ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΚΥΠΡΟΥ

ΜΑΣ 221 – ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

24 Μαΐου 2003

(Εαρινό εξάμηνο 2003)

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ	
ΑΡ. ΦΟΙΤΗΤΙΚΗΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΟΣ	

ΚΑΝΟΝΕΣ ΔΙΕΞΑΓΩΓΗΣ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΣ

Τα θέματα που δίνονται είναι εν συνόλω **15** και υποδιαιρούνται σε δύο κατηγορίες: σε *θεωρητικά θέματα* και σε *θέματα σχετιζόμενα με τις εφαρμογές*. Οι φοιτητές/φοιτήτριες καλούνται να απαντήσουν το πολύ σε **6** θέματα, *υπό τον όρο ότι τα προς απάντησιν επιλεγόμενα θέματα τα οποία ανήκουν αποκλειστικώς σε μία εκ των δύο κατηγοριών δεν υπερβαίνουν τα* **3**. Κάθε ορθώς απαντημένο θέμα (με ολοκληρωμένη αποδεικτική επιχειρηματολογία) βαθμολογείται με **10** μονάδες και η λήψη τού βαθμού «άριστα» (στην προκειμένη τελική εξέταση) επιτυγχάνεται με τη συγκέντρωση **60** μονάδων.

Υποσημειώσεις: (α) Όπως έχει ήδη διευκρινισθεί από τις πρώτες παραδόσεις τού μαθήματος, ο βαθμός τής τελικής εξετάσεως αντιστοιχεί στο 60% τού τελικού (συνολικού) βαθμού ενός εκάστου εξεταζομένου.
(β) Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.
(γ) Η χρήση *πολύ* δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).
(δ) Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

<u>ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ</u>

<u>ΘΕΜΑ 1ο</u> Εάν το K είναι ένα σώμα, να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *δεύτερο και το τρίτο θεώρημα ισομορφισμών* διανυσματικών χώρων οριζομένων υπεράνω τού K.

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u> Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεμελιώδες θεώρημα τριγωνικοποιήσεως ενδομορφισμών* οιουδήποτε K-διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διαστάσεως.

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u> Έστω K ένα σώμα και έστω V ένας K-διανυσματικός χώρος διαστάσεως $\dim_K(V) = n < \infty$. Εάν $f \in \mathrm{End}_K(V)$ και οι $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ είναι οι ιδιοτιμές τού f, να αποδειχθεί η ισοδυναμία των ακολούθων συνθηκών:

(i) Ο f είναι *διαγωνιοποιήσιμος*.

(ii) Εάν το

$$\chi_f(t) = \prod_{j=1}^{k} (\lambda_j - t)^{m_j}$$

είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο τού f, τότε

$$\dim_K(\mathrm{Eig}(f; \lambda_j)) = m_j, \quad \forall j \in \{1, \ldots, k\}.$$

(iii) $V = \mathrm{Eig}(f; \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Eig}(f; \lambda_k)$.

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u> (i) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί *το θεώρημα των Cayley και Hamilton*.

(ii) Βάσει τού θεωρήματος των Cayley και Hamilton να προσδιορισθεί (και να αποδειχθεί) κλειστός τύπος υπολογισμού τού αντιστρόφου πίνακα ενός πίνακα $A \in \mathbf{GL}_n(K)$, όπου K ένα σώμα, συναρτήσει καταλλήλων δυνάμεων τού A.

<u>ΘΕΜΑ 5ο</u> Έστω $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ένας ευκλείδειος (και αντιστοίχως, ένας μοναδιακός) $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος διαστάσεως $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n < \infty$ (όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ και -αντιστοίχως- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Εάν ο W είναι ένας υπόχωρος τού V με $\dim_{\mathbb{K}}(W) = m$ και η $\{w_1, \ldots, w_m\}$ μια ορθόtακτη βάση τού W, να αποδειχθεί ότι αυτή μπορεί να συμπληρωθεί, ούτως ώστε να σχηματισθεί μια ορθότακτη βάση $\{w_1, \ldots, w_m, w_{m+1}, \ldots, w_n\}$ τού V.

<u>ΘΕΜΑ 6ο</u> Έστω $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ένας ευκλείδειος διανυσματικός χώρος διαστάσεως $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n < \infty$, και, για δοθέντα διανύσματα $v_1, \ldots, v_m \in V$, όπου $m \leq n$, έστω

$$G(v_1, \ldots, v_m) := \det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_m \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_m, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_m, v_m \rangle \end{pmatrix}$$

η *ορίζουσα Gram* των $v_1, \ldots, v_m$.

(i) Να αποδειχθεί ότι $G(v_1, \ldots, v_m) \geq 0$ και ότι

$$G(v_1, \ldots, v_m) > 0 \Longleftrightarrow (\text{τα } v_1, \ldots, v_m \text{ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα}).$$

(ii) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί η *ανισοϊσότητα Hadamard* για την $G(v_1, \ldots, v_m)$. Πότε ισχύει αυτή ως ισότητα;

ΘΕΜΑ 7ο Έστω $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ένας ευκλείδειος (και αντιστοίχως, ένας μοναδιακός) $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διαστάσεως (όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ και -αντιστοίχως- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Εάν $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) ο f είναι αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός εάν και μόνον εάν ο πίνακας $\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ είναι συμμετρικός (και αντιστοίχως, ερμιτιανός) για οιαδήποτε ορθότακτη βάση $\mathcal{B}$ τού V.

(ii) Εάν ο f είναι αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός, τότε όλες του οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές.

(iii) Εάν ο f είναι αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός, τότε υπάρχει ορθότακτη βάση τού V αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα τού f.

