ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΚΥΠΡΟΥ

ΜΑΣ 121- ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

27 Μαΐου 2002

(Εαρινό εξάμηνο 2002)

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ	
ΑΡ. ΦΟΙΤΗΤΙΚΗΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΟΣ	

ΚΑΝΟΝΕΣ ΔΙΕΞΑΓΩΓΗΣ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΣ

Τα θέματα που δίνονται είναι εν συνόλω **25** και υποδιαιρούνται σε δύο κατηγορίες: σε *θεωρητικά θέματα* και σε *θέματα σχετιζόμενα με τις εφαρμογές*. Οι φοιτητές/φοιτήτριες καλούνται να απαντήσουν το πολύ σε **8** θέματα, *υπό τον όρο ότι τα προς απάντησιν επιλεγόμενα θέματα τα οποία ανήκουν αποκλειστικώς σε μία εκ των δύο κατηγοριών δεν υπερβαίνουν τα* **6**. Κάθε ορθώς απαντημένο θέμα (με ολοκληρωμένη αποδεικτική επιχειρηματολογία) βαθμολογείται με **5** μονάδες και η λήψη τού βαθμού «άριστα» (στην προκειμένη τελική εξέταση) επιτυγχάνεται με τη συγκέντρωση **40** μονάδων.

Υποσημειώσεις: (α) Όπως έχει ήδη διευκρινισθεί από τις πρώτες παραδόσεις τού μαθήματος, ο βαθμός τής τελικής εξετάσεως αντιστοιχεί στο 40% τού τελικού (συνολικού) βαθμού ενός εκάστου εξεταζομένου.
(β) Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.
(γ) Η χρήση *πολύ* δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).
(δ) Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο (i) Εάν θεωρηθεί ως γνωστό το ότι το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών έχει την ίδια ισχύ με το διάστημα $(0,1)$, να αποδειχθεί ότι το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο.

(ii) Να αποδειχθεί ότι το υποκείμενο σύνολο V οιουδήποτε γραμμικού χώρου οριζομένου υπεράνω ενός το πολύ αριθμησίμου σώματος K και διεθέτοντος μια το πολύ αριθμήσιμη βάση οφείλει να είναι το πολύ αριθμήσιμο.

(iii) Βάσει των (i) και (ii) να συναχθεί ότι κάθε βάση τού $\mathbb{R}$ ως $\mathbb{Q}$-γραμμικού χώρου είναι υπεραριθμήσιμη.

ΘΕΜΑ 2ο Να ορισθεί η *απεικόνιση προσημάνσεως*

$$\mathrm{sgn}:(\mathfrak{S}_n,\circ)\longrightarrow(\{1,-1\},\cdot),$$

μέσω «παραβατικών ζευγών» και να δοθεί ο «κλειστός» τύπος για τον υπολογισμό της. Κατόπιν τούτου, κάνοντας χρήση τού εν λόγω τύπου να αποδειχθεί ότι είναι η sgn αποτελεί ομομορφισμό μεταξύ των ως άνω αναγραφομένων ομάδων.

ΘΕΜΑ 3ο (i) Να διατυπωθεί το *πρώτο θεώρημα ισομορφισμών ομάδων*.

(ii) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *δεύτερο θεώρημα ισομορφισμών ομάδων* (κάνοντας χρήση τού (i)).

ΘΕΜΑ 4ο (i) Να δοθούν οι ορισμοί τού *άνω φράγματος*, τού *μεγιστοτικού στοιχείου* και τής *αλυσίδας* ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου.

(ii) Να διατυπωθεί το λήμμα τού Zorn.

(iii) Με τη βοήθεια τού λήμματος τού Zorn να αποδειχθεί ότι κάθε γραμμικός χώρος V υπεράνω ενός σώματος K διαθέτει *βάση*.

ΘΕΜΑ 5ο Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεώρημα ανταλλαγής τού Steinitz.*

ΘΕΜΑ 6ο Έστω K ένα σώμα και έστω $f:V\longrightarrow W$ ένας ομομορφισμός K-γραμμικών χώρων πεπερασμένης διαστάσεως. Εάν υποθέσουμε ότι $\dim_K(V)=n$ και $\dim_K(W)=m$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει μια βάση $\mathcal{B}$ τού V και μια βάση $\mathcal{D}$ τού W, ούτως ώστε να ισχύει

$$M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(f)=\left(\begin{array}{c|c}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r\times(n-r)}\\ \hline \mathbf{0}_{(m-r)\times r} & \mathbf{0}_{(m-r)\times(n-r)}\end{array}\right),$$

όπου ο $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(f)\in\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ είναι ο πίνακας που εκπροσωπεί τον ομομορφισμό f ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{D}$, και $r:=\mathrm{rank}(f)$ η βαθμίδα τού f.

