Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών **Αλγεβρική Τοπολογία (Ομολογία, Γ 21)**

Τελική Εξέταση, Εαρινό Εξάμηνο 2005 **Εξεταστής: Δημήτριος Νταής**

<u>ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ</u>

<u>ΘΕΜΑ 1ο</u> (i) Πότε δυο μορφισμοί $f_\bullet, g_\bullet : \mathcal{M}_\bullet \longrightarrow \mathcal{M}'_\bullet$ μεταξύ δυο αλυσωτών συμπλόκων $\mathcal{M}_\bullet$ και $\mathcal{M}'_\bullet$ ονομάζονται *αλυσωτώς ομότοποι*; Πότε δυο αλυσωτά σύμπλοκα ονομάζονται *ομοτοπικώς ισοδύναμα*;

(ii) Να αποδειχθεί η συνεπαγωγή: $f_\bullet \simeq g_\bullet \Longrightarrow H_n(f_\bullet) = H_n(g_\bullet)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Να αποδειχθεί ότι η ομοτοπία αλυσωτών συμπλόκων αποτελεί σχέση ισοδυναμίας.

(iv) Να αποδειχθεί ότι ομοτοπικώς ισοδύναμα αλυσωτά σύμπλοκα διαθέτουν ισόμορφες ομάδες ομολογίας.

(v) Ισχύει στο (ii) και η αντίστροφη συνεπαγωγή; (Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.)

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u> Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί *το λήμμα τού φιδιού*.

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u> (i) Να αποδειχθεί ότι κάθε R-μόδιος M (όπου R μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο) διαθέτει έναν ελεύθερο κερματισμό.

(ii) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί λεπτομερώς το «θεώρημα συγκρίσεως» (ή «θεμελιώδες λήμμα») τής Ομολογικής Άλγεβρας.

(iii) Βάσει τού (ii) να αποδειχθεί ότι οιοιδήποτε προβολικοί κερματισμοί ενός R-μοδίου είναι ομοτοπικώς ισοδύναμοι.

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u> Να ορισθεί η ιδιάζουσα ομολογία ως συναρτητής και να αποδειχθεί λεπτομερώς ότι πληροί το αξίωμα τού «ομοτοπικώς αναλλοιώτου».

<u>ΘΕΜΑ 5ο</u> (i) Να αποδειχθεί ότι η σφαιρα $\mathbb{S}^n$ δεν είναι συσταλτή για κανέναν $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Να αποδειχθεί ότι η ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ δεν διαθέτει ουδεμία επέκταση επί τού $\mathbb{D}^{n+1}$.

(iii) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί λεπτομερώς το «θεώρημα σταθερού σημείου» τού Brouwer.

<u>ΘΕΜΑ 6ο</u> Να περιγραφεί λεπτομερώς ο συσχετισμός μεταξύ τής πρώτης ομάδας ομοτοπίας και τής πρώτης ομάδας ιδιάζουσας ομολογίας ενός δρομοσυνεκτικού τοπολογικού χώρου (συνοδευόμενος από την πλήρη απόδειξη τού προκύπτοντος ισομορφισμού ομάδων).

<u>ΘΕΜΑ 7ο</u> Να αποδειχθούν τα κατωτέρω θεωρήματα:

(i) Έστω $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ μια συνεχής απεικόνιση, η οποία *διατηρεί* τα αντιποδικά σημεία, πράγμα που σημαίνει ότι $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$ για κάθε σημείο $\mathbf{x}$ τής $\mathbb{S}^n$. Τότε η f έχει ως βαθμό της έναν περιττό αριθμό.

(ii) Εάν μια συνεχής απεικόνιση $f : \mathbb{S}^m \longrightarrow \mathbb{S}^n$ απεικονίζει τα αντιποδικά σημεία σε αντιποδικά σημεία, τότε $m \leq n$.

(iii) Το *θεώρημα των Borsuk και Ulam* (κάνοντας χρήση τού (ii)).

<u>ΘΕΜΑ 8ο</u> Να περιγραφεί λεπτομερώς ο συσχετισμός μεταξύ ιδιάζουσας και μονοπλεκτικής ομολογίας (με συντελεστές ειλημμένους από το $\mathbb{Z}$), συνοδευόμενος από την πλήρη απόδειξη τού προκύπτοντος ισομορφισμού ομάδων.

