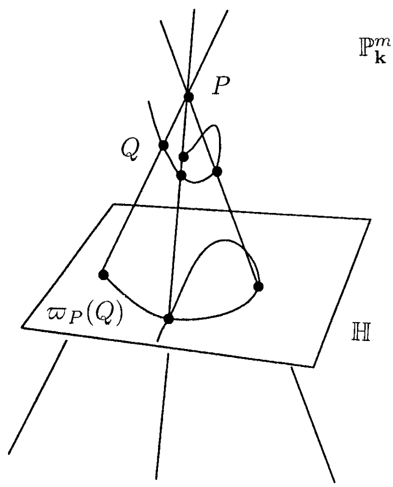
Επειδή

$$\mathrm{Span}_{\mathbf{k}}(\{(b_0, \ldots, b_m), (0_{\mathbf{k}}, \ldots, 0_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{k}})\} \cap (\mathbf{k}^m \times \{0_{\mathbf{k}}\}) = \mathbf{k} \cdot (b_0, \ldots, b_{m-1}),$$

η ϖ_P δίδεται από τον τύπο

$$\varpi_P\left([\mathsf{X}_0 : \ldots : \mathsf{X}_m]\right) = [\mathsf{X}_0 : \ldots : \mathsf{X}_{m-1} : 0_{\mathbf{k}}].$$

(Μέσω τής ίδιας $(m+1)$-άδας παρίσταται και η π_P.)



Σχήμα 19

3.11.35 Θεώρημα. (Μορφισμοί μεταξύ προβολικών χώρων) *Έστω $\varphi : \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^m \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n$ ένας μορφισμός. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(a) *Μέχρις πολλαπλασιασμού με κάποιο στοιχείο $\lambda \in \mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\}$ υπάρχει μονοσημάντως ορισμένη $(n+1)$-άδα $(F_0, \ldots, F_n)$ ομογενών πολυωνύμων $F_0, \ldots, F_n \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m]$ ιδίου βαθμού που δεν διαθέτουν κοινά σημεία μηδενισμού, ούτως ώστε να ισχύει*

$$\varphi = [F_0 : \ldots : F_n]\,.$$

(b) *Εάν ο φ είναι ισομορφισμός, τότε $m = n$, δηλαδή ο φ είναι αυτομορφισμός τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$. Επιπροσθέτως, ο φ οφείλει να είναι μια προβολική αλλαγή συντεταγμένων τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a) Επειδή εξ υποθέσεως $\mathrm{Dom}(\varphi) = \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$, αρκεί να εφαρμοσθεί το πόρισμα 3.11.33, από το οποίο έπεται ότι $\mathbf{V}_+(F_0, \ldots, F_n) = \varnothing$.

(b) Ας υποθέσουμε ότι ο φ είναι ισομορφισμός με τον $\psi : \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$ ως αντίστροφό του και ότι

$$\varphi = [F_0 : \ldots : F_n]\,, \;\; \psi = [G_0 : \ldots : G_m]\,.$$

Επειδή $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}}$, $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}}$ και

$$\psi \circ \varphi = [H_0 : \ldots : H_m]\,, \;\; \varphi \circ \psi = [\Xi_0 : \ldots : \Xi_n]\,,$$

όπου $H_i := G_i(F_0, \ldots, F_n), \forall i \in \{0, \ldots, m\}$, και $\Xi_j := F_j(G_0, \ldots, G_m), \forall j \in \{0, \ldots, n\}$, έχουμε

$$[H_0 : \ldots : H_m] \backsim [\mathsf{X}_0 : \ldots : \mathsf{X}_m]\,, \quad [\Xi_0 : \ldots : \Xi_n] \backsim [\mathsf{Y}_0 : \ldots : \mathsf{Y}_n]\,,$$

όπου $\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_m$ (και αντιστοίχως, $\mathsf{Y}_0, \ldots, \mathsf{Y}_n$) οι συναρτήσεις συντεταγμένων τού $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}$ (και αντιστοίχως, τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$). Βάσει τού (a),

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\} : \begin{cases} H_i = \lambda \mathsf{X}_i, \forall i \in \{0, \ldots, m\}, \\ \Xi_j = \mu \mathsf{X}_j, \forall j \in \{0, \ldots, n\}, \end{cases}$$

οπότε $\forall (i, j) \in \{0, \ldots, m\} \times \{0, \ldots, n\}$ έχουμε

$$\deg(H_i) = \deg(\Xi_j) = 1 \Rightarrow \deg(G_i) = \deg(F_j) = 1.$$

Από την άλλη μεριά, η ύπαρξη ενός ισομορφισμού $\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}} \cong \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ έχει ως συνέπεια την ύπαρξη ενός ισομορφισμού μεταξύ των σωμάτων $\mathbf{k}(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}})$ και $\mathbf{k}(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}})$ (βλ. άσκηση **A-3-18**). Επειδή

$$\begin{cases} \mathbf{k}(\mathbb{P}^m_{\mathbf{k}}) \cong \mathbf{Fr}\left(\mathbf{k}\left[\frac{\mathsf{X}_1}{\mathsf{X}_0}, \ldots, \frac{\mathsf{X}_m}{\mathsf{X}_0}\right]\right) = \mathbf{k}\left(\frac{\mathsf{X}_1}{\mathsf{X}_0}, \ldots, \frac{\mathsf{X}_m}{\mathsf{X}_0}\right) \cong \mathbf{k}(\mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}), \\ \mathbf{k}(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}) \cong \mathbf{Fr}\left(\mathbf{k}\left[\frac{\mathsf{Y}_1}{\mathsf{Y}_0}, \ldots, \frac{\mathsf{Y}_n}{\mathsf{Y}_0}\right]\right) = \mathbf{k}\left(\frac{\mathsf{Y}_1}{\mathsf{Y}_0}, \ldots, \frac{\mathsf{Y}_n}{\mathsf{Y}_0}\right) \cong \mathbf{k}(\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}), \end{cases}$$

(πρβλ. 3.7.12 (b)) τούτο σημαίνει ότι

$$\mathbf{k}(\mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}) \cong \mathbf{k}(\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}) \Rightarrow \mathrm{tr.deg}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}(\mathbb{A}^m_{\mathbf{k}})) = m = n = \mathrm{tr.deg}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}(\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}})).$$

Τελικώς συμπεραίνουμε ότι ο φ οφείλει να είναι μια προβολική αλλαγή συντεταγμένων τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ (βλ. 3.5.2). $\square$

Ασκήσεις

Α-3-73. Να αποδειχθεί ότι τόσον το *φύλλο τού Καρτεσίου* $V = \mathbf{V}\left(\mathsf{Y}^2 - \mathsf{X}^2 - \mathsf{X}^3\right) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$ (βλ. σχήμα **3**) όσον και η $V = \mathbf{V}\left(\mathsf{Y}^2 - \mathsf{X}^5\right) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$ είναι ρητές ποικιλότητες.

Α-3-74. Εάν το $\mathbf{k}$ είναι ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα χαρακτηριστικής $\neq 2$, να αποδειχθεί ότι όλες οι προβολικές τετραγωνικές υπερεπιφάνειες $\mathbf{V}_+(F) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ βαθμίδας $\nu + 1 \geq 3$ είναι ρητές ποικιλότητες. (*Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιηθεί καταλλήλως το θεώρημα 3.5.16).