ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο (i) Για έναν δακτύλιο R να αποδειχθεί η ισοδυναμία των ακολούθων συνθηκών:

(a) Σε κάθε μη κενό σύνολο ιδεωδών τού R υπάρχει (τουλάχιστον) ένα μεγιστοτικό στοιχείο (ως προς τον συνήθη εγκλεισμό).

(b) Κάθε ιδεώδες τού R είναι *πεπερασμένως παραγόμενο*, ήτοι μπορεί να παραχθεί από πεπερασμένου πλήθους στοιχεία τού R.

(c) Ο R πληροί τη λεγομένη *συνθήκη των ανιουσών αλυσίδων:* Κάθε «ανιούσα» (αριθμήσιμη) αλυσίδα ιδεωδών τού R

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \cdots$$

είναι *στάσιμη*, ήτοι υπάρχει κάποιος $k \in \mathbb{N}$ για τον οποίο ισχύει $I_n = I_k$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq k$. (Κάθε μη τετριμμένος 1-δακτύλιος R, ο οποίος πληροί μία (και, κατ' επέκτασιν, και τις τρεις) εκ των ανωτέρω συνθηκών, ονομάζεται **δακτύλιος τής Noether** ή **ναιτεριανός δακτύλιος**.)

(ii) Να αποδειχθεί λεπτομερώς ότι ο $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ είναι ναιτεριανός, αλλά όχι και Π.Κ.Ι.

(iii) Να δοθούν παραδείγματα μη ναιτεριανών δακτυλίων.

(iv) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί *το θεώρημα βάσεως τού Hilbert*.

ΘΕΜΑ 2ο (i) Να αποδειχθεί ότι κάθε ευκλείδεια περιοχή είναι Π.Κ.Ι. και να αναφερθεί (χωρίς απόδειξη) ένα τουλάχιστον παράδειγμα Π.Κ.Ι. που δεν είναι ευκλείδεια περιοχή.

(ii) Έστω R μια ακεραία περιοχή. Εάν υποθέσουμε ότι η R πληροί τη συνθήκη των αλυσίδων γνησίων διαιρετών, να αποδειχθεί ότι η R είναι περιοχή με παραγοντοποίηση.

ΘΕΜΑ 3ο Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί *το θεώρημα θέσεων μηδενισμού τού Hilbert*.

ΘΕΜΑ 4ο Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί *το λήμμα των* 3×3.

ΘΕΜΑ 5ο Έστω R ένας μεταθετικός 1-δακτύλιος. Να αποδειχθούν (με τη βοήθεια των καθολικών συνθηκών) τα εξής:

(i) Για οιουσδήποτε R-μοδίους U, V και W υφίσταται ο ακόλουθος ισομορφισμός R-μοδίων:

$$(U \otimes_R V) \otimes_R W \cong U \otimes_R (V \otimes_R W)\,.$$

(ii) Για οιεσδήποτε οικογένειες R-μοδίων $(U_i)_{i \in I}$ και $(V_j)_{j \in J}$ υφίσταται ο ακόλουθος ισομορφισμός R-μοδίων:

$$\left(\bigoplus_{i \in I} U_i\right) \otimes_R \left(\bigoplus_{j \in J} V_j\right) \cong \bigoplus_{(i,j) \in I \times J} (U_i \otimes_R V_j)\,.$$

ΘΕΜΑ 6ο Να αποδειχθούν λεπτομερώς τα ακόλουθα θεωρήματα:

(i) Κάθε ελεύθερος μόδιος είναι προβολικός.

(ii) Κάθε προβολικός μόδιος είναι ισόπεδος.

<u>ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ</u>

<u>ΘΕΜΑ 7ο</u> (i) Να αποδειχθεί ότι το $\mathbb{Z}_3[\mathsf{X}]/\left\langle \mathsf{X}^2+1\right\rangle$ είναι ένα σώμα με εννέα στοιχεία.

(ii) Να προσδιορισθεί το αντίστροφο στοιχείο τού $(\mathsf{X}+2)+\left\langle \mathsf{X}^2+1\right\rangle$ εντός τού $\mathbb{Z}_3[\mathsf{X}]/\left\langle \mathsf{X}^2+1\right\rangle$.

(iii) Να αποδειχθεί ότι το $\mathbb{Z}_5[\mathsf{X}]/\left\langle \mathsf{X}^2+1\right\rangle$ δεν είναι σώμα.

<u>ΘΕΜΑ 8ο</u> Έστω n ένας ακέραιος ≥ 1. Να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο

$$F(\mathsf{X}) := (\mathsf{X}-1)(\mathsf{X}-2)\cdots(\mathsf{X}-n)+1 \in \mathbb{Z}[\mathsf{X}]$$

είναι ανάγωγο υπεράνω τού $\mathbb{Z}$ *εάν και μόνον εάν* $n \neq 4$.

<u>ΘΕΜΑ 9ο</u> (i) Να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο $F := \mathsf{Y}^2+\mathsf{X}^2(\mathsf{X}-1)^2 \in \mathbb{R}[\mathsf{X},\mathsf{Y}]$ είναι ανάγωγο, αλλά η υπερεπιφάνεια $\mathbf{V}(F) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ δεν είναι ανάγωγο αλγεβρικό υποσύνολο τού συσχετικού χώρου $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

(ii) Να προσδιορισθούν οι ανάγωγες συνιστώσες τής υπερεπιφάνειας $\mathbf{V}(\mathsf{Y}^2-\mathsf{XY}-\mathsf{X}^2\mathsf{Y}+\mathsf{X}^3) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

<u>ΘΕΜΑ 10ο</u> (i) Έστω R μια ΠΜΠ και $\mathfrak{p} = \langle t \rangle$, $t \in R$, ένα κύριο, γνήσιο, πρώτο ιδεώδες. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει κανένα πρώτο ιδεώδες $\mathfrak{q}$ τής R, τέτοιο ώστε να ισχύει $\{0\} \subsetneqq \mathfrak{q} \subsetneqq \mathfrak{p}$.

(ii) Έστω n ένας ακέραιος ≥ 1 και έστω $V = \mathbf{V}(F)$ μια ανάγωγη υπερεπιφάνεια εντός τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ (όπου το $\mathbf{k}$ είναι ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα). Να αποδειχθεί (μέσω τού (i)) ότι δεν υπάρχει κανένα ανάγωγο αλγεβρικό υποσύνολο W τού $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $V \subsetneqq W \subsetneqq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$.

<u>ΘΕΜΑ 11ο</u> Θεωρώντας τό $\mathbb{Q}$ ως $\mathbb{Z}$-μόδιο να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) = \{0\}$.

(ii) Ο $\mathbb{Q}$ δεν είναι προβολικός. (*Υπόδειξη*: Να γίνει κατάλληλη χρήση τού (i) σε συνδυασμό με γνωστά θεωρητικά κριτήρια περί προβολικότητος.)

<u>ΘΕΜΑ 12ο</u> Υποτιθεμένου ότι η

$$0 \longrightarrow V' \xrightarrow{\ f\ } V \xrightarrow{\ g\ } V'' \longrightarrow 0$$

είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων με τους V' και V'' ισόπεδους, να αποδειχθεί ότι και ο V οφείλει να είναι ισόπεδος.

- **Να απαντηθούν το πολύ 3 θέματα από τα 1-6 και το πολύ 3 θέματα από τα 7-12.**
- **Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει μισή μονάδα.**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως οι σημειώσεις θα παραμείνουν κλειστές.**
- **Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.**
- **Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!