ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΚΥΠΡΟΥ

ΜΑΣ 226 – ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ ΚΑΙ ΣΩΜΑΤΑ

ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

29 Μαρτίου 2003

(Εαρινό εξάμηνο 2003)

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ	
ΑΡ. ΦΟΙΤΗΤΙΚΗΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΟΣ	

ΚΑΝΟΝΕΣ ΔΙΕΞΑΓΩΓΗΣ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΣ

Τα θέματα που δίνονται είναι εν συνόλω **15** και υποδιαιρούνται σε δύο κατηγορίες: σε *θεωρητικά θέματα* και σε *θέματα σχετιζόμενα με τις εφαρμογές*. Οι φοιτητές/φοιτήτριες καλούνται να απαντήσουν το πολύ σε **7** εξ αυτών, *υπό τον όρο ότι τα προς απάντησιν επιλεγόμενα θέματα τα οποία ανήκουν αποκλειστικώς σε μία εκ των δύο κατηγοριών δεν υπερβαίνουν τα* **4**. Κάθε ορθώς απαντημένο θέμα (με ολοκληρωμένη αποδεικτική επιχειρηματολογία) βαθμολογείται με **5** μονάδες. Πληρουμένων αυτών των προϋποθέσεων η λήψη τού βαθμού «άριστα» (στην προκειμένη ενδιάμεση εξέταση) επιτυγχάνεται με τη συγκέντρωση **35** μονάδων.

Υποσημειώσεις: (α) Όπως έχει ήδη διευκρινισθεί από τις πρώτες παραδόσεις τού μαθήματος, ο βαθμός τής ενδιαμέσου εξετάσεως αντιστοιχεί στο 35% τού τελικού (συνολικού) βαθμού ενός εκάστου εξεταζομένου.
(β) Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.
(γ) Η χρήση *πολύ* δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).
(δ) Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο (i) Να προσδιορισθεί επακριβώς η πολλαπλασιαστική ομάδα των αντιστρεψίμων στοιχείων τού δακτυλίου $\mathbf{Mat}_{n\times n}(R)$ των $n \times n$ πινάκων, οι εγγραφές των οποίων είναι ειλημμένες από έναν μεταθετικό, μη τετριμμένο 1-δακτύλιο R.

(ii) Να αποδειχθεί ότι ο $\mathbf{Mat}_{n\times n}(R)$ είναι ένας απλός δακτύλιος.

ΘΕΜΑ 2ο (i) Να διατυπωθεί το *1ο θεώρημα ισομορφισμών δακτυλίων*. Εν συνεχεία, να διατυπωθεί και να αποδειχθεί (με κάθε λεπτομέρεια) το *2ο θεώρημα ισομορφισμών δακτυλίων*.

(ii) Υποθέτοντας ότι ο R είναι ένας δακτύλιος και τα I, J δυο ιδεώδη του να αποδειχθούν οι ισομορφισμοί:

$$I/(I \cap J) \cong (I+J)/J$$

και

$$(I+J)/(I \cap J) \cong ((I+J)/I) \times ((I+J)/J) \cong (J/(I \cap J)) \times (I/(I \cap J)).$$

ΘΕΜΑ 3ο (i) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το λεγόμενο *θεώρημα τής αντιστοιχίσεως*.

(ii) Εάν το I είναι ένα ιδεώδες ενός δακτυλίου R, να περιγραφεί (με πλήρη θεωρητική αιτιολόγηση) η μορφή των (αριστερων/δεξιών/αμφιπλεύρων) ιδεωδών τού πηλικοδακτυλίου R/I.

ΘΕΜΑ 4ο (i) Εάν οι R_1 και R_2 είναι δυο ακέραιες περιοχές, να αποδειχθεί η συνεπαγωγή

$$R_1 \cong R_2 \Longrightarrow \mathbf{Fr}(R_1) \cong \mathbf{Fr}(R_2).$$

(ii) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεώρημα ταξινομήσεως των πρώτων σωμάτων* μέχρις ισομορφισμού.

ΘΕΜΑ 5ο (i) Ένας δακτύλιος R ονομάζεται *δακτύλιος τής Noether* όταν ισχύει μία (και κατ' επέκτασιν και οι τρεις) εκ των κάτωθι *ισοδυνάμων* συνθηκών:

(α) Σε κάθε μη κενό σύνολο κυρίων ιδεωδών υπάρχει ένα μεγιστοτικό στοιχείο (ως προς τον συνήθη εγκλεισμό).