ΘΕΜΑ 7ο (i) Έστω K ένα σώμα και έστω $A\in\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$, όπου $n\in\mathbb{N}$. Να ορισθεί ο *προσαρτημένος* (ή *συμπληρωματικός*) πίνακας $\mathrm{adj}(A)$ τού A και να αποδειχθεί η ισότητα:

$$\mathrm{adj}(A)\cdot A=\det(A)\cdot\mathbf{I}_n.$$

(ii) Χρησιμοποιώντας τήν ανωτέρω ισότητα να αποδειχθεί *ο τύπος αναπτύγματος κατά Laplace* τής $\det(A)$.

ΘΕΜΑ 8ο Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεμελιώδες θεώρημα διαγωνιοποιήσεως ενδομορφισμών* ενός οιουδήποτε K-γραμμικού χώρου πεπερασμένης διαστάσεως.

ΘΕΜΑ 9ο (i) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί *το θεώρημα των Cayley και Hamilton*.

(ii) Βάσει τού θεωρήματος των Cayley και Hamilton να προσδιορισθεί (και να αποδειχθεί) κλειστός τύπος υπολογισμού τού αντιστρόφου πίνακα ενός πίνακα $A \in \mathrm{GL}_n(K)$, όπου K ένα σώμα, συναρτήσει καταλλήλων δυνάμεων τού A.

ΘΕΜΑ 10ο (i) Πώς ορίζεται το *ελάχιστο πολυώνυμο* ενός πίνακα $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$; Είναι αυτό μονοσημάντως ορισμένο και γιατί; Ποια η σχέση του με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο; (Παραθέστε πλήρη αιτιολόγηση.)

(ii) Ποια είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη την οποία οφείλει να πληροί το ελάχιστο πολυώνυμο ενός πίνακα $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ προκειμένου ο A να είναι διαγωνιοποιήσιμος; (Μόνον διατύπωση.)

ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΘΕΜΑ 11ο Έστω ότι οι G_1 και G_2 είναι δυο ομάδες. Εάν $H_1 \lhd G_1$ και $H_2 \lhd G_2$, και εάν υπάρχει ένας ισομορφισμός ομάδων $f : G_1 \longrightarrow G_2$ με $f(H_1) = H_2$, να αποδειχθεί ότι

$$G_1/H_1 \cong G_2/H_2.$$

ΘΕΜΑ 12ο Για ποιές τιμές τού $k \in \mathbb{Z}$ είναι το πολυώνυμο

$$f_k(t) = t^5 - kt + 1 \in \mathbb{Z}[t]$$

ανάγωγο εντός τού $\mathbb{Q}[t]$;

ΘΕΜΑ 13ο Να αποδειχθεί ότι το σύνολο

$$V := \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} i \cdot x_i = 0 \right\}, \;\; n \geq 2,$$

είναι ένας γραμμικός υπόχωρος τού $\mathbb{R}^n$ και να προσδιορισθεί μια βάση του.

ΘΕΜΑ 14ο Έστω K ένα σώμα και έστω V ένας εννεαδιάστατος K-γραμμικός χώρος. Εάν οι U και W είναι γραμμικοί υπόχωροι τού V και $\dim_K(U) = 4$, $\dim_K(W) = 5$, να βρεθούν οι δυνατές τιμές τις οποίες μπορεί να προσλάβει η διάσταση $\dim_K(U \cap W)$.

ΘΕΜΑ 15ο Έστω $\mathbb{R}[t]$ ο $\mathbb{R}$-γραμμικός χώρος των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και έστω $\mathbb{R}[t]_{\leq k}$ ο υπόχωρος τού $\mathbb{R}[t]$ ο αποτελούμενος από όλα τα πολυώνυμα τού $\mathbb{R}[t]$ βαθμού $\leq k$. Θεωρούμε τον ενδομορφισμό τού $\mathbb{R}[t]$

$$D : \mathbb{R}[t] \longrightarrow \mathbb{R}[t], \quad f(t) \longmapsto D(f(t)),$$

τον επαγόμενο μέσω τής (επιτύπου) παραγωγίσεως.

