ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Συσχετικές Ποικιλότητες

Στο παρόν κεφάλαιο το $\mathbf{k}$ θα είναι ένα παγιωμένο **απειροπληθές σώμα**, ενώ τα αλγεβρικά σύνολα, για τα οποία θα γίνεται λόγος, θα περιέχονται εντός τού συσχετικού χώρου $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ για κάποιον φυσικό αριθμό n. Όταν θα ομιλούμε για ομομορφισμούς $\varphi : R \longrightarrow S$ μεταξύ δακτυλίων R, S, οι οποίοι περιέχουν το σώμα αναφοράς μας $\mathbf{k}$ ως υποδακτύλιό τους, θα εννοούμε $\mathbf{k}$-*ομομορφισμούς*, ήτοι ομομορφισμούς με την ιδιότητα $\varphi\,|_{\mathbf{k}} = \mathrm{Id}_{\mathbf{k}}$.

$\boxed{2.1}$ Δακτύλιοι Συντεταγμένων και Πολυωνυμικές Συναρτήσεις και Απεικονίσεις

2.1.1 Ορισμός. Για κάθε μη κενό σύνολο V ορίζουμε το σύνολο[1]

$$\mathfrak{I}\,(V, \mathbf{k}) := \{\text{όλες οι συναρτήσεις } f : V \to \mathbf{k}\}\,.$$

Το $\mathfrak{I}\,(V, \mathbf{k})$ αποκτά τη δομή τού δακτυλίου μέσω των «σημειακών» πράξεων:

$$(f+g)\,(x) := f(x) + g(x), \quad (f\,g)\,(x) := f(x)\,g(x),\ \forall x, \quad x \in V.$$

(Συνήθως ταυτίζουμε το $\mathbf{k}$ με τον υποδακτύλιο τού $\mathfrak{I}\,(V, \mathbf{k})$, ο οποίος απαρτίζεται από όλες τις σταθερές συναρτήσεις.) Εάν το $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ είναι ένα μη κενό αλγεβρικό σύνολο,

[1] Εν προκειμένω, γίνεται σαφής διάκριση μεταξύ των όρων *απεικόνιση* (map) και *συνάρτηση* (function). Ως συνήθως, μια *απεικόνιση* ορίζεται να είναι μια διμελής σχέση (μεταξύ δύο συνόλων, ήτοι τού *πεδίου ορισμού* της και τού *πεδίου τιμών* της), η οποία πληροί τη «συνθήκη τού μονοσημάντου» (δηλαδή κάθε στοιχείο τού πεδίου ορισμού της απεικονίζεται σε ακριβώς ένα στοιχείο τού πεδίου τιμών της). Με τον όρο *συνάρτηση* εννούμε μια απεικόνιση με πεδίο τιμών της το εκάστοτε σώμα αναφοράς $\mathbf{k}$.

τότε μια συνάρτηση $f \in \mathfrak{F}(V, \mathbf{k})$ καλείται **πολυωνυμική συνάρτηση** όταν

$$[\exists F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] : f(a_1, \ldots, a_n) = F(a_1, \ldots, a_n), \ \forall (a_1, \ldots, a_n) \in V]. \tag{2.1}$$

(Λέμε ότι το $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ *εκπροσωπεί* την πολυωνυμική συνάρτηση $f \in \mathfrak{F}(V, \mathbf{k})$ όταν πληρούται η συνθήκη (2.1).) Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις σχηματίζουν έναν υποδακτύλιο

$$\boxed{\mathbf{k}[V] := \{\text{όλες οι πολυωνυμικές συναρτήσεις } f : V \to \mathbf{k}\}}$$

τού $\mathfrak{F}(V, \mathbf{k})$, ο οποίος περιέχει το $\mathbf{k}$.

2.1.2 Ορισμός. Έστω $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ ένα αλγεβρικό σύνολο. Ο πηλικοδακτύλιος

$$\boxed{\Gamma(V) := \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] \,/\, \mathbf{I}(V)}$$

καλείται **δακτύλιος (των) συντεταγμένων τού** V.

2.1.3 Πρόταση. *Για* $V \neq \varnothing$ *η απεικόνιση*

$$\theta_V : \mathbf{k}[V] \longrightarrow \Gamma(V), \quad f \longmapsto \theta_V(f) = F + \mathbf{I}(V),$$

(όπου $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ *οιοδήποτε πολυώνυμο που εκπροσωπεί την* f*) αποτελεί έναν ισομορφισμό δακτυλίων.*

2.1.4 Σημείωση. (a) Συχνά θα «ταυτίζουμε» τα στοιχεία τού $\mathbf{k}[V]$ με τις εικόνες τους εντός τού $\Gamma(V)$ και αντιστρόφως, χωρίς να κάνουμε ρητή αναφορά στον ισομορφισμό θ_V. Αυτό που θα πρέπει να έχουμε κατά νου, είναι ότι κάθε πολυωνυμική συνάρτηση (με πεδίο ορισμού της το V) μπορεί να εκληφθεί *και* ως μια κλάση υπολοίπων ενός πολυωνύμου από τον $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ (modulo $\mathbf{I}(V)$). (Με άλλα λόγια, δυο πολυώνυμα $F, G \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ εκπροσωπούν την *ίδια* πολυωνυμική συνάρτηση, έχουσα ως πεδίο ορισμού της το V, εάν και μόνον εάν $F - G \in \mathbf{I}(V)$).

(b) Λόγω αυτού τού ισομορφισμού, ο $\mathbf{k}[V]$ είναι ναιτεριανός δακτύλιος (πρβλ. άσκηση **A-1-36** (c)) και, ειδικότερα, δακτυλιακώς πεπερασμένος υπεράνω τού $\mathbf{k}$ (= πεπερασμένως παραγόμενη $\mathbf{k}$-άλγεβρα). Εξάλλου, ακόμη και η εισαγωγή τού όρου «δακτύλιος συντεταγμένων» οφείλεται ακριβώς στο ότι οι «συναρτήσεις συντεταγμένων» $\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n$ παράγουν τον $\mathbf{k}[V]$. (Κάθε “X_i”, $i \in \{1, \ldots, n\}$, ιδωμένη ως συνάρτηση από το V στο

$\mathbf{k}$, στέλνει κάθε σημείο $P = (a_1, \ldots , a_n) \in V$ να απεικονισθεί στην i-οστή του συντεταγμένη a_i. Σημειωτέον ότι ο συμβολισμός $\mathbf{k}[V]$ «συμφωνεί», κατά κάποιον τρόπο, με εκείνους των προηγουμένων ενοτήτων, υπό την έννοια τού ότι ο $\mathbf{k}[V]$ αποτελεί τον ελάχιστο δακτύλιο συναρτήσεων, οι οποίες έχουν το V ως πεδίο ορισμού τους και περιέχουν τόσον τις $\mathsf{X}_1, \ldots , \mathsf{X}_n$ όσον και το $\mathbf{k}$.)

2.1.5 Ορισμός. (a) Κάθε ανάγωγο αλγεβρικό σύνολο εντός τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ καλείται **συσχετική (k-)ποικιλότητα**[2].

(b) Έστω $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ μια συσχετική ποικιλότητα. Ως **υποποικιλότητα** τής V χαρακτηρίζεται κάθε συσχετική ποικιλότητα $W \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ για την οποία ισχύει $W \subseteq V$.

2.1.6 Πρόταση. *Έστω $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ ένα αλγεβρικό σύνολο. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(a) *Το V είναι συσχετική ποικιλότητα.*

(b) *Το ιδεώδες $\mathbf{I}(V)$ τού V είναι πρώτο.*

(c) *Ο δακτύλιος συντεταγμένων $\Gamma(V)$ $(\cong \mathbf{k}[V])$ τού V είναι ακεραία περιοχή.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η ισοδυναμία (a)⇔(b) δεν είναι τίποτα άλλο παρά η πρόταση 1.6.7, ενώ η ισοδυναμία (b)⇔(c) έπεται από το θεώρημα 1.1.13. □

2.1.7 Πρόταση. *Έστω $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \supseteq V \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} W \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ μια επιρριπτική απεικόνιση μεταξύ δυο αλγεβρικών συνόλων V και W. Εάν το V είναι συσχετική ποικιλότητα και η φ συνεχής ως προς την τοπολογία Zariski, τότε και το W είναι συσχετική ποικιλότητα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται άμεσα από το πόρισμα 1.6.6 (για την τοπολογία Zariski επί τών $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ και $\mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$). □

2.1.8 Ορισμός. Έστω $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ ένα αλγεβρικό σύνολο. Για κάθε υποσύνολο W τού V ορίζουμε

$$\boxed{\mathbf{I}_V(W) := \left\{ \overline{F} \in \Gamma(V) \;\middle|\; F \in \mathbf{I}(W) \right\}}$$

και για κάθε ιδεώδες J τού $\Gamma(V)$,

$$\boxed{\mathbf{V}_V(J) := \left\{ P \in V \;\middle|\; F(P) = 0_{\mathbf{k}},\ \forall \overline{F} \in J \right\}.}$$

Στο επόμενο θεώρημα παρατίθεται η γενίκευση τού θεωρήματος 1.8.2, καθώς και των πορισμάτων 1.8.3 και 1.8.4 για αλγεβρικά υποσύνολα τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ περιεχόμενα στο V.

[2]Προσοχή! Πολλοί συγγραφείς χρησιμοποιούν τον όρο «συσχετική ποικιλότητα» ως συνώνυμο τού όρου «αλγεβρικό σύνολο» (εντός ενός συσχετικού χώρου), χωρίς να συμπεριλαμβάνουν σε αυτόν την επιπρόσθετη συνθήκη τού «αναγώγου».

2.1.9 Θεώρημα. (Αλγεβρογεωμετρικό Γλωσσάριο) *Εάν το $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ είναι ένα αλγεβρικό σύνολο, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(a) *Για κάθε υποσύνολο W τού V το $\mathbf{I}_V(W)$ είναι ένα ιδεώδες τού $\Gamma(V)$.*

(b) *Για κάθε ιδεώδες J τού $\Gamma(V)$ το $\mathbf{V}_V(J)$ είναι ένα αλγεβρικό σύνολο εντός τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ που περιέχεται στο V.*

(c) *Για κάθε αλγεβρικό σύνολο $W \subseteq V$ ισχύει η ισότητα*

$$W = \mathbf{V}_V(\mathbf{I}_V(W)).$$

(d) *Για κάθε ιδεώδες J τού $\Gamma(V)$ ισχύουν οι εγκλεισμοί*

$$J \subseteq \mathrm{Rad}(J) \subseteq \mathbf{I}_V(\mathbf{V}_V(J)).$$

(e) *Εάν το $\mathbf{k}$ είναι αλγεβρικώς κλειστό, τότε υπάρχουν φυσικές αμφιρρίψεις:*

$$\boxed{\begin{array}{ccc}
\left\{\begin{array}{c}\text{αλγεβρικά υποσύνολα}\\ \text{τού } \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \text{ περιεχόμενα στο } V\end{array}\right\} & \underset{\mathbf{V}_V}{\overset{\mathbf{I}_V}{\rightleftarrows}} & \left\{\begin{array}{c}\text{ριζικά ιδεώδη}\\ \text{τού } \Gamma(V)\end{array}\right\} \\
\cup & & \cup \\
\left\{\begin{array}{c}\text{ανάγωγα αλγεβρικά}\\ \text{υποσύνολα τού } \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}\\ \text{περιεχόμενα στο } V\end{array}\right\} & \overset{(\text{περιορισμός})}{\longleftrightarrow} & \{\text{πρώτα ιδεώδη τού } \Gamma(V)\} \\
\cup & & \cup \\
\{\text{σημεία τού } V\} & \overset{(\text{περιορισμός})}{\longleftrightarrow} & \{\text{μεγιστοτικά ιδεώδη τού } \Gamma(V)\}
\end{array}}$$

Ιδιαιτέρως, εάν η V είναι μια συσχετική ποικιλότητα, κάθε υποποικιλότητά της είναι τής μορφής $W = \mathbf{V}_V(J)$, για κάποιο πρώτο ιδεώδες J τού $\Gamma(V)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω

$$\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] \ni F \longrightarrow \pi_V(F) = \overline{F} \in \Gamma(V)$$

ο φυσικός επιμορφισμός.

(a) Για κάθε υποσύνολο W τού V έχουμε $\mathbf{I}(W) \supseteq \mathbf{I}(V)$ (βλ. το (1) τής προτάσεως 1.3.1). Επειδή $\pi_V(\mathbf{I}(W)) = \mathbf{I}_V(W)$, το $\mathbf{I}_V(W)$ είναι ένα ιδεώδες τού δακτυλίου συντεταγμένων $\Gamma(V)$ τού V (βλ. άσκηση **A-1-36** (a)).

(b) Για κάθε ιδεώδες J τού $\Gamma(V)$ το $\mathbf{V}_V(J)$ είναι ένα αλγεβρικό σύνολο εντός τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ που περιέχεται στο V, διότι κατά τον ορισμό τού $\mathbf{V}_V(J)$, το (a) τής ασκήσεως **A-1-36** και το (3) τής προτάσεως 1.2.3 έχουμε

$$\pi_V^{-1}(J) \supseteq \mathbf{I}(V) \Longrightarrow \mathbf{V}_V(J) = \mathbf{V}(\pi_V^{-1}(J)) \subseteq \mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = V.$$

(c) Από τα (a), (b) και το (5) (a) τής προτάσεως 1.3.1 συνάγουμε ότι

$$\mathbf{V}_V(\mathbf{I}_V(W)) = \mathbf{V}_V(\pi_V(\mathbf{I}(W))) = \mathbf{V}\left(\pi_V^{-1}(\pi_V(\mathbf{I}(W)))\right) = \mathbf{V}(\mathbf{I}(W)) = W.$$

(d) Ο πρώτος εγκλεισμός είναι προφανής. Ο δεύτερος επαληθεύεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_V\left(\mathbf{V}_V\left(J\right)\right) &= \mathbf{I}_V\left(\mathbf{V}(\pi_V^{-1}(J))\right) = \mathbf{I}_V\left(\mathbf{V}(\pi_V^{-1}(J))\right)\\ &= \pi_V(\mathbf{I}(\mathbf{V}(\pi_V^{-1}(J)))) \supseteq \pi_V(\mathrm{Rad}(\pi_V^{-1}(J))) = \mathrm{Rad}(J).\end{aligned}$$

(e) Οι εγκλεισμοί οι δηλούμενοι στη δεξιά στήλη προκύπτουν από το θεώρημα 1.1.7 και την άσκηση **A-1-18**. Κατά το (c), $W = \mathbf{V}_V\left(\mathbf{I}_V\left(W\right)\right)$ για κάθε αλγεβρικό υποσύνολο W τού V. Εάν το $\mathbf{k}$ είναι αλγεβρικώς κλειστό και το J ένα ριζικό ιδεώδες τού $\Gamma\left(V\right)$, τότε, σύμφωνα με το (b) τής ασκήσεως **A-1-36** και το θεώρημα 1.8.2 των θέσεων μηδενισμού τού Hilbert, το $\pi_V^{-1}(J)$ είναι ριζικό ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ και

$$\mathbf{I}_V\left(\mathbf{V}_V\left(J\right)\right) = \pi_V(\mathbf{I}(\mathbf{V}(\pi_V^{-1}(J)))) = \pi_V(\mathrm{Rad}(\pi_V^{-1}(J))) = \pi_V(\pi_V^{-1}(J)) = J.$$

Άρα μπορούμε να εκλάβουμε την “$\mathbf{I}_V$” ως μια αμφιρριπτική απεικόνιση από το σύνολο των αλγεβρικών υποσυνόλων τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ που περιέχονται στο V στο σύνολο των ριζικών ιδεωδών τού $\Gamma\left(V\right)$ με την “$\mathbf{V}_V$” ως αντίστροφό της. Εξάλλου, εάν το W είναι ένα ανάγωγο αλγεβρικό υποσύνολο τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ που περιέχεται στο V, το $\mathbf{I}\left(W\right)$ είναι ένα πρώτο ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ (βλ. πρόταση 1.6.7) και το $\pi_V(\mathbf{I}\left(W\right)) = \mathbf{I}_V\left(W\right)$ ένα πρώτο ιδεώδες τού $\Gamma\left(V\right)$ (βλ. άσκηση **A-1-36** (b)). Και αντιστρόφως· εάν το J είναι ένα πρώτο ιδεώδες τού $\Gamma\left(V\right)$, τότε το $\pi_V^{-1}(J)$ είναι πρώτο ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ (βλ. άσκηση **A-1-36** (b)) και το $\mathbf{V}\left(\pi_V^{-1}(J)\right) = \mathbf{V}_V\left(J\right)$ ανάγωγο αλγεβρικό υποσύνολο τού V (βλ. πρόταση 1.6.7). Τέλος, εάν το $P = (a_1, \ldots, a_n)$ είναι ένα σημείο τού V, τότε το $\mathbf{I}(\{P\}) = \langle \mathsf{X}_1 - a_1, \ldots, \mathsf{X}_n - a_n\rangle$ είναι ένα μεγιστοτικό ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ (βλ. πόρισμα 1.8.4) και το $\pi_V(\mathbf{I}(\{P\})) = \mathbf{I}_V\left(\{P\}\right)$ ένα μεγιστοτικό ιδεώδες τού $\Gamma\left(V\right)$ (βλ. άσκηση **A-1-36** (b)). Και αντιστρόφως· εάν το J είναι ένα μεγιστοτικό ιδεώδες τού $\Gamma\left(V\right)$, τότε το $\pi_V^{-1}(J)$ είναι μεγιστοτικό ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ (βλ. άσκηση **A-1-36** (b)) και το $\mathbf{V}\left(\pi_V^{-1}(J)\right) = \mathbf{V}_V\left(J\right)$ ένα μονοσύνολο εντός τού V (βλ. πόρισμα 1.8.4). □

2.1.10 Ορισμός. Έστω ότι τα $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ και $W \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ είναι δυο αλγεβρικά σύνολα. Μια απεικόνιση $\varphi : V \longrightarrow W$ καλείται **πολυωνυμική απεικόνιση** όταν υπάρχουν πολυώνυμα $T_1, \ldots, T_m$ από τον $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$, τέτοια ώστε να ισχύει η ισότητα

$$\varphi\left(a_1, \ldots, a_n\right) = \left(T_1\left(a_1, \ldots, a_n\right), \ldots, T_m\left(a_1, \ldots, a_n\right)\right), \ \forall \left(a_1, \ldots, a_n\right) \in V. \qquad (2.2)$$

(Λέμε ότι μια m-άδα πολυωνύμων $(T_1, \ldots, T_m)$ *εκπροσωπεί* την πολυωνυμική απεικόνιση $\varphi : V \longrightarrow W$ όταν πληρούται η συνθήκη (2.2) και καλούμε τις $T_1, \ldots, T_m$ **συναρτήσεις συντεταγμένων τής** φ.)

2.1.11 Παραδείγματα. (a) Η απεικόνιση παραμετρήσεως τής συνήθους παραβολής είναι πολυωνυμική και αμφιρριπτική:

$$\varphi : \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbf{V}\left(\mathsf{Y} - \mathsf{X}^2\right) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}, \quad \varphi\left(t\right) := \left(t, t^2\right).$$

(b) Εάν $V := \mathbf{V}(\mathsf{Y}-\mathsf{X}^2, \mathsf{Z}-\mathsf{X}^3) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ και $W := \mathbf{V}(\mathsf{Y}^3-\mathsf{Z}^2) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$, τότε η προβολή $\mathbb{A}^3_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$ (στα Y, Z), περιοριζόμενη στο V, μας παρέχει μια πολυωνυμική απεικόνιση από το V στο W, καθότι οι συντεταγμένες των σημείων τής εικόνας της $\{(t^2, t^3) \mid t \in \mathbf{k}\}$ ικανοποιούν την εξίσωση που ορίζει το W.

(c) Εάν $V := \mathbf{V}(\mathsf{Y}-\mathsf{X}^2) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$, τότε τόσον το πολυώνυμο $F = \mathsf{X}^3+\mathsf{Y}^3$ όσον και το πολυώνυμο $G = \mathsf{X}^3+\mathsf{Y}^3+\mathsf{X}^4\mathsf{Y}-\mathsf{X}^6$ εκπροσωπούν την *ίδια* πολυωνυμική συνάρτηση επί τού V.

2.1.12 Σημείωση. (a) Κάθε απεικόνιση $\varphi : V \longrightarrow W$ επάγει έναν ομομορφισμό δακτυλίων

$$\widetilde{\varphi} : \mathfrak{I}(W, \mathbf{k}) \longrightarrow \mathfrak{I}(V, \mathbf{k}), \quad f \longmapsto f \circ \varphi$$

καθοριζόμενον από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "f\circ\varphi"] & \\ W \arrow[r, "f"'] & \mathbf{k} \end{tikzcd}$$

(b) Εάν η $\varphi : V \longrightarrow W$ είναι πολυωνυμική απεικόνιση, τότε

$$\widetilde{\varphi}(\mathbf{k}[W]) \subseteq \mathbf{k}[V],$$

οπότε ο περιορισμός της είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων (και, επιπροσθέτως, ένας ομομορφισμός $\mathbf{k}$-αλγεβρών, αφού $\widetilde{\varphi}|_{\mathbf{k}} = \mathrm{Id}_{\mathbf{k}}$):

$$\Gamma(W) \cong \mathbf{k}[W] \ni f \overset{\widetilde{\varphi}|_{\mathbf{k}[W]}}{\longmapsto} f \circ \varphi \in \mathbf{k}[V] \cong \Gamma(V).$$

(c) Εφαρμόζοντας την πρόταση 2.1.3 για καθεμιά των συντεταγμένων διαπιστώνουμε ότι δυο m-άδες πολυωνύμων $T = (T_1, \ldots, T_m)$ και $T' = (T'_1, \ldots, T'_m)$ εκπροσωπούν *την ίδια* φ εάν και μόνον εάν

$$T_j - T'_j \in \mathbf{I}(V), \ \ \forall j \in \{1, \ldots, m\}.$$

(d) Εάν $V = \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$, $W = \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$, και τα $T_1, \ldots, T_m \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ ορίζουν μια πολυωνυμική απεικόνιση

$$T = (T_1, \ldots, T_m) : \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}},$$

τότε τα $T_1, \ldots, T_m$ είναι μονοσημάντως καθορισμένα μέσω τής T.

2.1.13 Πρόταση. *Έστω ότι τα $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ και $W \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ είναι δυο αλγεβρικά σύνολα, και ότι οι $\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n$ (και αντιστοίχως, οι $\mathsf{Y}_1, \ldots, \mathsf{Y}_m$) είναι οι «συναρτήσεις συντεταγμένων» που παράγουν τον $\mathbf{k}[V]$ (και αντιστοίχως, τον $\mathbf{k}[W]$). Τότε μια απεικόνιση $\varphi : V \longrightarrow W$ είναι πολυωνυμική εάν και μόνον εάν $T_j := \mathsf{Y}_j \circ \varphi \in \mathbf{k}[V]$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, m\}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν η $\varphi : V \longrightarrow W$ είναι πολυωνυμική απεικόνιση, τότε $T_j(P) = F_j(P)$ για κάποιο $F_j \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ και για κάθε $P \in V$, οπότε η T_j είναι εξ ορισμού μια πολυωνυμική συνάρτηση ανήκουσα στον $\mathbf{k}[V]$ (για κάθε $j \in \{1, \ldots, m\}$). Και αντιστρόφως· εάν $T_j := \mathsf{Y}_j \circ \varphi \in \mathbf{k}[V]$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, m\}$, τότε η m-άδα πολυωνύμων $(T_1, \ldots, T_m)$ εκπροσωπεί την $\varphi : V \longrightarrow W$ ως πολυωνυμική απεικόνιση, καθότι η συνθήκη (2.2) ικανοποιείται. □

2.1.14 Πρόταση. *Κάθε πολυωνυμική απεικόνιση $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \supseteq V \xrightarrow{\varphi} W \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ μεταξύ αλγεβρικών συνόλων είναι συνεχής ως προς την τοπολογία Zariski.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $Z \subseteq W$ ένα κλειστό υποσύνολο τού W ως προς την τοπολογία Zariski. Αρκεί να αποδειχθεί ότι το $\varphi^{-1}(Z)$ είναι κλειστό υποσύνολο τού V ως προς την τοπολογία Zariski. Επειδή υπάρχουν πολυώνυμα $T_1, \ldots, T_m \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ και πολυώνυμα $F_1, \ldots, F_r \in \mathbf{k}[\mathsf{Y}_1, \ldots, \mathsf{Y}_m]$ με

$$\varphi\left(a_1, \ldots, a_n\right) = \left(T_1\left(a_1, \ldots, a_n\right), \ldots, T_m\left(a_1, \ldots, a_n\right)\right), \ \ \forall \left(a_1, \ldots, a_n\right) \in V,$$

και

$$Z = \left\{(b_1, \ldots, b_m) \in W \mid F_1(b_1, \ldots, b_m) = \cdots = F_r(b_1, \ldots, b_m) = 0\right\},$$

έχουμε

$$\varphi^{-1}(Z) = \left\{(a_1, \ldots, a_n) \in V \mid \varphi\left(a_1, \ldots, a_n\right) \in Z\right\}$$

$$= \left\{(a_1, \ldots, a_n) \in V \mid F_i(T_1\left(a_1, \ldots, a_n\right), \ldots, T_m\left(a_1, \ldots, a_n\right)) = 0, \forall i, 1 \leq i \leq r\right\},$$

οπότε το $\varphi^{-1}(Z)$ είναι αλγεβρικό υποσύνολο τού V. □

2.1.15 Πρόταση. *Έστω ότι τα $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ και $W \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ είναι δυο αλγεβρικά σύνολα. Τότε υπάρχει μια φυσική αμφίρριψη*

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c}\text{πολυωνυμικές} \\ \text{απεικονίσεις } V \longrightarrow W\end{array}\right\} \ni \varphi \longmapsto \widetilde{\varphi}\big|_{\mathbf{k}[W]} \in \left\{\begin{array}{c}\text{ομομορφισμοί δακτυλίων} \\ (\Gamma(W) \cong)\ \mathbf{k}[W] \longrightarrow \mathbf{k}[V]\ (\cong \Gamma(V))\end{array}\right\}}$$

(Μάλιστα, κάθε τέτοια πολυωνυμική απεικόνιση $\varphi : V \longrightarrow W$ αποτελεί τον περιορισμό μιας πολυωνυμικής απεικονίσεως $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ επί τού V.)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Υποθέτουμε ότι οι $\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n$ (και αντιστοίχως, οι $\mathsf{Y}_1, \ldots, \mathsf{Y}_m$) είναι οι συναρτήσεις συντεταγμένων που παράγουν τον $\mathbf{k}[V]$ (και αντιστοίχως, τον $\mathbf{k}[W]$). Εάν οι $\varphi, \psi : V \longrightarrow W$ είναι δυο πολυωνυμικές απεικονίσεις με $\widetilde{\varphi}\left|_{\mathbf{k}[W]}\right. = \widetilde{\psi}\left|_{\mathbf{k}[W]}\right.$, τότε

$$\widetilde{\varphi}\left|_{\mathbf{k}[W]}\right. (\mathsf{Y}_j) = \widetilde{\psi}\left|_{\mathbf{k}[W]}\right. (\mathsf{Y}_j) \Longrightarrow \mathsf{Y}_j \circ \varphi = \mathsf{Y}_j \circ \psi, \ \forall j \in \{1, \ldots, m\} \Longrightarrow \varphi = \psi,$$

οπότε η απεικόνιση τής εκφωνήσεως είναι ενριπτική. Αρκεί λοιπόν να αποδειχθεί ότι η εν λόγω απεικόνιση είναι και επιρριπτική. Έστω

$$\alpha : \Gamma(W) = \mathbf{k}[\mathsf{Y}_1, \ldots, \mathsf{Y}_m] \,/\, \mathbf{I}(W) \longrightarrow \Gamma(V) = \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] \,/\, \mathbf{I}(V)$$

ένας ομομορφισμός δακτυλίων (με $\alpha\left|_{\mathbf{k}}\right. = \mathrm{Id}_{\mathbf{k}}$). Επιλέγουμε πολυώνυμα $T_1, \ldots, T_m$ από τον $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$, τέτοια ώστε

$$\alpha(\mathsf{Y}_j + \mathbf{I}(W)) = T_j + \mathbf{I}(V), \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Τότε η $T = (T_1, \ldots, T_m)$ αποτελεί μια πολυωνυμική απεικόνιση από τον $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ στον $\mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$, η οποία επάγει μια απεικόνιση

$$\widetilde{T} : \Gamma(\mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}) = \mathbf{k}[\mathsf{Y}_1, \ldots, \mathsf{Y}_m] \longrightarrow \Gamma(\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}) = \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n].$$

Για κάθε $F + \mathbf{I}(W) \in \Gamma(W)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha(F + \mathbf{I}(W)) &= \alpha(F(\mathsf{Y}_1, \ldots, \mathsf{Y}_m) + \mathbf{I}(W)) = F(\alpha(\mathsf{Y}_1), \ldots, \alpha(\mathsf{Y}_m)) + \mathbf{I}(V) \\ &= F(T_1, \ldots, T_m) + \mathbf{I}(V) = (F \circ T) + \mathbf{I}(V) = \widetilde{T}(F) + \mathbf{I}(V). \end{aligned}$$

Εν συνεχεία θεωρούμε τυχόν $(a_1, \ldots, a_n) \in V$. Εάν $F \in \mathbf{I}(W)$, τότε

$$\begin{aligned} &F(T_1, \ldots, T_m) + \mathbf{I}(V) = \alpha(F + \mathbf{I}(W)) \\ &= \alpha(\mathbf{I}(W)) = \mathbf{I}(V) \Longrightarrow F(T_1, \ldots, T_m) = \widetilde{T}(F) \in \mathbf{I}(V), \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι $\widetilde{T}(\mathbf{I}(W)) \subseteq \mathbf{I}(V) \Longrightarrow T(a_1, \ldots, a_n) \in W \Longrightarrow T(V) \subseteq W$. Άρα για κάθε $F + \mathbf{I}(W) \in \Gamma(W)$,

$$\alpha(F + \mathbf{I}(W)) = (F + \mathbf{I}(W)) \circ T$$

και για την $\varphi := T\left|_V\right.$ ισχύει $\widetilde{\varphi}\left|_{\mathbf{k}[W]}\right. = \theta_V^{-1} \circ \alpha \circ \theta_W$ (πρβλ. πρόταση 2.1.3). □

2.1.16 Ορισμός. Έστω ότι τα $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ και $W \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ είναι δυο αλγεβρικά σύνολα. Μια πολυωνυμική απεικόνιση $V \xrightarrow{\varphi} W$ καλείται **ισομορφισμός** μεταξύ των V και W όταν υπάρχει μια πολυωνυμική απεικόνιση $\psi : W \longrightarrow V$, τέτοια ώστε να ισχύουν οι ισότητες $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_V$ και $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_W$. Λέμε πως τα V, W είναι **ισόμορφα** (και χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $V \cong W$) όταν υφίσταται ένας τέτοιου είδους ισομορφισμός μεταξύ αυτών. (Η "$\cong$" αποτελεί προφανώς μια σχέση ισοδυναμίας.) Επιπροσθέτως, κάθε ισομορφισμός έχων ως πεδίο ορισμού και ως πεδίο τιμών του το ίδιο συσχετικό αλγεβρικό σύνολο V καλείται **αυτομορφισμός τού** V.

2.1.17 Παραδείγματα. (a) Οι απεικονίσεις $\varphi : \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ τής μορφής

$$\varphi(t) = at + b, \ \ \forall t \in \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}, \text{ για κάποια } a \in \mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\}, \ b \in \mathbf{k},$$

είναι ισομορφισμοί. (Μάλιστα, *κάθε* αυτομορφισμός τού $\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ οφείλει να είναι αυτής τής μορφής. Βλ. άσκηση **A-2-7** (a).)

(b) Η πολυωνυμική απεικόνιση

$$\varphi : \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \longrightarrow V = \mathbf{V}\left(\mathsf{Y} - \mathsf{X}^{\nu}\right) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}, \quad \varphi(t) := (t, t^{\nu}), \ \ \nu \in \mathbb{N},$$

είναι ισομορφισμός με την $\mathbb{A}^2_{\mathbf{k}} \ni (a_1, a_2) \longmapsto a_1 \in \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ ως αντίστροφό της, ενώ αντιθέτως η

$$\varphi : \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \longrightarrow V = \mathbf{V}\left(\mathsf{Y}^2 - \mathsf{X}^3\right) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}, \quad \varphi(t) := \left(t^2, t^3\right),$$

δεν είναι ισομορφισμός, παρότι είναι αμφιρριπτική πολυωνυμική απεικόνιση *και* ομοιομορφισμός μεταξύ των τοπολογικών χώρων $\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ και V (βλ. άσκηση **A-2-8** (a)).

(c) Έστω $\mathbf{k}$ ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα. Εάν $V := \mathbf{V}(I) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$ και $W := \mathbf{V}(J) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$, όπου

$$I := \left\langle \mathsf{X}_2^2 - \mathsf{X}_1^3 + 1 \right\rangle \subset \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2], \quad J := \left\langle \mathsf{Y}_2^3 - \mathsf{Y}_1^3 + 1, \mathsf{Y}_3 - \mathsf{Y}_1^2 \right\rangle \subset \mathbf{k}[\mathsf{Y}_1, \mathsf{Y}_2, \mathsf{Y}_3],$$

τότε η πολυωνυμική απεικόνιση $\varphi(t, t') := (t, t', t^2)$ από το V στο W επάγει έναν ισομορφισμό

$$\theta_V \circ \widetilde{\varphi}\,\big|_{\mathbf{k}[W]} \circ \theta_W^{-1} : \Gamma(W) \longrightarrow \Gamma(V), \ \ G(\mathsf{Y}_1, \mathsf{Y}_2, \mathsf{Y}_3) + J \longmapsto G(\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_1^2) + I,$$

μεταξύ των δακτυλίων συντεταγμένων των W και V, οπότε τα V, W είναι μεταξύ τους ισόμορφα επί τη βάσει τού ακολούθου πορίσματος (πρβλ. άσκηση **A-2-4**):

2.1.18 Πόρισμα. *Μια πολυωνυμική απεικόνιση $\varphi : V \longrightarrow W$ μεταξύ δυο συσχετικών αλγεβρικών συνόλων V και W είναι ισομορφισμός εάν και μόνον εάν ο $\widetilde{\varphi}\,\big|_{\mathbf{k}[W]}$ είναι ισομορφισμός $\mathbf{k}$-αλγεβρών.* (*Ιδιαιτέρως, δυο συσχετικά αλγεβρικά σύνολα είναι ισόμορφα εάν και μόνον εάν οι δακτύλιοι συντεταγμένων τους είναι ισόμορφοι.*)

Εύχρηστες αναγκαίες και ικανές συνθήκες για να είναι ο $\widetilde{\varphi}\,\big|_{\mathbf{k}[W]}$ επιμορφισμός (και αντιστοίχως, μονομορφισμός) δίδονται στην πρόταση 2.1.20.