(β) Κάθε ιδεώδες τού R είναι πεπερασμένως παραγόμενο.

(γ) Κάθε αύξουσα (αριθμήσιμη) αλυσίδα ιδεωδών τού R

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \cdots$$

είναι *στάσιμη*, ήτοι υπάρχει κάποιος $k \in \mathbb{N}$ για τον οποίο ισχύει $I_n = I_k$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq k$.

Να αποδειχθεί η ισοδυναμία των (α), (β) και (γ).

(ii) Εάν ο $f : R \longrightarrow R'$ είναι ένας επιμορφισμός δακτυλίων και ο R είναι δακτύλιος τής Noether, να αποδειχθεί ότι και ο R' είναι δακτύλιος τής Noether. Εν συνεχεία, να αποδειχθεί ότι ο πηλικοδακτύλιος R/I, όπου R ένας δακτύλιος τής Noether και I οιοδήποτε ιδεώδες τού R, είναι δακτύλιος τής Noether.

ΘΕΜΑ 6ο (i) Να δοθούν οι ορισμοί τής *ευκλειδείου περιοχής*, τής *περιοχής κυρίων ιδεωδών* και τής *περιοχής με μονοσήμαντη παραγοντοποίηση*. Εν συνεχεία, να αποδειχθεί ότι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[i]$ των ακεραίων τού Gauss είναι ευκλείδεια περιοχή.

(ii) Να αποδειχθεί ότι κάθε ευκλείδεια περιοχή είναι και Π.Κ.Ι.

(iii) Να αποδειχθεί ότι κάθε Π.Κ.Ι. είναι και Π.Μ.Π.

ΘΕΜΑ 7ο (i) Να δοθεί ο ορισμός τού *μέγιστου κοινού διαιρέτη* μκδ$(a_1, \ldots, a_n)$ n στοιχείων $a_1, \ldots, a_n$ ($n \geq 2$) ενός μεταθετικού 1-δακτυλίου R (που δεν είναι όλα ίσα με το 0_R). Υπάρχει πάντοτε ο μκδ$(a_1, \ldots, a_n)$; Είναι μονοσημάντως ορισμένος; (Δικαιολογήστε την απάντησή σας.)

(ii) Πώς προσδιορίζεται ο μκδ$(a_1, \ldots, a_n)$ εντός ευκλειδείων περιοχών;

(iii) Πώς προσδιορίζεται ο μκδ$(a_1, \ldots, a_n)$ εντός περιοχών με μονοσήμαντη παραγοντοποίηση;

ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΘΕΜΑ 8ο (i) Έστω $(R, +, \cdot)$ ένας δακτύλιος για τον οποίο ισχύει η ισότητα

$$a^2 = a, \;\; \forall a \in R.$$

Να αποδειχθεί ότι $2a = 0$, $\forall x \in R$, και ότι ο εν λόγω δακτύλιος οφείλει να είναι μεταθετικός. (Αυτού τού είδους οι δακτύλιοι ονομάζονται *δακτύλιοι τού Boole.*)

(ii) Εάν ο R είναι ένας 1-δακτύλιος τού Boole, να αποδειχθεί ότι κάθε μη τετριμμένο, πρώτο ιδεώδες τού R είναι μεγιστοτικό.

(iii) Έστω M ένα μη κενό σύνολο και $\mathfrak{P}(M)$ το δυναμοσύνολό του. Να αποδειχθεί ότι η τριάδα $(\mathfrak{P}(M), +, \cdot)$, όπου

$$\begin{cases} A + B := (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A), \\ A \cdot B := A \cap B, \;\; \forall A, B \in \mathfrak{P}(M), \end{cases}$$

αποτελεί έναν 1-δακτύλιο τού Boole.

(iv) Εάν στο (iii) θεωρήσουμε ως M το σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, να προσδιορισθεί ένας μκδ(A_1, A_2, A_3) εντός τού $(\mathfrak{P}(M), +, \cdot)$ όταν

$$A_1 = \{1\}, \;\; A_2 = \{2, 3\}, \;\; A_3 = \{1, 3\}.$$

ΘΕΜΑ 9ο (i) Να προσδιορισθούν όλα τα ιδεώδη τού δακτυλίου $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_m$ για οιονδήποτε $m \in \mathbb{N}$. Πόσα είναι αυτά (συναρτήσει των $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$) εάν υποτεθεί ότι η ανάλυση τού m ως γινομένου διακεκριμένων πρώτων αριθμών $p_1, \ldots, p_k$ είναι η

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \, \cdots \, p_k^{\alpha_k};$$

(ii) Να προσδιορισθούν όλα τα μεγιστοτικά ιδεώδη τού δακτυλίου $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ για οιονδήποτε $m \in \mathbb{N}$ και, εν συνεχεία, να υπολογισθεί η τομή τους.

