ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΚΥΠΡΟΥ

ΜΑΣ 121- ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΠΡΩΤΗ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

9 Μαρτίου 2002

(Εαρινό εξάμηνο 2002)

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ	
ΑΡ. ΦΟΙΤΗΤΙΚΗΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΟΣ	

ΚΑΝΟΝΕΣ ΔΙΕΞΑΓΩΓΗΣ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΣ

Τα θέματα που δίνονται είναι εν συνόλω **14** και υποδιαιρούνται σε δύο κατηγορίες: σε *θεωρητικά θέματα* και σε *θέματα σχετιζόμενα με τις εφαρμογές*. Οι φοιτητές/φοιτήτριες καλούνται να απαντήσουν το πολύ σε **5** εξ αυτών. Κάθε ορθώς απαντημένο θέμα (με ολοκληρωμένη αποδεικτική επιχειρηματολογία) βαθμολογείται με **5** μονάδες. Όσοι εκ των φοιτητών/φοιτητριών προτίθενται να απαντήσουν σε ακριβώς **5** θέματα *οφείλουν* να συμπεριλάβουν σε αυτά ένα θέμα από την πρώτη *και* ένα θέμα από τη δεύτερη κατηγορία. Πληρουμένων αυτών των προϋποθέσεων η λήψη τού βαθμού «άριστα» (στην προκειμένη ενδιάμεση εξέταση) επιτυγχάνεται με τη συγκέντρωση **25** μονάδων.

Υποσημειώσεις: (α) Όπως έχει ήδη διευκρινισθεί από τις πρώτες παραδόσεις τού μαθήματος, ο βαθμός τής πρώτης ενδιαμέσου εξετάσεως αντιστοιχεί στο 25% τού τελικού (συνολικού) βαθμού ενός εκάστου εξεταζομένου.
(β) Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.
(γ) Η χρήση *πολύ* δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).
(δ) Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

<u>ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ</u>

<u>ΘΕΜΑ 1ο</u> Εάν θεωρηθεί ως γνωστό το ότι το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών έχει την ίδια ισχύ με το διάστημα $(0,1)$, να αποδειχθεί ότι το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο.

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u> Να ορισθεί η *απεικόνιση προσημάνσεως*

$$\mathrm{sgn} : (\mathfrak{S}_n, \circ) \longrightarrow (\{1,-1\}, \cdot),$$

μέσω «παραβατικών ζευγών» και να δοθεί ο «κλειστός» τύπος για τον υπολογισμό της. Κατόπιν τούτου, κάνοντας χρήση τού εν λόγω τύπου να αποδειχθεί ότι είναι η sgn αποτελεί ομομορφισμό μεταξύ των ως άνω αναγραφομένων ομάδων.

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u> Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *πρώτο θεώρημα ισομορφισμών ομάδων*.

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u> Έστω R ένας δακτύλιος με ουδέτερο προσθετικό στοιχείο του το 0_R, μοναδιαίο πολλαπλασιαστικό στοιχείο του το 1_R και χαρακτηριστική $\mathrm{char}(R) = n$. Να αποδειχθεί η ισοδυναμία

$$n > 0 \Longleftrightarrow n = \min\{m \in \mathbb{N} \mid m \cdot 1_R = 0_R\}.$$

<u>ΘΕΜΑ 5ο</u> Κάνοντας χρήση τού Θεμελιώδους Θεωρήματος τής Άλγεβρας να προσδιορισθεί η μορφή όλων των αναγώγων πολυωνύμων (μιας μεταβλητής) με πραγματικούς συντελεστές.

<u>ΘΕΜΑ 6ο</u> (i) Να δοθούν οι ορισμοί τού *άνω φράγματος*, τού *μεγιστοτικού στοιχείου* και τής *αλυσίδας* ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου $(A, \leq)$.

(ii) Να διατυπωθεί το λήμμα τού Zorn.

(iii) Με τη βοήθεια τού λήμματος τού Zorn να αποδειχθεί ότι κάθε γραμμικός χώρος V υπεράνω ενός σώματος K διαθέτει *βάση*.

<u>ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ</u>

<u>ΘΕΜΑ 7ο</u> Έστω $A = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ και έστω “ $\sim$ ” η διμελής σχέση επί τού A η οποία ορίζεται ως εξής:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} x_1 y_1 \left(x_2^2 - y_2^2\right) = x_2 y_2 \left(x_1^2 - y_1^2\right).$$

Να αποδειχθεί ότι η “$\sim$” αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας επί τού A και ότι, εάν το (x_0, y_0) είναι ένα παγιωμένο στοιχείο τού A, τότε

$$(x, y) \sim (x_0, y_0) \Longleftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0} \text{ ή } \frac{y}{x} = -\frac{x_0}{y_0}.$$

Επίσης, να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία τής κλάσεως ισοδυναμίας τού διατεταγμένου ζεύγους $(2,1)$ (ως προς την “$\sim$”).

<u>ΘΕΜΑ 8ο</u> Έστω $(A, \leq)$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Εάν υποθέσουμε ότι κάθε μη κενό υποσύνολο τού A διαθέτει ελάχιστο στοιχείο, να αποδειχθεί ότι το $(A, \leq)$ είναι και ολικώς διατεταγμένο.