2.1.19 Λήμμα. *Έστω $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \supseteq V \xrightarrow{\varphi} W \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ μια πολυωνυμική απεικόνιση μεταξύ δυο αλγεβρικών συνόλων V και W. Τότε*

$$\mathrm{Ker}(\widetilde{\varphi}\,\big|_{\mathbf{k}[W]}) = \mathbf{I}_W(\varphi(V)) = \mathbf{I}_W\left(\mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}}(\varphi(V))\right).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για μια $f \in \mathbf{k}[W]$ έχουμε

$$f(\mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}}(\varphi(V))) = \{0\} \Longleftrightarrow f(\varphi(V)) = \{0\},$$

διότι (σύμφωνα με την πρόταση 2.1.14) η φ είναι συνεχής ως προς την τοπολογία Zariski. Κι επειδή

$$f(\varphi(V)) = \widetilde{\varphi}\left|_{\mathbf{k}[W]}\right.(f) = 0 \Longleftrightarrow \widetilde{\varphi}\left|_{\mathbf{k}[W]}\right. = 0,$$

ο ισχυρισμός είναι αληθής. □

2.1.20 Πρόταση. *Έστω $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \supseteq V \xrightarrow{\varphi} W \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ μια πολυωνυμική απεικόνιση μεταξύ δυο αλγεβρικών συνόλων V και W. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*
(a) *Ο $\widetilde{\varphi}\left|_{\mathbf{k}[W]}\right.$ είναι επιμορφισμός $\mathbf{k}$-αλγεβρών εάν και μόνον εάν η εικόνα $\varphi(V)$ είναι κλειστό υποσύνολο τού W (ως προς την τοπολογία Zariski) και η $V \xrightarrow{\varphi} \varphi(V)$ ισομορφισμός.*
(b) *Ο $\widetilde{\varphi}\left|_{\mathbf{k}[W]}\right.$ είναι μονομορφισμός $\mathbf{k}$-αλγεβρών εάν και μόνον εάν η εικόνα $\varphi(V)$ είναι πυκνό υποσύνολο τού W (ως προς την τοπολογία Zariski).*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a) Έστω $P \in \mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}}(\varphi(V))$ και έστω

$$\mathfrak{m}_P := \mathbf{I}_W(\{P\}) \subset \mathbf{k}[\mathsf{Y}_1, \ldots, \mathsf{Y}_m]$$

το μεγιστοτικό ιδεώδες που αντιστοιχεί στο P. Τότε

$$\mathfrak{m}_P \supseteq \mathbf{I}_W(\mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}}(\varphi(V))) = \mathrm{Ker}(\widetilde{\varphi}\left|_{\mathbf{k}[W]}\right.)$$

(βλ. λήμμα 2.1.19). Εάν ο $\widetilde{\varphi}\left|_{\mathbf{k}[W]}\right.$ είναι επιμορφισμός, τότε οι μέσω αυτού επαγόμενες απεικονίσεις $\mathbf{k}[W]/\mathrm{Ker}(\widetilde{\varphi}\left|_{\mathbf{k}[W]}\right.) \longrightarrow \mathbf{k}[V]$ και

$$\mathbf{k}[W]/\mathfrak{m}_P \longrightarrow \mathbf{k}[V]\,/\widetilde{\varphi}\left|_{\mathbf{k}[W]}\right.(\mathfrak{m}_P)$$

είναι ισομορφισμοί. Επομένως, το $\widetilde{\varphi}\left|_{\mathbf{k}[W]}\right.(\mathfrak{m}_P)$ είναι μεγιστοτικό ιδεώδες τού δακτυλίου συντεταγμένων $\mathbf{k}[V]$ τού V και αντιστοιχεί (σύμφωνα με το θεώρημα 2.1.9) σε ένα μονοσύνολο $\mathbf{V}_V(\widetilde{\varphi}\left|_{\mathbf{k}[W]}\right.(\mathfrak{m}_P)) = \{Q\}$.

Εάν η m-άδα πολυωνύμων $T = (T_1, \ldots, T_m)$ εκπροσωπεί την πολυωνυμική απεικόνιση φ και $P = (a_1, \ldots, a_m)$, τότε

$$\mathfrak{m}_P = \langle \mathsf{Y}_1 - a_1, \ldots, \mathsf{Y}_m - a_m \rangle \Longrightarrow \widetilde{\varphi}\left|_{\mathbf{k}[W]}\right.(\mathfrak{m}_P) = \langle T_1 - a_1, \ldots, T_n - a_m \rangle$$

$$\Longrightarrow \{Q\} = \mathbf{V}_V(\widetilde{\varphi}\left|_{\mathbf{k}[W]}\right.(\mathfrak{m}_P)) = T^{-1}(\{P\}) \cap V = \varphi^{-1}(\{P\}).$$

Εξ αυτού έπεται ότι η φ είναι ενριπτική και ότι $\varphi(Q) = P$. Άρα η εικόνα $\varphi(V)$ είναι κλειστό υποσύνολο τού W (ως προς την τοπολογία Zariski) και η $V \xrightarrow{\varphi} \varphi(V)$ αμφίρριψη. Τέλος, επειδή η απεικόνιση

$$\widetilde{\varphi}\left|_{\mathbf{k}[\varphi(V)]}\right. : \mathbf{k}[\varphi(V)] = \mathbf{k}[W]/\mathbf{I}_W(\varphi(V)) \longrightarrow \mathbf{k}[V] \tag{2.3}$$

(όπως προαναφέραμε) είναι ισομορφισμός $\mathbf{k}$-αλγεβρών, η $V \xrightarrow{\varphi} \varphi(V)$ είναι ισομορφισμός συσχετικών αλγεβρικών συνόλων λόγω τού πορίσματος 2.1.18.

Και αντιστρόφως· εάν η εικόνα $\varphi(V)$ είναι κλειστό υποσύνολο τού W (ως προς την τοπολογία Zariski) και η $V \xrightarrow{\varphi} \varphi(V)$ ισομορφισμός, τότε, λόγω τού πορίσματος 2.1.18, η (2.5.1) είναι ισομορφισμός και η $\widetilde{\varphi}\,|_{\mathbf{k}[W]} : \mathbf{k}[W] \longrightarrow \mathbf{k}[V]$ επιμορφισμός $\mathbf{k}$-αλγεβρών.

(b) Κατά το λήμμα 2.1.19,

$$\mathrm{Ker}(\widetilde{\varphi}\,|_{\mathbf{k}[W]}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{I}_W\left(\mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}}(\varphi(V))\right) = \{0\},$$

με την τελευταία συνθήκη ισοδυναμούσα με την $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}}(\varphi(V)) = W$. □

2.1.21 Σημείωση. Κατά τα προαναφερθέντα, ο δακτύλιος συντεταγμένων $\Gamma(V) \cong \mathbf{k}[V]$ ενός αλγεβρικού συνόλου $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ (και αντιστοίχως, μιας συσχετικής ποικιλότητας V) είναι μια πεπερασμένως παραγόμενη $\mathbf{k}$-άλγεβρα (και αντιστοίχως, μια πεπερασμένως παραγόμενη $\mathbf{k}$-άλγεβρα που είναι ακεραία περιοχή). Επιπροσθέτως, ο $\Gamma(V) \cong \mathbf{k}[V]$ είναι ανηγμένος δακτύλιος[3], διότι κατά την πρόταση 1.3.3 το $\mathbf{I}(V)$ είναι ριζικό ιδεώδες τού πολυωνυμικού δακτυλίου $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$, οπότε

$$\Gamma(V)_{\mathrm{red}} = (\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] \,/\, \mathbf{I}(V))_{\mathrm{red}} = \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] \,/\, \mathrm{Rad}(\mathbf{I}(V)) = \Gamma(V)\,.$$

Ως εκ τούτου, όταν το $\mathbf{k}$ είναι *αλγεβρικώς κλειστό*, ισχύει *και το αντίστροφο*: Εάν η A είναι μια πεπερασμένως παραγόμενη, ανηγμένη $\mathbf{k}$-άλγεβρα (και αντιστοίχως, μια πεπερασμένως παραγόμενη, ανηγμένη $\mathbf{k}$-άλγεβρα που είναι ακεραία περιοχή) με τα $a_1, \ldots, a_n$ ως γεννήτορες, τότε ο επιμορφισμός αποτιμήσεως

$$\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] \ni F \longmapsto F(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{k}[a_1, \ldots, a_n] = A$$

με ένα ιδεώδες I ως πυρήνα του μας οδηγεί (μέσω τού θεωρήματος 1.1.10) στο ότι

$$\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]/I \cong A = A_{\mathrm{red}} \cong \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]/\mathrm{Rad}(I) \Longrightarrow I = \mathrm{Rad}(I).$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν το θεώρημα 1.8.2 (ή το πόρισμα 1.8.3) συνάγουμε ότι και το $V := \mathbf{V}(I)$ είναι ένα συσχετικό αλγεβρικό σύνολο (και αντιστοίχως, μια συσχετική ποικιλότητα) εντός τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ με

$$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \mathrm{Rad}(I) = I \Longrightarrow A \cong \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]/\mathbf{I}(V) =: \Gamma(V) \cong \mathbf{k}[V].$$

Τούτο το συμπέρασμα διατυπώνεται κομψότερα μέσω τής ορολογίας τής Θεωρίας Κατηγοριών[4].

[3]Ένας δακτύλιος R καλείται **ανηγμένος δακτύλιος** όταν το 0_R είναι το μοναδικό μηδενοδύναμο στοιχείο τού R (ή, ισοδυνάμως, όταν ισχύει η ισότητα $\mathrm{Rad}(\{0_R\}) = \{0_R\}$). Σε οιονδήποτε δακτύλιο R κανείς αντιστοιχεί τον ανηγμένο δακτύλιο $R_{\mathrm{red}} := R/\mathrm{Rad}(\{0_R\})$. Σημειωτέον ότι, εάν το I είναι ένα ιδεώδες ενός δακτυλίου R, τότε λαμβάνουμε τον ισομορφισμό δακτυλίων $(R/I)_{\mathrm{red}} = (R/I)/(\mathrm{Rad}(I)/I) \cong R/\mathrm{Rad}(I)$.

[4]Βλ. π.χ. H. Schubert: *Categories*, Springer-Verlag, 1972.

2.1.22 Ορισμός. Μια **κατηγορία** $\mathcal{C}$ συνίσταται από μια **κλάση**[5] **αντικειμένων** $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ και μια οικογένεια συνόλων (καλουμένων **μορφισμών**) $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ για οιαδήποτε αντικείμενα $A,B\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, καθώς και από απεικονίσεις

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)\times\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C)\longrightarrow\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,C),\ \ (f,g)\longmapsto g\circ f,$$

με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(a) Η "$\circ$" είναι προσεταιριστική, δηλαδή $(g\circ f)\circ h=g\circ(f\circ h)$.

(b) Για κάθε αντικείμενο $A\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ υπάρχει ένας (μονοσημάντως ορισμένος) μορφισμός $\mathrm{Id}_A\in\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,A)$ για τον οποίο ισχύουν οι ισότητες

$$f\circ\mathrm{Id}_A=f,\quad \mathrm{Id}_A\circ g=g,\quad \forall f\in\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B),\ \ \forall g\in\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,A).$$

Ένας μορφισμός $f\in\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ καλείται **$\mathcal{C}$-ισομορφισμός** όταν υπάρχει $g\in\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,A)$ για τον οποίο ισχύουν οι ισότητες

$$g\circ f=\mathrm{Id}_A,\quad f\circ g=\mathrm{Id}_B.$$

Όταν, δοθέντος ενός $\mathcal{C}$-ισομορφισμού $f\in\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$, ένας τέτοιος μορφισμός g υπάρχει, τότε είναι κατ' ανάγκην μονοσημάντως ορισμένος (ως προς το να πληροί τις ανωτέρω ισότητες), συμβολίζεται συνήθως ως f^{-1} και καλείται **αντίστροφος τού** f.

2.1.23 Ορισμός. Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία. Μια **υποκατηγορία** $\mathcal{C}'$ **τής** $\mathcal{C}$ είναι μια κατηγορία με τις εξής ιδιότητες:

(a) Κάθε αντικείμενο τής $\mathcal{C}'$ είναι και αντικείμενο τής $\mathcal{C}$.

(b) Για οιαδήποτε $A,B\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ έχουμε $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(A,B)\subseteq\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$.

(c) Για οιοδήποτε ζεύγος $(f,g)\in\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(A,B)\times\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(B,C)$ η σύνθεση $g\circ f$ εντός τής $\mathcal{C}'$ ισούται με τη σύνθεση των f και g εντός τής $\mathcal{C}$.

2.1.24 Ορισμός. Μια υποκατηγορία $\mathcal{C}'$ μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ καλείται **πλήρης υποκατηγορία τής** $\mathcal{C}$ όταν για οιαδήποτε $A,B\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ ισχύει η ισότητα $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(A,B)=\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$.

2.1.25 Παραδείγματα. (a) Οι *κατηγορίες* $\mathfrak{Sets}$, $\mathfrak{Groups}$ και $\mathfrak{Mod}_R$ *των συνόλων, των ομάδων* και *των R-μοδίων* (με τις συνήθεις απεικονίσεις, τους ομομορφισμούς ομάδων και τους ομομορφισμούς R-μοδίων, αντιστοίχως, ως μορφισμούς τους).

(b) Η *κατηγορία* $\mathfrak{Abgroups}$ *των αβελιανών ομάδων*, η οποία αποτελεί μια πλήρη υποκατηγορία τής κατηγορίας $\mathfrak{Groups}$.

(c) Η *κατηγορία* $\mathfrak{Top}$ *των τοπολογικών χώρων* (με τις συνεχείς απεικονίσεις ως μορφισμούς της).

[5] «Κλάση» υπό την έννοια τής Αξιωματικής Συνολοθεωρίας των Gödel και Bernays.

(d) Η *κατηγορία των συσχετικών αλγεβρικών συνόλων* $\mathbf{k}$-$\mathfrak{AASets}$ με

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{AASets}) := \left\{ \begin{array}{c} \text{αλγεβρικά σύνολα εντός} \\ \text{ενός συσχετικού χώρου } \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \end{array} \right\},$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{AASets}}(V,W) := \left\{ \begin{array}{c} \text{πολυωνυμικές απεικονίσεις} \\ \varphi : V \longrightarrow W \end{array} \right\}.$$

(e) Η *κατηγορία των συσχετικών ποικιλοτήτων* $\mathbf{k}$-$\mathfrak{AVar}$, όπου

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{AVar}) := \left\{ \begin{array}{c} \text{συσχετικές ποικιλότητες εντός} \\ \text{ενός συσχετικού χώρου } \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \end{array} \right\},$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{AVar}}(V,W) := \left\{ \begin{array}{c} \text{πολυωνυμικές απεικονίσεις} \\ \varphi : V \longrightarrow W \end{array} \right\},$$

η οποία αποτελεί μια πλήρη υποκατηγορία τής $\mathbf{k}$-$\mathfrak{AASets}$.

(f) Η *κατηγορία* $\mathbf{k}$-$\mathfrak{Alg}^{\pi.\pi.\alpha.}$ *των πεπερασμένως παραγομένων, ανηγμένων* $\mathbf{k}$*-αλγεβρών* (με τους ομομορφισμούς $\mathbf{k}$-αλγεβρών ως μορφισμούς της), καθώς και η πλήρης υποκατηγορία της $\mathbf{k}$-$\mathfrak{Alg}^{\pi.\pi.\alpha.\alpha.\pi.}$ έχουσα ως αντικείμενά της τις πεπερασμένως παραγόμενες, ανηγμένες $\mathbf{k}$-άλγεβρες που είναι ταυτοχρόνως ακέραιες περιοχές.

2.1.26 Ορισμός. Έστω ότι οι $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ είναι δυο κατηγορίες. Ένας **συναλλοίωτος** (και αντιστοίχως, **ανταλλοίωτος**) **συναρτητής** $\mathbf{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ συνίσταται από μια απεικόνιση

$$\mathbf{F} : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$$

και απεικονίσεις

$$\mathbf{F} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}(A),\mathbf{F}(B)), \quad f \longmapsto \mathbf{F}(f),$$

$$(\text{και αντιστοίχως, } \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}(B),\mathbf{F}(A)), \quad f \longmapsto \mathbf{F}(f))$$

με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(a) $\mathbf{F}(\mathrm{Id}_A) = \mathrm{Id}_{\mathbf{F}(A)}, \forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

(b) Για κάθε $(f,g) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C)$ ισχύει η ισότητα

$$\mathbf{F}(g \circ f) = \mathbf{F}(g) \circ \mathbf{F}(f) \quad (\text{και αντιστοίχως, } \mathbf{F}(g \circ f) = \mathbf{F}(f) \circ \mathbf{F}(g)).$$

2.1.27 Ορισμός. Έστω ότι οι $\mathbf{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ και $\mathbf{G} : \mathcal{D} \rightsquigarrow \mathcal{E}$ είναι δυο συναρτητές. Ως **σύνθεση** αυτών ορίζεται ο συναρτητής $\mathbf{G} \circ \mathbf{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{E}$ ο συνιστώμενος από τις απεικονίσεις (μεταξύ αντικειμένων και μορφισμών, αντιστοίχως):

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \ni A \longmapsto \mathbf{G}(\mathbf{F}(A)) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E}), \ \ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \ni f \longmapsto \mathbf{G}(\mathbf{F}(f)).$$

(Ο $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ είναι συναλλοίωτος όταν αμφότεροι οι $\mathbf{F}$ και $\mathbf{G}$ είναι είτε συναλλοίωτοι είτε ανταλλοίωτοι, και ανταλλοίωτος όταν ο ένας εκ των $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ είναι συναλλοίωτος και ο άλλος ανταλλοίωτος.)

2.1.28 Παραδείγματα. (a) Επί οιασδήποτε κατηγορίας $\mathcal{C}$ ορίζεται ο *ταυτοτικός συναρτητής* $\mathbf{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}$ με $\mathbf{Id}_{\mathcal{C}}(A) := A, \forall\, A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ και $\mathbf{Id}_{\mathcal{C}}(f) := f, \forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$.
(b) Οι *επιλήσμονες (συναλλοίωτοι) συναρτητές*

$$\mathfrak{Groups} \rightsquigarrow \mathfrak{Sets}, \ \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Sets}, \ \mathfrak{Top} \rightsquigarrow \mathfrak{Sets},$$

είναι αυτοί που «ξεχνούν» τις εκάστοτε (αλγεβρικές ή τοπολογικές) δομές.
(c) Ο *συναρτητής αβελιανοποιήσεως* $\mathbf{F} : \mathfrak{Groups} \rightsquigarrow \mathfrak{Abgroups}$ είναι ο συναλλοίωτος συναρτητής

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Groups}) \ni G \longmapsto \mathbf{F}(G) := G^{\mathrm{ab}} := G/[G, G] \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Abgroups}),$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Groups}}(G, H) \ni f \longmapsto \mathbf{F}(f) := \overline{f} \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Abgroups}}(G^{\mathrm{ab}}, H^{\mathrm{ab}}),$$

όπου $[G, G]$ η υποομάδα τής G η παραγόμενη από όλους τους μεταθέτες

$$[g, g'] := gg'g^{-1}(g')^{-1}, \ \ g, g' \in G,$$

και

$$\overline{f} : G^{\mathrm{ab}} \longrightarrow H^{\mathrm{ab}}, \ \ g + [G, G] \longmapsto f(g) + [H, H].$$

(d) Έστω $M \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R)$. Ο συναρτητής $\mathbf{F} : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$,

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni N \longmapsto \mathbf{F}(N) := M \otimes_R N \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Mod}_R}(N, N') \ni f \longmapsto \mathbf{F}(f) := \mathrm{Id}_M \bar{\otimes} f \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Mod}_R}(M \otimes_R N, M \otimes_R N'),$$

όπου $M \otimes_R N$ *το τανυστικό γινόμενο*[6] των M και N, είναι συναλλοίωτος.

[6]Για τον ορισμό τού τανυστικού γινομένου R-μοδίων και τη μελέτη των θεμελιωδών ιδιοτήτων του βλ. π.χ. D.S. Dummit & R.M. Foote: *Abstract Algebra*, third edition, J. Wiley & Sons, Inc., 2004, ενότητα 10.4.

(e) Έστω $N \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R)$. Ο συναρτητής $\mathbf{F} : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$,

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni M \longmapsto \mathbf{F}(M) := \mathrm{Hom}_R(M, N) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Hom}_R(M, M') =: \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Mod}_R}(M, M') \ni f \longmapsto \mathbf{F}(f) := \mathrm{Hom}_R(f, \mathrm{Id}_N),$$

όπου

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) := \{\text{ομομορφισμοί } R\text{-μοδίων } g : M \longrightarrow N\},$$

και

$$\mathrm{Hom}_R(f, \mathrm{Id}_N) : \mathrm{Hom}_R(M', N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N), \;\; g \longmapsto g \circ f,$$

είναι ανταλλοίωτος.

(f) Ο συναρτητής $H_n^{\mathrm{sing}} : \mathfrak{Top} \rightsquigarrow \mathfrak{Abgroups}$, ο οποίος στέλνει κάθε τοπολογικό χώρο X να απεικονισθεί στην *n-οστή ιδιάζουσα ομάδα ομολογίας του* $H_n^{\mathrm{sing}}(X;\mathbb{Z})$ και κάθε συνεχή απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ (μεταξύ δυο τοπολογικών χώρων X, Y) στον μέσω αυτής επαγόμενο ομομορφισμό αβελιανών ομάδων $H_n^{\mathrm{sing}}(f) : H_n^{\mathrm{sing}}(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_n^{\mathrm{sing}}(Y;\mathbb{Z})$, είναι ένας συναλλοίωτος συναρτητής[7].

2.1.29 Ορισμός. Ένας συναλλοίωτος (και αντιστοίχως, ένας ανταλλοίωτος) συναρτητής $\mathbf{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ καλείται **απολύτως πιστός** όταν οι απεικονίσεις

$$\mathbf{F} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}(A), \mathbf{F}(B)), \quad f \longmapsto \mathbf{F}(f),$$

$$(\text{και αντιστοίχως, } \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}(B), \mathbf{F}(A)), \quad f \longmapsto \mathbf{F}(f))$$

είναι αμφιρριπτικές για οιαδήποτε $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

2.1.30 Ορισμός. (a) Έστω ότι οι $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ είναι δυο συναλλοίωτοι (και αντιστοίχως, δυο ανταλλοίωτοι συναρτητές). Ένας **φυσικός μετασχηματισμός** $h : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{G}$ είναι μια οικογένεια μορφισμών $\{h(A) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}(A), \mathbf{G}(A)) \mid A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\}$, τέτοια ώστε για κάθε $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F}(A) \arrow[r, "h(A)"] \arrow[d, "\mathbf{F}(f)"'] & \mathbf{G}(A) \arrow[d, "\mathbf{G}(f)"] \\ \mathbf{F}(B) \arrow[r, "h(B)"] & \mathbf{G}(B) \end{tikzcd}$$

[7] Βλ. π.χ. C. Kosniowski: *A First Course in Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 1980, Thm. 29.12, σελ. 245.

και αντιστοίχως, το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F}(B) & \xrightarrow{h(B)} & \mathbf{G}(B) \\ {\scriptstyle \mathbf{F}(f)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathbf{G}(f)} \\ \mathbf{F}(A) & \xrightarrow{h(A)} & \mathbf{G}(A) \end{array}$$

να είναι μεταθετικό.

(b) Όταν όλα τα μέλη τής οικογενείας μορφισμών

$$\{h(A) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}(A), \mathbf{G}(A)) \mid A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\}$$

είναι $\mathcal{D}$-ισομορφισμοί, τότε ο h καλείται **φυσική ισοδυναμία** μεταξύ των συναρτητών $\mathbf{F}$ και $\mathbf{G}$, και οι $\mathbf{F}$ και $\mathbf{G}$ ονομάζονται **φυσικώς ισοδύναμοι**. (Εν τοιαύτη περιπτώσει χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\mathbf{F} \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \mathbf{G}$ για να υποδηλοί την ύπαρξη μιας φυσικής ισοδυναμίας μεταξύ των $\mathbf{F}$ και $\mathbf{G}$.)

2.1.31 Ορισμός. Λέμε ότι ένας συναλλοίωτος (και αντιστοίχως, ένας ανταλλοίωτος) συναρτητής $\mathbf{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ ορίζει μια **συναλλοίωτη** (και αντιστοίχως, μια **ανταλλοίωτη**) **ισοδυναμία** μεταξύ των κατηγοριών $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ όταν υφίσταται ένας συναρτητής $\mathbf{G} : \mathcal{D} \rightsquigarrow \mathcal{C}$, τέτοιος ώστε $\mathbf{G} \circ \mathbf{F} \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \mathbf{Id}_{\mathcal{C}}$ και $\mathbf{F} \circ \mathbf{G} \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \mathbf{Id}_{\mathcal{D}}$.

2.1.32 Θεώρημα. (a) *Ο συναρτητής* $\mathbf{F} : \mathbf{k}\text{-}\mathfrak{AASets} \rightsquigarrow \mathbf{k}\text{-}\mathfrak{Alg}^{\text{π.π.α.}}$ *(και αντιστοίχως, ο περιορισμός αυτού* $\mathbf{F}' : \mathbf{k}\text{-}\mathfrak{AVar} \rightsquigarrow \mathbf{k}\text{-}\mathfrak{Alg}^{\text{π.π.α.α.π.}}$*):*

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{AASets}) \ni V \longmapsto \mathbf{k}[V] \in \mathrm{Ob}(\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{Alg}^{\text{π.π.α.}}),$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{AASets}}(V, W) \ni \varphi \longmapsto \widetilde{\varphi}\big|_{\mathbf{k}[W]} \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{Alg}^{\text{π.π.α.}}}(\mathbf{k}[W], \mathbf{k}[V]),$$

είναι ανταλλοίωτος και απολύτως πιστός.

(b) *Όταν το* $\mathbf{k}$ *είναι αλγεβρικώς κλειστό, ο* $\mathbf{F}$ *(και αντιστοίχως, ο* $\mathbf{F}'$*) ορίζει μια ανταλλοίωτη ισοδυναμία.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a) Ο $\mathbf{F}$ είναι συναρτητής (πρβλ. άσκηση **A-2-4**), εκ κατασκευής ανταλλοίωτος. Το ότι είναι και απολύτως πιστός έπεται από την πρόταση 2.1.15.

(b) Κατασκευάζουμε έναν συναρτητή $\mathbf{G} : \mathbf{k}\text{-}\mathfrak{Alg}^{\text{π.π.α.}} \rightsquigarrow \mathbf{k}\text{-}\mathfrak{AASets}$ ως εξής: Για κάθε $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{Alg}^{\text{π.π.α.}})$ επιλέγουμε γεννήτορες $a_1, \ldots, a_n$, τον επιμορφισμό αποτιμήσεως

$$\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] \longrightarrow \mathbf{k}[a_1, \ldots, a_n] = A, \quad \mathsf{X}_i \longmapsto a_i, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\},$$

με ένα ιδεώδες I_A ως πυρήνα του και θέτουμε $\mathbf{G}(A) := \mathbf{V}(I_A)$ (βλ. σημείωση 2.1.21). Σύμφωνα με την πρόταση 2.1.15, για κάθε $\eta \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{Alg}^{\pi.\pi.\alpha.}}(A, B)$ υπάρχει μια μονοσημάντως ορισμένη πολυωνυμική απεικόνιση $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{AASets}}(V, W)$ με $\widetilde{\varphi}\,\big|_{\mathbf{k}[W]} = \eta$, όπου $W := \mathbf{V}(I_A)$ και $V := \mathbf{V}(I_B)$. Θέτοντας $\mathbf{G}(\eta) := \varphi$, έχουμε προφανώς

$$\mathbf{G} \circ \mathbf{F} \underset{\varphi.\iota.}{\cong} \mathbf{Id}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{AASets}}, \quad \mathbf{F} \circ \mathbf{G} \underset{\varphi.\iota.}{\cong} \mathbf{Id}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{Alg}^{\pi.\pi.\alpha.}}.$$

(Αναλόγως εργαζόμαστε και με τον $\mathbf{F}'$.) □

2.1.33 Σημείωση. (a) Το καρτεσιανό γινόμενο $V \times W$ δυο μη κενών αλγεβρικών συνόλων $V \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ και $W \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ (βλ. ασκήσεις **A-1-15** και **A-2-15**) είναι **κατηγορικό γινόμενο** (για την $\mathbf{k}$-$\mathfrak{AASets}$), πράγμα που σημαίνει ότι εάν το Z είναι ένα αλγεβρικό σύνολο και οι $\varphi_1 : Z \longrightarrow V$, $\varphi_2 : Z \longrightarrow W$ δυο πολυωνυμικές απεικονίσεις, τότε υπάρχει μια μονοσημάντως ορισμένη πολυωνυμική απεικόνιση $h : Z \longrightarrow V \times W$ που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[ddl, "\varphi_1"'] \arrow[d, "h"] \arrow[ddr, "\varphi_2"] & \\
 & V \times W \arrow[dl, "p_V"] \arrow[dr, "p_W"'] & \\
V & & W
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό. (Εν προκειμένω, οι p_V, p_W συμβολίζουν τις *προβολές* επί των V και W, αντιστοίχως.) Η $h =: (\varphi_1, \varphi_2)$ (που χαρακτηρίζεται, ιδιαιτέρως, ως η πολυωνυμική απεικόνιση *η επαγομένη από τις* φ_1, φ_2) ορίζεται ως εξής:

$$h(P) := (\varphi_1(P), \varphi_2(P)), \ \ \forall P \in Z.$$

Όταν το $\mathbf{k}$ είναι αλγεβρικώς κλειστό, η κατηγορικότητα τού γινομένου διαθέτει μια καθαρώς *αλγεβρική ερμηνεία*[8] (μέσω τού θεωρήματος 2.1.32), διότι η απεικόνιση

$$\left(\sum_{j=1}^{\nu} f_i \bar{\otimes} g_i\right)(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \longmapsto \sum_{j=1}^{\nu} f_i(a_1, \ldots, a_m) \otimes_{\mathbf{k}} g_i(b_1, \ldots, b_n)$$

(για κάθε $\sum_{j=1}^{\nu} f_i \bar{\otimes} g_i \in (\mathbf{k}[V] \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[W])_{\mathrm{red}}$ και οιαδήποτε στοιχεία $(a_1, \ldots, a_m) \in V$ και $(b_1, \ldots, b_n) \in W$) μας παρέχει έναν ισομορφισμό $\mathbf{k}$-αλγεβρών:

$$(\mathbf{k}[V] \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[W])_{\mathrm{red}} \cong \mathbf{k}[V \times W].$$

[8] Με άλλα λόγια, το κατηγορικό γινόμενο $(\mathbf{k}[V] \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[W])_{\mathrm{red}}$ των $\mathbf{k}[V]$ και $\mathbf{k}[W]$ εντός τής $\mathbf{k}$-$\mathfrak{Alg}^{\pi.\pi.\alpha.}$ είναι ισόμορφο τής $\mathbf{k}$-άλγεβρας που αντιστοιχεί στο $V \times W$ μέσω τού συναρτητή $\mathbf{G} : \mathbf{k}\text{-}\mathfrak{Alg}^{\pi.\pi.\alpha.} \rightsquigarrow \mathbf{k}\text{-}\mathfrak{AASets}$.

(Προφανώς, εάν αμφότερα τα V, W είναι συσχετικές ποικιλότητες, το $V \times W$ είναι κατηγορικό γινόμενο για την $\mathbf{k}$-$\mathfrak{AVar}$.)

(b) Η κατηγορία των συσχετικών ($\mathbf{k}$-)ποικιλοτήτων είναι πλήρης υποκατηγορία τής κατηγορίας των λεγομένων «σχεδόν συσχετικών ($\mathbf{k}$-)ποικιλοτήτων». Μια **σχεδόν συσχετική ($\mathbf{k}$-)ποικιλότητα** είναι ένα μη κενό, ανοικτό υποσύνολο (ως προς τη σχετική τοπολογία Zariski) μιας συσχετικής ποικιλότητας[9] $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$. (Για τον ορισμό των μορφισμών τής κατηγορίας των σχεδόν συσχετικών ποικιλοτήτων, βλ. ορσ. 2.5.16.) Προσοχή! Η κατηγορία των σχεδόν συσχετικών ποικιλοτήτων *είναι πολύ ευρύτερη* εκείνης των συσχετικών ποικιλοτήτων, κάτι που διαφαίνεται ήδη κατόπιν θεωρήσεως τού συνόλου

$$Y := \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \smallsetminus \{(0,0)\} \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$$

(βλ. άσκηση **A-2-34**).

(c) Εάν κανείς επιθυμεί να απαλλαγεί από τους εκάστοτε περιβάλλοντες συσχετικούς χώρους αναφοράς στον ορισμό των συσχετικών ποικιλοτήτων, μπορεί να ορίσει ως **αφηρημένη συσχετική $\mathbf{k}$-ποικιλότητα** οιοδήποτε ζεύγος $(V, \mathbf{k}[V])$ αποτελούμενο από ένα σύνολο V και από μια πεπερασμένως παραγόμενη, ανηγμένη $\mathbf{k}$-άλγεβρα $\mathbf{k}[V]$ που είναι ακεραία περιοχή και απαρτίζεται από συναρτήσεις $f : V \to \mathbf{k}$, ούτως ώστε να υπάρχουν *κάποιοι* γεννήτορες $x_1, \ldots, x_n$ τής $\mathbf{k}[V]$ μέσω των οποίων να ορίζεται η

$$V \ni P \longmapsto (x_1(P), \ldots, x_n(P)) \in \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},$$

που να απεικονίζει το V αμφιρριπτικώς επί ενός αναγώγου και αλγεβρικού (ήτοι κλειστού, ως προς την τοπολογία Zariski) υποσυνόλου τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$.

Ασκήσεις

A-2-1. Να αποδειχθεί η πρόταση 2.1.3.

A-2-2. Έστω $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ μια συσχετική ποικιλότητα, όπου $\mathbf{k}$ ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα. Να αποδειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(a) Η V αποτελείται από ένα και μόνον σημείο.

(b) $\Gamma(V) \cong \mathbf{k}$.

(c) $\dim_{\mathbf{k}}(\Gamma(V)) < \infty$.

A-2-3. Έστω F ένα ανάγωγο πολυώνυμο τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}, \mathsf{Y}]$. Υποθέτοντας ότι το F είναι μονικό ως προς το Y:

$$F = \mathsf{Y}^n + a_1(\mathsf{X})\,\mathsf{Y}^{n-1} + a_2(\mathsf{X})\,\mathsf{Y}^{n-2} + \cdots + a_n(\mathsf{X}),$$

[9] Ως εκ τούτου, κάθε σχεδόν συσχετική ποικιλότητα Y είναι ένα **τοπικώς κλειστό υποσύνολο** (ήτοι η τομή ενός ανοικτού και ενός κλειστού υποσυνόλου) **ενός συσχετικού χώρου** $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ (διότι $Y = V \cap U$, όπου U ένα ανοικτό υποσύνολο τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$).

και ότι $V = \mathbf{V}(F) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$, να αποδειχθεί ότι ο φυσικός ομομορφισμός δακτυλίων

$$\varphi : \mathbf{k}[\mathsf{X}] \longrightarrow \Gamma(V) = \mathbf{k}[\mathsf{X},\mathsf{Y}] \,/\, \langle F \rangle$$

είναι μονομορφισμός, ούτως ώστε ο $\mathbf{k}[\mathsf{X}]$ να μπορεί να θεωρηθεί ως ένας υποδακτύλιος τού $\Gamma(V)$. Επίσης, να αποδειχθεί ότι οι κλάσεις υπολοίπων $\overline{1}, \overline{\mathsf{Y}}, \ldots, \overline{\mathsf{Y}}^{n-1}$ παράγουν τον $\Gamma(V)$ ως $\mathbf{k}[\mathsf{X}]$-μόδιο.

A-2-4. Εάν οι $\varphi_1 : V \longrightarrow W$ και $\varphi_2 : W \longrightarrow Z$ είναι δυο απεικονίσεις μεταξύ συσχετικών αλγεβρικών συνόλων, να αποδειχθεί ότι $\widetilde{\varphi_2 \circ \varphi_1} = \widetilde{\varphi}_1 \circ \widetilde{\varphi}_2$ και ότι η σύνθεση δυο πολυωνυμικών απεικονίσεων είναι μια πολυωνυμική απεικόνιση.

A-2-5. Να αποδειχθεί ότι η **απεικόνιση προβολής** (στις πρώτες ν συντεταγμένες)

$$\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \ni (a_1, \ldots, a_n) \longmapsto \mathrm{pr}\,(a_1, \ldots, a_n) := (a_1, \ldots, a_\nu) \in \mathbb{A}^r_{\mathbf{k}}, \;\; 1 \leq \nu \leq n,$$

είναι μια πολυωνυμική απεικόνιση.

A-2-6. Να αποδειχθεί ότι το $\mathbf{V}\,(\mathsf{XY} - 1) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ είναι μια συσχετική ποικιλότητα που δεν είναι ισόμορφη τού $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$.

A-2-7. (a) Να αποδειχθεί ότι κάθε ισομορφισμός $\varphi : \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ είναι τής μορφής

$$\varphi(t) = at + b, \;\; \forall t \in \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}, \text{ για κάποια } \; a \in \mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\}, \; b \in \mathbf{k}.$$

(b) Εάν το $\mathbf{k}$ είναι ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα χαρακτηριστικής $p > 0$, να αποδειχθεί ότι η **απεικόνιση τού Frobenius**

$$\varphi : \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}, \quad t \longmapsto \varphi(t) := t^p,$$

είναι ένας ομοιομορφισμός (ως προς την τοπολογία Zariski) που δεν είναι ισομορφισμός.