(iii) Να προσδιορισθούν όλα τα πρώτα ιδεώδη τού δακτυλίου $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ για οιονδήποτε $m \in \mathbb{N}$.

ΘΕΜΑ 10ο Έστω ότι ο R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος και τα I_1, I_2, I_3 τρία ιδεώδη του. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) $I_1 \subseteq I_2 \Longrightarrow I_1 : I_3 \subseteq I_2 : I_3$ και $I_3 : I_1 \supseteq I_3 : I_2$,

(ii) $I_2 \subseteq I_1 \Longrightarrow I_1 : I_2 = R$ και, όταν ο R διαθέτει μοναδιαίο στοιχείο, $I_1 : I_2 = R \Longrightarrow I_2 \subseteq I_1$,

(iii) $I_1 : I_2^{n+1} = (I_1 : I_2^n) : I_2 = (I_1 : I_2) : I_2^n, \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, και

(iv) $I_1 : I_2 = I_1 : (I_1 + I_2)$.

ΘΕΜΑ 11ο (α) Εάν τα $I_1, \ldots, I_n$ είναι ιδεώδη ενός δακτυλίου R (όπου $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$), τότε το άθροισμά τους $I = I_1 + \cdots + I_n$ καλείται *ευθύ άθροισμα*, σημειούμενο μέσω τού ειδικού συμβόλου $I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$, όταν κάθε στοιχείο $a \in I$ εκφράζεται *μονοσημάντως* ως

$$a = a_1 + \cdots + a_n,\ \ a_j \in I_j,\ \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Να αποδειχθεί η ισοδυναμία των ακολούθων συνθηκών:

(i) Το I είναι το ευθύ άθροισμα των $I_1, \ldots, I_n$.

(ii) Εάν $0_R = a_1 + \cdots + a_n$, όπου $a_j \in I_j,\ \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}$, τότε

$$a_1 = \cdots = a_n = 0_R.$$

(iii) $I_j \cap (\sum\limits_{k \in \{1,\ldots,n\} \smallsetminus \{j\}} I_k) = \{0_R\},\ \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}$.

(β) Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Εάν $R = R_1 \times \cdots \times R_n$ είναι το ευθύ γινόμενο n δακτυλίων $R_1, \ldots, R_n$ (όπου $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$), και

$$\widetilde{R}_j := \left\{ \left(0_{R_1}, \ldots, 0_{R_{j-1}}, a_j, 0_{R_{j+1}} \ldots, 0_{R_n}\right) \in R \ \middle|\ a_j \in R_j \right\},$$

τότε $R = \widetilde{R}_1 \oplus \cdots \oplus \widetilde{R}_n$, όπου τα $\widetilde{R}_j$ και R_j είναι ισόμορφοι ως δακτύλιοι.

(ii) Εάν τα $I_1, \ldots, I_n$ είναι ιδεώδη ενός δακτυλίου R (όπου $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$), και $R = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$, τότε

$$R \cong I_1 \times \cdots \times I_n,$$

με καθένα των $I_1, \ldots, I_n$ θεωρούμενο ως «αυτόνομος» δακτύλιος.

ΘΕΜΑ 12ο Για οιονδήποτε πρώτο αριθμό p ορίζουμε το σύνολο

$$\mathbb{Z}_{(p)} := \left\{ r \in \mathbb{Q} \mid r = \frac{a}{b},\ \ (a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}),\ \text{με μκδ}\,(a,b) = 1 \text{ και } p \nmid b \right\}.$$

(i) Να αποδειχθεί ότι το $\mathbb{Z}_{(p)}$ είναι τοπικός υποδακτύλιος τού $\mathbb{Q}$.

