Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών **Αλγεβρική Τοπολογία (Γ 21)**

Εαρινό Εξάμηνο 2006 **Διδάσκων: Δημήτριος Νταής**

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΚΑΤ' ΟΙΚΟΝ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο (i) Έστω X τυχών τοπολογικός χώρος και έστω Y υπόχωρος τού ευκλείδειου τοπολογικού χώρου $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Εάν οι $f, g : X \longrightarrow Y$ είναι δυο συνεχείς απεικονίσεις, τέτοιες ώστε οι εικόνες $f(x)$ και $g(x)$ τού x μέσω των f, g να είναι συνδέσιμες μέσω ενός ευθυγράμμου τμήματος κειμένου καθ' ολοκληρίαν *εντός τού* Y *για κάθε* $x \in X$, να αποδειχθεί (με κάθε λεπτομέρεια) ότι $f \simeq g$.

(ii) Εάν ο X είναι τυχών τοπολογικός χώρος, n ένας φυσικός αριθμός ≥ 2, και οι $f, g : X \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ δυο συνεχείς απεικονίσεις, τέτοιες ώστε να ισχύει $f(x) \neq -g(x)$, $\forall x \in X$, να αποδειχθεί ότι $f \simeq g$.

(iii) Εάν $X = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ και

$$Y = \mathbb{S}^1 \cup \bigcup_{\kappa=0}^{n-1} \left\{ te^{\frac{2\pi i k}{n}} + 2(1-t)e^{\frac{2\pi i k}{n}} \;\middle|\; t \in [0,1] \right\} \subset \mathbb{C},$$

όπου n ένας φυσικός αριθμός ≥ 1, να αποδειχθεί ότι $X \simeq Y$, παρότι $X \not\approx Y$.

(iv) Εάν το $X = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1,\ y = 0 \} \cup \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x = 0,\ -1 \leq y \leq 1 \}$ είναι το «σχήμα τού σταυρού» (εφοδιασμένο με τη συνήθη τοπολογία την επαγομένη από εκείνην τού ευκλειδείου επιπέδου $\mathbb{R}^2$) και το $Y = \mathbb{R}^2 \smallsetminus X$ το συμπλήρωμά του, να αποδειχθεί ότι $Y \simeq \mathbb{S}^1$.

ΘΕΜΑ 2ο (i) Έστω X ένας υπόχωρος τού $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Ο X καλείται **αστρόμορφος περί το** $a \in X$ όταν για κάθε $t \in [0,1]$ και για κάθε $x \in X$ το $(1-t)x + ta$ ανήκει στο X. Να αποδειχθεί ότι κάθε αστρόμορφος υπόχωρος τού $\mathbb{R}^n$ (περί ένα σημείο a) είναι συσταλτός.

(ii) (α) Εάν $\alpha, \beta, t \in \mathbb{R}$ με $\alpha, \beta > 0$ και $t \in [0,1]$, να αποδειχθεί ότι $\alpha t + \beta(1-t) > 0$.

(β) Εάν $\gamma, \delta, \varepsilon, t \in \mathbb{R}$ με $\gamma, \delta, \varepsilon > 0$ και $t \in [0,1]$, να αποδειχθεί ότι

$$\gamma t^2 + \delta t(1-t) + \varepsilon(1-t)^2 > 0$$

(γ) Έστω τυχών πίνακας $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Εάν ως $\lambda = \mathrm{trace}(\mathbf{A})$ συμβολισθεί το ίχνος του, ως $\mu = \det(\mathbf{A})$ η ορίζουσά του, να εκφρασθούν το ίχνος και η ορίζουσα τού πίνακα $(1-t)\mathbf{I} + t\mathbf{A}$ συναρτήσει των λ, μ και t, όπου $t \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{I}$ ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας.