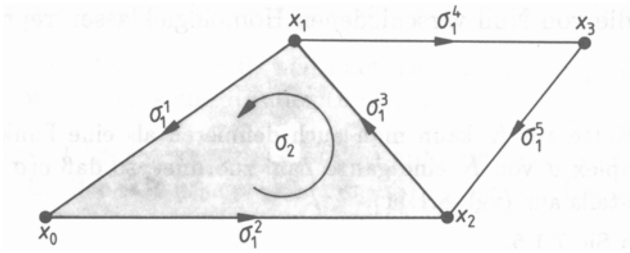
ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΘΕΜΑ 9ο Έστω m ένας φυσικός αριθμός ≥ 4. Γράφοντας τον m ως γινόμενο $m = kl$, όπου οι k και l είναι φυσικοί αριθμοί ≥ 2, ο $k\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ αποτελεί έναν $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-μόδιο.

(i) Να προσδιορισθεί ένας (κατά φυσικό τρόπο κατασκευαζόμενος) προβολικός κερματισμός τού $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-μοδίου $k\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ και να εκφρασθούν μέσω αυτού οι $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-μόδιοι $\mathrm{Tor}_j^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(k\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, N)$ για οιονδήποτε $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-μόδιο N και οιονδήποτε μη αρνητικό ακέραιο αριθμό j.

(ii) Κάνοντας χρήση τού (i) να υπολογισθούν επακριβώς (μέχρις ισομορφισμού) οι $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-μόδιοι $\mathrm{Tor}_j^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ και οι $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$-μόδιοι $\mathrm{Tor}_j^{\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ για οιονδήποτε $j \in \mathbb{N}_0$.

ΘΕΜΑ 10ο Έστω K το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα που δείχνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Ποιες είναι οι ομάδες $H_q^{\mathrm{simp}}(K;\mathbb{Z})$ μονοπλεκτικής ομολογίας του (με συντελεστές ειλημμένους από το $\mathbb{Z}$);

ΘΕΜΑ 11ο Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο πολλαπλασιαστικό στοιχείο.

(i) Ποιοι είναι οι $H_q^{\mathrm{sing}}(\mathbb{S}^n; R)$ και $\widetilde{H}_q^{\mathrm{sing}}(\mathbb{S}^n; R)$ (χωρίς απόδειξη) όταν $q \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}_0$;

(ii) Να αποδειχθεί ότι $H_q^{\mathrm{sing}}(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}; R) \cong H_q^{\mathrm{sing}}(\mathbb{D}^n, \mathbb{D}^n \smallsetminus \{\mathbf{0}\}; R)$.

(iii) Να υπολογισθούν οι $H_q^{\mathrm{sing}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \smallsetminus \{\mathbf{0}\}; R)$.

(iv) Εάν $m, n \in \mathbb{N}_0$ και $m \neq n$, να αποδειχθεί μέσω τής (iii) ότι ο $\mathbb{R}^m$ δεν είναι ομοιομορφικός με τον $\mathbb{R}^n$.

ΘΕΜΑ 12ο Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο πολλαπλασιαστικό στοιχείο.

(i) Ποιοι είναι οι $H_q^{\mathrm{sing}}(\mathbb{S}^n; R)$ και $\widetilde{H}_q^{\mathrm{sing}}(\mathbb{S}^n; R)$ (με απόδειξη) όταν $q \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}_0$;

(ii) Υποτιθεμένου ότι $m, n \in \mathbb{N}_0$, να υπολογισθούν οι $H_q^{\mathrm{sing}}(\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n; R)$ για $R = \mathbb{Z}$ και $R = \mathbb{Z}_k$ $(k \geq 2)$ κάνοντας χρήση τού τοπολογικού θεωρήματος τού Künneth.

- **Να απαντηθούν το πολύ 2 θέματα από τα 1-8 και το πολύ 2 θέματα από τα 9-12.**
- **Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει μία μονάδα.**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως οι σημειώσεις θα παραμείνουν κλειστές.**
- **Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν. Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!