(ii) Να αποδειχθεί ότι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_{(p)}$ είναι Π.Κ.Ι., και μάλιστα ότι όλα τα μη τετριμμένα ιδεώδη του είναι τα μέλη τής αλυσίδας

$$\mathbb{Z}_{(p)} \supsetneqq p\mathbb{Z}_{(p)} \supsetneqq p^2\mathbb{Z}_{(p)} \supsetneqq \cdots \supsetneqq p^n\mathbb{Z}_{(p)} \supsetneqq p^{n+1}\mathbb{Z}_{(p)} \supsetneqq \cdots$$

(Υπόδειξη: Κάθε μη μηδενικό στοιχείο r τού $\mathbb{Z}_{(p)}$ γράφεται υπό τη μορφή $r = p^n \frac{a}{b}$ για κάποιο *μονοσημάντως ορισμένο* $n =: n_r \in \mathbb{N}$, ούτως ώστε $p \nmid a$ και $p \nmid b$. Εάν το I είναι ένα μη τετριμμένο ιδεώδες τού $\mathbb{Z}_{(p)}$,να χρησιμοποιηθεί καταλλήλως το *ελάχιστο* στοιχείο τού συνόλου $A_I := \{m \in \mathbb{N} \mid \exists r \in I : n_r = m\}$.)

(iii) Είναι ο $\mathbb{Z}_{(p)}$ ισόμορφος τού $\mathbb{Z}_p$;

ΘΕΜΑ 13ο (i) Να αποδειχθεί ότι ένας μεταθετικός 1-δακτύλιος είναι ακεραία περιοχή εάν και μόνον εάν το τετριμμένο ιδεώδες του είναι πρώτο.

(ii) Έστω R ένας μεταθετικός 1-δακτύλιος στον οποίο κάθε ιδεώδες $I \subsetneqq R$ είναι πρώτο. Να αποδειχθεί πως ο R είναι σώμα.

(iii) Να αποδειχθεί ότι σε κάθε στρεβλό σώμα K ισχύει η ισότητα

$$aba = a - \left(a^{-1} + \left(b^{-1} - a\right)^{-1}\right)^{-1},$$

για οιαδήποτε $a, b \in K \smallsetminus \{0\}$ με $a \neq b^{-1}$.

ΘΕΜΑ 14ο Έστω d ένας μη τετράγωνος ακέραιος και $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ο υποδακτύλιος

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] := \left\{ a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{C}$$

τού $\mathbb{C}$ εφοδιασμένος με τη συνήθη *απεικόνιση σταθμήσεως*

$$N : \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \longrightarrow \mathbb{Z}, \;\; N(a + b\sqrt{d}) := a^2 - db^2.$$

(i) Να αποδειχθεί ότι

$$N(xy) = N(x)N(y), \;\; \forall x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}],$$

ότι

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^{\times} = \left\{ x \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \;\middle|\; N(x) = \pm 1 \right\},$$

και ότι εάν ένα $N(x)$ είναι πρώτο στοιχείο τού $\mathbb{Z}$, τότε το x είναι ανάγωγο στοιχείο τού $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

(ii) Να προσδιορισθεί επακριβώς η ομάδα $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^{\times}$ όταν $d < -1$.

(iii) Εάν $d > 1$ και η ομάδα $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^{\times}$ έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, να αποδειχθεί ότι η $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^{\times}$ είναι άπειρης τάξεως.

(iv) Να αποδειχθεί ότι

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^{\times} = \left\{ \pm \left(1 + \sqrt{2}\right)^k \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\}.$$

ΘΕΜΑ 15ο (i) Να προσδιορισθούν όλοι οι γνήσιοι διαιρέτες τού 6 εντός τού $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ (Με τη χρησιμοποίηση τού όρου «*γνήσιος διαιρέτης*» απλώς εξαιρούμε τα αντιστρέψιμα στοιχεία τού δακτυλίου μας και τα συντροφικά τού θεωρούμενου στοιχείου 6).

(ii) Να γραφούν οι $2,\ 3$ και 5 ως γινόμενα πρώτων στοιχείων τού $\mathbb{Z}[i]$.

(iii) Να αποδειχθεί ότι το 2 είναι ανάγωγο αλλά όχι και πρώτο στοιχείο τού $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$.

(iv) Εάν το I είναι ένα μη τετριμμένο ιδεώδες τού $\mathbb{Z}[i]$, να αποδειχθεί ότι ο πηλικοδακτύλιος $\mathbb{Z}[i]/I$ είναι πεπερασμένος (ήτοι ότι διαθέτει μόνον πεπερασμένου πλήθους στοιχεία).

[*Διευκρίνιση*: Η χρησιμοποίηση αποτελεσμάτων από το θέμα 14 είναι, εν προκειμένω, επιτρεπτή.]