(δ) Ταυτίζοντας το σύνολο $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ με τον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^4$ (εφοδιασμένον με τη συνήθη τοπολογία), να αποδειχθεί με τη βοήθεια των (i) και (ii) (α), (β), (γ) ότι ο υπόχωρός του

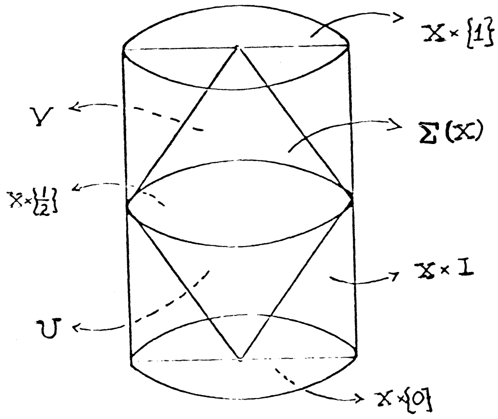
$$X = \{ \mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) |\ \det(\mathbf{A}) > 0 \ \text{ και } \ \mathrm{trace}(\mathbf{A}) > 0 \}$$

είναι συσταλτός.

ΘΕΜΑ 3ο Εάν ο X είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε ορίζουμε ως (μοναδιαίο) **κύλινδρο** υπεράνω τού X τον χώρο γινομένου $X \times [0,1]$, ως **κώνο** υπεράνω τού X τον πηλικόχωρο $C(X) := X \times [0,1]/X \times \{1\}$ (βλ. 2.10.9 και 2.10.10) και ως **ανάρτηση** $\Sigma(X)$ τού X τον πηλικόχωρο

$$\Sigma(X) := X \times [0,1] / \left(X \times \{0\}\right) \cup \left(\{\text{ένα σημείο}\} \times [0,1]\right) \cup \left(X \times \{1\}\right).$$

(Βλ. Σχήμα)



(i) Να αποδειχθεί ότι ο κώνος $C(X)$ είναι συσταλτός.

(ii) Θεωρώντας τή φυσική προβολή $\pi : X \times [0,1] \longrightarrow \Sigma(X)$ και τη φυσική ένθεση $i : X \hookrightarrow \Sigma(X)$ (όπου $i(x) := \pi(x, \frac{1}{2})$, $\forall x \in X$), και κάνοντας χρήση τού (i) και των συνόλων

$$U := \left\{ \pi(x,t) \in \Sigma(X) \middle| \ x \in X \ \text{ και } \ \tfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \right\},$$
$$V := \left\{ \pi(x,t) \in \Sigma(X) \middle| \ x \in X \ \text{ και } \ 0 \leq t \leq \tfrac{1}{2} \right\},$$

να αποδειχθούν οι ισομορφισμοί ομάδων

$$\widetilde{H}_q(X) \cong \widetilde{H}_{q+1}(\Sigma(X)), \ \ \forall q \in \mathbb{Z}.$$

(iii) Να αποδειχθεί ότι $\Sigma(\mathbb{S}^n) \approx \mathbb{S}^{n+1}$ για κάθε $n \geq 0$. [*Υπόδειξη*: Για την κατασκευή τού τύπου ενός τέτοιου είδους ομοιομορφισμού μεταξύ των $\Sigma(\mathbb{S}^n)$ και $\mathbb{S}^{n+1}$ είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν καταλλήλως οι ομοιομορφισμοί $p_\pm : \mathbb{D}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{D}^{n+1}_\pm$ οι παρεχόμενοι μέσω των ορθογωνίων προβολών, πρβλ. 2.5.3 (iv).]

(iv) Να προσδιορισθούν (μέχρις ισομορφισμού) οι ανηγμένες ομάδες ομολογίας $\widetilde{H}_q(\mathbb{S}^n)$ τής σφαίρας $\mathbb{S}^n$ κάνοντας χρήση *μόνον των* (ii) *και* (iii).

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u> (i) Έστω ένα μεταθετικό διάγραμμα αβελιανών ομάδων και ομομορφισμών αβελιανών ομάδων τής μορφής:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i"] \arrow[dd, "h"'] & & B \arrow[dl, "j"'] \arrow[dd, "k"] \\
& X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
C & & D
\end{tikzcd}$$

Εάν οι δυο διαγώνιοι είναι ακριβείς, δηλαδή $\mathrm{Im}(i) = \mathrm{Ker}(g)$ και $\mathrm{Im}(j) = \mathrm{Ker}(f)$, και -επιπροσθέτως- οι h και k είναι ισομορφισμοί, τότε οι ομομορφισμοί αβελιανών ομάδων

$$\varphi : A \oplus B \longrightarrow X, \ \ \psi : X \longrightarrow C \times D,$$

με

$$\varphi(\xi,\eta) := i(\xi) + j(\eta), \ \ \forall (\xi,\eta) \in A \oplus B, \ \ \psi\,(x) := (f(x), g(x))\,, \ \forall x \in X,$$

είναι ισομορφισμοί.

