ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΚΥΠΡΟΥ

ΜΑΣ 225 - ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

20 Δεκεμβρίου 2002

(Χειμερινό εξάμηνο 2002-2003)

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ	
ΑΡ. ΦΟΙΤΗΤΙΚΗΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΟΣ	

ΚΑΝΟΝΕΣ ΔΙΕΞΑΓΩΓΗΣ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΣ

Τα θέματα που δίνονται είναι εν συνόλω **12** και υποδιαιρούνται σε δύο κατηγορίες: σε *θεωρητικά θέματα* και σε *θέματα σχετιζόμενα με τις εφαρμογές*. Οι φοιτητές/φοιτήτριες καλούνται να απαντήσουν το πολύ σε **6** θέματα, *υπό τον όρο ότι τα προς απάντησιν επιλεγόμενα θέματα τα οποία ανήκουν αποκλειστικώς σε μία εκ των δύο κατηγοριών δεν υπερβαίνουν τα* **3**. Κάθε ορθώς απαντημένο θέμα (με ολοκληρωμένη αποδεικτική επιχειρηματολογία) βαθμολογείται με **10** μονάδες και η λήψη τού βαθμού «άριστα» (στην προκειμένη τελική εξέταση) επιτυγχάνεται με τη συγκέντρωση **60** μονάδων.

Υποσημειώσεις: (α) Όπως έχει ήδη διευκρινισθεί από τις πρώτες παραδόσεις τού μαθήματος, ο βαθμός τής τελικής εξετάσεως αντιστοιχεί στο 60% τού τελικού (συνολικού) βαθμού ενός εκάστου εξεταζομένου.
(β) Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.
(γ) Η χρήση *πολύ* δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).
(δ) Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα με ουδέτερο στοιχείο της το e. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) $(g^m = e, \text{για κάποιον}\, m \in \mathbb{Z}) \Longleftrightarrow \mathrm{ord}(g)\,|m$.

(ii) $\mathrm{ord}(g) = \mathrm{ord}\big(g^{-1}\big)\,, \forall g \in G$.

(iii) $\mathrm{ord}\big(h^{-1}gh\big) = \mathrm{ord}(g)\,, \forall (g,h) \in G^2$.

(iv) $\mathrm{ord}(gh) = \mathrm{ord}(hg)\,, \forall (g,h) \in G^2$.

(v) Εάν κάθε στοιχείο τής G έχει τάξη το πολύ 2, τότε η G είναι αβελιανή.

ΘΕΜΑ 2ο (i) Να διατυπωθεί το *πρώτο θεώρημα ισομορφισμών ομάδων.*

(ii) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το 2ο και το 3ο *θεώρημα ισομορφισμών ομάδων*.

ΘΕΜΑ 3ο Να αποδειχθεί (με πλήρη αιτιολόγηση) ότι οι εναλλάσσουσες ομάδες $\mathfrak{A}_n,\ n \geq 5$, είναι απλές.

ΘΕΜΑ 4ο (i) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί *το θεώρημα τού Cauchy* (το οποίο αφορά στις πεπερασμένες ομάδες).

(ii) Εάν ο p είναι ένας περιττός πρώτος αριθμός και η G μια ομάδα τάξεως $2p$, να αποδειχθεί ότι η G είναι ή κυκλική ή διεδρική.

(iii) Εάν ο p είναι ένας πρώτος αριθμός και η G μια ομάδα τάξεως p^2, να αποδειχθεί ότι η G είναι ή κυκλική ή ισόμορφη τής $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

ΘΕΜΑ 5ο Να διατυπωθούν τα τρία *θεωρήματα τού Sylow* και να δοθεί *πλήρης απόδειξη* και (τουλάχιστον μία) *εφαρμογή* ενός εξ αυτών.

ΘΕΜΑ 6ο Να ταξινομηθούν (με πλήρη θεωρητική αιτιολόγηση) «μέχρις ισομορφισμού» όλες οι πεπερασμένες ομάδες τάξεως 8.

ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΘΕΜΑ 7ο (i) Εάν η $(G, \cdot)$ είναι μια αβελιανή ομάδα και $(g,h) \in G \times G$ με

$$\mathrm{ord}\,(g) = m \in \mathbb{N}, \ \ \mathrm{ord}\,(h) = n \in \mathbb{N},$$

να αποδειχθεί η αμφίπλευρη συνεπαγωγή:

$$\mathrm{ord}\,(gh) = mn \Longleftrightarrow \text{μκδ}\,(m,n) = 1.$$

(ii) Εάν η $(G, \cdot)$ είναι μια αβελιανή ομάδα με ουδέτερο στοιχείο της το e και $(g,h) \in G \times G$ με

$$\mathrm{ord}\,(g) = m \in \mathbb{N}, \ \ \mathrm{ord}\,(h) = n \in \mathbb{N},$$

να αποδειχθεί ότι

(a) υπάρχει ένα $a \in G$, ούτως ώστε να ισχύει

$$\mathrm{ord}\,(a) = \text{εκπ}(m,n).$$

(b) Εάν $\mathrm{ord}(x) \leq m, \forall x \in G \smallsetminus \{g\}$, τότε $\mathrm{ord}\,(y)|\,m$ και $y^m = e, \forall y \in G$.

ΘΕΜΑ 8ο (i) Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν απλές ομάδες τάξεως 148.

(ii) Πόσα στοιχεία τάξεως 7 διαθέτει μια απλή ομάδα τάξεως 168;

ΘΕΜΑ 9ο (i) Να αποδειχθεί η ύπαρξη ισομορφισμού:

$$\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}_n) \cong (\mathbb{Z}_n)^{\times}\,, \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Εάν η G είναι μια πεπερασμένη ομάδα τάξεως $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί ότι

$$|\mathrm{Aut}\,(G)| \;\mid\; (n-1)!$$

(iii) Να αποδειχθεί ότι

$$\varphi\,(n) \mid \; (n-1)!$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου με φ συμβολίζουμε τη συνάρτηση τού Euler.

ΘΕΜΑ 10ο (i) Να γραφούν διεξοδικώς τα έξι στοιχεία τής συμμετρικής ομάδας $\mathfrak{S}_3$ και να καταρτισθεί ο πολλαπλασιαστικός της κατάλογος.

(ii) Ας υποθέσουμε ότι έχουμε προμηθευθεί (αρκούντως πολλά) ισομήκη ξυλαράκια, καθένα των οποίων είναι (εξ ολοκλήρου) ή άσπρο ή μαύρο ή κόκκινο ή κίτρινο. Να προσδιορισθεί το πλήθος των *ουσιωδώς διαφορετικών* τρόπων σχηματισμού ενός ισοπλεύρου τριγώνου όταν για την κατασκευή του χρησιμοποιούνται ξυλαράκια των ως άνω διαθέσιμων χρωματισμών, υπό την προϋπόθεση ότι η χρησιμοποίηση ξυλαρακίων τού ιδίου χρώματος για τον σχηματισμό περισσοτέρων τής μιας των πλευρών του είναι επιτρεπτή. (Διευκρίνιση: Υπάρχουν συνολικώς $4^3 = 64$ διαφορετικοί τρόποι σχηματισμού τού ισοπλεύρου τριγώνου, αφού καθεμιά των πλευρών του έχει οιοδήποτε από τα διαθέσιμα χρώματα. Το ζητούμενο πλήθος των *ουσιωδώς διαφορετικών* τρόπων σχηματισμού του προκύπτει, ως εκ τούτου, ύστερα από καταμέτρηση των τροχιών ως προς τη φυσική δράση τής ομάδας $G \cong \mathfrak{S}_3$ των συμμετριών του επί τού συνόλου X των προαναφερθέντων 64 ισοπλεύρων τριγώνων.)

(iii) Να επιλυθεί το ίδιο πρόβλημα, αλλά -αυτήν τη φορά- υπό την προϋπόθεση ότι η χρησιμοποίηση ξυλαρακίων τού ιδίου χρώματος για τον σχηματισμό περισσοτέρων τής μιας των πλευρών του *δεν* είναι επιτρεπτή.

ΘΕΜΑ 11ο Έστω G μια ομάδα και έστω $H \sqsubseteq Z\,(G)$. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) $H \trianglelefteq G$.

(ii) Εάν η G/H είναι κυκλική, τότε η G είναι αβελιανή.

(iii) Εάν η G δεν είναι αβελιανή και -ταυτοχρόνως- ισχύει $|G| = p^3$, όπου p ένας πρώτος αριθμός, τότε $|Z\,(G)| = p$.

ΘΕΜΑ 12ο Έστω ότι οι p και q είναι δυο πρώτοι αριθμοί με $p < q$, και ότι η G είναι μια ομάδα τάξεως pq. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Υπάρχει ακριβώς μία q-Sylow υποομάδα τής G.

(ii) Εάν $q \neq 1 + kp$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, τότε η G είναι κυκλική.

(iii) Εάν $q = 1 + kp$, για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$, τότε η G δεν είναι κατ' ανάγκην κυκλική. (Παράθεση καταλλήλου αντιπαραδείγματος αρκεί.)