A-2-8. Έστω ότι το $\mathbf{k}$ είναι είτε ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα είτε το $\mathbb{R}$.

(a) Να αποδειχθεί ότι η

$$\varphi : \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \longrightarrow V = \mathbf{V}\left(\mathsf{Y}^2 - \mathsf{X}^3\right) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}, \quad \varphi\,(t) := \left(t^2, t^3\right),$$

δεν αποτελεί ισομορφισμό, παρότι είναι μια αμφιρριπτική πολυωνυμική απεικόνιση. (*Υπόδειξη*: $\widetilde{\varphi}\,(\mathbf{k}[V]) = \mathbf{k}[\mathsf{T}^2, \mathsf{T}^3] \subsetneqq \mathbf{k}[\mathsf{T}] = \mathbf{k}[\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}]$.)

(b) Να αποδειχθεί ότι η

$$\varphi : \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \longrightarrow V = \mathbf{V}\left(\mathsf{Y}^2 - \mathsf{X}^2\,(\mathsf{X}+1)\right) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}, \quad \varphi\,(t) := \left(t^2 - 1, \; t\left(t^2 - 1\right)\right),$$

είναι αμφιρριπτική, με μόνη εξαίρεση στα σημεία $\varphi\,(\pm 1_{\mathbf{k}}) = (0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}})$.

A-2-9. Έστω $V = \mathbf{V}\left(\mathsf{X}^2 - \mathsf{Y}^3, \mathsf{Y}^2 - \mathsf{Z}^3\right) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$, όπως στην άσκηση **A-1-54** (**k** αλγεβρικώς κλειστό), και $\overline{\alpha} : \Gamma(V) \longrightarrow \mathbf{k}[\mathsf{T}]$ η απεικόνιση η επαγομένη από τον ομομορφισμό α τής ιδίας ασκήσεως.

(a) Ποια είναι εκείνη η πολυωνυμική απεικόνιση $\varphi : \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \to V$ για την οποία ισχύει $\theta_{\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}} \circ \widetilde{\varphi}\,\big|_{\mathbf{k}[V]} \circ \theta_V^{-1} = \overline{\alpha}$;

(b) Να αποδειχθεί ότι η φ δεν είναι ισομορφισμός, παρότι είναι αμφιρριπτική.

A-2-10. Έστω $f \in \mathbf{k}[V] \cong \Gamma(V)$, όπου $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ ένα μη κενό αλγεβρικό σύνολο. Ως **γράφημα** τής πολυωνυμικής συναρτήσεως f ορίζεται το σύνολο

$$\mathrm{Gr}(f) := \left\{ (a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}} \mid (a_1, \dots, a_n) \in V \text{ και } a_{n+1} = f(a_1, \dots, a_n) \right\}.$$

Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(a) Το $\mathrm{Gr}(f)$ είναι ένα αλγεβρικό υποσύνολο τού $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}}$.

(b) Η απεικόνιση

$$V \ni (a_1, \dots, a_n) \longmapsto ((a_1, \dots, a_n), f(a_1, \dots, a_n)) \in \mathrm{Gr}(f)$$

ορίζει έναν ισομορφισμό μεταξύ των V και $\mathrm{Gr}(f)$ (με την προβολή ως αντίστροφό της).

(c) Εάν το V είναι συσχετική ποικιλότητα, τότε και το $\mathrm{Gr}(f)$ είναι συσχετική ποικιλότητα.

A-2-11. Έστω ότι η W είναι μια υποποικιλότητα μιας συσχετικής ποικιλότητας $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$.

(a) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $f \in \mathbf{k}[V]$ έχουμε $f\,|_W \in \mathbf{k}[W]$.

(b) Να αποδειχθεί ότι η φυσική απεικόνιση $\Gamma(V) \longrightarrow \Gamma(W)$ η οριζόμενη μέσω τού (a) είναι ένας επιμορφισμός δακτυλίων με πυρήνα του το ιδεώδες $\mathbf{I}_V(W)$, οπότε έχουμε $\Gamma(W) \cong \Gamma(V) \,/\, \mathbf{I}_V(W)$.

A-2-12. Υποθέτοντας ότι η $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \supseteq V \overset{\varphi}{\longrightarrow} W \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ είναι μια πολυωνυμική απεικόνιση μεταξύ συσχετικών ποικιλοτήτων και οι $V' \subseteq V$, $W' \subseteq W$ υποποικιλότητές τους, ούτως ώστε να ισχύει $\varphi(V') \subseteq W'$, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(a) $\left(\theta_V \circ \widetilde{\varphi}\,\big|_{\mathbf{k}[W]} \circ \theta_W^{-1}\right)(\mathbf{I}_W(W')) \subseteq \mathbf{I}_V(V')$ (Βλ. άσκηση **A-2-11**.)

(b) Ο περιορισμός $\varphi\,|_{V'} : V' \longrightarrow \varphi(V') \subseteq W'$ είναι μια πολυωνυμική απεικόνιση.

A-2-13. Εάν η $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \supseteq V \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} W \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ είναι μια επιρριπτική πολυωνυμική απεικόνιση μεταξύ δυο συσχετικών ποικιλοτήτων και το X ένα αλγεβρικό υποσύνολο τής W, να αποδειχθεί ότι η αντίστροφη εικόνα $\varphi^{-1}(X)$ τού X αποτελεί ένα αλγεβρικό υποσύνολο τής V. Επίσης να αποδειχθεί η ισχύς τής συνεπαγωγής:

$$\left[\left\{ \begin{array}{c} \varphi^{-1}(X) \text{ ανάγωγο} \\ (\text{ήτοι μια υποποικιλότητα τής } V) \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} X \text{ ανάγωγο} \\ (\text{ήτοι μια υποποικιλότητα τής } W) \end{array} \right\} \right].$$

A-2-14. (a) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $\left\{ (t, t^2, t^3) \in \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}} \mid t \in \mathbf{k} \right\}$ είναι μια συσχετική ποικιλότητα.

(b) Να αποδειχθεί το ίδιο και για το

$$V := \mathbf{V}(\mathsf{XZ} - \mathsf{Y}^2, \mathsf{YZ} - \mathsf{X}^3, \mathsf{Z}^2 - \mathsf{X}^2\mathsf{Y}) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}.$$

(*Υπόδειξη*: Τα $\mathsf{Y}^3 - \mathsf{X}^4$, $\mathsf{Z}^3 - \mathsf{X}^5$ και $\mathsf{Z}^4 - \mathsf{Y}^5$ ανήκουν στο $\mathbf{I}(V)$. Να προσδιορισθεί μια πολυωνυμική απεικόνιση από το $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ επί τού V.)

A-2-15. Έστω $V \times W$ το γινόμενο δυο συσχετικών αλγεβρικών συνόλων $V \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ και $W \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ (βλ. ασκηση **A-1-15**). Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(a) Το $V \times W$ είναι συσχετική ποικιλότητα εάν και μόνον εάν τα V, W είναι συσχετικές ποικιλότητες.

(b) Εάν τα $V_1, \ldots, V_r$ είναι οι ανάγωγες συνιστώσες τού V και τα $W_1, \ldots, W_\nu$ οι ανάγωγες συνιστώσες τού W, τότε τα $V_i \times W_j$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq \nu$, είναι οι ανάγωγες συνιστώσες τού $V \times W$.

2.2 Συσχετικές Αλλαγές Συντεταγμένων

(i) Έστω $T = (T_1, \ldots, T_m)$ μια πολυωνυμική απεικόνιση από τον $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ στον $\mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ και έστω $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_m]$. Ορίζουμε

$$\boxed{F^T := \widetilde{T}(F) := F(T_1, \ldots, T_m).}$$

Αντιστοίχως, για ιδεώδη $I \subseteq \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_m]$ και για αλγεβρικά σύνολα V εντός τού $\mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$, ορίζουμε

$$\boxed{I^T := \left\langle \left\{ F^T \mid F \in I \right\} \right\rangle} \quad \text{και} \quad \boxed{V^T := \mathbf{V}\left(\mathbf{I}(V)^T\right)}.$$

2.2.1 Ορισμός. Ονομάζουμε **συσχετική αλλαγή συντεταγμένων** τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ κάθε *αμφιρριπτική* πολυωνυμική απεικόνιση

$$T = (T_1, \ldots, T_n) : \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$$

στην οποία κάθε T_i είναι ένα πολυώνυμο βαθμού 1.

(ii) Εάν οι T και U είναι δυο συσχετικές αλλαγές συντεταγμένων τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$, τότε προφανώς και η σύνθεσή τους $U \circ T$ είναι συσχετική αλλαγή συντεταγμένων τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$. Εξάλλου, κάθε συσχετική αλλαγή συντεταγμένων

$$T = (T_1, \ldots, T_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1\,j}\mathsf{X}_j + a_{1\,0}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{n\,j}\mathsf{X}_j + a_{n\,0} \right)$$

γράφεται ως σύνθεση $T = T'' \circ T'$ μιας *γραμμικής απεικόνισεως*

$$T' = (T'_1, \dots, T'_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1\,j} \mathsf{X}_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{n\,j} \mathsf{X}_j \right)$$

και μιας *μεταφοράς*

$$T'' = (T''_1, \dots, T''_n) = (\mathsf{X}_1 + a_{1\,0}, \dots, \mathsf{X}_n + a_{n\,0})\,.$$

Επειδή η T είναι αμφιρριπτική και κάθε μεταφορά έχει αντίστροφο (που είναι και πάλι μια μεταφορά), έπεται ότι και ο πίνακας $(a_{i\,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ οφείλει να είναι αντιστρέψιμος, ήτοι $(a_{i\,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{GL}(n; \mathbf{k})$. Κατά συνέπειαν, η αντίστροφος T^{-1} μιας συσχετικής αλλαγής συντεταγμένων T τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ είναι ωσαύτως συσχετική αλλαγή συντεταγμένων τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$, οπότε ισχύει η ακόλουθη:

2.2.2 Πρόταση. *Κάθε συσχετική αλλαγή συντεταγμένων τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ είναι ένας αυτομορφισμός τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ (υπό την έννοια τού ορισμού* 2.1.16).

2.2.3 Πόρισμα. *Έστω $T = (T_1, \dots, T_n) : \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ μια συσχετική αλλαγή συντεταγμένων τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$. Εάν το V είναι ένα αλγεβρικό σύνολο εντός τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$, τότε το V είναι ισόμορφο τού V^T.*

Απόδειξη. Έστω $P \in T^{-1}(V)$ και έστω $F \in \mathbf{I}(V)$. Τότε

$$T(P) = (T_1(P), \dots, T_n(P)) \in V \Longrightarrow F\,(T_1(P), \dots, T_n(P)) = 0$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad P \in \bigcap_{F \in \mathbf{I}(V)} & \{Q \in \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \mid F\,(T_1(Q), \dots, T_n(Q)) = 0\} \\ = \quad \bigcap_{F \in \mathbf{I}(V)} & \mathbf{V}(F^T) = \mathbf{V}\left(\mathbf{I}(V)^T\right), \end{aligned}$$

οπότε $T^{-1}(V) \subseteq \mathbf{V}\left(\mathbf{I}(V)^T\right)$. Και αντιστρόφως· εάν $P \in \mathbf{V}\left(\mathbf{I}(V)^T\right)$, τότε

$$F\,(T_1(P), \dots, T_n(P)) = 0,\ \forall F \in \mathbf{I}(V) \Longrightarrow T(P) = (T_1(P), \dots, T_n(P)) \in \mathbf{V}\,(\mathbf{I}(V))\,.$$

Κατά το (5) (a) τής προτάσεως 1.3.1 έχουμε $\mathbf{V}\,(\mathbf{I}(V)) = V$, απ' όπου έπεται ότι $T(P) \in V$, δηλαδή

$$P \in T^{-1}(V) \Longrightarrow \mathbf{V}\left(\mathbf{I}(V)^T\right) \subseteq T^{-1}(V)\,.$$

Τελικώς, $T^{-1}(V) = \mathbf{V}\left(\mathbf{I}(V)^T\right) =: V^T$, κι επειδή η T (και, κατ' επέκτασιν, και η T^{-1}) είναι ένας αυτομορφισμός τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ (βάσει τής προτάσεως 2.2.2), τα V και V^T είναι μεταξύ τους ισόμορφα. $\square$

Ασκήσεις

A-2-16. Ένα σύνολο $\varnothing \neq V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ καλείται **γραμμική υποποικιλότητα τού** $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ όταν

$$V = \mathbf{V}(F_1, \ldots, F_\kappa),$$

για κάποια *πρωτοβάθμια* πολυώνυμα $F_1, \ldots, F_\kappa \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$. Για οιαδήποτε γραμμική υποποικιλότητα V τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(a) Εάν η $T = (T_1, \ldots, T_n) : \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ είναι μια συσχετική αλλαγή συντεταγμένων τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$, τότε το V^T είναι μια γραμμική υποποικιλότητα τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$.

(b) Υπάρχει μια συσχετική αλλαγή συντεταγμένων $T = (T_1, \ldots, T_n)$ τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ με

$$V^T = \mathbf{V}(\mathsf{X}_{m+1}, \ldots, \mathsf{X}_n).$$

(c) Η V είναι μια συσχετική ποικιλότητα.

(d) Ο μη αρνητικός ακέραιος αριθμός m ο εμφανιζόμενος στο (b) είναι ανεξάρτητος τής επιλογής τής συσχετικής αλλαγής συντεταγμένων $T = (T_1, \ldots, T_n)$. (Ο εν λόγω m καλείται **διάσταση** τής γραμμικής υποποικιλότητας V.)

A-2-17. Για δυο σημεία

$$P = (a_1, \ldots, a_n),\ Q = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},$$

όπου $P \neq Q$, ορίζεται το σύνολο

$$\mathbb{L}(P, Q) := \{(a_1 + \lambda(b_1 - a_1), \ldots, a_n + \lambda(b_n - a_n)) \mid \lambda \in \mathbf{k}\}$$

ως **η ευθεία η διερχόμενη από τα** P **και** Q. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(a) Εάν η $T = (T_1, \ldots, T_n) : \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ είναι μια συσχετική αλλαγή συντεταγμένων τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$, τότε

$$T(\mathbb{L}(P, Q)) = \mathbb{L}(T(P), T(Q)).$$

(b) Κάθε ευθεία $\mathbb{L}(P, Q)$ αποτελεί μια γραμμική μονοδιάστατη υποποικιλότητα τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ και κάθε γραμμική μονοδιάστατη υποποικιλότητα τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ ισούται με την ευθεία που διέρχεται από δύο αυθαιρέτως επιλεγμένα σημεία της P και Q, όπου $P \neq Q$.

(c) Εντός τού $\mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$ οι έννοιες «ευθεία» και «υπερεπίπεδο» ταυτίζονται.

(d) Εάν $P, P' \in \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$ και οι $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2, \mathbb{L}'_1, \mathbb{L}'_2$ είναι τέσσερεις ευθείες τού συσχετικού επιπέδου, τέτοιες ώστε

$$\mathbb{L}_1 \neq \mathbb{L}_2,\ \ P \in \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2,\ \ \mathbb{L}'_1 \neq \mathbb{L}'_2,\ \ P' \in \mathbb{L}'_1 \cap \mathbb{L}'_2,$$

τότε υπάρχει μια συσχετική αλλαγή συντεταγμένων $T = (T_1, T_2)$ τού $\mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$ με

$$T(P) = P', \quad T(\mathbb{L}_1) = \mathbb{L}'_1, \quad T(\mathbb{L}_2) = \mathbb{L}'_2.$$

2.3 Τοπικοί Δακτύλιοι και Τοπικοποίηση

Η περιγραφή μιας συσχετικής ποικιλότητας $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ *πλησίον* ενός σημείου $P \in V$ καθίσταται εφικτή κάνοντας χρήση ενός κατάλληλου δακτυλίου $\mathcal{O}_{V,P}$. Ο ορισμός τού $\mathcal{O}_{V,P}$ θα δοθεί στην ενότητα 2.4. Επειδή ο $\mathcal{O}_{V,P}$ εντάσσεται στην κλάση των λεγομένων «τοπικών δακτυλίων», η παρούσα ενότητα έχει ως στόχο την υπενθύμιση των κύριων ιδιοτήτων αυτών των δακτυλίων.

2.3.1 Πρόταση. *Έστω R ένας μη τετριμμένος δακτύλιος και έστω*

$$\mathfrak{m}_R := R \smallsetminus R^{\times}.$$

Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(a) $a - b \in \mathfrak{m}_R$ *για κάθε* $a, b \in \mathfrak{m}_R$.

(b) *Το* $\mathfrak{m}_R$ *είναι ένα ιδεώδες τού* R.

(c) *Το* $\mathfrak{m}_R$ *είναι ένα μεγιστοτικό ιδεώδες τού* R.

(d) *Για κάθε* $a \in R$ *έχουμε είτε* $a \in R^{\times}$ *είτε* $1_R - a \in R^{\times}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a)⇒(b): Θεωρούμε τυχόντα στοιχεία $a \in \mathfrak{m}_R$ και $r \in R$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $ra \in \mathfrak{m}_R$. Εάν είχαμε $ra \notin \mathfrak{m}_R$, τότε $ra \in R^{\times}$, οπότε θα υπήρχε $b \in R$ με $(ra)b = a(rb) = 1_R$. Τούτο θα σήμαινε ότι $a \in R^{\times}$. Άτοπο!

(b)⇒(c): Λόγω τού θεωρήματος 1.1.14 αρκεί προς τούτο να δειχθεί ότι ο πηλικοδακτύλιος $R/\mathfrak{m}_R$ είναι σώμα. Μάλιστα, επειδή

$$R/\mathfrak{m}_R = \left\{ r + \mathfrak{m}_R \mid r \in R^{\times} \cup \{0_R\} \right\},$$

είναι αρκετό να δειχθεί ότι $r + \mathfrak{m}_R \in (R/\mathfrak{m}_R)^{\times}$ για κάθε $r \in R^{\times}$. Για οιαδήποτε κλάση υπολοίπων $r + \mathfrak{m}_R \in R/\mathfrak{m}_R$ με $r \in R^{\times}$ επιλέγουμε ένα $s \in R^{\times}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $rs = 1_R$. Τότε $(r + \mathfrak{m}_R)(s + \mathfrak{m}_R) = 1_R + \mathfrak{m}_R$.

(c)⇒(d): Έστω τυχόν στοιχείο $a \in R$. Εάν ίσχυε $a \in \mathfrak{m}_R$ και $1_R - a \in \mathfrak{m}_R$, τότε θα καταλήγαμε στην αντίφαση:

$$a + (1_R - a) = 1_R \in \mathfrak{m}_R \Longrightarrow \mathfrak{m}_R = R.$$

(d)⇒(a): Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $a, b \in \mathfrak{m}_R$ με $a - b \notin \mathfrak{m}_R$. Τότε $a - b \in R^{\times}$, οπότε

$$\exists c \in R : (a - b)\, c = ac + (-bc) = 1_R.$$

Εξ υποθέσεως, είτε $ac \in R^{\times}$ είτε $-bc \in R^{\times}$. Εάν $ac \in R^{\times}$, τότε

$$\left.\begin{array}{r} a = a \cdot 1_R = (ac)\,(a-b) \\ ac \in R^{\times} \\ a - b \in R^{\times} \end{array}\right\} \Longrightarrow a \in R^{\times}.$$

Άτοπο! Αναλόγως καταλήγουμε σε άτοπο εάν υποθέσουμε ότι $-bc \in R^{\times}$. □

2.3.2 Ορισμός. Κάθε μη τετριμμένος δακτύλιος R, ο οποίος πληροί μία (και, κατ' επέκτασιν, και τις τέσσερεις) εκ των συνθηκών (a)-(d) τής προτάσεως 2.3.1, ονομάζεται **τοπικός δακτύλιος**.

2.3.3 Πόρισμα. *Ένας μη τετριμμένος δακτύλιος R είναι τοπικός εάν και μόνον εάν διαθέτει ένα και μόνον μεγιστοτικό ιδεώδες (ήτοι το $\mathfrak{m}_R$).*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Υποθέτουμε εν πρώτοις ότι ο R είναι τοπικός δακτύλιος και ότι το $\mathfrak{m}$ είναι ένα μεγιστοτικό του ιδεώδες. Επειδή εξ ορισμού $\mathfrak{m} \subsetneqq R$, το $\mathfrak{m}$ δεν περιέχει κανένα αντιστρέψιμο στοιχείο τού R. Άρα $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_R \subsetneqq R$. Κατά τον ορισμό 2.3.2 και το (c) τής προτάσεως 2.3.1 το $\mathfrak{m}_R$ είναι ένα μεγιστοτικό ιδεώδες τού R. Κατά συνέπειαν, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_R$.

Και αντιστρόφως· εάν ο R είναι ένας μη τετριμμένος δακτύλιος με ένα και μόνον μεγιστοτικό ιδεώδες $\mathfrak{m}$ και $\mathfrak{m}_R := R \smallsetminus R^\times$, τότε *για κάθε* $a \in \mathfrak{m}_R$ έχουμε $\langle a \rangle \subsetneqq R$ (διότι προφανώς $a \notin R^\times \Longrightarrow 1_R \notin \langle a \rangle$). Σύμφωνα με το θεώρημα 1.1.6 το ιδεώδες $\langle a \rangle$ οφείλει να περιέχεται σε κάποιο μεγιστοτικό ιδεώδες τού R. Όμως εξ υποθέσεως το $\mathfrak{m}$ είναι το μόνο μεγιστοτικό ιδεώδες τού R. Άρα

$$\langle a \rangle \subseteq \mathfrak{m} \subsetneqq R \Longrightarrow a \in \mathfrak{m} \Longrightarrow \mathfrak{m}_R \subseteq \mathfrak{m} \subsetneqq R.$$

Εάν υπήρχε $b \in \mathfrak{m} \smallsetminus \mathfrak{m}_R$, τότε θα είχαμε $b \in R^\times \cap \mathfrak{m}$, πράγμα άτοπο, καθόσον ισχύει $\mathfrak{m} \subsetneqq R \Longrightarrow R^\times \cap \mathfrak{m} = \varnothing$. Άρα τελικώς το $\mathfrak{m}_R = \mathfrak{m}$ είναι μεγιστοτικό ιδεώδες και ο R τοπικός δακτύλιος. □

2.3.4 Σημείωση. (a) Εξαιτίας τού πορίσματος 2.3.3 πολλοί συγγραφείς *ορίζουν* τους τοπικούς δακτυλίους ως «εκείνους τους δακτυλίους που διαθέτουν ένα και μόνον μεγιστοτικό ιδεώδες»· είθισται, μάλιστα, η αναφορά σε κάποιον συγκεκριμένο τοπικό δακτύλιο να συνοδεύεται από την ταυτόχρονη παράθεση τού εν λόγω ιδεώδους του.

(b) Η συνηθέστερη μέθοδος παραγωγής τοπικών δακτυλίων από έναν δοθέντα (όχι κατ' ανάγκην τοπικό) δακτύλιο R είναι αυτή τής θεωρήσεως «τοπικοποιήσεων» $R_\mathfrak{p}$ στα πρώτα ιδεώδη $\mathfrak{p}$ τού R (βλ. ορισμό 2.3.24 και πρόταση 2.3.25). Η διαδικασία «τοπικοποιήσεως» τού R ως προς οιοδήποτε πολλαπλασιαστικώς κλειστό υποσύνολό του S γενικεύει κατά τρόπο φυσικό τη διαδικασία που ακολουθείται για να δημιουργηθεί το σώμα κλασμάτων μιας ακεραίας περιοχής (βλ. §1.1 **(iii)**).

2.3.5 Ορισμός. Ένα υποσύνολο S ενός δακτυλίου R καλείται **πολλαπλασιαστικώς κλειστό** όταν $1_R \in \mathsf{S}$ και $ab \in \mathsf{S}$ για οιαδήποτε $a, b \in \mathsf{S}$. Εάν το S είναι ένα πολλαπλασιαστικώς κλειστό υποσύνολο ενός δακτυλίου R, τότε επί τού $R \times \mathsf{S}$ ορίζεται η διμελής σχέση:

$$(r, s) \sim (r', s') \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \exists t \in \mathsf{S} : (rs' - r's)t = 0_R.$$

2.3.6 Πρόταση. *Η "$\sim$" είναι μια σχέση ισοδυναμίας.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Είναι προφανές ότι η "$\sim$" είναι ανακλαστική και συμμετρική. Εάν υποθέσουμε ότι $(r,s)\sim(r',s')$ και $(r',s')\sim(r'',s'')$, τότε

$$\exists t,t'\in \mathsf{S} : (rs'-r's)t=0_R,\ \ (r's''-r''s')t'=0_R,$$

οπότε

$$\left.\begin{array}{r}(rs'-r's)tt's''=0_R\\ (r's''-r''s')tt's=0_R\end{array}\right\}\Longrightarrow (rs''-r''s)tt's'=0_R\Longrightarrow (r,s)\sim(r'',s'')\,.$$

Τούτο σημαίνει ότι η "$\sim$" είναι και μεταβατική. $\square$

2.3.7 Ορισμός. Έστω S ένα πολλαπλασιαστικώς κλειστό υποσύνολο ενός δακτυλίου R. Συμβολίζουμε ως

$$\boxed{\mathsf{S}^{-1}R:=R\times\mathsf{S}/\sim=\{\text{το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας ως προς την " }\sim\text{ "}\}.}$$

Το **κλάσμα** ενός $r\in R$ «διηρημένου» διά ενός $s\in\mathsf{S}$ είναι η κλάση ισοδυναμίας

$$\frac{r}{s}:=\{\,(x,y)\in R\times\mathsf{S}\mid\ (x,y)\sim(r,s)\}.$$

Το $\mathsf{S}^{-1}R$ επιδέχεται πρόσθεση και πολλαπλασιασμό:

$$\begin{cases}\dfrac{r}{s}+\dfrac{r'}{s'} & := & \dfrac{rs'+r's}{ss'},\\[2ex] \dfrac{r}{s}\cdot\dfrac{r'}{s'} & := & \dfrac{rr'}{ss'}.\end{cases}$$

2.3.8 Πρόταση. *Μέσω των ανωτέρω πράξεων το $\mathsf{S}^{-1}R$ καθίσταται δακτύλιος και καλείται, ιδιαιτέρως,* ***τοπικοποίηση τού R ως προς το S***.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι οι πράξεις είναι καλώς ορισμένες. Πράγματι· εάν $\frac{r}{s}=\frac{w}{t}$ και $\frac{r'}{s'}=\frac{w'}{t'}$, τότε

$$\exists u,u'\in\mathsf{S} : (rt-ws)u=0_R,\ \ (r't'-w's')u'=0_R,$$

οπότε

$$((rs'+r's)tt'-(wt'+w't)ss')uu'=((rt-ws)s't'+(r't'-w's')st)uu'=0_R$$

$$\Longrightarrow \frac{rs'+r's}{ss'}=\frac{wt'+w't}{tt'}$$

και

$$(rr'tt'-ww'ss')uu'=((rt-ws)r't'+(r't'-w's')ws)uu'=0_R\Longrightarrow\frac{rr'}{ss'}=\frac{ww'}{tt'}.$$

Το ότι το $\mathsf{S}^{-1}R$ πληροί τα αξιώματα τού ορισμού τού δακτυλίου ελέγχεται εύκολα. Σημειωτέον ότι $0_{\mathsf{S}^{-1}R}=\frac{0_R}{1_R}$ και $1_{\mathsf{S}^{-1}R}=\frac{1_R}{1_R}$. $\square$

2.3.9 Σημείωση. (a) Ο $\mathsf{S}^{-1}R$ είναι τετριμμένος $\Longleftrightarrow 0_R \in \mathsf{S} \Longleftrightarrow \mathsf{S} \cap \mathrm{Nil}(R) \neq \varnothing$.
(b) Μεταξύ των R και $\mathsf{S}^{-1}R$ υφίσταται ένας φυσικός ομομορφισμός δακτυλίων

$$\boxed{i_{R,\mathsf{S}} : R \longrightarrow \mathsf{S}^{-1}R, \quad r \longmapsto i_{R,\mathsf{S}}(r) := \tfrac{r}{1_R}.}$$

Παρατηρούμε ότι $i_{R,\mathsf{S}}(\mathsf{S}) \subseteq \left(\mathsf{S}^{-1}R\right)^{\times}$. (Πράγματι· για κάθε $s \in \mathsf{S}$ το $i_{R,\mathsf{S}}(s) = \frac{s}{1_R}$ είναι αντιστρέψιμο με το $\frac{1_R}{s}$ ως αντίστροφό του.) Ωστόσο, εν γένει ο $i_{R,\mathsf{S}}$ μπορεί να μην είναι ούτε μονομορφισμός ούτε επιμορφισμός. Σε ό,τι αφορά στην ενριπτικότητά του ισχύει η εξής:

2.3.10 Πρόταση. *Ο $i_{R,\mathsf{S}}$ είναι μονομορφισμός εάν και μόνον εάν $\mathsf{S} \subsetneq R \smallsetminus \mathrm{Zdv}(R)$.*

Αποδειξη. Ας υποθέσουμε αρχικώς ότι ο $i_{R,\mathsf{S}}$ είναι μονομορφισμός. Εάν υπήρχε κάποιος μηδενοδιαιρέτης $s \in \mathsf{S}$, τότε θα υπήρχε $r \in R \smallsetminus \{0_R\}$ με $rs = 0_R$, οπότε θα καταλήγαμε σε άτοπο, καθότι

$$i_{R,\mathsf{S}}(r) = \frac{r}{1_R} = \frac{rs}{s} = \frac{0_R}{s} = \frac{1_R}{s} \cdot \frac{0_R}{1_R} = \frac{0_R}{1_R} = 0_{\mathsf{S}^{-1}R} \Longrightarrow r \in \mathrm{Ker}(i_{R,\mathsf{S}}) = \{0_R\}.$$

Εν συνεχεία, ας υποθέσουμε ότι το S δεν περιέχει μηδενοδιαιρέτες και ας θεωρήσουμε τυχόν $r \in \mathrm{Ker}(i_{R,\mathsf{S}})$. Τότε

$$i_{R,\mathsf{S}}(r) = \frac{r}{1_R} = \frac{0_R}{1_R} \Longrightarrow \exists t \in \mathsf{S} : rt = 0_R \Longrightarrow r = 0_R,$$

διότι ο t δεν είναι μηδενοδιαιρέτης. Άρα $\mathrm{Ker}(i_{R,\mathsf{S}}) = \{0_R\}$. □

2.3.11 Παραδείγματα. (a) Εάν ο R είναι ακεραία περιοχή και $\mathsf{S} := R \smallsetminus \{0_R\}$, τότε το S είναι πολλαπλασιαστικώς κλειστό υποσύνολο τού R και $\mathsf{S}^{-1}R = \mathbf{Fr}(R)$. Εν προκειμένω, ο $i_{R,\mathsf{S}}$ είναι μονομορφισμός δακτυλίων (πρβλ. πρόταση 1.1.2).
(b) Εάν ο R είναι ακεραία περιοχή, $f \in R \smallsetminus \{0_R\}$ και $\mathsf{S} := \left\{ f^{\nu} \middle| \nu \in \mathbb{N}_0 \right\}$, τότε το S είναι πολλαπλασιαστικώς κλειστό υποσύνολο τού R και η προκύπτουσα τοπικοποίηση συμβολίζεται ως

$$\boxed{R_f := \mathsf{S}^{-1}R = \left\{ \tfrac{r}{f^{\nu}} \in \mathbf{Fr}(R) \;\middle|\; \nu \in \mathbb{N}_0 \right\}}$$

Ο $i_{R,\mathsf{S}}$ είναι μονομορφισμός δακτυλίων. Ταυτίζοντας τον R με την εικόνα του μέσω τού $i_{R,\mathsf{S}}$ διαπιστώνουμε ότι

$$R_f = R\left[f^{-1}\right] \subseteq \mathbf{Fr}(R).$$

Επί παραδείγματι, εάν $R = \mathbb{Z} \ni u \neq 0$ και $\mathsf{S} := \left\{ u^{\nu} \middle| \nu \in \mathbb{N}_0 \right\}$, τότε $\mathbb{Z}_u = \left\{ \frac{r}{u^{\nu}} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; \nu \in \mathbb{N}_0 \right\}$.

2.3.12 Πόρισμα. *Ο $i_{R,\mathsf{S}}$ είναι ισομορφισμός εάν και μόνον εάν $\mathsf{S} \subseteq R^{\times}$.*

Αποδειξη. Εάν ο $i_{R,\mathsf{S}}$ είναι ισομορφισμός, τότε $\mathsf{S} \subseteq R^{\times}$, διότι κάθε $\frac{s}{1_R}$, $s \in \mathsf{S}$, είναι αντιστρέψιμο στον $\mathsf{S}^{-1}R$ (βλ. 2.3.9 (b)). Ας υποθέσουμε, αντιστρόφως, ότι $\mathsf{S} \subseteq R^{\times}$. Επειδή τα αντιστρέψιμα στοιχεία τού R δεν είναι μηδενοδιαιρέτες, ο $i_{R,\mathsf{S}}$ είναι μονομορφισμός δακτυλίων επί τη βάσει τής προτάσεως 2.3.10. Η επιρριπτικότητα τού $i_{R,\mathsf{S}}$ έπεται από το ότι για κάθε $\frac{r}{s} \in \mathsf{S}^{-1}R$ έχουμε $\frac{r}{s} = \frac{rs^{-1}}{1_R} = i_{R,\mathsf{S}}(rs^{-1})$. □

Η επόμενη πρόταση γενικεύει την πρόταση 1.1.3.

2.3.13 Πρόταση. *Έστω $f : R \longrightarrow R'$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων και έστω S ένα πολλαπλασιαστικώς κλειστό υποσύνολο τού R με $f(\mathsf{S}) \subseteq (R')^{\times}$. Τότε υφίσταται ακριβώς ένας ομομορφισμός δακτυλίων $\psi : \mathsf{S}^{-1}R \longrightarrow R'$ ο οποίος καθιστά το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "i_{R,\mathsf{S}}"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright", shift left=4ex] & \mathsf{S}^{-1}R \arrow[d, "\psi"] \\
 & R'
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό.