(ii) Έστω ότι ο X είναι ένας τοπολογικός χώρος και οι X_1, X_2 δυο ανοικτοί μη κενοί υπόχωροί του, τέτοιοι ώστε να ισχύει $X = X_1 \cup X_2$ και $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. (Αυτό σημαίνει ότι οι X_1 και X_2 είναι ταυτοχρόνως και κλειστοί.) Θεωρώντας για οιοδήποτε τοπολογικό ζεύγος (X, A) τις ενθέσεις

$$i_1 : (X_1, A_1) \longrightarrow (X, A), \quad i_2 : (X_2, A_2) \longrightarrow (X, A),$$

όπου $A_1 := A \cap X_1$ και $A_2 := A \cap X_2$, να αποδειχθεί (*μόνον* μέσω τού (i) και τού θεωρήματος τής εκτομής) ότι οι επαγόμενοι ομομορφισμοί

$$i_{j*,q} : H_q(X_j, A_j) \longrightarrow H_q(X, A), \;\; j = 1, 2,$$

είναι μονομορφισμοί και ότι οι ομομορφισμοί

$$\varphi_q := i_{1*,q} + i_{2*,q} : H_q(X_1, A_1) \oplus H_q(X_2, A_2) \longrightarrow H_q(X, A),$$

(όπου $\varphi_q(x_1, x_2) := i_{1*,q}(x_1) + i_{2*,q}(x_2)$) είναι ισομορφισμοί για κάθε $q \in \mathbb{Z}$.

ΘΕΜΑ 5ο Εάν η $f : \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, είναι μια συνεχής απεικόνιση, να αποδειχθεί ότι *είτε* $f(0) = 0$ *είτε* υπάρχει $x \in \mathbb{D}^n$ με $f(x) = \lambda x$ για κάποιον πραγματικό αριθμό $\lambda > 1$. [*Υπόδειξη*: Να γίνει κατάλληλη χρήση τού θεωρήματος τού σταθερού σημείου τού Brouwer.]

ΘΕΜΑ 6ο Εάν για $j = 1, 2$ οι $f_j : \mathbb{S}^{k_j} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ $(n \geq 1)$ είναι τοπολογικές εμφυτεύσεις σφαιρών εντός τής $\mathbb{S}^n$ με $0 \leq k_1, k_2 \leq n-1$, να υπολογισθούν οι ανηγμένες ομάδες ομολογίας τού συμπληρώματος

$$\mathbb{S}^n \smallsetminus (f_1(\mathbb{S}^{k_1}) \cup f_2(\mathbb{S}^{k_2}))$$

στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(i) Όταν η τομή $f_1(\mathbb{S}^{k_1}) \cap f_2(\mathbb{S}^{k_2})$ αποτελείται από ένα και μόνον σημείο.

(ii) Όταν η τομή $f_1(\mathbb{S}^{k_1}) \cap f_2(\mathbb{S}^{k_2})$ είναι κενή.

ΘΕΜΑ 7ο Έστω $\mathbb{K}$ ένας εκ των $\mathbb{R}$-διανυσματικών χώρων $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ή $\mathbb{H}$ και $d = \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{K}$ (ήτοι $d = 1, 2, 4$, αντιστοίχως). Για κάθε $n \geq 1$ ταυτίζουμε τον προβολικό χώρο $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{K}}$ με τον υπόχωρο $\{ [x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} | \; x_n = 0\}$ τού $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. (Πρβλ. 2.12.1, 2.13.5 (iii).) Εν συνεχεία, ορίζουμε τα σύνολα

$$A := \left\{ \mathbf{x} = [x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} | \; \|\mathbf{x}\| = 1 \;\text{ και }\; |x_n| \leq \tfrac{1}{2} \right\},$$
$$B := \left\{ \mathbf{x} = [x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} | \; \|\mathbf{x}\| = 1 \;\text{ και }\; |x_n| \geq \tfrac{1}{2} \right\}.$$

Να αποδειχθούν τα ακόλουθα: (i) Το A είναι ομοτοπικώς ισοδύναμο με τον προβολικό χώρο $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{K}}$. [*Υπόδειξη*: Η ζητούμενη ομοτοπία είναι τής μορφής $G : A \times [0,1] \longrightarrow A$,

$$G(\mathbf{x}, t) = G_t(\mathbf{x}) = [\lambda_t x_0 : \lambda_t x_1 : \ldots : \lambda_t x_{n-1} : t x_n],$$

για κάθε $\mathbf{x} = [x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \in A$, όπου λ_t κατάλληλο στοιχείο τού $\mathbb{K}$.]