(i) Να αποδειχθεί ότι τόσο το σύνολο $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ όσο και το σύνολο $\mathcal{B}' = \{1, 1+t, 1+t^2, 1+t^3\}$ αποτελούν βάσεις τού $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$.

(ii) Ποιος είναι ο πυρήνας και ποια η εικόνα τού περιορισμού

$$D_{|\mathbb{R}[t]_{\leq 3}} : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}[t]$$

τού ενδομορφισμού D επί τού $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$; Ποιες είναι οι διαστάσεις τους;

(iii) Να προσδιορισθεί ο πίνακας $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\left(D_{|\mathbb{R}[t]_{\leq 3}}\right)$ τού $D_{|\mathbb{R}[t]_{\leq 3}}$ ως προς την $\mathcal{B}$ (εάν αυτή θεωρηθεί ως *διατεταγμένη* βάση).

(iv) Να υπολογισθεί ο πίνακας $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}\left(D_{|\mathbb{R}[t]_{\leq 3}}\right)$ τού $D_{|\mathbb{R}[t]_{\leq 3}}$ ως προς την $\mathcal{B}'$ (εάν αυτή θεωρηθεί ως *διατεταγμένη* βάση).

ΘΕΜΑ 16ο Έστω $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Z})$, όπου $n \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί η ισοδυναμία

$$\left[A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \;\; \textit{και} \;\; A^{-1} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Z})\right] \Longleftrightarrow \det(A) \in \{\pm 1\}.$$

ΘΕΜΑ 17ο Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη λύσεων το ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4, \\ \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 18ο Να υπολογισθεί η ορίζουσα τού πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

και να αποδειχθεί ότι η τιμή της είναι *ανεξάρτητη* των a, b, c, d.

ΘΕΜΑ 19ο Εάν οι αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, όπου $n \in \mathbb{N}$, ανήκουν στο $\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$, να υπολογισθεί η ορίζουσα τού πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1+\lambda_1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+\lambda_2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda_3 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+\lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

ΘΕΜΑ 20ο Με τη βοήθεια τού κανόνα τού Cramer να επιλυθεί το ακόλουθο γραμμικό σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5, \\ \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1, \\ \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8, \\ \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 21ο Έστω $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ο ενδομορφισμός τού $\mathbb{R}$-γραμμικού χώρου $\mathbb{R}^3$ ο οποίος ορίζεται μέσω τού τύπου

$$f(x,y,z) = (-y+z, -3x-2y+3z, -2x-2y+3z).$$

Να προσδιορισθούν οι ιδιοτιμές τού f, καθώς και βάσεις των αντιστοίχων ιδιοχώρων. Εν συνεχεία, να αποδειχθεί η διαγωνιοποιησιμότητα τού f και να προσδιορισθεί τόσον ο διαγώνιος πίνακας $D \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ όσον και ο πίνακας $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, για τους οποίους ισχύει η ισότητα

$$D = S \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot S^{-1},$$

όπου $\mathcal{B}$ η συνήθης βάση τού $\mathbb{R}^3$.

ΘΕΜΑ 22ο Εάν $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ και $A^{n+1} = 0$ για κάποιον φυσικό αριθμό $n \geq 2$, να αποδειχθεί η ισότητα

$$A^n = 0.$$

(Υπόδειξη: Να γίνει χρήση τού θεωρήματος των Cayley και Hamilton.)

ΘΕΜΑ 23ο Έστω A ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a & b \\ 0 & 3 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Πότε είναι ο A διαγωνιοποιήσιμος;

ΘΕΜΑ 24ο Δοθέντος ενός διαγωνιοποιήσιμου πίνακα $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί η ύπαρξη ενός πίνακα $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, τέτοιου ώστε να ισχύει $B^3 = A$.

ΘΕΜΑ 25ο Δείξτε ότι εάν ένας πίνακας $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ δεν έχει άλλες ιδιοτιμές πέραν τού 0, τότε ο A είναι κατ' ανάγκην μηδενοδύναμος. (Υπόδειξη: Να γίνει χρήση τού Θεμελιώδους Θεωρήματος τής Άλγεβρας **και** τού θεωρήματος των Cayley και Hamilton).