Αποδειξη. ► *Ύπαρξη.* Ορίζουμε την ψ ως εξής:

$$\psi : \mathsf{S}^{-1}R \longrightarrow R', \quad \tfrac{r}{s} \longmapsto \psi(\tfrac{r}{s}) := f(r)f(s)^{-1}.$$

Η ψ είναι καλώς ορισμένη απεικόνιση, διότι εάν $\frac{r_1}{s_1} = \frac{r_2}{s_2}$, τότε

$$\exists t \in \mathsf{S} : (r_1 s_2 - r_2 s_1)t = 0_R \Longrightarrow (f(r_1)f(s_2) - f(r_2)f(s_1))f(t) = 0_{R'},$$

οπότε, λόγω τής αντιστρεψιμότητας τού $f(t)$, λαμβάνουμε

$$f(r_1)f(s_2) - f(r_2)f(s_1) = 0_{R'} \Longrightarrow f(r_1)f(s_1)^{-1} - f(r_2)f(s_2)^{-1} = 0_{R'}$$

$$\Longrightarrow \psi(\tfrac{r_1}{s_1}) = \psi(\tfrac{r_2}{s_2}).$$

Επιπροσθέτως, η ψ είναι ομομορφισμός δακτυλίων, διότι $\psi(\frac{1_R}{1_R}) = f(1_R)f(1_R)^{-1} = 1_{R'}$,

$$\begin{aligned}
\psi\left(\tfrac{r}{s} + \tfrac{r'}{s'}\right) &= \psi\left(\tfrac{rs'+r's}{ss'}\right) = f(rs'+r's)f(ss')^{-1} \\
&= (f(r)f(s') + f(r')f(s))f(s)^{-1}f(s')^{-1} \\
&= f(r)f(s)^{-1} + f(r')f(s')^{-1} = \psi\left(\tfrac{r}{s}\right) + \psi\left(\tfrac{r'}{s'}\right)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{r}{s}\cdot\frac{r'}{s'}\right) &= \psi\left(\frac{rr'}{ss'}\right) = f(rr')f(ss')^{-1} = f(r)f(r')(f(s)f(s'))^{-1}\\ &= f(r)f(s)^{-1}f(r')f(s')^{-1} = \psi\left(\frac{r}{s}\right)\psi\left(\frac{r'}{s'}\right).\end{aligned}$$

Τέλος,

$$(\psi\circ i_{R,\mathsf{S}})(r) = \psi\left(\frac{r}{1_R}\right) = f(r)f(1_R)^{-1} = f(r),\ \forall r\in R.$$

► *Μοναδικότητα.* Εάν η $\widehat{\psi}:\mathsf{S}^{-1}R\longrightarrow R'$ είναι ένας ομομορφισμός με $f=\widehat{\psi}\circ i_{R,\mathsf{S}}$, τότε

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}(\tfrac{r}{s}) &= \widehat{\psi}(\tfrac{r}{1_R}\cdot\tfrac{1_R}{s}) = \widehat{\psi}(\tfrac{r}{1_R})\widehat{\psi}(\tfrac{1_R}{s})\\ &= \widehat{\psi}(i_{R,\mathsf{S}}(r))\widehat{\psi}(i_{R,\mathsf{S}}(s))^{-1} = f(r)f(s)^{-1} = \psi(\tfrac{r}{s})\end{aligned}$$

για κάθε $\frac{r}{s}\in\mathsf{S}^{-1}R$, οπότε $\widehat{\psi}=\psi$. □

2.3.14 Πόρισμα. *Έστω $f:R\longrightarrow R'$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων και έστω S ένα πολλαπλασιαστικώς κλειστό υποσύνολο τού R με $f(\mathsf{S})\subseteq(R')^{\times}$. Υποθέτουμε ότι ο f πληροί τις ακόλουθες συνθήκες:*

(a) $\forall r\in\operatorname{Ker}(f)\ \exists s\in\mathsf{S}: rs=0_R$.

(b) *Κάθε στοιχείο τού R' γράφεται υπό τη μορφή $f(r)f(s)^{-1}$, για κάποια $r\in R$ και $s\in\mathsf{S}$.*

Τότε υφίσταται ακριβώς ένας ισομορφισμός δακτυλίων $\psi:\mathsf{S}^{-1}R\longrightarrow R'$ για τον οποίο ισχύει $f=\psi\circ i_{R,\mathsf{S}}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σύμφωνα με την πρόταση 2.3.13 η

$$\psi:\mathsf{S}^{-1}R\longrightarrow R',\quad \frac{r}{s}\longmapsto\psi(\frac{r}{s}):=f(r)f(s)^{-1},$$

είναι ο μόνος ομομορφισμός δακτυλίων για τον οποίο ισχύει $f=\psi\circ i_{R,\mathsf{S}}$. Η συνθήκη (b) διασφαλίζει την επιρριπτικότητά του. Επίσης, για οιοδήποτε στοιχείο $\frac{r}{s}\in\operatorname{Ker}(\psi)$ έχουμε

$$f(r)=0_{R'}\Longrightarrow r\in\ \operatorname{Ker}(f)\overset{\text{(a)}}{\Longrightarrow}\exists s\in\mathsf{S}:rs=0_R\Longrightarrow\frac{r}{s}=\frac{0_R}{1_R}=0_{\mathsf{S}^{-1}R},$$

οπότε $\operatorname{Ker}(\psi)=\{0_{\mathsf{S}^{-1}R}\}$. □

2.3.15 Πόρισμα. *Εάν υποθέσουμε ότι τα S_1 και S_2 είναι δυο πολλαπλασιαστικώς κλειστά υποσύνολα ενός δακτυλίου R και $\mathsf{S}_1\subseteq\mathsf{S}_2$, τότε υπάρχει ένας και μόνον φυσικός ομορφι-*

σμός δακτυλίων $i_{\mathsf{S}_1,\mathsf{S}_2} : \mathsf{S}_1^{-1}R \longrightarrow \mathsf{S}_2^{-1}R$ *ο οποίος καθιστά το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "i_{R,\mathsf{S}_1}"'] \arrow[dr, "i_{R,\mathsf{S}_2}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ \mathsf{S}_1^{-1}R \arrow[rr, "i_{\mathsf{S}_1,\mathsf{S}_2}"'] & {} & \mathsf{S}_2^{-1}R \end{tikzcd}$$

μεταθετικό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρκεί να εφαρμοσθεί η πρόταση 2.3.13. □

2.3.16 Σημείωση. Με τα δεδομένα τού πορίσματος 2.3.15 το κλάσμα $\frac{r}{s}$ (όπου $r \in R$ και $s \in \mathsf{S}_1$) μπορεί, εν γένει, να έχει διττή σημασία· εξαρτάται από το εάν αυτό θεωρείται ως στοιχείο τού $\mathsf{S}_1^{-1}R$ ή ως στοιχείο τού $\mathsf{S}_2^{-1}R$. Τούτο έγκειται στο ότι ο $i_{\mathsf{S}_1,\mathsf{S}_2}$ δεν είναι πάντοτε μονομορφισμός! Από την άλλη μεριά, εάν το S_2 δεν περιέχει μηδενοδιαιρέτες, ο $i_{\mathsf{S}_1,\mathsf{S}_2}$ είναι μονομορφισμός (βλ. πρόταση 2.3.10) και κανείς μπορεί να εκλάβει αμφότερους τους R και $\mathsf{S}_1^{-1}R$ ως υποδακτυλίους τού $\mathsf{S}_2^{-1}R$. Ιδιαιτέρως, όταν ο R είναι ακεραία περιοχή, κάθε τοπικοποίηση τού R ως προς ένα πολλαπλασιαστικώς κλειστό υποσύνολό του S, το οποίο δεν περιέχει το 0_R, καθίσταται αυτομάτως υποδακτύλιος τού σώματος κλασμάτων $\mathbf{Fr}(R)$.

Έστω S ένα πολλαπλασιαστικώς κλειστό υποσύνολο ενός δακτυλίου R. Πώς διασυνδέονται τα ιδεώδη τού R με τα ιδεώδη τού $\mathsf{S}^{-1}R$; Ας συμβολίσουμε ως $\mathcal{I}_R$ (και αντιστοίχως, ως $\mathcal{I}_{\mathsf{S}^{-1}R}$) τη συλλογή όλων των ιδεωδών τού R (και αντιστοίχως τού $\mathsf{S}^{-1}R$) κι ας υιοθετήσουμε τους συμβολισμούς

$$\mathcal{C}_R(i_{R,\mathsf{S}}) := \left\{ J^{\mathrm{con}(i_{R,\mathsf{S}})} \,\middle|\, J \in \mathcal{I}_{\mathsf{S}^{-1}R} \right\}, \quad \mathcal{E}_{\mathsf{S}^{-1}R}(i_{R,\mathsf{S}}) := \left\{ I^{\mathrm{ext}(i_{R,\mathsf{S}})} \,\middle|\, I \in \mathcal{I}_R \right\}$$

τους εισαχθέντες στην άσκηση **A-1-32** (e) για τον ομομορφισμό $i_{R,\mathsf{S}} : R \longrightarrow \mathsf{S}^{-1}R$.

2.3.17 Πρόταση. (a) *Έχουμε* $\mathcal{I}_{\mathsf{S}^{-1}R} = \mathcal{E}_{\mathsf{S}^{-1}R}(i_{R,\mathsf{S}})$, *δηλαδή κάθε ιδεώδες τού* $\mathsf{S}^{-1}R$ *αποτελεί επέκταση κάποιου ιδεώδους τού* R.

(b) *Για κάθε* $I \in \mathcal{I}_R$ *το*

$$\boxed{\mathsf{S}^{-1}I := \left\{ a \in \mathsf{S}^{-1}R \,\middle|\, a = \tfrac{r}{s}, \text{ για κάποια } r \in I \text{ και } s \in \mathsf{S} \right\}}$$

αποτελεί ένα ιδεώδες τού $\mathsf{S}^{-1}R$.

(c) *Εάν* $I \in \mathcal{I}_R$, *τότε η επέκταση* $I^{\mathrm{ext}(i_{R,\mathsf{S}})} := i_{R,\mathsf{S}}(I)\mathsf{S}^{-1}R$ *τού* I *μέσω τής* $i_{R,\mathsf{S}}$ *ισούται με το* $\mathsf{S}^{-1}I$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a) Για $J \in \mathcal{I}_{\mathsf{S}^{-1}R}$ έχουμε $(J^{\mathrm{con}(i_{R,\mathsf{S}})})^{\mathrm{ext}(i_{R,\mathsf{S}})} = J$ (οπότε $J \in \mathcal{E}_{\mathsf{S}^{-1}R}(i_{R,\mathsf{S}})$). Πράγματι· εάν $a = \frac{r}{s} \in J$, για κάποια $r \in R$ και $s \in \mathsf{S}$, τότε

$$\begin{aligned} i_{R,\mathsf{S}}(r) &= \tfrac{r}{1_R} = \tfrac{s}{1_R} \cdot \tfrac{r}{s} \in J \Longrightarrow r \in J^{\mathrm{con}(i_{R,\mathsf{S}})} \\ &\Longrightarrow a = \tfrac{r}{s} = \tfrac{1_R}{s} \cdot \tfrac{r}{1_R} = \tfrac{1_R}{s} \cdot i_{R,\mathsf{S}}(r) \in (J^{\mathrm{con}(i_{R,\mathsf{S}})})^{\mathrm{ext}(i_{R,\mathsf{S}})}, \end{aligned}$$

οπότε $J \subseteq (J^{\mathrm{con}(i_{R,\mathsf{S}})})^{\mathrm{ext}(i_{R,\mathsf{S}})}$. Ο αντίστροφος εγκλεισμός “ $\supseteq$ ” είναι γνωστός από το (b) τής ασκήσεως **A-1-32**.

(b) Για οιαδήποτε $\frac{r}{t} \in \mathsf{S}^{-1}R$ και $\frac{r_1}{s_1}, \frac{r_2}{s_2}, \frac{r'}{s'} \in \mathsf{S}^{-1}I$ έχουμε

$$\left. \begin{array}{r} \frac{r_1}{s_1} - \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 s_2 - r_2 s_1}{s_1 s_2} \\ s_1 s_2 \in \mathsf{S},\ r_1 s_2 - r_2 s_1 \in I \end{array} \right\} \Longrightarrow \frac{r_1 s_2 - r_2 s_1}{s_1 s_2} \in \mathsf{S}^{-1}I$$

και

$$\left. \begin{array}{r} \frac{r}{t} \cdot \frac{r'}{s'} = \frac{rr'}{ts'} \\ ts' \in \mathsf{S},\ rr' \in I \end{array} \right\} \Longrightarrow \frac{rr'}{ts'} \in \mathsf{S}^{-1}I.$$

(c) Κάθε στοιχείο τού $I^{\mathrm{ext}(i_{R,\mathsf{S}})}$ γράφεται υπό τη μορφή $\sum_{j=1}^{\kappa} i_{R,\mathsf{S}}(a_j)\xi_j$, όπου $\kappa \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_\kappa \in I$ και $\xi_1, \ldots, \xi_\kappa \in \mathsf{S}^{-1}R$. Επειδή $\xi_j = \frac{r_j}{s_j}$, για κάποια $r_j \in R$ και $s_j \in \mathsf{S}$, $\forall j \in \{1, \ldots, \kappa\}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{\kappa} i_{R,\mathsf{S}}(a_j)\xi_j = \frac{a_1 r_1 \left(\prod\limits_{2 \leq \nu \leq \kappa} s_\nu \right) + \cdots + a_\kappa r_\kappa \left(\prod\limits_{1 \leq \nu \leq \kappa - 1} s_\nu \right)}{\prod\limits_{1 \leq \nu \leq \kappa} s_\nu} \in \mathsf{S}^{-1}I$$

(διότι έχει αριθμητή ανήκοντα στο I και παρονομαστή ανήκοντα στο S). Άρα έχουμε $I^{\mathrm{ext}(i_{R,\mathsf{S}})} \subseteq \mathsf{S}^{-1}I$. Και αντιστρόφως· εάν $a = \frac{r}{s} \in \mathsf{S}^{-1}I$, τότε

$$a = \frac{r}{1_R} \cdot \frac{1_R}{s} = i_{R,\mathsf{S}}(r)\frac{1_R}{s} \in I^{\mathrm{ext}(i_{R,\mathsf{S}})}.$$

Άρα $I^{\mathrm{ext}(i_{R,\mathsf{S}})} \supseteq \mathsf{S}^{-1}I$. □

Η άσκηση **A-2-18** περιγράφει το πώς συμπεριφέρεται η

$$\mathcal{I}_R \ni I \longmapsto \mathsf{S}^{-1}I \in \mathcal{I}_{\mathsf{S}^{-1}R}$$

ως προς τις «πράξεις» ιδεωδών.

2.3.18 Πόρισμα. *Εάν $I \in \mathcal{I}_R$ με $I \cap \mathsf{S} \neq \varnothing$, τότε $\mathsf{S}^{-1}I = \mathsf{S}^{-1}R$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η συνθήκη $I \cap \mathsf{S} \neq \varnothing$ σημαίνει ότι το ιδεώδες $\mathsf{S}^{-1}I$ περιέχει κάποιο αντιστρέψιμο στοιχείο τού $\mathsf{S}^{-1}R$ (διότι κατά το (b) τής σημειώσεως 2.3.9, $i_{R,\mathsf{S}}(\mathsf{S}) \subseteq \left(\mathsf{S}^{-1}R\right)^{\times}$). Άρα $\mathsf{S}^{-1}I = \mathsf{S}^{-1}R$. □

2.3.19 Πόρισμα. *Έστω* S *ένα πολλαπλασιαστικώς κλειστό υποσύνολο ενός δακτυλίου* R. *Εάν ο* R *είναι ναιτεριανός, τότε ο* $\mathsf{S}^{-1}R$ *είναι ωσαύτως ναιτεριανός.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω τυχόν $J \in \mathcal{I}_{\mathsf{S}^{-1}R}$. Κατά το (a) τής προτάσεως 2.3.17, $J = I^{\mathrm{ext}(i_{R,\mathsf{S}})}$ για κάποιο $I \in \mathcal{I}_R$. Εξ υποθέσεως το I είναι πεπερασμένως παραγόμενο, οπότε $\exists n \in \mathbb{N}$ και $r_1, \ldots, r_n \in R : I = \langle r_1, \ldots, r_n \rangle$. Κάνοντας χρήση τού (c) τής προτάσεως 2.3.17 διαπιστώνουμε ότι

$$J = \mathsf{S}^{-1}I = \left\langle \tfrac{r_1}{1_R}, \ldots, \tfrac{r_n}{1_R} \right\rangle .$$

Άρα ο $\mathsf{S}^{-1}R$ είναι ναιτεριανός. □

2.3.20 Ορισμός. Για κάθε δακτύλιο R ονομάζουμε το σύνολο

$$\boxed{\mathrm{Spec}(R) := \{\, \mathfrak{p} \in \mathcal{I}_R \mid \mathfrak{p} \text{ πρώτο ιδεώδες τού } R\}}$$

φάσμα τού R.

2.3.21 Λήμμα. *Έστω* S *ένα πολλαπλασιαστικώς κλειστό υποσύνολο ενός δακτυλίου* R. *Εάν* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ *με* $\mathfrak{p} \cap \mathsf{S} = \varnothing$, *τότε ισχύουν τα ακόλουθα*:

(a) *Για κάθε* $a = \frac{r}{s} \in \mathsf{S}^{-1}\mathfrak{p}$, *με* $r \in R,\ s \in \mathsf{S}$, *έχουμε* $r \in \mathfrak{p}$.

(b) $(\mathfrak{p}^{\mathrm{ext}(i_{R,\mathsf{S}})})^{\mathrm{con}(i_{R,\mathsf{S}})} := i_{R,\mathsf{S}}^{-1}(\mathsf{S}^{-1}\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a) Εάν $a = \frac{r}{s} \in \mathsf{S}^{-1}\mathfrak{p}$, με $r \in R,\ s \in \mathsf{S}$, τότε υπάρχουν εξ ορισμού $r' \in \mathfrak{p}$ και $s' \in \mathsf{S}$ με $a = \frac{r'}{s'}$, οπότε

$$\exists t \in \mathsf{S} : (rs' - r's)t = 0_R \Longrightarrow trs' = tr's \in \mathfrak{p}.$$

Επειδή $ts' \in \mathsf{S}$ έχουμε $ts' \notin \mathfrak{p}$ (διότι $\mathfrak{p} \cap \mathsf{S} = \varnothing$), κι αφού $trs' \in \mathfrak{p}$ με το $\mathfrak{p}$ πρώτο ιδεώδες, συνάγουμε ότι $r \in \mathfrak{p}$.

(b) Κατ' αρχάς $\mathfrak{p} \subseteq i_{R,\mathsf{S}}^{-1}(\mathsf{S}^{-1}\mathfrak{p})$ λόγω τού (a) τής ασκήσεως **A-1-32**. Έστω τώρα τυχόν $r \in i_{R,\mathsf{S}}^{-1}(\mathsf{S}^{-1}\mathfrak{p})$. Προφανώς, $\frac{r}{1_R} \in \mathsf{S}^{-1}\mathfrak{p}$. Κατά το (a) το r οφείλει να ανήκει στο $\mathfrak{p}$. Άρα ισχύει και ο εγκλεισμός $\mathfrak{p} \supseteq i_{R,\mathsf{S}}^{-1}(\mathsf{S}^{-1}\mathfrak{p})$. □

2.3.22 Λήμμα. *Έστω* S *ένα πολλαπλασιαστικώς κλειστό υποσύνολο ενός δακτυλίου* R. *Τότε ισχύουν τα ακόλουθα*:

(a) *Εάν* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ *με* $\mathfrak{p} \cap \mathsf{S} = \varnothing$, *τότε* $\mathsf{S}^{-1}\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathsf{S}^{-1}R)$.

(b) *Εάν* $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}(\mathsf{S}^{-1}R)$, *τότε* $(\mathfrak{p}')^{\mathrm{con}(i_{R,\mathsf{S}})} := i_{R,\mathsf{S}}^{-1}(\mathfrak{p}') \in \mathrm{Spec}(R)$ *και* $i_{R,\mathsf{S}}^{-1}(\mathfrak{p}') \cap \mathsf{S} = \varnothing$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a) Κατ' αρχάς $\mathsf{S}^{-1}\mathfrak{p} \subsetneqq \mathsf{S}^{-1}R$, διότι εάν ίσχυε $\mathsf{S}^{-1}\mathfrak{p} = \mathsf{S}^{-1}R$ θα είχαμε

$$\mathfrak{p} = i_{R,\mathsf{S}}^{-1}(\mathsf{S}^{-1}\mathfrak{p}) = i_{R,\mathsf{S}}^{-1}(\mathsf{S}^{-1}R) = R$$

βάσει τού (b) τού λήμματος 2.3.21, πράγμα άτοπο, καθότι το $\mathfrak{p}$, όντας πρώτο ιδεώδες τού R, οφείλει να είναι γνήσιο ιδεώδες. Εν συνεχεία, θεωρώντας δυο στοιχεία $a = \frac{r}{s}$ και $a' = \frac{r'}{s'} \in \mathsf{S}^{-1}R$ (όπου $r, r' \in R$, $s, s' \in \mathsf{S}$) για τα οποία ισχύει $aa' = \frac{rr'}{ss'} \in \mathsf{S}^{-1}\mathfrak{p}$, το (a) τού λήμματος 2.3.21 μας πληροφορεί ότι $rr' \in \mathfrak{p}$. Επειδή το $\mathfrak{p}$ είναι πρώτο ιδεώδες τού R,

$$rr' \in \mathfrak{p} \Longrightarrow \text{ είτε } r \in \mathfrak{p} \text{ είτε } r' \in \mathfrak{p} \Longrightarrow \text{ είτε } a \in \mathsf{S}^{-1}\mathfrak{p} \text{ είτε } a' \in \mathsf{S}^{-1}\mathfrak{p},$$

οπότε $\mathsf{S}^{-1}\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathsf{S}^{-1}R)$.
(b) Εάν $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}(\mathsf{S}^{-1}R)$, τότε ο πηλικοδακτύλιος $\mathsf{S}^{-1}R/\mathfrak{p}'$ είναι ακεραία περιοχή (βλ. θεώρημα 1.1.13). Επειδή η σύνθεση

$$R \xrightarrow{i_{R,\mathsf{S}}} \mathsf{S}^{-1}R \xrightarrow{\pi} \mathsf{S}^{-1}R/\mathfrak{p}'$$

τού ομομορφισμού $i_{R,\mathsf{S}}$ με τον φυσικό επιμορφισμό π έχει ως πυρήνα της το ιδεώδες $i_{R,\mathsf{S}}^{-1}(\mathfrak{p}')$, ο πηλικοδακτύλιος $R/i_{R,\mathsf{S}}^{-1}(\mathfrak{p}')$ είναι (σύμφωνα με το 1ο θεώρημα ισομορφισμών δακτυλίων 1.1.10) ισόμορφος ενός υποδακτυλίου τής ακεραίας περιοχής $\mathsf{S}^{-1}R/\mathfrak{p}'$, οπότε οφείλει να είναι αφ'εαυτού ακεραία περιοχή. Άρα $i_{R,\mathsf{S}}^{-1}(\mathfrak{p}') \in \mathrm{Spec}(R)$ (ύστερα από την εκ νέου εφαρμογή τού θεωρήματος 1.1.13).

Επειδή το $\mathfrak{p}'$ (κατά το (a) τής προτάσεως 2.3.17) αποτελεί την επέκταση $I^{\mathrm{ext}(i_{R,\mathsf{S}})}$ ενός ιδεώδους I τού R, λαμβάνουμε

$$((\mathfrak{p}')^{\mathrm{con}(i_{R,\mathsf{S}})})^{\mathrm{ext}(i_{R,\mathsf{S}})} = ((I^{\mathrm{ext}(f)})^{\mathrm{con}(f)})^{\mathrm{ext}(f)} = I^{\mathrm{ext}(f)} = \mathfrak{p}'$$

(μέσω τού (c) τής ασκήσεως **A-1-32**). Άρα $(\mathfrak{p}')^{\mathrm{con}(i_{R,\mathsf{S}})} \cap \mathsf{S} = i_{R,\mathsf{S}}^{-1}(\mathfrak{p}') \cap \mathsf{S} = \varnothing$, διότι αλλιώς (επί τη βάσει τού πορίσματος 2.3.18) θα είχαμε

$$\mathsf{S}^{-1}(\mathfrak{p}')^{\mathrm{con}(i_{R,\mathsf{S}})} = ((\mathfrak{p}')^{\mathrm{con}(i_{R,\mathsf{S}})})^{\mathrm{ext}(i_{R,\mathsf{S}})} = \mathfrak{p}' = \mathsf{S}^{-1}R,$$

πράγμα άτοπο, καθότι το $\mathfrak{p}'$, ως πρώτο ιδεώδες τού $\mathsf{S}^{-1}R$, οφείλει να είναι γνήσιο. □

2.3.23 Θεώρημα. *Έστω S ένα πολλαπλασιαστικώς κλειστό υποσύνολο ενός δακτυλίου R. Τότε αμφότερες οι απεικονίσεις*

$$\boxed{\begin{array}{c}\{\,\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \cap \mathsf{S} = \varnothing\} \ni \mathfrak{p} \longmapsto \mathsf{S}^{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{\mathrm{ext}(i_{R,\mathsf{S}})} \in \mathrm{Spec}(\mathsf{S}^{-1}R) \\[2ex] \mathrm{Spec}(\mathsf{S}^{-1}R) \ni \mathfrak{p}' \longmapsto i_{R,\mathsf{S}}^{-1}(\mathfrak{p}') =: (\mathfrak{p}')^{\mathrm{con}(i_{R,\mathsf{S}})} \in \{\,\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \cap \mathsf{S} = \varnothing\}\end{array}}$$

είναι αμφιρριπτικές και η μία αντίστροφος τής άλλης.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από το (a) τής προτάσεως 2.3.17 και το (b) τού λήμματος 2.3.22 έπεται ότι κάθε πρώτο ιδεώδες τού $\mathsf{S}^{-1}R$ αποτελεί την επέκταση $\mathfrak{p}^{\mathrm{ext}(i_{R,\mathsf{S}})}$ ενός πρώτου ιδεώδους $\mathfrak{p}$ τού R. Επιπροσθέτως, λόγω τής ασκήσεως **A-1-32** (a) και τού (b) τού λήμματος 2.3.22

$$\mathfrak{p} \subseteq (\mathfrak{p}^{\mathrm{ext}(i_{R,\mathsf{S}})})^{\mathrm{con}(i_{R,\mathsf{S}})} \Longrightarrow \mathfrak{p} \cap \mathsf{S} \subseteq (\mathfrak{p}^{\mathrm{ext}(i_{R,\mathsf{S}})})^{\mathrm{con}(i_{R,\mathsf{S}})} \cap \mathsf{S} = \varnothing.$$

Κατά συνέπειαν, η πρώτη απεικόνιση είναι επιρριπτική. Για να δείξουμε ότι είναι και ενριπτική θεωρούμε $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \mathrm{Spec}(R)$ με $\mathsf{S}^{-1}\mathfrak{p}_1 = \mathsf{S}^{-1}\mathfrak{p}_2$ και

$$\mathfrak{p}_1 \cap \mathsf{S} = \mathfrak{p}_2 \cap \mathsf{S} = \varnothing.$$

Εφαρμόζοντας το (b) τού λήμματος 2.3.21 λαμβάνουμε

$$\mathfrak{p}_1 = i_{R,\mathsf{S}}^{-1}(\mathsf{S}^{-1}\mathfrak{p}_1) = i_{R,\mathsf{S}}^{-1}(\mathsf{S}^{-1}\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_2.$$

Άρα η πρώτη απεικόνιση είναι αμφιρριπτική. Επειδή οι (δύο δυνατές) συνθέσεις της με τη δεύτερη είναι ταυτοτικές (σύμφωνα με το (b) τού λήμματος 2.3.21 και το (b) τού λήμματος 2.3.22), συμπεραίνουμε ότι αμφότερες οι ορισθείσες απεικονίσεις είναι αμφιρριπτικές και η μία αντίστροφος τής άλλης. □

2.3.24 Ορισμός. Εάν το $\mathfrak{p}$ είναι ένα πρώτο ιδεώδες ενός δακτυλίου R και $\mathsf{S} := R \smallsetminus \mathfrak{p}$, τότε (προφανώς) το S είναι πολλαπλασιαστικώς κλειστό υποσύνολο τού R και ο προκύπτων δακτύλιος

$$\boxed{R_{\mathfrak{p}} := \mathsf{S}^{-1}R}$$

καλείται **τοπικοποίηση τού** R **στο** $\mathfrak{p}$.

2.3.25 Πρόταση. *Εάν το $\mathfrak{p}$ είναι ένα πρώτο ιδεώδες ενός δακτυλίου R, τότε η τοπικοποίηση $R_{\mathfrak{p}}$ τού R στο $\mathfrak{p}$ αποτελεί έναν τοπικό δακτύλιο* (υπό την έννοια τού 2.3.2) *με μεγιστοτικό του ιδεώδες το*

$$\boxed{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} := (R \smallsetminus \mathfrak{p})^{-1}\mathfrak{p} = \left\{ \tfrac{p}{s} \in R_{\mathfrak{p}} \;\middle|\; p \in \mathfrak{p},\ s \in R \smallsetminus \mathfrak{p} \right\}}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το σύνολο $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ αποτελεί ένα ιδεώδες τού $R_{\mathfrak{p}}$ (σύμφωνα με το (b) τής προτάσεως 2.3.17). Επί τη βάσει τής προτάσεως 2.3.1 και τού ορισμού 2.3.2 αρκεί να αποδειχθεί ότι το $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ απαρτίζεται από όλα τα μη αντιστρέψιμα στοιχεία τού $R_{\mathfrak{p}}$. Προς τούτο θεωρούμε εν πρώτοις τυχόν στοιχείο $\frac{r}{s} \in R_{\mathfrak{p}}^{\times}$. Εξ ορισμού υπάρχει κάποιο $\frac{r'}{s'} \in R_{\mathfrak{p}}$ με

$$\tfrac{r}{s} \cdot \tfrac{r'}{s'} = \tfrac{rr'}{ss'} = 1_{R_{\mathfrak{p}}} = \tfrac{1_R}{1_R} \Longrightarrow \exists t \in R \smallsetminus \mathfrak{p} : (rr' - ss')t = 0_R.$$

Επειδή $rr't = ss't \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$ (λόγω τής πολλαπλασιαστικής κλειστότητας τού $R \smallsetminus \mathfrak{p}$) το r οφείλει να ανήκει στο $R \smallsetminus \mathfrak{p}$. (Εάν είχαμε $r \in \mathfrak{p}$, τότε θα έπρεπε να ισχύει $rr't \in \mathfrak{p}$, διότι το $\mathfrak{p}$ είναι ιδεώδες τού R.) Άρα $R_{\mathfrak{p}}^{\times} \subseteq R_{\mathfrak{p}} \smallsetminus \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$. Και αντιστρόφως· εάν $\frac{r}{s} \in R_{\mathfrak{p}} \smallsetminus \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$, τότε $r, s \notin \mathfrak{p}$, οπότε (σύμφωνα με το (b) τής σημειώσεως 2.3.9)

$$\left.\begin{array}{r} i_{R,R\smallsetminus\mathfrak{p}}(r) = \frac{r}{1_R} \in R_{\mathfrak{p}}^{\times} \\ \\ i_{R,R\smallsetminus\mathfrak{p}}(s) = \frac{s}{1_R} \in R_{\mathfrak{p}}^{\times} \Longrightarrow \frac{1_R}{s} \in R_{\mathfrak{p}}^{\times} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{r}{1_R} \cdot \frac{1_R}{s} = \frac{r}{s} \in R_{\mathfrak{p}}^{\times},$$

απ' όπου έπεται ότι $R_{\mathfrak{p}} \smallsetminus \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \subseteq R_{\mathfrak{p}}^{\times}$. □

2.3.26 Σημείωση. Το $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ είναι το ιδεώδες που παράγεται από την εικόνα $i_{R,R\smallsetminus\mathfrak{p}}(\mathfrak{p})$ τού $\mathfrak{p}$ μέσω τής $i_{R,R\smallsetminus\mathfrak{p}}$ εντός τού $R_{\mathfrak{p}}$ και η απεικόνιση

$$R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \ni \left(\tfrac{r}{r'} + \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}\right) \longmapsto \tfrac{r+\mathfrak{p}}{r'+\mathfrak{p}} \in \mathbf{Fr}(R/\mathfrak{p})$$

ορίζει έναν *ισομορφισμό σωμάτων*. (Πρβλ. άσκηση **A-2-21** (b).)

2.3.27 Παραδείγματα. (a) Ο **δακτύλιος**

$$\mathbb{Z}_{\langle p\rangle} = \left\{ r \in \mathbb{Q} \mid r = \frac{a}{b},\ \ (a,b) \in \mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}),\ \text{με μκδ}\,(a,b) = 1 \text{ και } p \nmid b \right\}$$

των p-αδικών κλασμάτων (όπου p πρώτος αριθμός) είναι τοπικός δακτύλιος έχων ως μεγιστοτικό του ιδεώδες το

$$\langle p\rangle\,\mathbb{Z}_{\langle p\rangle} = \left\{ r \in \mathbb{Q} \mid r = \frac{pa}{b},\ \ (a,b) \in \mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}),\ \text{με μκδ}\,(a,b) = 1 \text{ και } p \nmid b \right\}.$$

(b) Κατ' αναλογίαν, εάν $a \in \mathbf{k}$ και εάν τοπικοποιήσουμε τον πολυωνυμικό δακτύλιο $R = \mathbf{k}[\mathsf{X}]$ στο $\langle \mathsf{X} - a\rangle$, τότε λαμβάνουμε

$$\mathbf{k}[\mathsf{X}]_{\langle \mathsf{X}-a\rangle} = \left\{ \frac{F}{G} \in \mathbf{k}\,(\mathsf{X}) \ \middle|\ F, G \in \mathbf{k}[\mathsf{X}],\ G(a) \neq 0_{\mathbf{k}} \right\}$$

(βλ. πρόταση 1.1.25 (b)) με μεγιστοτικό του ιδεώδες το

$$\langle \mathsf{X} - a\rangle\,\mathbf{k}[\mathsf{X}]_{\langle \mathsf{X}-a\rangle} = \left\{ \frac{(\mathsf{X}-a)\,F}{G} \in \mathbf{k}\,(\mathsf{X}) \ \middle|\ F, G \in \mathbf{k}[\mathsf{X}],\ G(a) \neq 0_{\mathbf{k}} \right\}.$$

Ασκήσεις

A-2-18. Έστω S ένα πολλαπλασιαστικώς κλειστό υποσύνολο ενός δακτυλίου R. Εάν $I, J \in \mathcal{I}_R$, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(a) $I \subseteq J \Longrightarrow \mathsf{S}^{-1}I \subseteq \mathsf{S}^{-1}J$,

(b) $\mathsf{S}^{-1}(I+J) = \mathsf{S}^{-1}I + \mathsf{S}^{-1}J$,

(c) $\mathsf{S}^{-1}(I \cap J) = (\mathsf{S}^{-1}I) \cap (\mathsf{S}^{-1}J)$,

(d) $\mathsf{S}^{-1}(IJ) = (\mathsf{S}^{-1}I)(\mathsf{S}^{-1}J)$,

(e) $\mathsf{S}^{-1}(I : J) \subseteq (\mathsf{S}^{-1}I) : (\mathsf{S}^{-1}J)$, ισχύουσα ως ισότητα όταν το J είναι πεπερασμένως παραγόμενο.

Α-2-19. Έστω I ένα ιδεώδες ενός δακτυλίου R και έστω S ένα πολλαπλασιαστικώς κλειστό υποσύνολο τού R. Να αποδειχθεί η ισότητα

$$\mathsf{S}^{-1}\mathrm{Rad}(I) = \mathrm{Rad}(\mathsf{S}^{-1}I).$$

Α-2-20. Έστω S ένα πολλαπλασιαστικώς κλειστό υποσύνολο ακεραίας περιοχής (και αντιστοίχως, μιας Π.Κ.Ι.) R. Να αποδειχθεί ότι η τοπικοποίηση $\mathsf{S}^{-1}R$ τής R ως προς το S είναι ακεραία περιοχή (και αντιστοίχως, Π.Κ.Ι.).

Α-2-21. Έστω S ένα πολλαπλασιαστικώς κλειστό υποσύνολο ενός δακτυλίου R. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(a) Εάν η $f : R \longrightarrow R'$ είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων, τότε η εικόνα $f(\mathsf{S})$ είναι ένα πολλαπλασιαστικώς κλειστό υποσύνολο τού R'.

(b) Εάν $I \in \mathcal{I}_R$ και $\pi : R \longrightarrow R/I$ ο φυσικός επιμορφισμός, τότε

$$\mathsf{S}^{-1}R/\mathsf{S}^{-1}I \cong \pi(\mathsf{S})^{-1}(R/I).$$

(*Υπόδειξη*: Ο ομομορφισμός $\psi : \mathsf{S}^{-1}R \longrightarrow \pi(\mathsf{S})^{-1}(R/I)$ ο κατασκευαζόμενος μέσω τής προτάσεως 2.3.13 είναι επιρριπτικός και έχει το ιδεώδες $\mathsf{S}^{-1}I$ ως πυρήνα του.)

Α-2-22. Εάν ο R είναι ακεραία περιοχή, $f \in R \smallsetminus \{0_R\}$, $\mathsf{S} := \{\, f^{\nu} \,|\, \nu \in \mathbb{N}_0\}$ και $R_f := \mathsf{S}^{-1}R$, να αποδειχθεί ότι

$$R_f \cong R[\mathsf{X}]/\left\langle 1_R - \mathsf{X}f \right\rangle.$$

(*Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιηθεί καταλλήλως το πόρισμα 2.3.14.)