(ii) Το B είναι ομοιομορφικό με τη μπάλα

$$\mathbb{D}^{dn} := \left\{ (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; \sum_{j=0}^{n-1} \left|\xi_j\right|^2 \leq 1 \right\}$$

και το $A \cap B$ με τη σφαίρα $\mathbb{S}^{dn-1} \subset \mathbb{D}^{dn}$. [*Υπόδειξη*: Αρκεί να θεωρηθεί ο ομοιομορφισμός

$$\Phi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \smallsetminus \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

ο οριζόμενος μέσω τού τύπου $\Phi([x_0 : \ldots : x_n] = (\frac{x_0}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n})$ και να δειχθεί ότι $\Phi(B) = \mathbb{D}^{dn}$ και $\Phi(A \cap B) = \mathbb{S}^{dn-1}$. Σημειωτέον ότι η σύνθεση $\pi := G_1 \circ \Phi^{-1} : \mathbb{S}^{dn-1} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{K}}$ δίδεται από τον τύπο $\pi(\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}) = [\xi_0 : \ldots : \xi_{n-1}]$.]

(iii) Εάν *είτε* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ και $d = 2$ *είτε* $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ και $d = 4$, τότε

$$H_q(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } q = jd \text{ και } 0 \leq j \leq n, \\ \{0\}, & \text{στην αντίθετη περίπτωση.} \end{cases}$$

Η ένθεση $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{K}} \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ επάγει έναν ισομορφισμό $H_q(\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{K}}) \cong H_q(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})$ όταν $q \leq dn$.

(iv) Εάν $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ και $d = 1$, τότε η ένθεση $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ επάγει έναν ισομορφισμό $H_q(\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}) \cong H_q(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})$ όταν $q < n-1$, ενώ για $q = n$ υφίσταται και μια ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}_n(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow \widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}) \longrightarrow 0.$$

[*Υπόδειξη*: Τα (iii) και (iv) έπονται από τα (i), (ii), και τη μακρά ακριβή ακολουθία των Mayer και Vietoris για τις ανηγμένες ομολογικές ομάδες.]

- **Να απαντηθούν το πολύ 5 θέματα.**
- **Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει 2 μονάδες**.
- **Οι προτεινόμενες λύσεις εκ μέρους των εξεταζομένων φοιτητών είναι παραδοτέες το αργότερο μέχρι την Τρίτη 13 Ιουνίου 2006.**
- **Θα εκτιμηθεί ιδιαιτέρως η κατ' ιδίαν εργασία για την απάντηση των ως άνω δοθέντων θεμάτων.**
- **Η τελική βαθμολογία των εξεταζομένων δίδεται από τον τύπο max{A, $\frac{1}{2}$(A+B)}, όπου A είναι ο βαθμός τού τελικού διαγωνίσματος και B ο βαθμός τής κατ' οίκον εργασίας.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών **Αλγεβρική Τοπολογία (Ομολογία, Γ 21)**

Τελική Εξέταση, Εαρινό Εξάμηνο 2006 **Εξεταστής: Δημήτριος Νταής**

<u>ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ</u>

<u>ΘΕΜΑ 1ο</u> Εάν η $0 \longrightarrow \mathcal{K}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{L}_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathcal{M}_\bullet \longrightarrow 0$ είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων, να αποδειχθεί η ύπαρξη *συνδετικών ομομορφισμών* $\partial_n : H_n(\mathcal{M}_\bullet) \longrightarrow H_{n-1}(\mathcal{K}_\bullet)$, ούτως ώστε η *μακρά ακολουθία* αβελιανών ομάδων και ομομορφισμών αβελιανών ομάδων

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(\mathcal{K}_\bullet) \xrightarrow{f_{*,n}} H_n(\mathcal{L}_\bullet) \xrightarrow{g_{*,n}} H_n(\mathcal{M}_\bullet) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(\mathcal{K}_\bullet) \xrightarrow{f_{*,n-1}} \cdots$$

να είναι ακριβής.