(iv) Εάν ο f είναι ένας αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός με τα $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ως διακεκριμένες ιδιοτιμές του, τότε

$$V = \mathrm{Eig}\,(f; \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Eig}\,(f; \lambda_k)\,.$$

ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΘΕΜΑ 8ο Έστω $\mathbb{R}[t]$ ο $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και έστω $\mathbb{R}\,[t]_{\leq k}$ ο υπόχωρος τού $\mathbb{R}[t]$ ο αποτελούμενος από όλα τα πολυώνυμα τού $\mathbb{R}[t]$ βαθμού $\leq k$. Θεωρούμε τον ενδομορφισμό τού $\mathbb{R}[t]$

$$D : \mathbb{R}[t] \longrightarrow \mathbb{R}[t], \quad f(t) \longmapsto D(f(t)),$$

τον επαγόμενο μέσω τής (επιτύπου) παραγωγίσεως.

(i) Να αποδειχθεί ότι τόσο το σύνολο $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ όσο και το σύνολο $\mathcal{B}' = \{1, 1+t, 1+t^2, 1+t^3\}$ αποτελούν βάσεις τού $\mathbb{R}\,[t]_{\leq 3}$.

(ii) Ποιος είναι ο πυρήνας και ποια η εικόνα τού περιορισμού

$$D_{|\mathbb{R}[t]_{\leq 3}} : \mathbb{R}\,[t]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}\,[t]$$

τού ενδομορφισμού D επί τού $\mathbb{R}\,[t]_{\leq 3}$; Ποιες είναι οι διαστάσεις τους;

(iii) Να προσδιορισθεί ο πίνακας $\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(D_{|\mathbb{R}[t]_{\leq 3}})$ τού $D_{|\mathbb{R}[t]_{\leq 3}}$ ως προς την $\mathcal{B}$ (εάν αυτή θεωρηθεί ως *διατεταγμένη* βάση).

(iv) Να υπολογισθεί ο πίνακας $\mathbf{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(D_{|\mathbb{R}[t]_{\leq 3}})$ τού $D_{|\mathbb{R}[t]_{\leq 3}}$ ως προς την $\mathcal{B}'$ (εάν αυτή θεωρηθεί ως *διατεταγμένη* βάση).

ΘΕΜΑ 9ο Έστω $V = \mathbb{R}\,[t]_{\leq 2}$ με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle .,. \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle f(t), g(t) \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

(i) Να υπολογισθεί η τιμή τής στάθμης (= νόρμας) $\|f(t)\|$ τού πολυωνύμου $f(t) = 2t + 1$.

(ii) Να βρεθεί μια βάση τού $\{2t + 1\}^{\perp}$.

(iii) Εάν $W := \mathrm{Lin}(\{t, t^2\})$, να προσδιορισθούν οι ορθές προβολές τού πολυωνύμου $g(t) = 1-t+t^2$ επί των W και $W^{\perp}$.

ΘΕΜΑ 10ο Έστω A ο πίνακας

$$A := \begin{pmatrix} 3 & a & b \\ 0 & 3 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Πότε είναι ο A διαγωνιοποιήσιμος;

ΘΕΜΑ 11ο Δίνεται ο ομομορφισμός δ.χ. $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ο οριζόμενος μέσω τού τύπου:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) := (2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 6x_4, x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4), \quad \forall (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4.$$

(i) Να βρεθεί μια ορθότακτη βάση τού $\mathrm{Ker}(f)$ ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο τού $\mathbb{R}^4$.

(ii) Ποια είναι η διάσταση τής εικόνας $\mathrm{Im}(f)$ και ποια η γεωμετρική της ερμηνεία;

ΘΕΜΑ 12ο Δείξτε ότι εάν ένας πίνακας $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ δεν έχει άλλες ιδιοτιμές πέραν τού 0, τότε ο A είναι κατ' ανάγκην μηδενοδύναμος.

ΘΕΜΑ 13ο Ας υποθέσουμε ότι δίδονται δύο πινακες $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ και $B \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(\mathbb{R})$, όπου $n, m \in \mathbb{N}$. Ποιο είναι το ελάχιστο πολυώνυμο $\psi_C(t)$ τού πίνακα

$$C := \begin{pmatrix} A & \mathbf{0}_{n\times m} \\ \mathbf{0}_{m\times n} & B \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{(n+m)\times(n+m)}(\mathbb{R})$$

εάν τα ελάχιστα πολυώνυμα $\psi_A(t)$ και $\psi_B(t)$ των πινάκων A και B θεωρηθούν ως γνωστά;

ΘΕΜΑ 14ο Έστω f ο ενδομορφισμός

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \;\; f(x, y) := (4x + y, -x + 2y).$$

Να αποδειχθεί ότι ο f δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος, αλλ' εντούτοις είναι τριγωνικοποιήσιμος. Εν συνεχεία, να προσδιορισθεί μια βάση τού $\mathbb{R}^2$ ως προς την οποία ο πίνακας τού f είναι τριγωνικός.

ΘΕΜΑ 15ο Έστω $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ένας ευκλείδειος δ.χ. διαστάσεως $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n < \infty$. Εάν ο $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ είναι ένας αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός με τα $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ως ιδιοτιμές του, τότε, ως γνωστόν, καθεμιά των ιδιοτιμών $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ είναι ένας πραγματικός αριθμός. Να αποδειχθεί ότι

$$\min\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \leq \langle f(v), v\rangle \leq \max\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$$

για κάθε διάνυσμα $v \in V$ για το οποίο ισχύει $\|v\| = 1$.