Α-2-23. Εάν η $f : R \longrightarrow R'$ είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων, το S ένα πολλαπλασιαστικώς κλειστό υποσύνολο τού R, το S' ένα πολλαπλασιαστικώς κλειστό υποσύνολο τού R' και $f(\mathsf{S}) \subseteq \mathsf{S}'$, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(a) Υπάρχει ένας μονοσημάντως ορισμένος ομομορφισμός δακτυλίων

$$\widehat{f}_{\mathsf{S},\mathsf{S}'} : \mathsf{S}^{-1}R \longrightarrow (\mathsf{S}')^{-1}R' \quad \text{με} \quad \widehat{f}_{\mathsf{S},\mathsf{S}'}(\tfrac{r}{1_R}) = \tfrac{f(r)}{1_{R'}}, \;\; \forall r \in R.$$

(b) Εάν ο f είναι μονομορφισμός και

$$\mathrm{Ker}(i_{R',\mathsf{S}'}) \cap f(R) \subseteq f(\mathrm{Ker}(i_{R,\mathsf{S}})),$$

τότε και ο $\widehat{f}_{\mathsf{S},\mathsf{S}'}$ είναι μονομορφισμός.

(c) Εάν $f(\mathsf{S}) = \mathsf{S}'$ και ο f είναι επιμορφισμός, τότε και ο $\widehat{f}_{\mathsf{S},\mathsf{S}'}$ είναι επιμορφισμός.

A-2-24. Έστω $\mathbf{k}$ οιοδήποτε σώμα. Θεωρούμε το σύνολο $\mathfrak{A}$ όλων των ακολουθιών $(a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots)$ με τα $a_i \in \mathbf{k}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Επ' αυτού ορίζουμε πράξεις *προσθέσεως* και *πολλαπλασιασμού* ως ακολούθως:

$$\left|\begin{array}{lcl} (a_0, a_1, a_2, \ldots) + (b_0, b_1, b_2, \ldots) & := & (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots), \\ \\ (a_0, a_1, a_2, \ldots) \cdot (b_0, b_1, b_2, \ldots) & := & (c_0, c_1, c_2, \ldots), \end{array}\right.$$

όπου

$$c_m := \sum_{i+j=m} a_i b_j = a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \cdots + a_m b_0, \ \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Η τριάδα $(\mathfrak{A}, +, \cdot)$ αποτελεί έναν δακτύλιο με μηδενικό του στοιχείο το $(0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}}, \ldots)$ και μοναδιαίο του στοιχείο το $(1_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}}, \ldots)$. Το $\mathbf{k}$ εμφυτεύεται στον $\mathfrak{A}$. Ταυτίζοντας κάθε $a \in \mathbf{k}$ με το $(a, 0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}}, \ldots) \in \mathfrak{A}$ και εισάγοντας ένα νέο σύμβολο

$$\mathsf{X} := (0_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}}, \ldots)$$

παρατηρούμε ότι, βάσει των ανωτέρω πράξεων, οιοδήποτε $(a_0, a_1, a_2, \ldots) \in \mathfrak{A}$ γράφεται ως εξής:

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) = a_0 + a_1\mathsf{X} + a_2\mathsf{X}^2 + \cdots + a_n\mathsf{X}^n + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \mathsf{X}^i.$$

Ο δακτύλιος $\mathfrak{A}$ συμβολίζεται συνήθως ως $\mathbf{k}[\![\mathsf{X}]\!]$ και καλείται **δακτύλιος των επίτυπων δυναμοσειρών** (ή **τύποις δυναμοσειρών**) μιας **μεταβλητής** (ή μιας **απροσδιορίστου**) X με συντελεστές ειλημμένους από το $\mathbf{k}$.

(a) Να αποδειχθεί ότι

$$\mathbf{k}[\![\mathsf{X}]\!]^{\times} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i \mathsf{X}^i \in \mathbf{k}[\![\mathsf{X}]\!] \ \middle| \ a_0 \in \mathbf{k} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\} \right\}$$

και ότι ο $\mathbf{k}[\![\mathsf{X}]\!]$ είναι ναιτεριανός τοπικός δακτύλιος έχων το κύριο ιδεώδες $\langle \mathsf{X} \rangle$ ως το (μοναδικό) μεγιστοτικό του ιδεώδες.

(b) Ο **δακτύλιος των επίτυπων δυναμοσειρών** (ή **τύποις δυναμοσειρών**) n **μεταβλητών** $\mathbf{k}[\![\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]\!]$ με συντελεστές ειλημμένους από το $\mathbf{k}$ ορίζεται επαγωγικώς:

$$\mathbf{k}[\![\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]\!] := \mathbf{k}[\![\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_{n-1}]\!][\![\mathsf{X}_n]\!], \ \ \forall n \geq 2.$$

Να αποδειχθεί ότι (και για $n \geq 2$) ο $\mathbf{k}[\![\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]\!]$ είναι ναιτεριανός τοπικός δακτύλιος έχων το ιδεώδες $\langle \mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n \rangle$ ως το (μοναδικό) μεγιστοτικό του ιδεώδες.

2.4 Ρητές Συναρτήσεις και Τοπικοί Δακτύλιοι Σημείων

2.4.1 Ορισμός. Έστω $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ μια συσχετική ποικιλότητα. Κατά την πρόταση 2.1.6 ο δακτύλιος των συντεταγμένων $\Gamma(V)$ ($\underset{\theta_V^{-1}}{\cong}$ $\mathbf{k}[V]$) τής V είναι ακεραία περιοχή.

Το σώμα κλασμάτων

$$\boxed{\mathbf{k}(V) := \mathbf{Fr}(\Gamma(V)) \underset{\overline{\theta_V}^{-1}}{\cong} \mathbf{Fr}(\mathbf{k}[V])}$$

τού $\mathbf{k}[V]$ καλείται **σώμα των ρητών συναρτήσεων** επί τής V (και κάθε στοιχείο τού $\mathbf{k}(V)$ **ρητή συνάρτηση** επί τής V).

Κάθε ρητή συνάρτηση $f \in \mathbf{k}(V)$ γράφεται ως κλάσμα

$$f = \frac{\overline{G}}{\overline{H}} = \frac{\theta_V(g)}{\theta_V(h)}, \tag{2.4}$$

όπου

$$\overline{G} = G + \mathbf{I}(V) \in \Gamma(V), \quad \overline{H} = H + \mathbf{I}(V) \in \Gamma(V), \quad H \notin \mathbf{I}(V),$$

με τα G και $H \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ πολυώνυμα εκπροσωπούντα δυο πολυωνυμικές συναρτήσεις g και $h \in \mathbf{k}[V]$, αντιστοίχως. Σημειωτέον ότι όταν ο δακτύλιος των συντεταγμένων $\Gamma(V)$ τής V δεν είναι Π.Μ.Π., ενδέχεται να υπάρχουν διαφορετικές εκπροσωπήσεις τής f ως λόγου των κλάσεων υπολοίπων δύο πολυωνύμων ανηκόντων στον $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$. (Αντιθέτως, όταν ο $\Gamma(V)$ είναι Π.Μ.Π., η άσκηση **A-1-2** μας πληροφορεί ότι κάθε στοιχείο f τού σώματος $\mathbf{k}(V)$ είναι δυνατόν να γραφεί υπό τη μορφή $f = \frac{\overline{G}}{\overline{H}}$, όπου τα $\overline{G}, \overline{H}$ δεν έχουν (γνήσιους) κοινούς παράγοντες, με την παράσταση αυτή *κατ' ουσίαν* μονοσημάντως ορισμένη, ήτοι με μόνη εξαίρεση τον πολλαπλασιασμό (καθενός των $\overline{G}, \overline{H}$) με κάποια στοιχεία τού $\mathbf{k}$.) Επιπροσθέτως, μια τέτοια f μπορεί να νοηθεί ως «συνάρτηση» (από την V στο $\mathbf{k}$) λαμβάνουσα «καλώς ορισμένη τιμή» σε ένα σημείο $P \in V$ μόνον όταν υφίσταται μια παράσταση (2.4) αυτής, στην οποία το $H(P) = h(P)$ είναι $\neq 0_{\mathbf{k}}$ (ήτοι στην περίπτωση μη μηδενισμού τού παρονομαστή στο σημείο P).

2.4.2 Ορισμός. Έστω $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ μια συσχετική ποικιλότητα και έστω $P \in V$. Λέμε ότι μια ρητή συνάρτηση $f \in \mathbf{k}(V)$ επί τής V είναι **κανονική στο σημείο** P όταν ορίζεται σε αυτό, ήτοι όταν δέχεται παράσταση (2.4) με $H(P) \neq 0_{\mathbf{k}}$. Ως **πεδίο ορισμού** μιας $f \in \mathbf{k}(V)$ ορίζεται το σύνολο

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) := \{P \in V \mid \text{η } f \text{ είναι κανονική στο σημείο } P\}}$$

και ως **ιδεώδες των παρονομαστών της** το ιδεώδες

$$\boxed{J_f^{\pi\alpha\varrho} := \left\{\overline{H} \in \Gamma(V) \,\middle|\, \overline{H} f \in \Gamma(V)\right\}}$$

τού $\Gamma(V)$. Το σύνολο

$$\boxed{\mathrm{Pol}(f) := V \smallsetminus \mathrm{Dom}(f)}$$

καλείται **σύνολο των πόλων** τής f (και κάθε στοιχείο του **πόλος** τής f). Επίσης, για οιοδήποτε $h \in \mathbf{k}[V]$ με $\overline{H} = \theta_V(h) \in \Gamma(V)$ θέτουμε

$$\boxed{V_h := V \smallsetminus \mathbf{V}(H) := \{P \in V \mid H(P) \neq 0_{\mathbf{k}}\}\,.}$$

Τέλος, θέτουμε

$$\boxed{\mathcal{O}_{V,P} := \{f \in \mathbf{k}(V) \mid \text{ η } f \text{ είναι κανονική στο σημείο } P\}\,.} \tag{2.5}$$

2.4.3 Παραδείγματα. (a) Εάν $V = \mathbf{V}(\mathsf{Y}^2 - \mathsf{X}^2(\mathsf{X} + 1_{\mathbf{k}})) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$, τότε η $f = \frac{\overline{\mathsf{X}}}{\overline{\mathsf{Y}}} \in \mathbf{k}(V)$ έχει το σύνολο $\mathrm{Dom}(f) = V \smallsetminus \{(0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}})\}$ ως πεδίο ορισμού της.
(b) Εάν $V = \mathbf{V}(\mathsf{XW} - \mathsf{YZ}) \subseteq \mathbb{A}^4_{\mathbf{k}}$, τότε $\Gamma(V) = \mathbf{k}[\mathsf{X}, \mathsf{Y}, \mathsf{Z}, \mathsf{W}] / \langle \mathsf{XW} - \mathsf{YZ} \rangle$ και η

$$f = \frac{\overline{\mathsf{X}}}{\overline{\mathsf{Y}}} = \frac{\overline{\mathsf{Z}}}{\overline{\mathsf{W}}} \in \mathbf{k}(V)$$

(δεχόμενη διαφορετικές παραστάσεις (2.4)) είναι κανονική στο $P = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in V$ όταν $a_2 \neq 0_{\mathbf{k}}$ ή $a_4 \neq 0_{\mathbf{k}}$ και

$$\mathrm{Pol}(f) = \{P = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in V \mid a_2 = a_4 = 0_{\mathbf{k}}\}\,.$$

Μάλιστα, είναι αδύνατον να γράψουμε την f ως λόγο $f = \frac{\overline{G}}{\overline{H}}$ με $H(P) \neq 0_{\mathbf{k}}$ *για όλα τα* $P \in \mathrm{Dom}(f)$! (Πράγματι· εάν η f εγράφετο κατ' αυτόν τον τρόπο, τότε, επειδή $\overline{\mathsf{X}} \neq 0_{\Gamma(V)}$, θα είχαμε $f = \frac{\overline{G}}{\overline{H}} = \frac{\overline{G \cdot \mathsf{X}}}{\overline{H \cdot \mathsf{X}}} = \frac{\overline{G \cdot \mathsf{X}}}{\overline{H \cdot \mathsf{X}}}$, ήτοι μη οριζόμενη στο σημείο $(0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{k}}) \in \mathrm{Dom}(f)$.) Είμαστε, ως εκ τούτου, υποχρεωμένοι να χρησιμοποιούμε *διαφορετικές παραστάσεις τής f σε διαφορετικά σημεία τού* $\mathrm{Dom}(f)$. Από την άλλη μεριά, η ταύτιση δυο δοθεισών ρητών συναρτήσεων $f_1, f_2 \in \mathbf{k}(V)$ επί μιας συσχετικής ποικιλότητας V είναι διασφαλισμένη όταν αυτές τύχει να ταυτίζονται σε κάποιο μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο $U \subseteq \mathrm{Dom}(f_1) \cap \mathrm{Dom}(f_2)$ τής V (βλ. πρόταση 2.4.5).
(c) Εάν $V = \mathbf{V}(\mathsf{Y}^2 + \mathsf{X}^2 - 1_{\mathbf{k}}) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$, τότε για την $f = \frac{\overline{1_{\mathbf{k}} + \mathsf{Y}}}{\overline{\mathsf{X}}} \in \mathbf{k}(V)$ έχουμε προφανώς $\mathrm{Dom}(f) \supseteq V \smallsetminus \{(0_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{k}}), (0_{\mathbf{k}}, -1_{\mathbf{k}})\}$. Ωστόσο, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι

$$f = \frac{\overline{\mathsf{X}} \cdot (\overline{1_{\mathbf{k}} + \mathsf{Y}})}{\overline{\mathsf{X}} \cdot \overline{\mathsf{X}}} = \frac{\overline{\mathsf{X}(1_{\mathbf{k}} + \mathsf{Y})}}{\overline{\mathsf{X}}^2} = \frac{\overline{\mathsf{X}(1_{\mathbf{k}} + \mathsf{Y})}}{\overline{1_{\mathbf{k}} - \mathsf{Y}^2}} = \frac{\overline{\mathsf{X}}}{\overline{1_{\mathbf{k}} - \mathsf{Y}}},$$

συμπεραίνουμε τελικώς ότι $\mathrm{Dom}(f) = V \smallsetminus \{(0_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{k}})\}$.

2.4.4 Σημείωση. (a) Έστω $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ μια συσχετική ποικιλότητα και έστω $f \in \mathbf{k}(V)$. Η f ορίζει μια συνάρτηση αποτιμήσεως

$$\mathrm{Dom}(f) \ni P \longmapsto f(P) = \frac{G(P)}{H(P)} = \frac{g(P)}{h(P)} \in \mathbf{k}$$

για κάποια παράσταση (2.4) τής f. (Ωστόσο, οι λαμβανόμενες τιμές είναι ανεξάρτητες τής επιλογής των G, H. Πράγματι· εάν ισχύει $f = \frac{\overline{G_1}}{\overline{H_1}} = \frac{\overline{G_2}}{\overline{H_2}}$,τότε έχουμε προφανώς $G_1(P)H_2(P) = G_2(P)H_1(P)$ με $H_1(P) \neq 0_{\mathbf{k}}$ και $H_2(P) \neq 0_{\mathbf{k}}$, οπότε $\frac{G_1(P)}{H_1(P)} = \frac{G_2(P)}{H_2(P)}$.)
(b) Για κάθε $P \in \mathrm{Dom}(f)$ υπάρχει μια κατά Zariski ανοικτή περιοχή $U_P(f) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ τού P και $\overline{G}, \overline{H} \in \Gamma(V)$ με $H(Q) \neq 0_{\mathbf{k}}$ για κάθε $Q \in U_P(f)$, ούτως ώστε να ισχύει $f(Q) = \frac{G(Q)}{H(Q)}$ για κάθε $Q \in U_P(f)$ (πρβλ. άσκηση **A-1-17**).

2.4.5 Πρόταση. *Εάν το $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ είναι μια συσχετική ποικιλότητα και οι $f_1, f_2 \in \mathbf{k}(V)$ δυο ρητές συναρτήσεις που είναι κανονικές σε κάποιο μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο U τής V, τότε ισχύει η εξής συνεπαγωγή* :

$$f_1|_U = f_2|_U \Longrightarrow f_1 = f_2.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εξ υποθέσεως, $U \subseteq \mathrm{Dom}(f_1) \cap \mathrm{Dom}(f_2)$. Έστω τυχόν σημείο $P \in U$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν το (b) τής σημειώσεως 2.4.4 μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι f_1, f_2 παρίστανται ως λόγοι $f_1 = \frac{\overline{G_1}}{\overline{H_1}}$, $f_2 = \frac{\overline{G_2}}{\overline{H_2}}$ επί κάποιας μη κενής, κατά Zariski ανοικτής περιοχής $U_P \subseteq U$ τού P. Εξ υποθέσεως,

$$G_1(Q)H_2(Q) - G_2(Q)H_1(Q) = 0_{\mathbf{k}}, \ \ \forall Q \in U_P.$$

Θέτοντας $\Xi := G_1H_2 - G_2H_1$, η $\Xi : V \longrightarrow \mathbf{k}$ μπορεί να εκληφθεί ως πολυωνυμική συνάρτηση επί τής V με $U_P \subseteq \Xi^{-1}(0_{\mathbf{k}})$. Εξ αυτού έπεται ότι $\Xi^{-1}(0_{\mathbf{k}}) = V$ (διότι το $\Xi^{-1}(0_{\mathbf{k}})$ -κατά την πρόταση 2.1.14- είναι κλειστό και το U_P -κατά την πρόταση 1.6.2- πυκνό εντός τής V). Επομένως, $\Xi \in \mathbf{I}(V)$, οπότε

$$\overline{G}_1\overline{H}_2 = \overline{G}_2\overline{H}_1 \Longrightarrow f_1 = \frac{\overline{G_1}}{\overline{H_1}} = \frac{\overline{G_2}}{\overline{H_2}} = f_2$$

επί τού $\mathbf{k}(V)$. □

2.4.6 Σημείωση. (a) Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι το $\mathcal{O}_{V,P}$ είναι *υποδακτύλιος* τού σώματος $\mathbf{k}(V)$ υποκείμενος στις ακόλουθες σχέσεις εγκλεισμού:

$$\mathbf{k} \subseteq \mathbf{k}[V] \cong \Gamma(V) \subseteq \mathcal{O}_{V,P} \subseteq \mathbf{k}(V).$$

(b) Το σύνολο των πόλων $\mathrm{Pol}(f)$ είναι *αλγεβρικό*, διότι από τον ορισμό τού $J_f^{\pi\alpha\varrho}$ συνάγουμε ότι

$$J_f^{\pi\alpha\varrho} = \left\{ \overline{H} \in \Gamma(V) \,\middle|\, \text{η } f \text{ γράφεται ως } f = \frac{\overline{G}}{\overline{H}} \right\} \cup \left\{ 0_{\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]} \right\},$$

οπότε

$$\mathrm{Pol}(f) = \left\{ P \in V \,\middle|\, H(P) = 0_{\mathbf{k}}, \ \forall \overline{H} \in J_f^{\pi\alpha\varrho} \right\} = \mathbf{V}_V(J_f^{\pi\alpha\varrho}).$$

2.4.7 Πρόταση. *Εάν το $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ είναι μια συσχετική ποικιλότητα και $f \in \mathbf{k}(V)$, τότε ισχύουν τα εξής:*

(a) *Το* $\mathrm{Dom}(f)$ *είναι ανοικτό και πυκνό (ως προς την τοπολογία Zariski) εντός τής V.*

(b) *Εάν το* $\mathbf{k}$ *είναι αλγεβρικώς κλειστό, τότε*

$$\mathrm{Dom}(f) = V \Longleftrightarrow f \in \Gamma(V) \Longleftrightarrow \theta_V^{-1}(f) \in \mathbf{k}[V]$$

και

$$\mathbf{k}[V] \cong \Gamma(V) = \bigcap_{P \in V} \mathcal{O}_{V,P}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a) Επειδή $\mathrm{Pol}(f) = \mathbf{V}_V(J_f^{\pi\alpha\varrho})$, το $\mathrm{Dom}(f) = V \smallsetminus \mathrm{Pol}(f)$ είναι ανοικτό· επιπροσθέτως, ως μη κενό, είναι και πυκνό (ως προς την τοπολογία Zariski) εντός τής V (βλ. πρόταση 1.6.2).

(b) Έχουμε $\mathrm{Dom}(f) = V$ εάν και μόνον εάν $\mathbf{V}_V(J_f^{\pi\alpha\varrho}) = \varnothing$. Κατά το ασθενές θεώρημα θέσεων μηδενισμού 1.8.1, τούτο είναι ισοδύναμο με το ότι $1_{\mathbf{k}} \in J_f^{\pi\alpha\varrho}$, δηλαδή με το ότι $f \in \Gamma(V)$. Εξάλλου,

$$\Gamma(V) \subseteq \mathcal{O}_{V,P},\ \forall P \in V \Longrightarrow \Gamma(V) \subseteq \bigcap_{P \in V} \mathcal{O}_{V,P},$$

και για κάθε $f \in \bigcap_{P \in V} \mathcal{O}_{V,P}$ έχουμε

$$\mathrm{Pol}(f) = \mathbf{V}_V(J_f^{\pi\alpha\varrho}) = \varnothing \Longrightarrow 1_{\mathbf{k}} \cdot f = f \in \Gamma(V),$$

οπότε $\bigcap_{P \in V} \mathcal{O}_{V,P} \subseteq \Gamma(V)$. □

2.4.8 Παρατήρηση. Όταν το $\mathbf{k}$ δεν είναι αλγεβρικώς κλειστό, τότε το 2.4.7 (b) μπορεί να είναι εσφαλμένο ακόμη και για $n = 1$. Επί παραδείγματι, για $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$, η $f = \frac{1}{\mathsf{X}^2+1}$ είναι μια ρητή, *μη πολυωνυμική* συνάρτηση ορισμένη σε ολόκληρη την V!

2.4.9 Πρόταση. *Εάν το $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ είναι μια συσχετική ποικιλότητα και $0 \neq f \in \mathbf{k}[V]$, τότε ισχύουν τα εξής:*

(a) *Το (κατά Zariski ανοικτό) υποσύνολο V_f τής V αποτελεί μια συσχετική ποικιλότητα έχουσα ως δακτύλιο συντεταγμένων της τον*

$$\Gamma(V_f) \cong \mathbf{k}[V_f] \cong \mathbf{k}[V][f^{-1}] = \mathbf{k}[V]_f,$$

ήτοι την τοπικοποίηση τού $\mathbf{k}[V]$ ως προς το $\{ f^\nu \,|\, \nu \in \mathbb{N}_0 \}$ (βλ. 2.3.11 (b)).

(b) *Η τοπολογία Zariski επί τής V διαθέτει μια βάση αποτελούμενη από συσχετικές ποικιλότητες.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a) Προφανώς, $\mathbf{k}[V][f^{-1}] = \mathbf{k}[V]_f$. Έστω $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ ένα πολυώνυμο που εκπροσωπεί την πολυωνυμική συνάρτηση f. Θέτοντας

$$I_F := \langle \mathbf{I}(V), \mathsf{X}_{n+1}F - 1 \rangle \subset \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n, \mathsf{X}_{n+1}], \;\; W_f := \mathbf{V}(I_F) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}},$$

παρατηρούμε ότι οι πολυωνυμικές απεικονίσεις

$$W_f \ni (\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n, \mathsf{X}_{n+1}) \longmapsto (\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n) \in V_f,$$
$$V_f \ni (\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n) \longmapsto (\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n, \tfrac{1}{F}) \in W_f,$$

είναι αμφιρριπτικές και η μία αντίστροφος τής άλλης. Κατά συνέπειαν, τα V_f και W_f είναι μεταξύ τους ισόμορφα ως *αλγεβρικά σύνολα* και, σύμφωνα με το πόρισμα 2.1.18, $\mathbf{k}[W_f] \cong \mathbf{k}[V_f]$. Σημειωτέον ότι ο επιμορφισμός δακτυλίων

$$(\mathbf{k}[V] \hookrightarrow) \;\; \mathbf{k}[V][\mathsf{X}_{n+1}] \longrightarrow \mathbf{k}[W_f], \;\; \mathsf{X}_{n+1} \longmapsto \tfrac{1}{F}$$

έχει ως πυρήνα του το *πρώτο* ιδεώδες $\langle \mathsf{X}_{n+1}F - 1 \rangle \subset \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n, \mathsf{X}_{n+1}]$, οπότε (κατά το 1ο θεώρημα ισομορφισμών δακτυλίων 1.1.10)

$$\mathbf{k}[V][\mathsf{X}_{n+1}] / \langle \mathsf{X}_{n+1}F - 1 \rangle \cong \mathbf{k}[W_f],$$

και το W_f (και κατ' επέκτασιν και το V_f) είναι μια *συσχετική ποικιλότητα* (βλ. θεώρημα 1.1.13 και πρόταση 2.1.6). Εξάλλου, κατά την άσκηση **A-2-22**,

$$\mathbf{k}[V]_f \cong \mathbf{k}[V][\mathsf{X}_{n+1}] / \langle \mathsf{X}_{n+1}F - 1 \rangle \cong \mathbf{k}[W_f].$$

Άρα όντως $\Gamma(V_f) \cong \mathbf{k}[V_f] \cong \mathbf{k}[W_f] \cong \mathbf{k}[V]_f$.

(b) Έστω $P \in V$ και έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο τού V που περιέχει το P. Επειδή το $V \smallsetminus U$ είναι αλγεβρικό σύνολο εντός τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$, υπάρχει ένα $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$, τέτοιο ώστε $F(P) \neq 0_{\mathbf{k}}$ και $F(Q) = 0_{\mathbf{k}}, \forall Q \in V \smallsetminus U$ (βλ. άσκηση **A-1-17**). Εάν το F εκπροσωπεί μια πολυωνυμική συνάρτηση f, τότε το V_f αποτελεί (λόγω τού (a)) μια υποποικιλότητα τής V με $P \in V_f$. Ως εκ τούτου, η οικογένεια $\{ V_f \mid f \in \mathbf{k}[V] \}$ είναι μια βάση τής τοπολογίας Zariski $\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_V$ επί τής V που αποτελείται από υποποικιλότητες τής V (διότι για κάθε $P \in V$ η οικογένεια $\{ V_f \mid f \in \mathbf{k}[V], \; P \in V_f \}$ είναι μια βάση περιοχών τού P). $\square$

2.4.10 Θεώρημα. *Εάν το P είναι ένα σημείο μιας συσχετικής ποικιλότητας $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(a) *Ο δακτύλιος $\mathcal{O}_{V,P}$ αποτελεί την τοπικοποίηση τού δακτυλίου συντεταγμένων $\Gamma(V)$ τής V στο μεγιστοτικό ιδεώδες $\mathbf{I}_V(\{P\})$* (βλ. ορισμό 2.3.24)*, δηλαδή*

$$\boxed{\mathcal{O}_{V,P} = \Gamma(V)_{\mathbf{I}_V(\{P\})} \cong \mathbf{k}[V]_{\theta_V^{-1}(\mathbf{I}_V(\{P\}))}}$$

(b) *Ο $\mathcal{O}_{V,P}$ είναι τοπικός ναιτεριανός δακτύλιος (και, επιπροσθέτως, ακεραία περιοχή) με το*

$$\boxed{\mathfrak{m}_{V,P} := \mathbf{I}_V(\{P\})\Gamma(V)_{\mathbf{I}_V(\{P\})} = \{ f \in \mathcal{O}_{V,P} \mid f(P) = 0_{\mathbf{k}}\}}$$

ως (το μοναδικό) μεγιστοτικό του ιδεώδες και

$$\boxed{\mathcal{O}_{V,P}/\mathfrak{m}_{V,P} \cong \mathbf{Fr}(\Gamma(V)/\mathbf{I}_V(\{P\})) \cong \Gamma(V)/\mathbf{I}_V(\{P\}) \cong \mathbf{k}.}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κατ' αρχάς υπενθυμίζουμε ότι

$$\mathbf{I}_V(\{P\}) := \left\{ \overline{F} \in \Gamma(V) \;\middle|\; F \in \mathbf{I}(\{P\}) \right\} = \left\{ \overline{F} \in \Gamma(V) \;\middle|\; F(P) = 0_{\mathbf{k}} \right\}.$$

(a) Προφανώς,

$$\mathcal{O}_{V,P} = \left\{ f = \frac{\overline{G}}{\overline{H}} \in \mathbf{k}(V) \;\middle|\; \overline{G}, \overline{H} \in \Gamma(V),\ H(P) \neq 0_{\mathbf{k}} \right\}$$

$$= \left\{ f = \frac{\overline{G}}{\overline{H}} \in \mathbf{k}(V) \;\middle|\; \overline{G}, \overline{H} \in \Gamma(V),\ \overline{H} \in \Gamma(V) \smallsetminus \mathbf{I}_V(\{P\}) \right\} = \Gamma(V)_{\mathbf{I}_V(\{P\})}.$$

(b) Το ότι ο $\mathcal{O}_{V,P}$ είναι τοπικός ναιτεριανός δακτύλιος (και, επιπροσθέτως, ακεραία περιοχή) έπεται από το (a), την πρόταση 2.3.25, το πόρισμα 2.3.19 και την άσκηση **A-2-20**. Το (μοναδικό) μεγιστοτικό ιδεώδες $\mathfrak{m}_{V,P}$ τού τοπικού δακτυλίου $\mathcal{O}_{V,P}$ είναι (σύμφωνα με την πρόταση 2.3.25) το

$$\mathbf{I}_V(\{P\})\Gamma(V)_{\mathbf{I}_V(\{P\})} := \left\{ \frac{\overline{G}}{\overline{H}} \in \Gamma(V)_{\mathbf{I}_V(\{P\})} \;\middle|\; \overline{G} \in \mathbf{I}_V(\{P\}),\ \overline{H} \in \Gamma(V) \smallsetminus \mathbf{I}_V(\{P\}) \right\}$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ f = \frac{\overline{G}}{\overline{H}} \in \mathcal{O}_{V,P} \;\middle|\; \overline{G}, \overline{H} \in \Gamma(V),\ G(P) = 0_{\mathbf{k}},\ H(P) \neq 0_{\mathbf{k}} \right\} \\ &= \{ f \in \mathcal{O}_{V,P} \mid f(P) = 0_{\mathbf{k}}\}. \end{aligned}$$

Σε ό,τι αφορά στους ανωτέρω αναγραφόμενους ισομορφισμούς σωμάτων: ο πρώτος μάς είναι γνωστός από την προηγηθείσα σημείωση 2.3.26, ο δεύτερος είναι προφανής, διότι η ακεραία περιοχή $\Gamma(V)/\mathbf{I}_V(\{P\})$ είναι αφ' εαυτής σώμα, ενώ ο τρίτος έπεται ύστερα από εφαρμογή τού 1ου θεωρήματος ισομορφισμών δακτυλίων 1.1.10 για τον επιμορφισμό αποτιμήσεως

$$\Gamma(V) \ni \overline{F} \longmapsto F(P) \in \mathbf{k}$$

που έχει το ιδεώδες $\mathbf{I}_V(\{P\})$ ως πυρήνα του. □

2.4.11 Σημείωση. Ο δακτύλιος $\mathcal{O}_{V,P}$ αναφέρεται, ιδιαιτέρως, ως **ο τοπικός δακτύλιος τής** V **στο** P. Οι τοπικοί δακτύλιοι $\mathcal{O}_{V,P}$ παίζουν πρωτεύοντα ρόλο στη μελέτη ποικίλων προβλημάτων εντός τού πλαισίου τής Αλγεβρικής Γεωμετρίας, καθότι εμπεριέχουν εκείνες τις αλγεβρικές πληροφορίες που είναι απαραίτητες για την περιγραφή των γεωμετρικών ιδιοτήτων των συσχετικών ποικιλοτήτων V *σε μια γειτονιά* τού εκάστοτε θεωρουμένου σημείου P. Επί παραδείγματι, το επόμενο θεώρημα καταδεικνύει με τον πλέον σαφή τρόπο το τι σημαίνουν *γεωμετρικώς* τα πρώτα ιδεώδη τού $\mathcal{O}_{V,P}$ και δικαιολογεί, εν πολλοίς, την εισαγωγή τού επιθέτου «τοπικός» στην ορολογία.

2.4.12 Θεώρημα. (Περί τού φάσματος τού $\mathcal{O}_{V,P}$**)** *Εάν το* P *είναι ένα σημείο μιας συσχετικής ποικιλότητας* $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ (**k** *αλγεβρικώς κλειστό*), *τότε υφίσταται μια αμφίρριψη*

$$\boxed{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{V,P}) \ni \mathfrak{p} \longmapsto \mathbf{V}_V(i^{-1}_{\Gamma(V),\Gamma(V)\smallsetminus \mathbf{I}_V(\{P\})}(\mathfrak{p})) \in \left\{ \begin{array}{c} \text{υποποικιλότητες} \\ W \text{ τής } V \text{με } P \in W \end{array} \right\}}$$

μεταξύ τού φάσματος (*ήτοι τής οικογενείας των πρώτων ιδεωδών*) *τού τοπικού δακτυλίου* $\mathcal{O}_{V,P}$ *τής* V *στο* P *και τής οικογενείας των υποποικιλοτήτων τής* V *των διερχομένων από το* P.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η εν λόγω αμφίρριψη είναι η σύνθεση $\widetilde{\mathbf{V}}_V \circ \beta$ δύο αμφιρρίψεων: Η πρώτη εξ αυτών (που την ονοματίζουμε β) είναι αυτή τού θεωρήματος 2.3.23:

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{V,P}) \ni \mathfrak{p} \overset{\beta}{\longmapsto} i^{-1}_{\Gamma(V),\Gamma(V)\smallsetminus \mathbf{I}_V(\{P\})}(\mathfrak{p}) \in \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(\Gamma(V)) \mid \mathfrak{q} \cap (\Gamma(V) \smallsetminus \mathbf{I}_V(\{P\})) = \varnothing\}$$

(όπου $R := \Gamma(V)$, $\mathsf{S} := \Gamma(V) \smallsetminus \mathbf{I}_V(\{P\})$). Η δεύτερη είναι ο περιορισμός, ας τον πούμε $\widetilde{\mathbf{V}}_V$, τής αμφιρρίψεως $\mathbf{V}_V$ τού θεωρήματος 2.1.9 (e):

$$\mathrm{Spec}(\Gamma(V)) \overset{\mathbf{V}_V}{\longmapsto} \{\text{υποποικιλότητες } V\}$$

επί τού συνόλου $\{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(\Gamma(V)) \mid \mathfrak{q} \cap (\Gamma(V) \smallsetminus \mathbf{I}_V(\{P\})) = \varnothing\}$. Αρκεί λοιπόν να προσδιορισθεί η εικόνα τής $\widetilde{\mathbf{V}}_V$. Αυτή αποτελείται από εκείνες τις υποποικιλότητες W τής V που είναι τής μορφής $W = \mathbf{V}_V(\mathfrak{q})$, για κάποιο πρώτο ιδεώδες $\mathfrak{q}$ τού $\Gamma(V)$ το οποίο πληροί την επιπρόσθετη συνθήκη $\mathfrak{q} \cap (\Gamma(V) \smallsetminus \mathbf{I}_V(\{P\})) = \varnothing$. Όμως αυτή η συνθήκη ισοδυναμεί με την

$$\mathfrak{q} \subseteq \mathbf{I}_V(\{P\}) \Longleftrightarrow W = \mathbf{V}_V(\mathfrak{q}) \supseteq \mathbf{V}_V(\mathbf{I}_V(\{P\})) = \{P\} \Longleftrightarrow P \in W,$$

οπότε πράγματι η $\widetilde{\mathbf{V}}_V \circ \beta$ απεικονίζει αμφιρριπτικώς το φάσμα τού $\mathcal{O}_{V,P}$ επί τής οικογενείας των υποποικιλοτήτων τής V των διερχομένων από το P. □

2.4.13 Σημείωση. Μια δεύτερη, σημαντική εφαρμογή των ως άνω ορισθέντων τοπικών δακτυλίων δίδεται στο επόμενο θεώρημα. Έχουμε ήδη αποδείξει μέσω τού πορίσματος

1.8.8 ότι για ιδεώδη I τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ ($\mathbf{k}$ αλγεβρικώς κλειστό) έχοντα πεπερασμένο σημειοσύνολο μηδενισμού $\mathbf{V}(I)$, η διάσταση τού $\mathbf{k}$-διανυσματικού χώρου $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]/I$ αποτελεί το άνω φράγμα τού $\sharp(\mathbf{V}(I))$. Το θεώρημα 2.4.14 μας πληροφορεί ότι ο υπολογισμός τής εν λόγω διαστάσεως μπορεί να αναχθεί στον υπολογισμό των διαστάσεων των πηλικοδακτυλίων των δημιουργούμενων από τους τοπικούς δακτυλίους τού περιβάλλοντος συσχετικού χώρου στα σημεία τού $\mathbf{V}(I)$ ύστερα από θεώρηση των κλάσεων υπολοίπων ως προς τα ιδεώδη που παράγονται από το ίδιο το I εντός αυτών.

