Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών **Θεωρία Δακτυλίων και Modules (Μ 222)**

Εξέταση Σεπτεμβρίου 2005 **Εξεταστής: Δημήτριος Νταής**

ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο (i) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *πρώτο θεώρημα ισομορφισμών δακτυλίων.*

(ii) Έστω $f : R \longrightarrow S$ ένας επιμορφισμός δακτυλίων και έστω I ένα ιδεώδες τού R, τέτοιο ώστε να ισχύει $I \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. Να αποδειχθεί ότι υφίσταται ο ακόλουθος ισομορφισμός πηλικοδακτυλίων: $R/I \cong S/f(I)$.

ΘΕΜΑ 2ο Να διατυπωθεί το *λήμμα τού Zorn* και να αποδειχθεί μέσω αυτού ότι κάθε ιδεώδες $I \subsetneqq R$ ενός μη τετριμμένου δακτυλίου R (με μοναδιαίο πολλαπλασιαστικό στοιχείο) περιέχεται σε κάποιο μεγιστοτικό ιδεώδες τού R.

ΘΕΜΑ 3ο (i) Να αποδειχθεί ότι ένας μεταθετικός 1-δακτύλιος είναι ακεραία περιοχή εάν και μόνον εάν το τετριμμένο ιδεώδες του είναι πρώτο.

(ii) Έστω R ένας μεταθετικός 1-δακτύλιος στον οποίο κάθε ιδεώδες $I \subsetneqq R$ είναι πρώτο. Να αποδειχθεί ότι ο R είναι σώμα.

ΘΕΜΑ 4ο Έστω R μια ακεραία περιοχή. Να αποδειχθεί η ισοδυναμία των ακολούθων συνθηκών:

(i) Η R είναι Π.Μ.Π.

(ii) Η R είναι περιοχή με παραγοντοποίηση και κάθε στοιχείο $q \in R \smallsetminus (R^{\times} \cup \{0\})$ είναι πρώτο εάν και μόνον εάν είναι ανάγωγο.

(iii) Κάθε $a \in R \smallsetminus (R^{\times} \cup \{0\})$ διαθέτει σύντροφο παριστώμενο ως γινόμενο πεπερασμένου πλήθους πρώτων στοιχείων τής R.

ΘΕΜΑ 5ο Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεώρημα βάσεως τού Hilbert.*

ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΘΕΜΑ 6ο Εάν ως I_p συμβολισθούν τα υποσύνολα

$$I_p := \{a + bi \in \mathbb{Z}[i] \ : \ p \mid a \text{ και } \ p \mid b\}, \ \ p \text{ περιττός πρώτος},$$

τού δακτυλίου $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C} \ | \ a, b \in \mathbb{Z}\}$ των ακεραίων τού Gauss, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Κάθε I_p είναι ιδεώδες τού $\mathbb{Z}[i]$.

(ii) Το I_3 είναι μεγιστοτικό ιδεώδες τού $\mathbb{Z}[i]$.

(iii) Εν αντιθέσει προς το I_3, το I_5 δεν είναι μεγιστοτικό ιδεώδες τού $\mathbb{Z}[i]$.

ΘΕΜΑ 7ο Έστω p ένας πρώτος αριθμός. Να αποδειχθεί η ισοδυναμία των ακολούθων συνθηκών:

(i) Ο p είναι ανάγωγο στοιχείο τού δακτυλίου $\mathbb{Z}[i]$ των ακεραίων τού Gauss.

(ii) $p \equiv 3 \pmod 4$.

(iii) Ο p δεν γράφεται υπό τη μορφή $p = a^2 + b^2$, όπου $a, b \in \mathbb{Z}$.

ΘΕΜΑ 8ο (i) Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος, τέτοιος ώστε $\mathbb{Z} \subseteq R \subseteq \mathbb{Q}$. Να αποδειχθεί ότι ο R είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών.

(ii) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $R := \{0\} \cup \left\{ \frac{a}{2^n} \;\middle|\; a \text{ περιττός ακέραιος και } n \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{Q}$ (ως προς τις συνήθεις πράξεις) είναι ένας δακτύλιος τού είδους που περιεγράφη στο (i), να προσδιορισθεί η πολλαπλασιαστική ομάδα $R^{\times}$ των αντιστρεψίμων στοιχείων του και να εξετασθεί για καθένα των στοιχείων 2 $(= \frac{1}{2^{-1}})$ και 6 $(= \frac{3}{2^{-1}})$ το κατά πόσον είναι ή δεν είναι πρώτο εντός τού δακτυλίου R.

ΘΕΜΑ 9ο (i) Να προσδιορισθεί το πολυώνυμο $f(\mathsf{X}) \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$ πέμπτου βαθμού, το οποίο στερείται σταθερού όρου και επαληθεύει την ισότητα: $f(\mathsf{X}) - f(\mathsf{X}-1) = \mathsf{X}^4$.

(ii) Βάσει τού (i) να αποδειχθεί ότι κάθε άθροισμα τής μορφής

$$\mathcal{S}_4^n := \sum_{j=1}^{n} j^4, \quad n \in \mathbb{N},$$

είναι ένα πολυώνυμο με (μόνη) μεταβλητή του τον n και με ρητούς συντελεστές. Ποιοι είναι αυτοί οι συντελεστές;

(iii) Για ποιες τιμές τού φυσικού αριθμού $n \geq 4$ είναι το πολυώνυμο $g(\mathsf{X}) = (\mathsf{X}+1)^n - \mathsf{X}^n - 1 \in \mathbb{Z}[\mathsf{X}]$ διαιρετό διά τού $h(\mathsf{X}) = \mathsf{X}^2 + \mathsf{X} + 1 \in \mathbb{Z}[\mathsf{X}]$;

ΘΕΜΑ 10ο Έστω $f(t) \in \mathbb{Q}[t]$. Εάν ο άρρητος αριθμός $a + b\sqrt{c}$ (όπου $a, b, c \in \mathbb{Q}$ και $\sqrt{c} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) είναι μια θέση μηδενισμού τού $f(t)$, να δειχθεί ότι το ίδιο ισχύει και για τον $a - b\sqrt{c}$, και μάλιστα ότι, εν προκειμένω,

$$\operatorname{mult}(f; a + b\sqrt{c}) = \operatorname{mult}(f; a - b\sqrt{c}).$$

- **Να απαντηθούν το πολύ 3 θέματα ανήκοντα σε μία εκ των δύο παρατιθέμενων κατηγοριών θεμάτων και το πολύ 2 θέματα ανήκοντα στην άλλη.**
- **Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει 2 μονάδες.**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως οι σημειώσεις θα παραμείνουν κλειστές.**
- **Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.**
- **Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!