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u> Υποτιθεμένου ότι τα $(K_\bullet, d_\bullet^{K_\bullet}), (L_\bullet, d_\bullet^{L_\bullet})$ είναι δυο ελεύθερα αλυσωτά σύμπλοκα και η $f_\bullet : \mathcal{K}_\bullet \longrightarrow \mathcal{L}_\bullet$ ένας αλυσωτός μετασχηματισμός, να αποδειχθεί λεπτομερώς ότι η $f_\bullet$ είναι αλυσωτή ισοδυναμία *εάν και μόνον εάν* η $H_n(f_\bullet) = f_{*,n}$ είναι ισομορφισμός ομάδων για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u> Να διατυπωθεί *το θεώρημα τού ομοτοπικώς αναλλοιώτου* των ομάδων ιδιάζουσας ομολογίας και να δοθεί μια όσο το δυνατόν πιο λεπτομερής περιγραφή των βημάτων τής αποδείξεώς του.

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u> Να διατυπωθεί *το θεώρημα τής εκτομής* και να δοθεί μια όσο το δυνατόν πιο λεπτομερής περιγραφή των βημάτων τής αποδείξεώς του.

<u>ΘΕΜΑ 5ο</u> Να προσδιορισθούν επακριβώς οι ανηγμένες ιδιάζουσες ομάδες ομολογίας: (i) οιουδήποτε μονοσημειακού τοπολογικού χώρου, (ii) τής n-διάστατης μοναδιαίας μπάλας $\mathbb{D}^n$ και (iii) τής n-διάστατης μοναδιαίας σφαίρας $\mathbb{S}^n$ (κάνοντας χρήση τού (ii) και των ομολογικών ομάδων $H_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$).

<u>ΘΕΜΑ 6ο</u> (i) Να αποδειχθεί ότι η $\mathbb{S}^n$ δεν είναι συσταλτή για κανέναν $n \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Να αποδειχθεί ότι η $\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ δεν διαθέτει ουδεμία συνεχή επέκταση επί τού $\mathbb{D}^{n+1}$.

(iii) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί λεπτομερώς *το θεώρημα σταθερού σημείου τού Brouwer.*

<u>ΘΕΜΑ 7ο</u> (i) Έστω ένα μεταθετικό διάγραμμα αβελιανών ομάδων και ομομορφισμών τής μορφής:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i"] \arrow[dd, "h"'] & & B \arrow[dl, "j"'] \arrow[dd, "k"] \\
& X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
C & & D
\end{tikzcd}$$

Εάν οι δυο διαγώνιοι είναι ακριβείς και -επιπροσθέτως- οι h και k είναι ισομορφισμοί, να αποδειχθεί ότι οι ομομορφισμοί $\varphi : A \oplus B \longrightarrow X,\ \psi : X \longrightarrow C \times D$, με

$$\varphi(\xi, \eta) := i(\xi) + j(\eta),\ \ \forall (\xi, \eta) \in A \oplus B, \quad \psi(x) := (f(x), g(x)),\ \forall x \in X,$$

είναι ισομορφισμοί.

(ii) Εάν οι X και Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι, και οι $i^X : X \hookrightarrow X + Y, i^Y : Y \hookrightarrow X + Y$ οι ενθέσεις εντός τού τοπολογικού αθροίσματος $X + Y$ των X και Y, να αποδειχθεί με τη βοήθεια τού (i) ότι οι

$$i_{*,q}^X \oplus i_{*,q}^Y : H_q(X) \oplus H_q(Y) \longrightarrow H_q(X + Y)$$

είναι ισομορφισμοί για κάθε $q \in \mathbb{Z}$.

(iii) Εάν $n \in \mathbb{N}_0$, να αποδειχθεί ότι η $\mathbb{S}^n \ni (x_0, \ldots, x_n) \longmapsto (-x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{S}^n$ έχει βαθμό -1 (κάνοντας χρήση τού (ii), όταν $n = 0$, και -εν συνεχεία- μαθηματικής επαγωγής επί τού n).