2.4.14 Θεώρημα. (Ιδεώδη με πεπερασμένα σημεία μηδενισμού) *Έστω I ένα ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ ($\mathbf{k}$ αλγεβρικώς κλειστό) με $\mathbf{V}(I) = \{P_1, \ldots, P_m\}$, $m \in \mathbb{N}$. Τότε*

$$\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]/I \cong \bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}, P_j}/I\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}, P_j},$$

οπότε

$$\dim_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]/I) = \sum_{j=1}^{m} \dim_{\mathbf{k}}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}, P_j}/I\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}, P_j}).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε $j \in \{1, \ldots, m\}$ ορίζουμε τους ομομορφισμούς δακτυλίων:

$$\vartheta_j : \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}, P_j}/I\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}, P_j}, \;\; F \longmapsto \vartheta_j(F) := F + I\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}, P_j}.$$

Αυτοί επάγουν έναν ομομορφισμό δακτυλίων

$$\vartheta : \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}, P_j}/I\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}, P_j},$$
$$F \longmapsto \vartheta(F) := (\vartheta_1(F), \ldots, \vartheta_m(F)).$$

Επειδή $F \in I \Longrightarrow \vartheta_j(F) \in I\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}, P_j}, \forall j \in \{1, \ldots, m\}$, έχουμε $I \subseteq \mathrm{Ker}(\vartheta)$. Αρκεί, βασιζόμενοι στο 1ο θεώρημα ισομορφισμών δακτυλίων 1.1.10, να δείξουμε ότι ο ϑ είναι επιρριπτικός με πυρήνα του το I. Αυτό θα γίνει σε πέντε βήματα:

Βήμα 1ο. Εάν $I_j := \mathbf{I}(\{P_j\}),\ \forall j \in \{1, \ldots, m\}$, τότε, σύμφωνα με το θεώρημα 1.8.2 των θέσεων μηδενισμού τού Hilbert,

$$\mathrm{Rad}(I) = \mathbf{I}(\{P_1, \ldots, P_m\}) = \bigcap_{j=1}^{m} I_j.$$

Κατά την άσκηση **A-1-29**, $\exists d \in \mathbb{N} : (\bigcap_{j=1}^{m} I_j)^d \subseteq I$. Εξάλλου, επειδή

$$\varnothing = \{P_j\} \cap \{\, P_\kappa |\, \kappa \in \{1, \ldots, m\} \smallsetminus \{j\}\} = \mathbf{V}(I_j) \cap \mathbf{V}(\bigcap \{\, I_\kappa |\, \kappa \in \{1, \ldots, m\} \smallsetminus \{j\}\}),$$

τα I_j και $\bigcap \{\, I_\kappa |\, \kappa \in \{1, \ldots, m\} \smallsetminus \{j\}\}$ είναι μεταξύ τους πρώτα για κάθε $j \in \{1, \ldots, m\}$ (βλ. άσκηση **A-1-57**). Επομένως, σύμφωνα με την άσκηση **A-1-26**,

$$\bigcap_{j=1}^{m} I_j^d = (\bigcap_{j=1}^{m} I_j)^d \subseteq I. \tag{2.6}$$

Βήμα 2ο. Επιλέγουμε πολυώνυμα

$$F_1, F_2, \ldots, F_m \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] : \left[\forall i, j \in \{1, \ldots, m\} \Longrightarrow F_i\left(P_j\right) = \left\{ \begin{array}{ll} 0_{\mathbf{k}}, & i \neq j \\ 1_{\mathbf{k}}, & i = j \end{array} \right. \right]$$

(η ύπαρξη των οποίων είναι διασφαλισμένη από την άσκηση **Α-1-17**). Εν συνεχεία, για κάθε $i \in \{1, \ldots, m\}$ θέτουμε

$$E_i := 1_{\mathbf{k}} - \left(1_{\mathbf{k}} - F_i^d\right)^d, \quad D_i := \sum_{\nu=1}^{d} \binom{d}{\nu} (-1_{\mathbf{k}})^{\nu} (F_i^d)^{\nu-1},$$

και παρατηρούμε (μέσω τού διωνυμικού αναπτύγματος) ότι $E_i = F_i^d D_i$. Εξ αυτού έπεται ότι

$$\left\{ \begin{array}{l} E_i \in I_j^d, \text{ όταν } i \neq j, \text{ και} \\ \\ 1_{\mathbf{k}} - \sum_{i=1}^m E_i \in I. \end{array} \right\} \tag{2.7}$$

Πράγματι· όταν $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq j$, τότε

$$F_i\left(P_j\right) = 0_{\mathbf{k}} \Rightarrow F_i \in I_j \Rightarrow F_i^d \in I_j^d \Rightarrow E_i = F_i^d D_i \in I_j^d.$$

Επιπροσθέτως, *για κάθε* $i \in \{1, \ldots, m\}$ ισχύει

$$1_{\mathbf{k}} - F_i^d(P_i) = 0_{\mathbf{k}} \Rightarrow 1_{\mathbf{k}} - F_i^d \in I_i \Rightarrow \left(1_{\mathbf{k}} - F_i^d\right)^d = 1_{\mathbf{k}} - E_i \in I_i^d, \tag{2.8}$$

οπότε

$$1_{\mathbf{k}} - \sum_{i=1}^{m} E_i = \left[(1_{\mathbf{k}} - E_j) + \sum_{i \in \{1, \ldots, m\} \smallsetminus \{j\}} E_i \right] \in I_j^d, \ \forall j \in \{1, \ldots, m\}$$

$$\Longrightarrow 1_{\mathbf{k}} - \sum_{i=1}^{m} E_i \in \bigcap_{j=1}^{m} I_j^d \underset{(2.6)}{\subseteq} I.$$

Εξάλλου, για οιαδήποτε $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq j$, έχουμε

$$E_i E_j \in I, \tag{2.9}$$

διότι (λόγω τής πρώτης εκ των (2.7))

$$\left. \begin{array}{l} E_i \in \bigcap\limits_{\kappa \in \{1, \ldots, m\} \smallsetminus \{i\}} I_\kappa^d \Rightarrow E_i E_j \in \bigcap\limits_{\kappa \in \{1, \ldots, m\} \smallsetminus \{i\}} I_\kappa^d \\ \\ E_j \in \bigcap\limits_{\lambda \in \{1, \ldots, m\} \smallsetminus \{j\}} I_\lambda^d \Rightarrow E_i E_j \in \bigcap\limits_{\lambda \in \{1, \ldots, m\} \smallsetminus \{j\}} I_\lambda^d \end{array} \right\} \Longrightarrow E_i E_j \in \bigcap_{j=1}^{m} I_j^d \underset{(2.6)}{\subseteq} I,$$

και για κάθε $i \in \{1, \ldots, m\}$ ισχύει

$$E_i - E_i^2 = (1_{\mathbf{k}} - E_i)E_i \in I, \tag{2.10}$$

διότι (λόγω τής πρώτης εκ των (2.7) και τού (2.8))

$$\left.\begin{array}{r} E_i \in \bigcap\limits_{\kappa \in \{1,\ldots,m\} \smallsetminus \{i\}} I_\kappa^d \Rightarrow (1_{\mathbf{k}} - E_i)E_i \in \bigcap\limits_{\kappa \in \{1,\ldots,m\} \smallsetminus \{i\}} I_\kappa^d \\ 1_{\mathbf{k}} - E_i \in I_i^d \Rightarrow (1_{\mathbf{k}} - E_i)E_i \in I_i^d \end{array}\right\} \Longrightarrow E_i - E_i^2 \in \bigcap_{j=1}^m I_j^d \underset{(2.6)}{\subseteq} I.$$

Βήμα 3ο. *Εάν* $G \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] \smallsetminus I_j$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, *τότε*

$$\exists H \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] : HG - E_j \in I. \tag{2.11}$$

Πράγματι· υποθέτοντας (δίχως βλάβη τής γενικότητας, ύστερα από ενδεχόμενο πολλαπλασιασμό με μία σταθερά) ότι $G(P_j) = 1_{\mathbf{k}}$, έχουμε $1_{\mathbf{k}} - G \in I_j$. Θέτοντας

$$H := \left(1_{\mathbf{k}} + (1_{\mathbf{k}} - G) + \cdots + (1_{\mathbf{k}} - G)^{d-1}\right) E_j$$

λαμβάνουμε

$$\left.\begin{array}{r} HG = H\,(1_{\mathbf{k}} - (1_{\mathbf{k}} - G)) = \left(1_{\mathbf{k}} - (1_{\mathbf{k}} - G)^d\right) E_j \\ (1_{\mathbf{k}} - G)^d \in I_j^d \Rightarrow -(1_{\mathbf{k}} - G)^d E_j = HG - E_j \in I_j^d \\ (2.7) \Rightarrow E_j \in \bigcap\limits_{\kappa \in \{1,\ldots,m\} \smallsetminus \{j\}} I_\kappa^d \Rightarrow HG - E_j \in \bigcap\limits_{\kappa \in \{1,\ldots,m\} \smallsetminus \{j\}} I_\kappa^d \end{array}\right\} \Longrightarrow HG - E_j \in \bigcap_{j=1}^m I_j^d \underset{(2.6)}{\subseteq} I.$$

Βήμα 4ο. *Ο ϑ έχει το I ως πυρήνα του*: Έχουμε ήδη δείξει ότι $I \subseteq \operatorname{Ker}(\vartheta)$. Προφανώς,

$$\operatorname{Ker}(\vartheta) = \left\{ F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] \,\middle|\, F \in \bigcap_{j=1}^m I\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^n, P_j} = \bigcap_{j=1}^m I\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]_{I_j} \right\}.$$

Έστω τυχόν $F \in \operatorname{Ker}(\vartheta)$. Τότε

$$\exists G_j \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] \smallsetminus I_j : G_j F \in I, \ \ \forall j \in \{1, \ldots, m\}. \tag{2.12}$$

Βάσει τής (2.11) που αποδείξαμε στο 3ο βήμα,

$$\exists H_j \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] : H_j G_j - E_j \in I, \ \ \forall j \in \{1, \ldots, m\},$$

οπότε

$$(2.12) \Longrightarrow F \cdot \left(\sum_{j=1}^m H_j G_j\right) = \sum_{j=1}^m H_j (G_j F) \in I$$

και (λόγω τής δεύτερης εκ των (2.7))

$$\begin{aligned} I &= F \cdot (\sum_{j=1}^{m} H_j G_j) + I = (F+I)\,(\sum_{j=1}^{m} H_j G_j + I) \\ &= (F+I)\,(\sum_{j=1}^{m} E_j + I) = (F+I)\,(1_{\mathbf{k}} + I) = F + I \Longrightarrow F \in I. \end{aligned}$$

Άρα ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός $I \supseteq \mathrm{Ker}(\vartheta)$.

Βήμα 5ο. *Ο ϑ είναι επιμορφισμός*: Έστω τυχόν στοιχείο

$$\left(\tfrac{\Xi_1}{\Pi_1} + I\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P_1}, \ldots , \tfrac{\Xi_m}{\Pi_m} + I\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P_m}\right) \in \bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P_j} / I\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P_j},$$

όπου $\Xi_j \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots , \mathsf{X}_n]$, $\Pi_j \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots , \mathsf{X}_n] \smallsetminus I_j$, $\forall j \in \{1, \ldots , m\}$. Βάσει τής (2.11) που αποδείξαμε στο 3ο βήμα,

$$\exists H_j \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots , \mathsf{X}_n] : H_j \Pi_j - E_j \in I, \;\; \forall j \in \{1, \ldots , m\}. \tag{2.13}$$

Θέτοντας $F := \sum_{i=1}^{m} H_i \Xi_i E_i$ θα αποδείξουμε ότι

$$\vartheta_j(F) = \tfrac{\Xi_j}{\Pi_j} + I\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P_j}, \;\; \forall j \in \{1, \ldots , m\}.$$

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι

$$E_i\,(P_j) = \begin{cases} 0_{\mathbf{k}}, & \text{όταν } i \neq j, \\ 1_{\mathbf{k}}, & \text{όταν } i = j, \end{cases} \tag{2.14}$$

για οιουσδήποτε $i, j \in \{1, \ldots , m\}$. Επειδή

$$(2.10) \Rightarrow (1_{\mathbf{k}} - E_i)E_i \in I\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P_j}, \forall i, j \in \{1, \ldots , m\},$$

έχουμε για κάθε $i \in \{1, \ldots , m\}$,

$$E_i \in \mathcal{O}^{\times}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P_i} \Rightarrow 1_{\mathbf{k}} - E_i \in I\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P_i} \Rightarrow \vartheta_i(E_i) = 1_{\mathbf{k}} + I\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P_i},$$

και για κάθε $i, j \in \{1, \ldots , m\}, \; i \neq j$,

$$(2.14) \Rightarrow 1_{\mathbf{k}} - E_i \in \mathcal{O}^{\times}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P_j} \Rightarrow E_i \in I\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P_j} \Rightarrow \vartheta_j(E_i) = I\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P_j}.$$

Το τελευταίο συμπέρασμα εξάγεται, εναλλακτικώς, και από την (2.9), καθότι

$$I\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P_j} = \vartheta_j(E_i E_j) = \vartheta_j(E_i)\vartheta_j(E_j) = \vartheta_j(E_i).$$

Συνοψίζοντας έχουμε

$$\vartheta_j(E_i) = \begin{cases} I\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P_i}, & \text{όταν } i \neq j, \\ 1_{\mathbf{k}} + I\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P_i}, & \text{όταν } i = j, \end{cases}$$

για οιουσδήποτε $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \vartheta_j(F) &= \vartheta_j(\sum_{i=1}^{m} H_i \Xi_i E_i) = \sum_{i=1}^{m} \vartheta_j(H_i \Xi_i) \vartheta_j(E_i) \\ &= \vartheta_j(H_j \Xi_j) \overset{(2.13)}{=} \vartheta_j(H_j \Pi_j) \vartheta_j(\tfrac{\Xi_j}{\Pi_j}) \\ &= \vartheta_j(E_j) \vartheta_j(\tfrac{\Xi_j}{\Pi_j}) = \vartheta_j(\tfrac{\Xi_j}{\Pi_j}) = \tfrac{\Xi_j}{\Pi_j} + I\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}, P_j} \end{aligned}$$

για κάθε $j \in \{1, \ldots, m\}$. Ως εκ τούτου, ο ϑ είναι όντως επιμορφισμός. □

• Το υπόλοιπο τμήμα τής παρούσας ενότητας είναι αφιερωμένο στη διασάφηση τού τρόπου με τον οποίο γενικεύονται οι έννοιες *κανονική συνάρτηση*, *τοπικός δακτύλιος σημείου* και *ρητή συνάρτηση* για «σχεδόν συσχετικές ποικιλότητες» (βλ. 2.1.33 (b)).

2.4.15 Ορισμός. Έστω $Y \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ μια σχεδόν συσχετική ποικιλότητα (ή, γενικότερα, ένα μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο ενός συσχετικού -όχι κατ' ανάγκην αναγώγου- αλγεβρικού συνόλου) και έστω $P \in Y$. Λέμε ότι μια συνάρτηση $f : Y \longrightarrow \mathbf{k}$ είναι **κανονική στο σημείο** P όταν υπάρχει μια ανοικτή περιοχή (ως προς την τοπολογία Zariski) U τού P, καθώς και πολυώνυμα G και $H \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$, ούτως ώστε να ισχύει

$$f = \frac{G}{H}, \;\; H(Q) \neq 0_{\mathbf{k}}, \;\; \forall Q \in U. \tag{2.15}$$

Επίσης λέμε ότι μια $f \in \mathfrak{F}(Y, \mathbf{k})$ είναι **κανονική επί τής** Y όταν είναι κανονική σε *κάθε* σημείο τής Y.

2.4.16 Παραδείγματα. (a) Έστω $Y \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ μια σχεδόν συσχετική ποικιλότητα. Τότε ο περιορισμός οιουδήποτε πολυωνύμου $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ επί τής Y, ιδωμένος ως συνάρτηση από την Y στο $\mathbf{k}$, είναι κανονικός επί τής Y. Γενικότερα, εάν το V είναι μια συσχετική ποικιλότητα που περιέχει την Y και $f \in \mathbf{k}[V]$, τότε ο περιορισμός τής πολυωνυμικής συναρτήσεως f επί τής Y είναι κανονική συνάρτηση επί τής Y (υπό την έννοια τού ορισμού 2.4.15).

(b) Στην περίπτωση κατά την οποία το $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ είναι μια συσχετική ποικιλότητα, κάθε $f \in \mathbf{k}(V)$ είναι κανονική συνάρτηση (υπό την έννοια τού ορισμού 2.4.15) επί τού $\mathrm{Dom}(f)$, κάτι που είναι συμβατό προς τον προηγηθέντα ορισμό 2.4.2. (Το $\mathrm{Dom}(f)$ είναι κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο τής V.)

2.4.17 Πρόταση. *Έστω Y μια σχεδόν συσχετική ποικιλότητα και έστω $f : Y \longrightarrow \mathbf{k}$ μια κανονική συνάρτηση επί τής Y. Τότε η f είναι συνεχής (ως προς την τοπολογία Zariski, εάν κανείς ταυτίσει το $\mathbf{k}$ με το $\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$).*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω f μια κανονική συνάρτηση επί τής Y. Κατά την άσκηση **A-1-8** τα μη κενά, κλειστά (ως προς την τοπολογία Zariski), γνήσια υποσύνολα τού $\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ είναι πεπερασμένα. Ως εκ τούτου, αρκεί να δειχθεί ότι η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(a)$ οιουδήποτε

$a \in \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ είναι κατά Zariski κλειστή. Έστω $P \in Y$. Υποθέτουμε ότι η f δέχεται την παράσταση (2.15) σε μια ανοικτή περιοχή U τού P. Τότε

$$f^{-1}(a) \cap U = \left\{ Q \in U \;\middle|\; \frac{G(Q)}{H(Q)} = a \right\}.$$

Είναι λοιπόν αρκετό να δειχθεί ότι το $f^{-1}(a) \cap U$ είναι κατά Zariski κλειστό εντός τού U. Παρατηρώντας ότι

$$f^{-1}(a) \cap U = \mathbf{V}(G - aH) \cap U,$$

αποπερατώνουμε την απόδειξη. $\square$

2.4.18 Σημείωση. Οι σχεδόν συσχετικές ποικιλότητες Y, ούσες μη κενά, κατά Zariski ανοικτά υποσύνολα συσχετικών ποικιλοτήτων $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$, *είναι πάντοτε ανάγωγες*. Τούτο έπεται από τους ορισμούς 2.1.5 (a), 2.1.33 (b) και το πόρισμα 1.6.4.

2.4.19 Πόρισμα. *Έστω Y μια σχεδόν συσχετική ποικιλότητα. Εάν οι*

$$f_1, f_2 : Y \longrightarrow \mathbf{k}$$

είναι δυο κανονικές συναρτήσεις επί τής Y (υπό την έννοια τού ορισμού 2.4.15) *και το U ένα μη κενό, ανοικτό υποσύνολο τής Y, τότε ισχύει η εξής συνεπαγωγή* :

$$f_1|_U = f_2|_U \Longrightarrow f_1 = f_2.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η Y είναι (όπως προείπαμε στη σημείωση 2.4.18) ανάγωγη. Επίσης, το U, όντας μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο τής Y είναι ανάγωγο και πυκνό. Εξ υποθέσεως, $(f_1 - f_2)^{-1}(0_{\mathbf{k}}) \supseteq U$, με το $(f_1 - f_2)^{-1}(0_{\mathbf{k}})$ κλειστό εντός τής Y (βλ. απόδειξη τής προτάσεως 2.4.17). Ως εκ τούτου,

$$Y = \mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_Y}(U) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_Y}\left((f_1 - f_2)^{-1}(0_{\mathbf{k}})\right) = (f_1 - f_2)^{-1}(0_{\mathbf{k}}),$$

οπότε

$$(f_1 - f_2)^{-1}(0_{\mathbf{k}}) = Y \Longrightarrow f_1 = f_2$$

(επί ολοκλήρου τής Y). $\square$

2.4.20 Ορισμός. Έστω Y μια σχεδόν συσχετική ποικιλότητα. Για κάθε κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο U τής Y ορίζουμε το σύνολο

$$\boxed{\mathcal{O}_Y(U) := \begin{cases} \{f \in \mathfrak{F}(U, \mathbf{k}) \mid f \text{ κανονική επί τού } U\}, & \text{όταν } U \neq \varnothing, \\ \{0\}, & \text{όταν } U = \varnothing. \end{cases}}$$

Το $\mathcal{O}_Y(U)$ (με τις συνήθεις πράξεις προσθέσεως και πολλαπλασιασμού συναρτήσεων) είναι ένας δακτύλιος. (Μάλιστα, ο $\mathcal{O}_Y(U)$, εφοδιασμένος και με τον συνήθη αριθμητικό πολλαπλασιασμό, καθίσταται $\mathbf{k}$-άλγεβρα.) Το σύστημα

$$\left(\left\{\mathcal{O}_Y(U)\;\middle|\;\begin{array}{c}U \text{ (κατά Zariski) ανοικτό}\\ \text{υποσύνολο τής } Y\end{array}\right\},\left\{\varrho^U_{U'}\;\middle|\;\begin{array}{c}U, U' \text{ (κατά Zariski) ανοικτά}\\ \text{υποσύνολα τής } Y \text{ με } U' \subseteq U\end{array}\right\}\right),$$

όπου

$$\varrho^U_{U'} : \mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(U'),\;\; f \longmapsto \varrho^U_{U'}(f) := f|_{U'}\,,$$

οι απεικονίσεις περιορισμού, καλείται **δράγμα δομής** τής Y.

2.4.21 Σημείωση. Επειδή η κανονικότητα συναρτήσεων είναι (σύμφωνα με το πόρισμα 2.4.19) *τοπική ιδιότητα*, το ανωτέρω σύστημα πληροί τα δύο *αξιώματα των δραγμάτων*:

(a) Εάν τα $U'' \subseteq U' \subseteq U$ είναι (κατά Zariski) ανοικτά υποσύνολα τής Y, τότε

$$\varrho^U_{U''} = \varrho^{U'}_{U''} \circ \varrho^U_{U'},\quad \varrho^U_U = \mathrm{Id}_{\mathcal{O}_Y(U)}.$$

(b) Έστω U ένα (κατά Zariski) ανοικτό υποσύνολο τής Y και έστω $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα τού U. Εάν για κάθε $\lambda \in \Lambda$ δοθεί μια $f_\lambda \in \mathcal{O}_Y(U_\lambda)$, ούτως ώστε να ισχύει η ισότητα

$$\varrho^{U_\lambda}_{U_\lambda \cap U_{\lambda'}}(f_\lambda) = \varrho^{U_{\lambda'}}_{U_\lambda \cap U_{\lambda'}}(f_{\lambda'}),\;\; \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda,$$

τότε

$$\exists! f \in \mathcal{O}_Y(U) : \varrho^U_{U_\lambda}(f) = f_\lambda,\;\; \forall \lambda \in \Lambda.$$

(Στις παρούσες σημειώσεις δεν προτιθέμεθα να ασχοληθούμε με τη συστηματική μελέτη τής Θεωρίας Δραγμάτων. Για περισσότερες πληροφορίες -σε ό,τι αφορά στις εφαρμογές των δραγμάτων στην Αλγεβρική Γεωμετρία- οι ενδιαφερόμενοι αναγνώστες παραπέμπονται στο βιβλίο τού R. Hartshorne: *Algebraic Geometry*, GTM, Vol. **52**, Springer-Verlag, 1977, Ch. II.)

2.4.22 Ορισμός. Έστω Y μια σχεδόν συσχετική ποικιλότητα και έστω $P \in Y$. Θέτουμε

$$\mathcal{G}_P := \left\{\text{ζεύγη } (U, f)\;\middle|\;\begin{array}{c}U \text{ μια (κατά Zariski) ανοικτή}\\ \text{περιοχή τού } P \text{ και } f : U \longrightarrow \mathbf{k}\\ \text{μια κανονική συνάρτηση επί τού } U\end{array}\right\}.$$

Λόγω τού πορίσματος 2.4.19 έχουμε τη δυνατότητα ορισμού τής εξής σχέσεως ισοδυναμίας επί τού $\mathcal{G}_P$:

$$\boxed{(U, f) \sim (U', f') \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}\,.}$$

Θέτοντας

$$\boxed{\mathcal{O}_{Y,P} := \mathcal{G}_P / \sim} \tag{2.16}$$

και συμβολίζοντας ως $[U,f]$ την κλάση ισοδυναμίας οιουδήποτε ζεύγους $(U,f) \in \mathcal{G}_P$ ως προς την "$\sim$", διαπιστώνουμε ότι το σύνολο $\mathcal{O}_{Y,P}$ εφοδιάζεται μέσω των πράξεων

$$\left\{ \begin{array}{rcl} [U,f] + [U',f'] & := & [U \cap U', f + f'], \\ [U,f] \cdot [U',f'] & := & [U \cap U', f \cdot f'], \end{array} \right.$$

με τη δομή ενός δακτυλίου. Εν συνεχεία, θέτοντας

$$\boxed{\mathfrak{m}_{Y,P} := \{ [U,f] \in \mathcal{O}_{Y,P} \mid f(P) = 0_{\mathbf{k}} \}}$$

και θεωρώντας τον επιμορφισμό αποτιμήσεως

$$\mathcal{O}_{Y,P} \ni [U,f] \longmapsto f(P) \in \mathbf{k},$$

ο οποίος έχει ως πυρήνα του το ιδεώδες $\mathfrak{m}_{Y,P}$, συμπεραίνουμε (μέσω τού 1ου θεωρήματος ισομορφισμών δακτυλίων 1.1.10) ότι $\mathcal{O}_{Y,P}/\mathfrak{m}_{Y,P} \cong \mathbf{k}$, απ' όπου έπεται ότι το $\mathfrak{m}_{Y,P}$ είναι ένα μεγιστοτικό ιδεώδες τού $\mathcal{O}_{Y,P}$ (βλ. θεώρημα 1.1.14). Επιπροσθέτως, επειδή για κάθε $[U,f] \in \mathcal{O}_{Y,P} \smallsetminus \mathfrak{m}_{Y,P}$ υπάρχει μια (κατά Zariski) ανοικτή περιοχή τού P επί τής οποίας η $\frac{1}{f}$ ορίζει μια κανονική συνάρτηση, η πρόταση 2.3.1 μας πληροφορεί ότι ο $\mathcal{O}_{Y,P}$ είναι τοπικός δακτύλιος (βλ. ορισμό 2.3.2) με το $\mathfrak{m}_{Y,P}$ ως το μοναδικό μεγιστοτικό του ιδεώδες. Ο δακτύλιος $\mathcal{O}_{Y,P}$ αναφέρεται, ιδιαιτέρως, ως **ο τοπικός δακτύλιος τής** Y **στο** P (ή ως **στέλεχος** τού δράγματος δομής τής Y), ενώ κάθε στοιχείο του καλείται **φύτρο** των κανονικών συναρτήσεων (επί τής Y) **περί το** P.

2.4.23 Παρατήρηση. Στην περίπτωση κατά την οποία το $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ είναι μια συσχετική ποικιλότητα και $P \in V$, βάσει των όσων προείπαμε στο 2.4.16 (b) (και ταυτίζοντας κάθε $f \in \mathbf{k}(V)$ που είναι κανονική στο P -υπό την έννοια τού ορισμού 2.4.2- με την κλάση ισοδυναμίας $[U,f]$, όπου U μια (κατά Zariski) ανοικτή περιοχή τού P με $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$) συμπεραίνουμε ότι οι ορισμοί (2.5) και (2.16) τού τοπικού δακτυλίου τής V στο P συμπίπτουν.

2.4.24 Ορισμός. Έστω Y μια σχεδόν συσχετική ποικιλότητα. Θέτουμε

$$\mathcal{G}_Y := \left\{ \text{ζεύγη } (U,f) \;\middle|\; \begin{array}{c} U \text{ ένα μη κενό (κατά Zariski) ανοικτό} \\ \text{υποσύνολο τής } Y \text{ και } f \in \mathcal{O}_Y(U) \end{array} \right\}.$$

Λόγω τού πορίσματος 2.4.19 έχουμε τη δυνατότητα ορισμού τής εξής σχέσεως ισοδυναμίας επί τού $\mathcal{G}_Y$:

$$\boxed{(U,f) \sim (U',f') \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'} \,.}$$

Θέτοντας

$$\boxed{\mathrm{Rat}(Y) := \mathcal{G}_Y / \sim}$$

και συμβολίζοντας ως $[U, f]$ την κλάση ισοδυναμίας οιουδήποτε ζεύγους $(U, f) \in \mathcal{G}_Y$ ως προς την ως προς την "$\sim$", διαπιστώνουμε ότι το σύνολο $\mathrm{Rat}(Y)$ εφοδιάζεται μέσω των πράξεων

$$\begin{cases} [U, f] + [U', f'] & := & [U \cap U', f + f'], \\ [U, f] \cdot [U', f'] & := & [U \cap U', f \cdot f'], \end{cases}$$

με τη δομή ενός δακτυλίου. Τα στοιχεία τού $\mathrm{Rat}(Y)$ καλούνται **ρητές συναρτήσεις επί τής** Y.

2.4.25 Σημείωση. Οι έννοιες *πεδίο ορισμού* και *σύνολο πόλων* (βλ. 2.4.2) επεκτείνονται για τα στοιχεία τού $\mathrm{Rat}(Y)$ ως εξής: Επί τού $\mathcal{G}_Y$ εισάγουμε τη διάταξη

$$(U', f') \preccurlyeq (U, f) \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} U' \subseteq U \text{ και } \varrho^U_{U'}(f) = f'.$$

(Δοθείσας τής f' υπάρχει μόνον μία f που πληροί αυτήν την ιδιότητα και το ζεύγος (U, f) μπορεί να εκληφθεί ως *επέκταση τού ζεύγους* (U', f').) Είναι προφανές ότι κάθε ζεύγος $(U, f) \in \mathcal{G}_Y$ διαθέτει ένα *μονοσημάντως ορισμένο* μεγιστοτικό στοιχείο $(U^{\max}, f^{\max})$ ως προς την "$\preccurlyeq$". Επίσης,

$$[U_1, f_1] = [U_2, f_2] \Longleftrightarrow U_1^{\max} = U_2^{\max} \text{ και } f_1^{\max} = f_2^{\max}.$$

Αρκεί λοιπόν για οιοδήποτε στοιχείο $[U, f] \in \mathrm{Rat}(Y)$ να θέσουμε

$$\boxed{\mathrm{Dom}([U, f]) := U^{\max}, \quad \mathrm{Pol}([U, f]) := Y \smallsetminus U^{\max}.}$$

2.4.26 Πρόταση. (a) *Ο δακτύλιος* $(\mathrm{Rat}(Y), +, \cdot)$ *είναι ένα σώμα που περιέχει το* $\mathbf{k}$ *(και καλείται, ιδιαιτέρως,* ***σώμα των ρητών συναρτήσεων επί τής*** Y*).*
(b) *Για κάθε μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο* U *τής* Y *έχουμε*

$$\mathrm{Rat}(U) \cong \mathrm{Rat}(Y).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το μεγαλύτερο μέρος τής αποδείξεως τού (a) είναι εύκολο. Σημειωτέον ότι ισχύει $0_{\mathrm{Rat}(Y)} = [Y, 0]$ και $1_{\mathrm{Rat}(Y)} = [Y, 1]$, και ότι για οιοδήποτε στοιχείο

$$[U, f] \in \mathrm{Rat}(Y) \smallsetminus \{0_{\mathrm{Rat}(Y)}\}$$

το $[U \smallsetminus f^{-1}(\{0_{\mathbf{k}}\}), \frac{1}{f}]$ αποτελεί το αντίστροφό του. Το (b) είναι άμεσο επακόλουθο τού πορίσματος 2.4.19. $\square$

2.4.27 Σημείωση. Εάν το Y είναι μια σχεδόν συσχετική ποικιλότητα και $P \in Y$, τότε (μέσω περιορισμών συναρτήσεων και εφαρμογής τού πορίσματος 2.4.19) προκύπτουν εμφυτεύσεις δακτυλίων

$$\mathbf{k} \hookrightarrow \mathcal{O}_Y(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}_{Y,P} \hookrightarrow \mathrm{Rat}(Y).$$

2.4.28 Πρόταση. *Έστω $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ μια συσχετική ποικιλότητα. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(a) $\mathrm{Rat}(V) \cong \mathbf{k}(V)$.

(b) *Εάν το $\mathbf{k}$ είναι αλγεβρικώς κλειστό, τότε $\mathcal{O}_V(V) \cong \mathbf{k}[V]$.*

(c) *Εάν το $\mathbf{k}$ είναι αλγεβρικώς κλειστό, τότε*

$$\mathcal{O}_V(V_h) \cong \Gamma(V_h) \cong \mathbf{k}[V_h] \cong \mathbf{k}[V][h^{-1}] = \mathbf{k}[V]_h, \ \forall h \in \mathbf{k}[V].$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a) Η απεικόνιση

$$\alpha : \mathbf{k}(V) \longrightarrow \mathrm{Rat}(V), \ \ f \longmapsto \alpha(f) := [\mathrm{Dom}(f), f],$$

αποτελεί ομομορφισμό σωμάτων. Έστω τυχόν $[U, f] \in \mathrm{Rat}(V)$. Εάν η f παρίσταται ως $f = \frac{\overline{G}}{\overline{H}}$ επί ενός κατά Zariski ανοικτού συνόλου $U' \subseteq U$, λαμβάνουμε

$$\alpha(\tfrac{\overline{G}}{\overline{H}}) = [U', \tfrac{\overline{G}}{\overline{H}}] = [U, f],$$

οπότε η α είναι επιρριπτική. Εξάλλου, εάν $f \in \mathbf{k}(V)$ με $\alpha(f) = [V, 0]$, τότε υπάρχει ένα μη κενό (κατά Zariski) ανοικτό υποσύνολο U τής V, τέτοιο ώστε να ισχύει $f|_U = 0$. Κατά το πόρισμα 2.4.19, $f = 0$ (επί ολοκλήρου τής V), οπότε η α είναι και ενριπτική.

Το (b) έπεται άμεσα από το (b) τής προτάσεως 2.4.7, ενώ το (c) έπεται από το (b) και την πρόταση 2.4.9 (a). □

Ασκήσεις

A-2-25. Εάν $V = \mathbf{V}\left(\mathsf{Y}^2 - \mathsf{X}^3\right) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$, να αποδειχθεί ότι

$$\mathbf{k}[V] = \left\{\varphi \in \mathfrak{J}(V, \mathbf{k}) \ \middle| \ \varphi(\mathsf{X}, \mathsf{Y}) = Q(\mathsf{X}) + \Xi(\mathsf{X})\mathsf{Y}, \ \ \text{για κάποια } Q, \Xi \in \mathbf{k}[\mathsf{X}] \ \right\}$$

και ότι (ταυτίζοντας το $\mathbf{k}(V)$ με το σώμα κλασμάτων τής ακεραίας περιοχής $\mathbf{k}[V]$ μέσω τού ισομορφισμού τού επαγομένου από εκείνον τής προτάσεως 2.1.3)

$$\mathbf{k}(V) = \left\{\varphi \in \mathfrak{J}(V, \mathbf{k}) \ \middle| \ \varphi(\mathsf{X}, \mathsf{Y}) = u(\mathsf{X}) + v(\mathsf{X})\mathsf{Y}, \ \ \text{για κάποια } u, v \in \mathbf{k}(\mathsf{X}) \ \right\}.$$

A-2-26. Εάν $V = \mathbf{V}(\mathsf{Y}^2 - \mathsf{X}^2(\mathsf{X} + 1_{\mathbf{k}})) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$ (με το $\mathbf{k}$ αλγεβρικώς κλειστό σώμα), να προσδιορισθούν τα σύνολα πόλων $\mathrm{Pol}(f)$ και $\mathrm{Pol}(f^2)$, όπου $f = \frac{\overline{\mathsf{Y}}}{\overline{\mathsf{X}}} \in \mathbf{k}(V)$.