<u>ΘΕΜΑ 9ο</u> Έστω G μια ομάδα. Υποτιθεμένου ότι υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n, τέτοιος ώστε να ισχύει

$$(xy)^n = x^n y^n, \ \ \forall x, y \in G,$$

να αποδειχθεί ότι

(i) τα υποσύνολα

$$G^n := \{ x^n \mid x \in G \}, \quad G_n := \{ x \in G \mid x^n = 1 \}$$

τής G αποτελούν ορθόθετες υποομάδες τής G, και

(ii) $G/G_n \cong G^n$.

ΘΕΜΑ 10ο (i) Δίνονται οι μετατάξεις

$$\sigma := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \in \mathfrak{S}_9$$

και

$$\tau := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & \ldots & 3n-1 & 3n & 3n-2 \end{bmatrix} \in \mathfrak{S}_{3n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Να εκφρασθούν οι σ και τ ως σύνθεση επαλλήλων -ανά δύο ξένων μεταξύ τους- κύκλων. Εν συνεχεία, να εξετασθεί το εάν οι σ και τ είναι άρτιες ή περιττές.

(ii) Θεωρώντας ως γνωστό το ότι κάθε μετάταξη $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ γραφόμενη ως πεπερασμένη ακολουθία

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_s$$

s συντιθέμενων -ανά δύο ξένων μεταξύ τους- κύκλων $\tau_1, \ldots, \tau_s$ με μήκη $k_1, \ldots, k_s \geq 2$, αντιστοίχως, έχει τάξη

$$\mathrm{ord}\,(\sigma) = \text{ΕΚΠ}(k_1, \ldots, k_s),$$

όπου ΕΚΠ = το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο, να προσδιορισθεί η

$$\sigma^{1000} = \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \cdots \circ \sigma}_{1000 \text{ φορές}}$$

όταν

$$\sigma := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \in \mathfrak{S}_9.$$

ΘΕΜΑ 11ο Εάν με το i συμβολίσουμε τη «φανταστική» μονάδα, να αποδειχθεί ότι ο *δακτύλιος τού Gauss*

$$\mathbb{Z}\,[i] := \{ x + iy \mid x, y \in \mathbb{Z} \} \subsetneqq \mathbb{C}$$

είναι ακεραία περιοχή. Είναι ο $\mathbb{Z}\,[i]$ σώμα;

ΘΕΜΑ 12ο Εάν το πολυώνυμο $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \in \mathbb{Z}[t]$ δέχεται ως θέση μηδενισμού του τον ρητό αριθμό $\frac{\lambda}{\mu}$, όπου ΜΚΔ$(\lambda, \mu) = 1$, να αποδειχθεί ότι

$$\lambda \mid a_0 \quad \text{και} \quad \mu \mid a_n.$$

Κατόπιν τούτου να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο

$$f(t) = t^n + 2\kappa t + 2 \in \mathbb{Z}[t],$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, δεν δέχεται ρητό αριθμό ως θέση μηδενισμού του.

ΘΕΜΑ 13ο Έστω K ένα σώμα.

(i) Εάν $f(t), g(t), h(t) \in K[t]$ και το $f(t)$ είναι ανάγωγο, να αποδειχθεί η συνεπαγωγή

$$f(t) \mid g(t) \cdot h(t) \Longrightarrow [f(t) \mid g(t) \text{ ή } f(t) \mid h(t)] .$$

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το ότι εάν δυο πολυώνυμα $f(t), g(t) \in K[t]$ είναι μεταξύ τους πρώτα, τότε υπάρχουν $q_1(t), q_2(t) \in K[t]$, ούτως ώστε να ισχύει η ισότητα $q_1(t) \cdot f(t) + q_2(t) \cdot g(t) = 1$).

(ii) Έστω ότι το K είναι σώμα χαρακτηριστικής 0 και ότι τα $f(t), g(t) \in K[t]$ είναι δυο (μη σταθερά) πολυώνυμα μιας μεταβλητής t. Υποτιθεμένου ότι το $g(t)$ είναι ανάγωγο (εντός τού $K[t]$) να αποδειχθεί η ισοδυναμία

$$(g(t))^2 \mid f(t) \Longleftrightarrow [g(t) \mid f(t) \text{ και } g(t) \mid D(f(t))] ,$$

όπου $D(f(t))$ είναι η επίτυπη παράγωγος τού $f(t)$. (Υπόδειξη: Για την απόδειξη τής συνεπαγωγής "$\Longleftarrow$" να γίνει χρήση τού (i).)

ΘΕΜΑ 14ο Να εξετασθεί το κατά πόσον τα ακόλουθα υποσύνολα τού $\mathbb{R}$-γραμμικού χώρου $\mathbb{R}^2$ είναι ή δεν είναι υπόχωροί του.

(i) $W_1 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \ x + 6y = 0 \right\}$.

(ii) $W_2 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \ 9x + 15y = 25 \right\}$.

(iii) $W_3 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \ x \leq 3y \right\}$.