(iv) Με τη βοήθεια τού (iii) να αποδειχθεί ότι η αντιποδική απεικόνιση

$$\alpha : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n, \ \ \alpha(x_0, \ldots, x_n) := (-x_0, -x_1, \ldots, -x_n)$$

έχει βαθμό $(-1)^{n+1}$.

(v) Εάν ο n είναι ένας άρτιος μη αρνητικός ακέραιος αριθμός, να αποδειχθεί μέσω τού (iv) ότι για κάθε συνεχή απεικόνιση $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ (μεταξύ ισοδιαστάτων μοναδιαίων σφαιρών) υπάρχει κάποιο $x \in \mathbb{S}^n$, τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x) \in \{\pm x\}$.

(vi) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί *το θεώρημα τής τριχωτής μπάλας*.

ΘΕΜΑ 8ο Εάν $k, n \in \mathbb{N}_0$ και $k \leq n$, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε τοπολογική εμφύτευση $f : \mathbb{D}^n \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ έχουμε

$$\widetilde{H}_q(\mathbb{S}^n \smallsetminus f(\mathbb{D}^n)) \cong \{0\}, \ \ \forall q \in \mathbb{Z}.$$

(ii) Εάν $k < n$, τότε για κάθε τοπολογική εμφύτευση $f : \mathbb{S}^k \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ έχουμε

$$\widetilde{H}_q(\mathbb{S}^n \smallsetminus f(\mathbb{S}^k)) \cong \widetilde{H}_q(\mathbb{S}^{n-k-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } q = n-k-1, \\ \{0\}, & \text{όταν } q \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{n-k-1\}. \end{cases}$$

ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΘΕΜΑ 9ο Εάν $n \in \mathbb{N}_0$, να προσδιορισθούν (βάσει μιας μεθόδου που διαφέρει από εκείνην που εφαρμόζεται στο (iii) τού θέματος **5**) οι ανηγμένες ομάδες ιδιάζουσας ομολογίας τής n-διάστατης μοναδιαίας σφαίρας $\mathbb{S}^n$ (μέχρις ισομορφισμού), αποδεικνύοντας κατά σειράν τα ακόλουθα:

(i) $\widetilde{H}_q(\mathbb{S}^0) \cong \mathbb{Z}$ όταν $q = 0$ και $\cong \{0\}$ όταν $q \neq 0$.

(ii) Η $\mathbb{S}^n$ είναι ένας δρομοσυνεκτικός τοπολογικός χώρος για κάθε $n \geq 1$ (οπότε $\widetilde{H}_0(\mathbb{S}^n) \cong \{0\}$) .

(iii) Εάν τα x, y είναι δυο σημεία επί τής $\mathbb{S}^n$ με $x \neq y$, τότε $\mathbb{S}^n \smallsetminus \{x\} \approx \mathbb{R}^n$ και για $n \geq 1$, $\mathbb{S}^n \smallsetminus \{x, y\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$.

(iv) $\widetilde{H}_q(\mathbb{S}^n) \cong \widetilde{H}_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ για κάθε $n \geq 1$. [*Υπόδειξη*: Να γίνει χρήση τής μακράς ακριβούς ακολουθίας των Mayer και Vietoris (που αφορά στις ανηγμένες ομάδες ιδιάζουσας ομολογίας) για το ανοικτό κάλυμμα $\{\mathbb{S}^n \smallsetminus \{x\}, \mathbb{S}^n \smallsetminus \{y\}\}$ τής $\mathbb{S}^n$, όπου x, y είναι δυο σημεία επί τής $\mathbb{S}^n$ με $x \neq y$, σε συνδυασμό με το (iii).]

(v) Οι ομάδες $\widetilde{H}_q(\mathbb{S}^n)$ είναι προσδιορίσιμες (μέχρις ισομορφισμού) μέσω μαθηματικής επαγωγής επί τού n, σε συνδυασμό με τα (i) και (iv). [*Διευκρίνιση*: Αν και το (ii) δεν θα χρειασθεί στον εν λόγω προσδιορισμό (μέσω επαγωγής), αποτελεί αφεαυτού ένα σύντομο, επιρόσθετο επιχείρημα για το γιατί οι μηδενοστές ανηγμένες ομάδες ιδιάζουσας ομολογίας τής $\mathbb{S}^n$ είναι τετριμμένες όταν $n \geq 1$.]