A-2-27. Εάν $P := (0_{\mathbf{k}}, \ldots, 0_{\mathbf{k}}) \in \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ και $I := \langle \mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n \rangle \subset \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$, να αποδειχθεί ότι

$$I^\nu \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P} = \mathfrak{m}^\nu_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P}, \ \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

A-2-28. Έστω $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ μια συσχετική ποικιλότητα και έστω $P \in V$. Εάν το J είναι ένα ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ που περιέχει το $\mathbf{I}(V)$ και το $J' := \pi(J)$ η εικόνα τού J μέσω τού φυσικού επιμορφισμού $\pi : \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] \longrightarrow \Gamma(V)$, να αποδειχθεί ότι

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P}/J\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P} \cong \mathcal{O}_{V,P}/J'\mathcal{O}_{V,P}$$

και να εξαχθεί εξ αυτού, ιδιαιτέρως, ο ισομορφισμός

$$\mathcal{O}_{V,P} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P}/\mathbf{I}(V)\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P}.$$

A-2-29. Εάν ο R είναι ένας δακτύλιος περιέχων ένα σώμα $\mathbf{k}$ ως υποδακτύλιό του και $\dim_{\mathbf{k}}(R) < \infty$, να αποδειχθεί ότι ο R είναι ισόμορφος ενός ευθέος αθροίσματος πεπερασμένου πλήθους τοπικών δακτυλίων.

A-2-30. Έστω I ένα ιδεώδες τού $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ ($\mathbf{k}$ όχι κατ' ανάγκην αλγεβρικώς κλειστό) με $\mathbf{V}(I) = \{P_1, \ldots, P_m\}$ και $I_j := \mathbf{I}(\{P_j\}), \ \forall j \in \{1, \ldots, m\}$. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(a) Τα I_j, I_k είναι μεταξύ τους πρώτα για κάθε $j, k \in \{1, \ldots, m\}$, $j \neq k$.

(b) Υπάρχουν φυσικοί ισομορφισμοί δακτυλίων

$$\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]/(\bigcap_{j=1}^m I_j) \cong \bigoplus_{j=1}^m (\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]/I_j) \cong \mathbf{k}^m.$$

(*Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιηθεί το (a), το κινέζικο θεώρημα 1.4.8 και η άσκηση **A-1-21**.)

(c) Η απεικόνιση

$$\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]/I \ni F + I \longmapsto (F + I_1, \ldots, F + I_m) \in \bigoplus_{j=1}^m (\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]/I_j)$$

είναι επιμορφισμός δακτυλίων (και διανυσματικών χώρων υπεράνω τού $\mathbf{k}$). Εξ αυτού έπεται ότι

$$m = \sharp(\mathbf{V}(I)) \leq \dim_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]/I)$$

Ιδιαιτέρως, όταν το I είναι ένα ριζικό ιδεώδες και το $\mathbf{k}$ αλγεβρικώς κλειστό, η ανωτέρω σχέση ισχύει ως ισότητα. (Πρόκειται για μια δεύτερη -εν μέρει απλούστερη- απόδειξη κάποιων εκ των συμπερασμάτων που έχουμε ήδη εξαγάγει στο πόρισμα 1.8.8.)

2.5 Ρητές Απεικονίσεις

Όπως προαναφέραμε στην ενότητα 2.1, οι *μορφισμοί* τής κατηγορίας $\mathbf{k}$-$\mathfrak{AVar}$ των συσχετικών ($\mathbf{k}$-)ποικιλοτήτων είναι οι πολυωνυμικές απεικονίσεις. Κάθε πολυωνυμική απεικόνιση $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \supseteq V \xrightarrow{\varphi} W \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ μεταξύ συσχετικών ποικιλοτήτων επάγει έναν ομομορφισμό $\mathbf{k}$-αλγεβρών

$$\Gamma(W) \cong \mathbf{k}[W] \ni f \overset{\widetilde{\varphi}|_{\mathbf{k}[W]}}{\longmapsto} f \circ \varphi \in \mathbf{k}[V] \cong \Gamma(V)$$

και ο συναρτητής

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{AVar}) \ni V \longmapsto \mathbf{k}[V] \in \mathrm{Ob}(\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{Alg}^{\pi.\pi.\alpha.\alpha.\pi.}),$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{AVar}}(V,W) \ni \varphi \longmapsto \widetilde{\varphi}\,\big|_{\mathbf{k}[W]} \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{Alg}^{\pi.\pi.\alpha.\alpha.\pi.}}(\mathbf{k}[W], \mathbf{k}[V]),$$

είναι ανταλλοίωτος και απολύτως πιστός (ορίζοντας, στην περίπτωση όπου το $\mathbf{k}$ είναι αλγεβρικώς κλειστό, μια ανταλλοίωτη ισοδυναμία κατά το θεώρημα 2.1.32).

2.5.1 Πρόταση. *Έστω $\mathbb{A}^m_{\mathbf{k}} \supseteq V \xrightarrow{\varphi} W \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ μια πολυωνυμική απεικόνιση μεταξύ συσχετικών ποικιλοτήτων. Εάν $P \in V$ και $Q := \varphi(P)$, τότε ο $\widetilde{\varphi}\,\big|_{\mathbf{k}[W]}$ επεκτείνεται σε έναν μονοσημάντως ορισμένο ομομορφισμό τοπικών δακτυλίων*

$$\widehat{\varphi}_P : \mathcal{O}_{W,Q} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,P}$$

για το οποίο ισχύει $\widehat{\varphi}_P(\mathfrak{m}_{W,Q}) \subseteq \mathfrak{m}_{V,P}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κατά το (a) τής ασκήσεως **A-2-12**,

$$\left(\theta_V \circ \widetilde{\varphi}\,\big|_{\mathbf{k}[W]} \circ \theta_W^{-1}\right)(\mathbf{I}_W(\{Q\})) \subseteq \mathbf{I}_V(\{P\})$$

$$\Rightarrow \widetilde{\varphi}\,\big|_{\mathbf{k}[W]}\,(\theta_W^{-1}(\mathbf{I}_W(\{Q\}))) \subseteq \theta_V^{-1}(\mathbf{I}_V(\{P\}))$$

$$\Rightarrow \left(\widetilde{\varphi}\,\big|_{\mathbf{k}[W]}\right)^{-1}(\theta_V^{-1}(\mathbf{I}_V(\{P\}))) \supseteq \theta_W^{-1}(\mathbf{I}_W(\{Q\})).$$

Επειδή το $\theta_W^{-1}(\mathbf{I}_W(\{Q\}))$ είναι μεγιστοτικό ιδεώδες και το $\left(\widetilde{\varphi}\,\big|_{\mathbf{k}[W]}\right)^{-1}(\mathbf{I}_V(\{P\}))$ γνήσιο ιδεώδες (αφού $\widetilde{\varphi}\,\big|_{\mathbf{k}[W]}\,(1_{\mathbf{k}[W]}) = 1_{\mathbf{k}[V]} \notin \theta_V^{-1}(\mathbf{I}_V(\{P\}))$) έχουμε

$$\theta_W^{-1}(\mathbf{I}_W(\{Q\})) = \left(\widetilde{\varphi}\,\big|_{\mathbf{k}[W]}\right)^{-1}(\theta_V^{-1}(\mathbf{I}_V(\{P\})))$$

$$\Rightarrow \widetilde{\varphi}\,\big|_{\mathbf{k}[W]}\left(\mathbf{k}[W] \smallsetminus \theta_W^{-1}(\mathbf{I}_W(\{Q\}))\right) \subseteq \mathbf{k}[V] \smallsetminus \theta_V^{-1}(\mathbf{I}_V(\{P\})).$$

Εφαρμόζοντας το (a) τής ασκήσεως **A-2-23** κατασκευάζουμε τον μοναδικό ομομορφισμό τοπικών δακτυλίων που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{k}[W] \arrow[r, "\widetilde{\varphi}|_{\mathbf{k}[W]}"] \arrow[dl, "i_{\mathbf{k}[W],\mathbf{k}[W]\smallsetminus\theta_W^{-1}(\mathbf{I}_W(\{Q\}))}"'] & \mathbf{k}[V] \arrow[dr, "i_{\mathbf{k}[V],\mathbf{k}[V]\smallsetminus\theta_V^{-1}(\mathbf{I}_V(\{P\}))}"] & \\
\mathbf{k}[W]_{\theta_W^{-1}(\mathbf{I}_W(\{Q\}))} \arrow[r, "\cong"] & \Gamma(W)_{\mathbf{I}_W(\{Q\})} \arrow[d, equal] & \Gamma(V)_{\mathbf{I}_V(\{P\})} \arrow[d, equal] & \mathbf{k}[V]_{\theta_V^{-1}(\mathbf{I}_V(\{P\}))} \arrow[l, "\cong"'] \\
 & \mathcal{O}_{W,Q} \arrow[r, "\widehat{\varphi}_P"] & \mathcal{O}_{V,P} &
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Συγκεκριμένα, για κάθε συνάρτηση f από τον τοπικό δακτύλιο

$$\mathcal{O}_{W,Q} = \left\{ f = \tfrac{\overline{G}}{\overline{H}} = \tfrac{\theta_W(g)}{\theta_W(h)} \in \mathbf{k}(W) \;\middle|\; \overline{G}, \overline{H} \in \Gamma(W),\ \overline{H} \in \Gamma(W) \smallsetminus \mathbf{I}_W(\{Q\}) \right\}$$

ο $\widehat{\varphi}_P$ δίδεται από τον τύπο

$$\boxed{\widehat{\varphi}_P(f) = \widehat{\varphi}_P\!\left(\tfrac{\theta_W(g)}{\theta_W(h)}\right) := \frac{\left(\theta_V \circ \widetilde{\varphi}\big|_{\mathbf{k}[W]} \circ \theta_W^{-1}\right)(\theta_W(g))}{\left(\theta_V \circ \widetilde{\varphi}\big|_{\mathbf{k}[W]} \circ \theta_W^{-1}\right)(\theta_W(h))} = \frac{\left(\theta_V \circ \widetilde{\varphi}\big|_{\mathbf{k}[W]}\right)(g)}{\left(\theta_V \circ \widetilde{\varphi}\big|_{\mathbf{k}[W]}\right)(h)} = \frac{\theta_V(g \circ \varphi)}{\theta_V(h \circ \varphi)}.}$$

Επειδή

$$\widehat{\varphi}_P(\mathfrak{m}_{W,Q}) = \widehat{\varphi}_P\left(\{ f \in \mathcal{O}_{W,Q} \mid f(Q) = 0_{\mathbf{k}}\}\right)$$

$$= \{ f \circ \varphi \in \mathcal{O}_{V,P} \mid f \in \mathcal{O}_{W,Q},\ (f \circ \varphi)(P) = 0_{\mathbf{k}}\} \subseteq \mathfrak{m}_{V,P},$$

ο $\widehat{\varphi}_P$ είναι ο απαιτούμενος ομομορφισμός τοπικών δακτυλίων. □

2.5.2 Σημείωση. (a) Εάν η $\mathbb{A}^m_{\mathbf{k}} \supseteq V \xrightarrow{\varphi} W \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ είναι ισομορφισμός μεταξύ συσχετικών ποικιλοτήτων (βλ. 2.1.16), τότε τόσον ο $\widetilde{\varphi}\,\big|_{\mathbf{k}[W]}$ όσον και ο $\widehat{\varphi}_P$ είναι ισομορφισμοί δακτυλίων (και $\mathbf{k}$-αλγεβρών).

(b) Εάν η $\mathbb{A}^m_{\mathbf{k}} \supseteq V \xrightarrow{\varphi} W \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ είναι τυχούσα πολυωνυμική απεικόνιση μεταξύ συσχετικών ποικιλοτήτων, ο ομομορφισμός $\widehat{\varphi}_P$ *δεν είναι πάντοτε επεκτάσιμος* σε έναν ομομορφισμό σωμάτων $\widehat{\varphi}$ από το $\mathbf{k}(W)$ στο $\mathbf{k}(V)$. (Μια ικανή συνθήκη που καθιστά δυνατή μια τέτοια επέκταση δίδεται στο (a) τής προτάσεως 2.5.11.)

2.5.3 Ορισμός. Για οιαδήποτε μη κενά σύνολα A, B θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\varphi : A \dashrightarrow B$ (με διακεκομμένη γραμμή) για να δηλούμε μια *μερικώς ορισμένη απεικόνιση* από το A στο B, ήτοι μια διμελή σχέση από το A στο B έχουσα μια *απεικόνιση* (υπο τη συνήθη έννοια) $\varphi|_{A'}$ ως περιορισμό της επί ενός καταλλήλου μη κενού υποσυνόλου A' τού A. (Εν προκειμένω, θα συμβολίζουμε το μέγιστο μη κενό υποσύνολο τού A που πληροί αυτήν την ιδιότητα ως $\mathrm{Dom}(\varphi)$.)

2.5.4 Ορισμός. Έστω $V \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ μια συσχετική ποικιλότητα. Μια **ρητή απεικόνιση** από την V στον $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$

$$\varphi : V \dashrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$$

είναι μια n-άδα $\varphi = (f_1, \ldots, f_n)$ ρητών συναρτήσεων $f_1, \ldots, f_n \in \mathbf{k}(V)$. Λέμε ότι η φ είναι **κανονική απεικόνιση στο** $P \in V$ όταν η f_j είναι κανονική συνάρτηση στο P για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$ (βλ. 2.4.2). Ως **πεδίο ορισμού** τής φ ορίζεται το (μη κενό, κατά Zariski ανοικτό) σύνολο

$$\mathrm{Dom}(\varphi) = \bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{Dom}(f_j).$$

2.5.5 Ορισμός. Μια **ρητή απεικόνιση** $\mathbb{A}^m_{\mathbf{k}} \supseteq V \overset{\varphi}{\dashrightarrow} W \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ μεταξύ δυο συσχετικών ποικιλοτήτων V και W είναι μια ρητή απεικόνιση $\varphi : V \dashrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ (όπως στο 2.5 .4) για την οποία ισχύει $\varphi(\mathrm{Dom}(\varphi)) \subseteq W$. (Ως **αντίστροφη εικόνα** $\varphi^{-1}(W')$ οιουδήποτε υποσυνόλου $W' \subseteq W$ μέσω μιας ρητής απεικονίσεως $V \overset{\varphi}{\dashrightarrow} W$ ορίζεται το σύνολο $\varphi^{-1}(W') := \{P \in \mathrm{Dom}(\varphi) \mid \varphi(P) \in W'\}$.)

2.5.6 Ορισμός. Εάν οι $\varphi, \psi : V \dashrightarrow W \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ είναι δυο ρητές απεικονίσεις μεταξύ συσχετικών ποικιλοτήτων εκπροσωπούμενες από τις n-άδες

$$\varphi = \left(\frac{\overline{F_1}}{\overline{G_1}}, \ldots, \frac{\overline{F_n}}{\overline{G_n}}\right), \quad \psi = \left(\frac{\overline{H_1}}{\overline{\Xi_1}}, \ldots, \frac{\overline{H_n}}{\overline{\Xi_n}}\right),$$

τότε οι φ, ψ λογίζονται **ίσες** μεταξύ τους[10] όταν

$$F_j \Xi_j - H_j G_j \in \mathbf{I}(V), \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$$

2.5.7 Πρόταση. *Δυο ρητές απεικονίσεις* $\mathbb{A}^m_{\mathbf{k}} \supseteq V \overset{\varphi,\psi}{\dashrightarrow} W \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ *μεταξύ συσχετικών ποικιλοτήτων είναι ίσες μεταξύ τους (υπό την έννοια τού ορισμού* 2.5.6) *εάν και μόνον εάν υπάρχει ένα αλγεβρικό σύνολο* $V' \subsetneq \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ *περιεχόμενο γνησίως εντός τής ποικιλότητας* V *με* $V \smallsetminus V' \subseteq \mathrm{Dom}(\varphi) \cap \mathrm{Dom}(\psi)$ *και* $\varphi|_{V \smallsetminus V'} = \psi|_{V \smallsetminus V'}$.

[10] Θα χρησιμοποιούμε εφεξής τον συμβολισμό "$\varphi = \psi$" για να δηλούμε ότι οι φ και ψ είναι ίσες μεταξύ τους, έχοντας, όμως, πάντοτε κατά νου το τι αυτό σημαίνει επί τη βάσει τής προτάσεως 2.5.7.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας υποθέσουμε ότι οι φ, ψ εκπροσωπούνται από τις n-άδες

$$\begin{aligned} \varphi &= \left(\tfrac{\overline{F_1}}{\overline{G_1}}, \ldots, \tfrac{\overline{F_n}}{\overline{G_n}}\right), \ \deg(\overline{F_j}) = \deg(\overline{G_j}), \\ \psi &= \left(\tfrac{\overline{H_1}}{\overline{\Xi_1}}, \ldots, \tfrac{\overline{H_n}}{\overline{\Xi_n}}\right), \ \deg(\overline{H_j}) = \deg(\overline{\Xi_j}), \end{aligned}$$

$\forall j \in \{1, \ldots, n\}$. Εάν οι φ, ψ είναι ίσες μεταξύ τους (βλ. 2.5.6) και εάν

$$V_1 := \mathbf{V}_V(G_1, \ldots, G_n), \quad V_2 := \mathbf{V}_V(\Xi_1, \ldots, \Xi_n),$$

τότε τα V_1, V_2 είναι εξ υποθέσεως αλγεβρικά σύνολα περιεχόμενα γνησίως εντός τής V και (επειδή η V είναι ανάγωγο αλγεβρικό σύνολο) το $V' := V_1 \cup V_2$ είναι ωσαύτως ένα αλγεβρικό σύνολο περιεχόμενο *γνησίως* εντός τής V. Οι φ, ψ είναι κανονικές επί τού $V \smallsetminus V'$ και επειδή

$$F_j \Xi_j - H_j G_j \in \mathbf{I}(V), \ \ \forall j \in \{1, \ldots, n\},$$

τα κλάσματα $\frac{\overline{F_j}}{\overline{G_j}}$ και $\frac{\overline{H_j}}{\overline{\Xi_j}}$ καθορίζουν την ίδια ρητή συνάρτηση επί τού $V \smallsetminus V'$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$. Αυτό σημαίνει ότι και οι φ, ψ ταυτίζονται επί τού $V \smallsetminus V'$.

Και αντιστρόφως· εάν $\varphi|_{V \smallsetminus V'} = \psi|_{V \smallsetminus V'}$, τότε

$$\left.\tfrac{\overline{F_j}}{\overline{G_j}}\right|_{V \smallsetminus V'} = \left.\tfrac{\overline{H_j}}{\overline{\Xi_j}}\right|_{V \smallsetminus V'}, \ \forall j \in \{1, \ldots, n\},$$

απ' όπου έπεται ότι

$$V = \mathbf{V}(F_j \Xi_j - H_j G_j) \cup V'.$$

Επειδή η V είναι ανάγωγο αλγεβρικό σύνολο και το V' ένα αλγεβρικό σύνολο περιεχόμενο γνησίως εντός τής V, έχουμε

$$V = \mathbf{V}(F_j \Xi_j - H_j G_j) \Longrightarrow F_j \Xi_j - H_j G_j \in \mathbf{I}(V), \ \ \forall j \in \{1, \ldots, n\},$$

οπότε οι φ, ψ είναι ίσες μεταξύ τους (υπό την έννοια τού 2.5.6). $\square$

2.5.8 Σημείωση. Εάν οι $\varphi : V \dashrightarrow W$ και $\psi : W \dashrightarrow Z$ είναι δυο ρητές απεικονίσεις μεταξύ συσχετικών ποικιλοτήτων, τότε ενδέχεται να μην μπορεί να ορισθεί η σύνθεσή τους $\psi \circ \varphi$, καθότι είναι δυνατόν να ισχύει $\varphi(\mathrm{Dom}(\varphi)) \cap \mathrm{Dom}(\psi) = \varnothing$. Επί παραδείγματι, για τις

$$\varphi : \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}, \ t \longmapsto (t, 0_{\mathbf{k}}), \quad \psi : \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}, \ (\xi, \xi') \longmapsto \tfrac{\xi}{\xi'},$$

έχουμε προφανώς $\varphi(\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}) \cap \mathrm{Dom}(\psi) = \varnothing$.

2.5.9 Ορισμός. Μια ρητή απεικόνιση $\varphi : V \dashrightarrow W$ μεταξύ συσχετικών ποικιλοτήτων καλείται **κυριαρχούσα απεικόνιση** όταν το σύνολο $\varphi(\mathrm{Dom}(\varphi))$ είναι πυκνό (ως προς την τοπολογία Zariski) εντός τής W. Η σύνθεση $\psi \circ \varphi$ μιας κυριαρχούσας $\varphi : V \dashrightarrow W$ και μιας ρητής απεικονίσεως $\psi : W \dashrightarrow Z$ ορίζεται, διότι $\varphi(\mathrm{Dom}(\varphi)) \cap \mathrm{Dom}(\psi) \neq \varnothing$. (Το $\mathrm{Dom}(\psi)$ είναι μη κενό και κατά Zariski ανοικτό, οπότε η τομή του με το $\varphi(\mathrm{Dom}(\varphi))$ είναι κατ' ανάγκην μη κενή.)

2.5.10 Πρόταση. *Εάν η $\varphi : V \dashrightarrow W$ είναι μια ρητή απεικόνιση μεταξύ συσχετικών ποικιλοτήτων, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(a) *Η απεικόνιση*

$$\overline{\varphi} : \mathbf{k}[W] \longrightarrow \mathbf{k}\,(V)\,, \quad f \longmapsto \overline{\varphi}(f) := f \circ \varphi,$$

αποτελεί έναν ομομορφισμό $\mathbf{k}$*-αλγεβρών.*

(b) *Η $\varphi : V \dashrightarrow W$ είναι κυριαρχούσα ρητή απεικόνιση εάν και μόνον εάν η $\overline{\varphi}$ είναι μονομορφισμός* $\mathbf{k}$*-αλγεβρών.* (Τούτο αποτελεί γενίκευση τού (b) τής προτάσεως 2.1.20.)

Απόδειξη. (a) Η επαλήθευση αυτού τού ισχυρισμού είναι άμεση.

(b) Προφανώς,

$$\mathrm{Ker}(\overline{\varphi}) = \{f \in \mathbf{k}[W] \mid f \circ \varphi = 0\} = \{f \in \mathbf{k}[W] \mid \varphi(\mathrm{Dom}(\varphi)) \subseteq \mathbf{V}(f)\}\,.$$

Έστω ότι η $\varphi : V \dashrightarrow W$ είναι κυριαρχούσα ρητή απεικόνιση έστω $f \in \mathrm{Ker}(\overline{\varphi})$. Το σύνολο $\varphi(\mathrm{Dom}(\varphi))$ είναι εξ ορισμού κατά Zariski πυκνό εντός τής W και επειδή $\varphi(\mathrm{Dom}(\varphi)) \subseteq \mathbf{V}(f)$ με το $\mathbf{V}(f)$ κατά Zariski κλειστό έχουμε $\mathbf{V}(f) = W$. Άρα $f = 0$. Και αντιστρόφως· εάν $\mathrm{Ker}(\overline{\varphi}) = \{0\}$ και εάν υποθέσουμε ότι το $\varphi(\mathrm{Dom}(\varphi))$ δεν είναι κατά Zariski πυκνό εντός τής W, τότε υπάρχει μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο $W \smallsetminus \mathbf{V}(f)$ τής W, όπου $f \in \mathbf{k}[W]$, για το οποίο ισχύει

$$\varphi(\mathrm{Dom}(\varphi)) \cap (W \smallsetminus \mathbf{V}(f)) = \varnothing \Longrightarrow \varphi(\mathrm{Dom}(\varphi)) \subseteq \mathbf{V}(f) \Longrightarrow f \in \mathrm{Ker}(\overline{\varphi}) = \{0\},$$

οπότε $W \smallsetminus \mathbf{V}(f) = \varnothing$. Άτοπο! □

2.5.11 Πρόταση. *Ας υποθέσουμε ότι οι V, W, Z είναι συσχετικές ποικιλότητες. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(a) *Κάθε κυριαρχούσα ρητή απεικόνιση $\varphi : V \dashrightarrow W$ ορίζει έναν* $\mathbf{k}$*-ομομορφισμό σωμάτων*

$$\widehat{\varphi} : \mathbf{k}\,(W) \longrightarrow \mathbf{k}\,(V)\,, \quad f = \tfrac{\overline{G}}{\overline{H}} = \tfrac{\theta_W(g)}{\theta_W(h)} \longmapsto \widehat{\varphi}(f) := \tfrac{\theta_V(\overline{\varphi}(g))}{\theta_V(\overline{\varphi}(h))} = \tfrac{\theta_V(g \circ \varphi)}{\theta_V(h \circ \varphi)},$$

(ο οποίος επεκτείνει τους ομομορφισμούς τοπικών δακτυλίων $\widehat{\varphi}_P$, $P \in V$, επί ολοκλήρου τού σώματος $\mathbf{k}\,(W)$).

(b) *Εάν, αντιστρόφως, ο* $\Phi : \mathbf{k}(W) \longrightarrow \mathbf{k}(V)$ *είναι ένας* $\mathbf{k}$*-ομομορφισμός σωμάτων, τότε υφίσταται μία και μόνον κυριαρχούσα ρητή απεικόνιση* $\varphi : V \dashrightarrow W$ *με* $\Phi = \widehat{\varphi}$.

(c) *Εάν οι* $\varphi : V \dashrightarrow W$ *και* $\psi : W \dashrightarrow Z$ *είναι δυο κυριαρχούσες ρητές απεικονίσεις, τότε και η σύνθεσή τους* $\psi \circ \varphi : V \dashrightarrow Z$ *είναι κυριαρχούσα ρητή απεικόνιση, και*

$$\widehat{\psi \circ \varphi} = \widehat{\varphi} \circ \widehat{\psi}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a) Εάν η $\varphi : V \dashrightarrow W$ είναι μια κυριαρχούσα ρητή απεικόνιση, τότε, σύμφωνα με το (b) τής προτάσεως 2.5.10, $\mathrm{Ker}(\overline{\varphi}) = \{0\}$. Άρα η $\widehat{\varphi}$ είναι καλώς ορισμένη. Το ότι η $\widehat{\varphi}$ είναι $\mathbf{k}$-ομομορφισμός σωμάτων επαληθεύεται άμεσα.

(b) Έστω $\Phi : \mathbf{k}(W) \longrightarrow \mathbf{k}(V)$ ένας $\mathbf{k}$-ομομορφισμός σωμάτων. Εάν $W \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ και εάν οι $\mathsf{Y}_1, \ldots, \mathsf{Y}_n$ είναι οι συναρτήσεις συντεταγμένων που παράγουν τον τον $\mathbf{k}[W]$, τότε θέτουμε $f_j := \Phi(\mathsf{Y}_j)$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$ και θεωρούμε την

$$\varphi := (f_1, \ldots, f_n) : V \dashrightarrow W.$$

Η απόδειξη τού ότι ισχύει η ισότητα $\Phi = \widehat{\varphi}$ (και τού ότι η φ είναι η μοναδική ρητή απεικόνιση από την V στην W που πληροί αυτήν την ιδιότητα) είναι παρόμοια εκείνης που ακολουθήσαμε στην πρόταση 2.1.15. Απομένει λοιπόν να δειχθεί ότι η εν λόγω φ είναι και κυριαρχούσα απεικόνιση. Σημειωτέον ότι $\Phi|_{\mathbf{k}[W]} = \overline{\varphi}$. Ως $\mathbf{k}$-ομομορφισμός *σωμάτων*, η $\Phi \neq 0$ είναι κατ' ανάγκην *ενριπτική*, οπότε και η $\overline{\varphi}$ είναι είναι ενριπτική. Ως εκ τούτου, αρκεί η εφαρμογή τού (b) τής προτάσεως 2.5.10.

(c) Τούτο έπεται απευθείας από τους ορισμούς. □

2.5.12 Πόρισμα. *Έστω ότι οι* $V \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ *και* $W \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ *είναι δυο συσχετικές ποικιλότητες. Τότε υπάρχει μια φυσική αμφίρριψη*

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{c} \text{κυριαρχούσες ρητές} \\ \text{απεικονίσεις } V \dashrightarrow W \end{array} \right\} \ni \varphi \longmapsto \widehat{\varphi} \in \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{k}\text{-ομομορφισμοί σωμάτων} \\ \mathbf{k}(W) \longrightarrow \mathbf{k}(V) \end{array} \right\}}$$

2.5.13 Ορισμός. Μια κυριαρχούσα ρητή απεικόνιση $\varphi : V \dashrightarrow W$ μεταξύ συσχετικών ποικιλοτήτων καλείται **αμφίρρητη απεικόνιση** όταν υπάρχει κάποια κυριαρχούσα ρητή απεικόνιση $\psi : W \dashrightarrow V$ για την οποία ισχύουν οι ισότητες ρητών απεικονίσεων

$$\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_V, \;\; \varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_W$$

(υπό την έννοια τού ορισμού 2.5.6!). Ο συμβολισμός $V \underset{\text{bir}}{\cong} W$ θα χρησιμοποιείται για να δηλοί ότι υπάρχει μια αμφίρρητη απεικόνιση μεταξύ των V και W. Εν τοιαύτη περιπτώσει οι V, W καλούνται **αμφιρρήτως ισοδύναμες**. (Η "$\underset{\text{bir}}{\cong}$" αποτελεί προφανώς μια σχέση ισοδυναμίας.)

2.5.14 Πόρισμα. *Μια κυριαρχούσα απεικόνιση $\varphi : V \dashrightarrow W$ μεταξύ συσχετικών ποικιλοτήτων είναι αμφίρρητη απεικόνιση εάν και μόνον εάν ο επαγόμενος $\mathbf{k}$-ομομορφισμός σωμάτων $\widehat{\varphi} : \mathbf{k}(W) \longrightarrow \mathbf{k}(V)$ είναι $\mathbf{k}$-ισομορφισμός.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Τούτο έπεται από τα (b), (c) τής προτάσεως 2.5.11 και από το ότι ισχύουν οι ισότητες $\widehat{\mathrm{Id}}_V = \mathrm{Id}_{\mathbf{k}(V)}$ και $\widehat{\mathrm{Id}}_W = \mathrm{Id}_{\mathbf{k}(W)}$. □

2.5.15 Σημείωση. (a) Για δυο συσχετικές ποικιλότητες V, W ισχύει η συνεπαγωγή

$$V \cong W \Longrightarrow V \underset{\mathrm{bir}}{\cong} W.$$

Ωστόσο, η αντίστροφη συνεπαγωγή *δεν είναι πάντοτε αληθής*. Επί παραδείγματι, όταν $V = \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ και $W = \mathbf{V}\left(\mathsf{Y}^2 - \mathsf{X}^3\right) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$, οι

$$\varphi : V \longrightarrow W,\ \ \varphi(t) := \left(t^2, t^3\right),\ \ \psi : W \dashrightarrow V,\ \ \psi(a,b) := \tfrac{b}{a},$$

είναι δυο κυριαρχούσες ρητές απεικονίσεις (με την φ πολυωνυμική απεικόνιση και με $\mathrm{Dom}(\psi) = W \smallsetminus \{(0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}})\}$), για τις οποίες ισχύουν οι ισότητες ρητών απεικονίσεων $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_V$, $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_W$ (υπό την έννοια τού ορισμού 2.5.6). Κατά συνέπειαν, $V \underset{\mathrm{bir}}{\cong} W$ αλλά $V \ncong W$ (διότι $\mathbf{k}[V] \ncong \mathbf{k}[W]$, βλ. πόρισμα 2.1.18).

(b) Η ερμηνεία τής διαφοράς μεταξύ των «συνήθων ισομορφισμών» συσχετικών ποικιλοτήτων και των αμφιρρήτων απεικονίσεων μέσω τής Θεωρίας Κατηγοριών είναι η εξής: Μεταβαίνοντας από την κατηγορία $\mathbf{k}$-$\mathfrak{AVar}$ των συσχετικών ποικιλοτήτων (που έχει τις *πολυωνυμικές απεικονίσεις* ως μορφισμούς της, βλ. 2.1.25 (e)) στην κατηγορία $\mathbf{k}$-$\mathfrak{AVar}^{\varkappa.\varrho.\alpha.}$ με

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{AVar}^{\varkappa.\varrho.\alpha.}) := \mathrm{Ob}(\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{AVar})$$

και

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{AVar}^{\varkappa.\varrho.\alpha.}}(V, W) := \left\{ \begin{array}{c} \text{κυριαρχούσες ρητές απεικονίσεις} \\ \varphi : V \dashrightarrow W \end{array} \right\},$$

οι $\mathbf{k}$-$\mathfrak{AVar}^{\varkappa.\varrho.\alpha.}$-*ισομορφισμοί* (υπό την έννοια τού ορισμού 2.1.22) είναι ακριβώς οι *αμφίρρητες απεικονίσεις* μεταξύ συσχετικών ποικιλοτήτων. Επιπροσθέτως, ο συναρτητής[11]

$$\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{AVar}^{\varkappa.\varrho.\alpha.} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{πεπερασμένως παραγόμενες} \\ \text{επεκτάσεις τού σώματος } \mathbf{k} \end{array} \right\}$$

ο οριζόμενος μέσω των

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{AVar}^{\varkappa.\varrho.\alpha.}) \ni V \longmapsto \mathbf{k}(V),$$

[11] Σημειωτέον ότι το σώμα $\mathbf{k}(V)$ των ρητών συναρτήσεων των οριζομένων επί τής V είναι πεπερασμένως παραγόμενη επέκταση τού $\mathbf{k}$, διότι $\mathbf{k}(V) \cong \mathbf{Fr}(\mathbf{k}[V])$.

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{AVar}^{\kappa.\varrho.\alpha.}}(V,W) \ni \varphi \longmapsto \widehat{\varphi},$$

είναι ανταλλοίωτος και (σύμφωνα με το πόρισμα 2.5.12) απολύτως πιστός· μάλιστα, όταν το $\mathbf{k}$ είναι αλγεβρικώς κλειστό, ο εν λόγω συναρτητής ορίζει μια ανταλλοίωτη ισοδυναμία[12] («επεκτείνοντας», τρόπον τινά, τον συναρτητή $\mathbf{F}'$ τού θεωρήματος 2.1.32).

• Το υπόλοιπο τμήμα τής παρούσας ενότητας είναι αφιερωμένο στη γενίκευση των εννοιών τής *πολυωνυμικής απεικονίσεως* (ή *μορφισμού*), τού *ισομορφισμού*, τής *ρητής απεικονίσεως*, τής *κυριαρχούσας απεικονίσεως* και τής *αμφίρρητης απεικονίσεως* για *σχεδόν συσχετικές ποικιλότητες* (λαμβάνοντας υπ' όψιν ό,τι συνεζητήθη στην ενότητα 2.4).

2.5.16 Ορισμός. Ας υποθέσουμε ότι οι Y, Z είναι δυο σχεδόν συσχετικές ποικιλότητες.

(a) Μια κατά Zariski συνεχής απεικόνιση $\varphi : Y \longrightarrow Z$ από την Y στην Z καλείται **μορφισμός** (σχεδόν συσχετικών ποικιλοτήτων) όταν για κάθε κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο U τής Z και για κάθε $f \in \mathcal{O}_Z(U)$ έχουμε $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_Y(\varphi^{-1}(U))$ (βλ. 2.4.20).

(b) Η σύνθεση δυο μορφισμών είναι προφανώς μορφισμός. Ένας μορφισμός $\varphi : Y \longrightarrow Z$ καλείται **ισομορφισμός** (σχεδόν συσχετικών ποικιλοτήτων) όταν υπάρχει κάποιος μορφισμός $\psi : Z \longrightarrow Y$ για τον οποίο ισχύουν οι ισότητες

$$\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_Y, \ \varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_Z.$$

(c) Λέμε ότι οι Y, Z είναι **ισόμορφες** (και χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $V \cong W$) όταν υφίσταται ένας τέτοιου είδους ισομορφισμός μεταξύ αυτών. (Η “$\cong$” αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας.)

(d) Οι ορισμοί (a)-(c) γενικεύονται κατά λέξη ακόμη και για μη κενά, κατά Zariski ανοικτά υποσύνολα συσχετικών (όχι κατ' ανάγκην αναγώγων) αλγεβρικών συνόλων.

2.5.17 Σημείωση. (a) Εάν η Y είναι μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο τής συσχετικής ποικιλότητας $V \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ και η Z μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο τής συσχετικής ποικιλότητας $W \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$, τότε κάθε ρητή απεικόνιση $\varphi : V \dashrightarrow W$ από την V στην W με $Y \subseteq \mathrm{Dom}(\varphi)$ και $\varphi(Y) \subseteq Z$ ορίζει έναν μορφισμό σχεδόν συσχετικών ποικιλοτήτων $\varphi|_Y : Y \longrightarrow Z$, και αντιστρόφως, κάθε μορφισμός $Y \longrightarrow Z$ μπορεί να ιδωθεί ως περιορισμός μιας τέτοιας ρητής απεικονίσεως.

(b) Από εδώ και στο εξής θα συμβολίζουμε ως $\mathbf{k}$-$\mathfrak{QAVar}$ την κατηγορία των σχεδόν συσχετικών ($\mathbf{k}$-)ποικιλοτήτων (με μορφισμούς της αυτούς που έχουν ορισθεί στο 2.5.16 (a)).

[12] Εάν το L είναι μια πεπερασμένως παραγόμενη (σωματική) επέκταση ενός αλγεβρικώς κλειστού σώματος $\mathbf{k}$, τότε έχουμε $L = \mathbf{k}(a_1, \ldots, a_n)$, οπότε ο δακτύλιος $A := \mathbf{k}[a_1, \ldots, a_n]$ είναι μια πεπερασμένως παραγόμενη, ανηγμένη $\mathbf{k}$-άλγεβρα (που είναι ακεραία περιοχή), με $\mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]/I \cong A = A_{\mathrm{red}}$. Αρκεί λοιπόν στο L να αντιστοιχίσουμε την $V := \mathbf{V}(I)$. (Βλ. σημείωση 2.1.21.)

(c) Εντός τής $\mathbf{k}$-$\mathfrak{QAVar}$ το γινόμενο δυο σχεδόν συσχετικών ποικιλοτήτων είναι *κατηγορικό* (πρβλ. 2.1.33 (a)).

2.5.18 Σημείωση. (a) Μέχρι στιγμής έχουμε ορίσει μόνον υποποικιλότητες *συσχετικών ποικιλοτήτων* (βλ. 2.1.5 (b)). Εάν το Y είναι μια *σχεδόν συσχετική ποικιλότητα*, τότε είναι εξ ορισμού ένα κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο μιας συσχετικής ποικιλότητας $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$. Κάθε κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο U τής Y είναι και κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο τής $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ (δηλαδή αφ' εαυτού σχεδόν συσχετική ποικιλότητα) και καλείται **ανοικτή υποποικιλότητα τής** Y. Κάθε κατά Zariski κλειστό και ανάγωγο υποσύνολο W τής Y καλείται **κλειστή υποποικιλότητα τής** Y. (Εν προκειμένω, $W = \mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_V}(W) \cap Y$ και το W είναι κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο τού $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}|_V}(W)$.) Πρβλ. άσκηση **A-2-35**. Εντός αυτού τού γενικότερου ορισμολογικού πλαισίου, οι υποποικιλότητες μιας συσχετικής ποικιλότητας $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$, όπως αυτές εισήχθησαν στο 2.1.5 (b), είναι οι *κλειστές υποποικιλότητες τής* V.

(b) Κάθε συσχετική ποικιλότητα $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ είναι *προφανώς* σχεδόν συσχετική ποικιλότητα (και κλειστή υποποικιλότητα τού περιβάλλοντος συσχετικού χώρου $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$). Ωστόσο, η ορθή εγκόλπωση τής $\mathbf{k}$-$\mathfrak{AVar}$ εντός τής $\mathbf{k}$-$\mathfrak{QAVar}$ απαιτεί *γενίκευση* τής εννοίας τής «συσχετικής ποικιλότητας» προκειμένου να ορίζεται «μέχρις ισομορφισμού» (υπό την έννοια τού ορισμού 2.5.16 (b))! Και τούτο δεν είναι ούτε λογοπαίγνιο ούτε το αποτέλεσμα ενός άκρατου σχολαστικισμού! Γράφοντας λοιπόν «η $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ είναι μια συσχετική ποικιλότητα» θα εννοούμε μια κλειστή υποποικιλότητα τού (συγκεκριμένου) $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$. Αντιθέτως, ομιλώντας για μια **συσχετική ποικιλότητα** V εντός τής κλάσεως $\mathrm{Ob}(\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{QAVar})$ (και χωρίς να αναφερόμαστε ρητώς στον περιβάλλοντα χώρο) θα εννοούμε μια σχεδόν συσχετική ποικιλότητα η οποία είναι ισόμορφη (*ως σχεδόν συσχετική ποικιλότητα*, βλ. 2.5.16 (b)) με μια αφηρημένη συσχετική ποικιλότητα (βλ. 2.1.33 (c)), ήτοι με την κλειστή υποποικιλότητα *κάποιου* $\mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$! Επί παραδείγματι, εάν $Y := \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \smallsetminus \{0\} \subset \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$, το Y είναι σχεδόν συσχετική ποικιλότητα (ως κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο τού $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$), αλλά *δεν είναι* κλειστή υποποικιλότητα τού $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ (βλ. άσκηση **A-1-8**). Ωστόσο, η απεικόνιση

$$Y \xrightarrow{\varphi} V := \mathbf{V}(\mathsf{XY} - 1) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}, \quad t \longmapsto \varphi(t) := (t, \frac{1}{t}),$$

είναι ισομορφισμός (υπό την έννοια τού ορισμού 2.5.16 (b)) έχουσα την προβολή

$$V \ni (\mathsf{X}, \mathsf{Y}) \longmapsto \mathsf{X} \in Y$$

ως αντίστροφό της. Ως εκ τούτου, το Y *είναι* συσχετική ποικιλότητα (ούσα ισόμορφη τής συσχετικής ποικιλότητας V) επί τη βάσει τής ανωτέρω εννοιοδοτήσεως τού όρου.

2.5.19 Πρόταση. *Έστω ότι οι Y, Z είναι δυο σχεδόν συσχετικές ποικιλότητες και οι $\varphi_1, \varphi_2 : Y \longrightarrow Z$ δυο μορφισμοί. Εάν το U είναι ένα μη κενό, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο τής Y, τότε ισχύει η εξής συνεπαγωγή :*

$$\varphi_1|_U = \varphi_2|_U \Longrightarrow \varphi_1 = \varphi_2.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρκεί να ληφθεί υπ' όψιν το (a) τής σημειώσεως 2.5.17 και να εφαρμοσθεί καταλλήλως η πρόταση 2.5.7. □

2.5.20 Ορισμός. Ας υποθέσουμε ότι οι Y, Z είναι δυο σχεδόν συσχετικές ποικιλότητες. Θέτουμε

$$\mathcal{G}_{Y,Z} := \left\{ \text{ζεύγη } (U, \varphi_U) \;\middle|\; \begin{array}{c} U \text{ ένα } \textit{μη κενό}, \text{ κατά Zariski} \\ \text{ανοικτό υποσύνολο τής } Y \text{ και} \\ \varphi_U : U \longrightarrow Z \text{ ένας μορφισμός} \end{array} \right\}.$$

Λόγω τής προτάσεως 2.5.19 έχουμε τη δυνατότητα ορισμού τής εξής σχέσεως ισοδυναμίας επί τού $\mathcal{G}_{Y,Z}$:

$$\boxed{(U, \varphi_U) \sim (U', \varphi_{U'}) \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \varphi_U|_{U \cap U'} = \varphi_{U'}|_{U \cap U'} \cdot}$$

Μια **ρητή απεικόνιση** $\varphi : Y \dashrightarrow Z$ από την Y στην Z είναι μια κλάση ισοδυναμίας $[U, \varphi_U]$ ενός ζεύγους $(U, \varphi_U) \in \mathcal{G}_{Y,Z}$ ως προς την ανωτέρω "$\sim$".

2.5.21 Παρατήρηση. Στην περίπτωση κατά την οποία οι Y, Z είναι συσχετικές ποικιλότητες, μια ρητή απεικόνιση $\varphi : Y \dashrightarrow Z$ (υπό την έννοια τού ορισμού 2.5.5) μπορεί να ταυτισθεί με την $[\mathrm{Dom}(\varphi), \varphi_{\mathrm{Dom}(\varphi)}]$ (υπό την έννοια τού ορισμού 2.5.20).

2.5.22 Ορισμός. Έστω $\varphi : Y \dashrightarrow Z$ μια ρητή απεικόνιση μεταξύ σχεδόν συσχετικών ποικιλοτήτων εκπροσωπούμενη από ένα ζεύγος $(U, \varphi_U) \in \mathcal{G}_{Y,Z}$. Η φ καλείται **κυριαρχούσα απεικόνιση** όταν η εικόνα τής φ_U είναι κατά Zariski πυκνή εντός τής Z. (Η ιδιότητα αυτή είναι *ανεξάρτητη* τής επιλογής τού ζεύγους $(U, \varphi_U) \in \mathcal{G}_{Y,Z}$ που εκπροσωπεί την φ.) Επίσης, η σύνθεση $\psi \circ \varphi$ μιας κυριαρχούσας $\varphi : Y_1 \dashrightarrow Y_2$ και μιας ρητής απεικονίσεως $\psi : Y_2 \dashrightarrow Y_3$ μεταξύ σχεδόν συσχετικών ποικιλοτήτων είναι καλώς ορισμένη.

2.5.23 Ορισμός. Μια κυριαρχούσα ρητή απεικόνιση $\varphi : Y \dashrightarrow Z$ μεταξύ σχεδόν συσχετικών ποικιλοτήτων καλείται **αμφίρρητη απεικόνιση** όταν υπάρχει κάποια κυριαρχούσα ρητή απεικόνιση $\psi : Z \dashrightarrow Y$ για την οποία ισχύουν οι ισότητες

$$\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_Y, \; \varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_Z.$$

Και σε αυτήν την περίπτωση θα χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $Y \underset{\text{bir}}{\cong} Z$ για να δηλοί ότι υπάρχει μια αμφίρρητη απεικόνιση μεταξύ των Y και Z. (Εν προκειμένω, οι Y, Z καλούνται **αμφιρρήτως ισοδύναμες**.)

2.5.24 Λήμμα. *Έστω Y μια σχεδόν συσχετική ποικιλότητα και έστω $W \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ μια συσχετική ποικιλότητα. Υποθέτουμε ότι οι $\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n$ είναι συναρτήσεις συντεταγμένων που παράγουν τον $\mathbf{k}[W]$. Τότε μια (συνήθης, συνολοθεωρητική) απεικόνιση $\varphi : Y \longrightarrow W$ είναι μορφισμός (υπό την έννοια τού ορισμού* 2.5.16 (a)) *εάν και μόνον εάν $\mathsf{X}_j \circ \varphi \in \mathcal{O}_Y(Y)$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν η $\varphi : Y \longrightarrow W$ είναι μορφισμός, τότε εξ ορισμού $\mathsf{X}_j \circ \varphi \in \mathcal{O}_Y(Y)$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$. Και αντιστρόφως· εάν ισχύει $\mathsf{X}_j \circ \varphi \in \mathcal{O}_Y(Y)$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$, τότε για κάθε $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$ έχουμε $F \circ \varphi \in \mathcal{O}_Y(Y)$. Επειδή $W = \mathbf{V}(\mathbf{I}(W))$ (βλ. το (5) (a) τής προτάσεως 1.3.1) και επειδή οι κανονικές συναρτήσεις είναι (σύμφωνα με την πρόταση 2.4.17) συνεχείς ως προς την τοπολογία Zariski, διαπιστώνουμε ότι η φ αντιστρέφει (κατά Zariski) κλειστά σε κλειστά σύνολα, οπότε είναι και η ίδια συνεχής. Τέλος, επειδή οι κανονικές συναρτήσεις επί ανοικτών υποσυνόλων τής W είναι τοπικώς παραστάσιμες ως λόγοι πολυωνύμων, η σύνθεση $f \circ \varphi$, όπου $f \in \mathcal{O}_W(U)$, είναι κανονική για οιοδήποτε κατά Zariski ανοικτού υποσυνόλου τής W. Άρα η $\varphi : Y \longrightarrow W$ είναι μορφισμός. □

2.5.25 Πρόταση. *Έστω Y μια σχεδόν συσχετική ποικιλότητα και έστω $W \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ μια συσχετική ποικιλότητα. Τότε υφίσταται μια φυσική αμφίρριψη:*

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{QAVar}}(Y, W) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{Alg}}(\mathbf{k}[W], \mathcal{O}_Y(Y))$$

από το σύνολο των μορφισμών από την Y στην W επί τού συνόλου των αντιστοίχων ομομορφισμών **k***-αλγεβρών.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κάθε $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{QAVar}}(Y, W)$ επάγει έναν ομομορφισμό **k**-αλγεβρών

$$\mathcal{O}_W(W) \ni f \longmapsto f \circ \varphi \in \mathcal{O}_Y(Y).$$

Επειδή $\Gamma(W) \cong \mathbf{k}[W] \cong \mathcal{O}_W(W)$ (βλ. πρόταση 2.4.28 (b)), ο τρόπος ορισμού τής φυσικής απεικονίσεως α είναι προφανής. Η αντίστροφός της ορίζεται ως εξής: Δοθέντος ενός ομομορφισμού **k**-αλγεβρών

$$h : \Gamma(W) \cong \mathbf{k}[W] \longrightarrow \mathcal{O}_Y(Y),$$

συμβολίζουμε ως $\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n$ τις συναρτήσεις συντεταγμένων που παράγουν τον $\mathbf{k}[W]$, ως $\overline{\mathsf{X}}_1, \ldots, \overline{\mathsf{X}}_n$ τις κλάσεις υπολοίπων τους εντός τού $\Gamma(W) = \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]/\mathbf{I}(W)$ και θέτουμε $\xi_j := h(\overline{\mathsf{X}}_j)$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$. Εν συνεχεία ορίζουμε την απεικόνιση

$$\psi = \psi_h : Y \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}, \;\; P \longmapsto \psi(P) := (\xi_1(P), \ldots, \xi_n(P)).$$

Θα δείξουμε ότι $\mathrm{Im}(\psi) \subseteq W$. Επειδή $W = \mathbf{V}(\mathbf{I}(W))$ (βλ. το (5) (a) τής προτάσεως 1.3.1) αρκεί να δειχθεί ότι $F(\psi(P)) = 0_{\mathbf{k}}$ για κάθε $P \in Y$ και για κάθε $F \in \mathbf{I}(W)$. Επειδή

$$F(\psi(P)) = F(\xi_1(P), \ldots, \xi_n(P))$$

και επειδή το F είναι πολυώνυμο και ο h ομομορφισμός **k**-αλγεβρών, έχουμε

$$F \in \mathbf{I}(W) \Longrightarrow F(\xi_1(P), \ldots, \xi_n(P)) = h(F(\overline{\mathsf{X}}_1, \ldots, \overline{\mathsf{X}}_n))(P) = 0_{\mathbf{k}},$$

οπότε η $\psi = \psi_h$ είναι μια απεικόνιση από την Y στην W επαγόμενη από τον h. Επιπροσθέτως, επειδή $\mathsf{X}_j \circ \psi \in \mathcal{O}_Y(Y)$ (εκ κατασκευής) για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$, το προηγηθέν λήμμα 2.5.24 μας πληροφορεί ότι η $\psi = \psi_h$ είναι μορφισμός. Τέλος, είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι η απεικόνιση

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{Alg}}(\mathbf{k}[W], \mathcal{O}_Y(Y)) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Mor}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{QAVar}}(Y, W), \;\; h \longmapsto \beta(h) := \psi_h,$$

είναι η αντίστροφος τής α. □

2.5.26 Πρόταση. *Εάν η $\varphi : Y \longrightarrow Z$ είναι ένας μορφισμός μεταξύ σχεδόν συσχετικών ποικιλοτήτων και η εικόνα $\varphi(Y)$ πυκνή (ως προς την τοπολογία Zariski) εντός τής Z, τότε ο ομομορφισμός* **k***-αλγεβρών*

$$\mathcal{O}_Z(Z) \ni f \longmapsto f \circ \varphi \in \mathcal{O}_Y(Y)$$

είναι μονομορφισμός.

Απόδειξη. Έστω f τυχόν στοιχείο τού πυρήνα τού ανωτέρω ομομορφισμού **k**-αλγεβρών. Επειδή η εικόνα $\varphi(Y)$ είναι εξ υποθέσεως πυκνή (ως προς την τοπολογία Zariski) εντός τής Z, έχουμε

$$f \circ \varphi = 0 \Longrightarrow \varphi(Y) \subseteq f^{-1}(0) \Longrightarrow f^{-1}(0) = \varphi(Y) \Longrightarrow f = 0,$$

και ο ισχυρισμός είναι αληθής. □

2.5.27 Πρόταση. *Έστω $\varphi : Y \dashrightarrow Z$ μια κυριαρχούσα ρητή απεικόνιση μεταξύ σχεδόν συσχετικών ποικιλοτήτων. Υποθέτουμε ότι η φ είναι η κλάση ισοδυναμίας $[U, \varphi_U]$ ενός ζεύγους $(U, \varphi_U) \in \mathcal{G}_{Y,Z}$* (βλ. 2.5.20). *Τότε η απεικόνιση*

$$\widehat{\varphi} : \mathrm{Rat}(Z) \longrightarrow \mathrm{Rat}(Y), \;\; [U', f] \longmapsto \widehat{\varphi}([U', f]) := [\varphi_U^{-1}(U'), f \circ \varphi_U],$$

αποτελεί έναν **k***-ομομορφισμό σωμάτων* (πρβλ. 2.4.24).

Απόδειξη. Εάν $[U', f] \in \mathrm{Rat}(Z)$, τότε $f \in \mathcal{O}_Z(U')$. Επειδή η φ είναι εξ υποθέσεως κυριαρχούσα απεικόνιση, η εικόνα $\varphi_U(U)$ τού U μέσω τής φ_U είναι κατά Zariski πυκνή εντός τής Z, οπότε $\varphi_U(U) \cap U' \neq \varnothing$, πράγμα που σημαίνει ότι το $\varphi_U^{-1}(U')$ είναι *μη κενό*, κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο τής Y και η σύνθεση $f \circ \varphi_U$ *ορίζεται* επ' αυτού. (Προφανώς, $f \circ \varphi_U|_{\varphi_U^{-1}(U')} \in \mathcal{O}_Y(\varphi_U^{-1}(U'))$.) Επιπροσθέτως, εάν $[U_1', f_1] = [U_2', f_2]$, τότε

$$f_1|_{U_1' \cap U_2'} = f_2|_{U_1' \cap U_2'} \Longrightarrow \Big(f_1 - f_2|_{U_1' \cap U_2'} \Big) \circ \varphi_U|_{\varphi_U^{-1}(U_1' \cap U_2')} = 0,$$

οπότε

$$f_1 \circ \varphi_U|_{\varphi_U^{-1}(U_1') \cap \varphi_U^{-1}(U_2')} = f_2 \circ \varphi_U|_{\varphi_U^{-1}(U_1') \cap \varphi_U^{-1}(U_2')}\,.$$

Άρα η $\widehat{\varphi}$ είναι καλώς ορισμένη. Το ότι η $\widehat{\varphi}$ είναι **k**-ομομορφισμός σωμάτων επαληθεύεται άμεσα. □

2.5.28 Πρόταση. *Εάν οι $\varphi : Y_1 \dashrightarrow Y_2$ και $\psi : Y_2 \dashrightarrow Y_3$ είναι δυο κυριαρχούσες ρητές απεικονίσεις μεταξύ σχεδόν συσχετικών ποικιλοτήτων, τότε και η $\psi \circ \varphi : Y_1 \dashrightarrow Y_3$ είναι κυριαρχούσα ρητή απεικόνιση, και*

$$\widehat{\psi \circ \varphi} = \widehat{\varphi} \circ \widehat{\psi}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η επαλήθευση αυτού τού ισχυρισμού είναι άμεση. □

2.5.29 Πόρισμα. *Εάν η $\varphi : Y \longrightarrow Z$ είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ δυο σχεδόν συσχετικών ποικιλοτήτων, τότε ο επαγόμενος* $\mathbf{k}$*-ομομορφισμός σωμάτων* $\widehat{\varphi}$:$\mathrm{Rat}(Z) \longrightarrow \mathrm{Rat}(Y)$ *είναι* $\mathbf{k}$*-ισομορφισμός.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται την πρόταση 2.5.28 και από το ότι ισχύουν οι ισότητες $\widehat{\mathrm{Id}}_Y = \mathrm{Id}_{\mathbf{k}(Y)}$ και $\widehat{\mathrm{Id}}_Z = \mathrm{Id}_{\mathbf{k}(Z)}$. □

2.5.30 Λήμμα. *Έστω Y μια σχεδόν συσχετική ποικιλότητα. Τότε η τοπολογία Zariski επί τής Y διαθέτει ένα κάλυμμα απαρτιζόμενο από κατά Zariski ανοικτά υποσύνολά της, καθένα των οποίων είναι αφ' εαυτού μια συσχετική ποικιλότητα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η Y είναι κατά Zariski ανοικτό υποσύνολο κάποιας συσχετικής ποικιλότητας $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$. Άρα το $V \smallsetminus Y$ είναι ένα κατά Zariski κλειστό υποσύνολο τής V (και, κατ' επέκτασιν, και ολοκλήρου τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$), οπότε υπάρχει ένα ιδεώδες $I \subseteq \mathbf{k}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]$, τέτοιο ώστε να ισχύει $V \smallsetminus Y = \mathbf{V}(I)$. Επομένως,

$$Y = V \smallsetminus \mathbf{V}(I) = V \smallsetminus \bigcap_{F \in I} \mathbf{V}(F) = \bigcup_{F \in I} (V \smallsetminus \mathbf{V}(F)) = \bigcup \left\{ V_f \,\middle|\, f = \theta_V^{-1}(\overline{F}) \,, F \in I \right\},$$

με καθένα των V_f συσχετική ποικιλότητα (βλ. το (a) τής προτάσεως 2.4.9). □

2.5.31 Πρόταση. *Έστω ότι οι Y, Z είναι δυο σχεδόν συσχετικές ποικιλότητες. Τότε υπάρχει μια φυσική αμφίρριψη*

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{c} \text{κυριαρχούσες ρητές} \\ \text{απεικονίσεις } Y \dashrightarrow Z \end{array} \right\} \ni \varphi \longmapsto \widehat{\varphi} \in \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{k}\text{-ομομορφισμοί σωμάτων} \\ \mathrm{Rat}(Z) \longrightarrow \mathrm{Rat}(Y) \end{array} \right\}}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σύμφωνα με την πρόταση 2.5.27 κάθε κυριαρχούσα απεικόνιση $\varphi : Y \dashrightarrow Z$ επάγει έναν $\mathbf{k}$-ομομορφισμό σωμάτων $\widehat{\varphi}$. Αρκεί να ορισθεί αντίστροφος τής $\varphi \longmapsto \widehat{\varphi}$. Έστω $\Phi : \mathrm{Rat}(Z) \longrightarrow \mathrm{Rat}(Y)$ τυχών $\mathbf{k}$-ομομορφισμός σωμάτων. Σύμφωνα με το λήμμα 2.5.30 η Z διαθέτει κάποιο κατά Zariski ανοικτό κάλυμμα απαρτιζόμενο από συσχετικές ποικιλότητες. Γι' αυτόν τον λόγο δεν επέρχεται βλάβη τής γενικότητας εάν από τούδε και στο εξής υποθέσουμε ότι η Z είναι μια *συσχετική ποικιλότητα*. Επιλέγοντας γεννήτορες $z_1, \ldots, z_n$ τής $\mathbf{k}$-άλγεβρας $\mathbf{k}[Z]$ παρατηρούμε ότι οι εικόνες τους $\Phi(z_1), \ldots, \Phi(z_n)$ είναι ρητές συναρτήσεις επί τής Y. Θέτοντας

$$U := \bigcap \{ \mathrm{Dom}(\Phi(z_j)) | \, j \in \{1, \ldots, n\} \} \subseteq Y$$

παρατηρούμε ότι $\Phi_U(z_1), \ldots, \Phi|_U(z_n) \in \mathcal{O}_U(U)$, οπότε η

$$\mathbf{k}[Z] \cong \mathcal{O}_Z(Z) \xrightarrow{\mathfrak{Y}_\Phi} \mathcal{O}_U(U), \ \ z_j \longmapsto \Phi_U(z_j), \ \forall j \in \{1, \ldots, n\},$$

ανήκει στο σύνολο $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{Alg}}(\mathbf{k}[Z], \mathcal{O}_U(U))$ και είναι ενριπτική επί τη βάσει τής προτάσεως 2.5.26. Με τη βοήθεια τής προτάσεως 2.5.25 κατασκευάζουμε έναν μορφισμό $\alpha^{-1}(\mathfrak{Y}_\Phi) \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{QAVar}}(Y, Z)$. Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι οι απεικονίσεις

$$\varphi \longmapsto \widehat{\varphi}, \quad \Phi \longmapsto \alpha^{-1}(\mathfrak{Y}_\Phi)$$

είναι αμφιρρίψεις και η μία αντίστροφος τής άλλης. □

2.5.32 Πρόταση. *Εάν η $\varphi : Y \dashrightarrow Z$ είναι τυχούσα αμφίρρητη απεικόνιση μεταξύ δυο σχεδόν συσχετικών ποικιλοτήτων, τότε υπάρχουν μη κενά, κατά Zariski ανοικτά υποσύνολα $U_0 \subseteq Y$ και $U_0' \subseteq Z$, ούτως ώστε η $\varphi|_{U_0}$ να είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ των U_0 και U_0' και $\mathrm{Rat}(Y) \cong \mathrm{Rat}(Z)$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εξ ορισμού υπάρχει κάποια $\psi : Z \dashrightarrow Y$ για την οποία ισχύουν οι ισότητες

$$\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_Y, \ \varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_Z.$$

Ας υποθέσουμε ότι η $\varphi : Y \dashrightarrow Z$ (και αντιστοίχως, η $\psi : Z \dashrightarrow Y$) είναι η κλάση ισοδυναμίας $[U, \varphi_U]$ (και αντιστοίχως, η κλάση ισοδυναμίας $[U', \psi_{U'}]$) επί τη βάσει τού ορισμού 2.5.20. Τότε το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
\psi_{U'}^{-1}(U) \arrow[r, "\psi_{U'}"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & U \arrow[d, "\varphi_U"] \\
Y \arrow[r, "\mathrm{Id}_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

οπότε $\varphi_U \circ \psi_{U'} = \mathrm{Id}_Y|_{\psi_{U'}^{-1}(U)}$. Εν συνεχεία θέτουμε

$$U_0 := \varphi_U^{-1}(\psi_{U'}^{-1}(U)), \ \ U_0' := \psi_{U'}^{-1}(\varphi_U^{-1}(U')), \quad \varphi|_{U_0} := \varphi_U|_{U_0} : U_0 \longrightarrow \psi_{U'}^{-1}(U).$$

Για οιοδήποτε $P \in \psi^{-1}(U)$ έχουμε $\varphi_U(\psi_{U'}(P)) = P$, οπότε $\psi_{U'}^{-1}(U) \subseteq U_0'$. Εξ αυτού έπεται ότι η $\varphi|_{U_0} : U_0 \longrightarrow U_0'$ είναι μορφισμός σχεδόν συσχετικών ποικιλοτήτων. Κατ' αναλογίαν αποδεικνύεται ότι και η $\psi|_{U_0'} : U_0' \longrightarrow U_0$ είναι μορφισμός σχεδόν συσχετικών ποικιλοτήτων. Προφανώς,

$$\psi|_{U_0'} \circ \varphi|_{U_0} = \mathrm{Id}_{U_0}, \ \varphi|_{U_0} \circ \psi|_{U_0'} = \mathrm{Id}_{U_0'}.$$

Εξάλλου, κατά το (b) τής προτάσεως 2.4.26 και το πόρισμα 2.5.29,

$$\mathrm{Rat}(Z) \cong \mathrm{Rat}(U_0') \underset{\widehat{\varphi|_{U_0}}}{\xrightarrow{\cong}} \mathrm{Rat}(U_0) \cong \mathrm{Rat}(Y),$$

κι επομένως $\mathrm{Rat}(Y) \cong \mathrm{Rat}(Z)$. □

2.5.33 Σημείωση. Μεταβαίνοντας από την κατηγορία $\mathbf{k}$-$\mathfrak{QAVar}$ των σχεδόν συσχετικών ($\mathbf{k}$-)ποικιλοτήτων στην κατηγορία $\mathbf{k}$-$\mathfrak{QAVar}^{\varkappa.\varrho.\alpha.}$ με

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{QAVar}^{\varkappa.\varrho.\alpha.}) := \mathrm{Ob}(\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{QAVar})$$

και

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{QAVar}^{\varkappa.\varrho.\alpha.}}(Y, Z) := \left\{ \begin{array}{c} \text{κυριαρχούσες ρητές απεικονίσεις} \\ \varphi : Y \dashrightarrow Z \end{array} \right\},$$

οι $\mathbf{k}$-$\mathfrak{QAVar}^{\varkappa.\varrho.\alpha.}$-*ισομορφισμοί* (υπό την έννοια τού ορισμού 2.1.22) είναι ακριβώς οι *αμφίρρητες απεικονίσεις* μεταξύ σχεδόν συσχετικών ποικιλοτήτων. (Πρβλ. 2.5.15.)

2.5.34 Θεώρημα. (a) *Ο συναρτητής*

$$\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{QAVar}^{\varkappa.\varrho.\alpha.} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{πεπερασμένως παραγόμενες} \\ \text{επεκτάσεις τού σώματος } \mathbf{k} \end{array} \right\}$$

ο οριζόμενος μέσω των

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{QAVar}^{\varkappa.\varrho.\alpha.}) \ni Y \longmapsto \mathrm{Rat}(Y),$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{k}\text{-}\mathfrak{QAVar}^{\varkappa.\varrho.\alpha.}}(Y, Z) \ni \varphi \longmapsto \widehat{\varphi},$$

είναι ανταλλοίωτος και απολύτως πιστός.

(b) *Όταν το* $\mathbf{k}$ *είναι αλγεβρικώς κλειστό, ο εν λόγω συναρτητής ορίζει μια ανταλλοίωτη ισοδυναμία.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a) Ο ανωτέρω συναρτητής είναι εκ κατασκευής ανταλλοίωτος. Το ότι είναι και απολύτως πιστός έπεται από την πρόταση 2.5.31.

(b) Για την απόδειξη αρκεί να χρησιμοποιηθεί επιχειρηματολογία ανάλογη εκείνης που περιέχεται στα σχόλια τής σημειώσεως 2.5.15 (b). □

2.5.35 Πόρισμα. (Αλγεβρική ερμηνεία τής αμφίρρητης ισοδυναμίας) *Για οιεσδήποτε σχεδόν συσχετικές ποικιλότητες* Y, Z *οι κάτωθι συνθήκες είναι ισοδύναμες* :

(a) $Y \underset{\mathrm{bir}}{\cong} Z$.

(b) *Υπάρχουν μη κενά, κατά Zariski ανοικτά υποσύνολα* $U \subseteq Y$ *και* $U' \subseteq Z$ *με* $U \cong U'$.

(c) $\mathrm{Rat}(Y) \cong \mathrm{Rat}(Z)$ (ως $\mathbf{k}$-άλγεβρες).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Οι συνεπαγωγές (a)⇒(b) και (b)⇒(c) είναι άμεσα επακόλουθα τής προτάσεως 2.5.32, ενώ η συνεπαγωγή (c)⇒(a) έπεται από το (a) τού θεωρήματος 2.5.34 (λόγω τής απόλυτης πιστότητας τού ορισθέντος συναρτητή). □

Ασκήσεις

A-2-31. Έστω $T = (T_1, \ldots, T_n) : \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ μια συσχετική αλλαγή συντεταγμένων τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$.

(a) Εάν $P \in \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ και $Q := T(P)$, να αποδειχθεί ότι ο ομομορφισμός δακτυλίων (και $\mathbf{k}$-αλγεβρών) $\widehat{T}_P : \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},Q} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}},P}$ (τής προτάσεως 2.5.1) είναι ισομορφισμός.

(b) Εάν το $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ είναι μια συσχετική ποικιλότητα και $P \in V$, να αποδειχθεί ότι ο ισομορφισμός $\widehat{T}_P$ επάγει έναν ισομορφισμό $\widehat{T}_{V,P} : \mathcal{O}_{V^T,Q} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,P}$.

A-2-32. Έστω $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \supseteq V \xrightarrow{\varphi} W \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ μια πολυωνυμική απεικόνιση μεταξύ συσχετικών ποικιλοτήτων. Να αποδειχθεί ότι εάν η φ είναι ισομορφισμός (υπό την έννοια τού ορισμού 2.1.16) τότε η φ είναι ομοιομορφισμός (ως προς την τοπολογία Zariski) και οι ομομορφισμοί τοπικών δακτυλίων $\widehat{\varphi}_P : \mathcal{O}_{W,\varphi(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,P}$ ισομορφισμοί για κάθε σημείο $P \in V$. Εν συνεχεία, να αποδειχθεί οτι ισχύει και το αντίστροφο, υπό την προϋπόθεση ότι το $\mathbf{k}$ είναι αλγεβρικώς κλειστό.

A-2-33. Έστω $V = \mathbf{V}\left(\mathsf{X}^2 - \mathsf{Y}^3, \mathsf{Y}^2 - \mathsf{Z}^3\right) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$, με το $\mathbf{k}$ αλγεβρικώς κλειστό. Να αποδειχθεί ότι η

$$\varphi : \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \longrightarrow V, \;\; t \longmapsto \varphi(t) := (t^9, t^6, t^4),$$

παρότι δεν είναι ισομορφισμός συσχετικών ποικιλοτήτων, είναι αμφίρρητη απεικόνιση και επάγει έναν ισομορφισμό σχεδόν συσχετικών ποικιλοτήτων

$$\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\} \xrightarrow{\cong} V \smallsetminus \{(0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}})\},$$

ο οποίος έχει την

$$V \smallsetminus \{(0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}})\} \ni (a, b, c) \overset{\cong}{\longmapsto} \frac{a}{c^2} \in \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \smallsetminus \{0_{\mathbf{k}}\}$$

ως αντίστροφό του. (Πρβλ. ασκήσεις **A-1-54** και **A-2-9**.)

A-2-34. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $Y := \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \smallsetminus \{(0,0)\} \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ είναι μια σχεδόν συσχετική αλλά μη συσχετική ποικιλότητα. (*Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιηθεί ο ισομορφισμός $\mathcal{O}_Y(Y) \cong \mathbb{C}[\mathsf{T}_1, \mathsf{T}_2]$ και η πρόταση 2.5.25.)

A-2-35. Έστω U μια ανοικτή υποποικιλότητα μιας σχεδόν συσχετικής ποικιλότητας Y και έστω W μια κλειστή υποποικιλότητα τής U (υπό την έννοια τού 2.5.18 (a)). Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(a) Το $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}}|_Y\,(W)$ είναι μια κλειστή υποποικιλότητα τής Y.

(b) Η W είναι μια ανοικτή υποποικιλότητα τής $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}}}|_Y\,(W)$.

A-2-36. Έστω $\varphi : Y \longrightarrow Z$ ένας μορφισμός μεταξύ σχεδόν συσχετικών ποικιλοτήτων. Ως **γράφημα** τού φ ορίζεται το σύνολο

$$\mathrm{Gr}\,(\varphi) := \{\,(a,b) \in Y \times Z \mid\ b = \varphi\,(a)\}\,.$$

Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(a) Το $\mathrm{Gr}(\varphi)$ αποτελεί μια κλειστή υποποικιλότητα τής $Y \times Z$.

(b) Η απεικόνιση

$$\mathrm{pr}_Y|_{\mathrm{Gr}(\varphi)} : \mathrm{Gr}\,(\varphi) \ni (a,b) \longmapsto a \in Y$$

είναι ισομορφισμός.