ΘΕΜΑ 10ο (i) Να αποδειχθεί ότι για οιονδήποτε (μη κενό) συσταλτό υπόχωρο A ενός τοπολογικού χώρου X ισχύει

$$\widetilde{H}_q(X) \cong H_q(X, A), \ \ \forall q \in \mathbb{Z}.$$

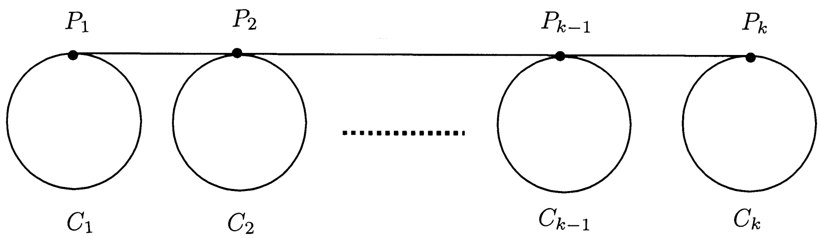
(ii) Έστω U ένα ανοικτό σύνολο ενός τοπολογικού χώρου X το οποίο περιέχεται σε έναν υπόχωρο A τού X. Εάν υπάρχει ανοικτό υποσύνολο V τού X με $\overline{V} \subseteq U$, τέτοιο ώστε η φυσική ένθεση τοπολογικών ζευγών

$$i : (X \smallsetminus U, A \smallsetminus U) \hookrightarrow (X \smallsetminus V, A \smallsetminus V)$$

να αποτελεί ομοτοπική ισοδυναμία, τότε

$$H_q(X,A) \cong H_q(X\smallsetminus U, A\smallsetminus U), \ \ \forall q \in \mathbb{Z}.$$

(iii) Κάνοντας κατάλληλη χρήση των (i) και (ii) να προσδιορισθούν (μέχρις ισομορφισμού) οι ομάδες ιδιάζουσας ομολογίας τού τοπολογικού υπόχωρου X τού $\mathbb{R}^2$ τού αποτελούμενου από την ένωση $k \geq 2$ (ανά δύο ξένων μεταξύ τους) κύκλων $C_1, C_2, \ldots, C_k$ με ένα (κλειστό) ευθύγραμμο τμήμα A, το οποίο έχει ως αρχικό σημείο του το P_1, ως πέρας του το P_k, και εφάπτεται σε καθέναν εκ των $C_1, C_2, \ldots, C_k$ κατά τέτοιον τρόπο, ώστε $A \cap C_j = \{P_j\}$, για κάθε $j \in \{1, \ldots, k\}$. (Βλ. το σχήμα που ακολουθεί.)



<u>ΘΕΜΑ 11ο</u> Εάν $n \in \mathbb{N}_0$ και εάν οι $f, g : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ είναι δυο συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ ισοδιαστάτων σφαιρών, τέτοιες ώστε να ισχύει $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{S}^n$, να αποδειχθεί ότι

$$\deg(f) + (-1)^n \deg(g) = 0.$$

<u>ΘΕΜΑ 12ο</u> (i) Να προσδιορισθούν (μέχρις ισομορφισμού) οι ανηγμένες ομάδες ιδιάζουσας ομολογίας τού $\mathbb{R}^n \smallsetminus e_r$, $0 \leq r < n$, όπου ο e_r είναι ένας υπόχωρος τού $\mathbb{R}^n$ ομοιομορφικός τής μοναδιαίας μπάλας $\mathbb{D}^r$.

(ii) Να προσδιορισθούν (μέχρις ισομορφισμού) οι ανηγμένες ομάδες ιδιάζουσας ομολογίας τού $\mathbb{R}^n \smallsetminus s_r$, $0 \leq r < n$, όπου ο s_r είναι ένας υπόχωρος τού $\mathbb{R}^n$ ομοιομορφικός τής μοναδιαίας σφαίρας $\mathbb{S}^r$.

- **Να απαντηθούν το πολύ 3 θέματα από τα 1-8 και το πολύ 2 θέματα από τα 9-12.**
- **Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει 2 μονάδες.**
- **Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν. Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!