Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών **Θεωρία Ομάδων (Μ 221)**

Εξέταση Ιανουαρίου 2006 **Εξεταστής: Δημήτριος Νταής**

ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο (i) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεώρημα τού Lagrange.*

(ii) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεώρημα τού Poincaré* (περί τής αριθμητικής συμπεριφοράς τού δείκτη υποομάδων εντός μιας δεδομένης ομάδας).

ΘΕΜΑ 2ο Να αποδειχθούν τα ακόλουθα: (i) Εάν $n \geq 3$, τότε $Z(\mathfrak{S}_n) = \{\mathrm{Id}\}$.

(ii) Εάν $n \geq 5$ και εάν θεωρηθεί ως γνωστό το ότι οι εναλλάσσουσες ομάδες $\mathfrak{A}_n$ είναι απλές, να αποδειχθεί μέσω τού (i) ότι οι $\{\mathrm{Id}\}$, $\mathfrak{A}_n$ και $\mathfrak{S}_n$ είναι οι μόνες ορθόθετες υποομάδες τής $\mathfrak{S}_n$.

ΘΕΜΑ 3ο Να διατυπωθούν τα τρία *θεωρήματα τού Sylow* και να δοθεί *πλήρης απόδειξη* και (τουλάχιστον μία) *εφαρμογή* ενός εξ αυτών.

ΘΕΜΑ 4ο Να αποδειχθεί ότι κάθε πεπερασμένη αβελιανή ομάδα είναι ισόμορφη με το ευθύ γινόμενο κυκλικών ομάδων.

ΘΕΜΑ 5ο (i) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεώρημα αντιστοιχίσεως.*

(ii) Κάνοντας χρήση τού (i), τού 3ου θεωρήματος ισομορφισμών ομάδων και μαθηματικής επαγωγής να αποδειχθεί ότι κάθε πεπερασμένη p-ομάδα διαθέτει μια ορθόθετη σειρά

$$\{e\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_\nu = G,$$

με $G_i \trianglelefteq G$, $\forall i \in \{0, 1, \ldots, \nu\}$, και $G_i/G_{i-1} \cong \mathbb{Z}_p$, $\forall i \in \{1, \ldots, \nu\}$.

ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΘΕΜΑ 6ο Έστω p ένας πρώτος αριθμός και έστω $\mathbb{Z}_{p^\infty} := \left\{ \frac{a}{p^i} + \mathbb{Z} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z},\ i \in \mathbb{N}_0 \right\} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Το $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ είναι μια άπειρη υποομάδα τής (προσθετικής) πηλικοομάδας $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(ii) $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \left\langle \left\{ p^{-n} + \mathbb{Z} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_0 \right\} \right\rangle$.

(iii) Κάθε στοιχείο τής $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ έχει τάξη ίση με p^n, για κάποιον $n \in \mathbb{N}_0$.

(iv) Έστω H μια υποομάδα τής $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, για την οποία υπάρχει άνω φράγμα τού συνόλου των τάξεων των στοιχείων της. Έστω $p^k := \max\{ \mathrm{ord}(h) |\ h \in H\}$. Τότε ισχύει $H = \langle p^{-k} + \mathbb{Z} \rangle$ με $|H| = p^k$.

(v) Για οιαδήποτε υποομάδα H όπως στο (iv) ισχύει $\mathbb{Z}_{p^\infty}/H \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

ΘΕΜΑ 7ο Να ταξινομηθούν (μέχρις ισομορφισμού) οι πεπερασμένες ομάδες που διαθέτουν *το πολύ* 3 διαφορετικές κλάσεις συζυγίας.

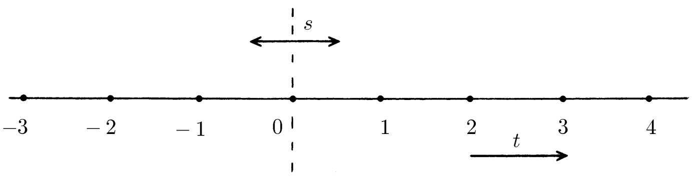
ΘΕΜΑ 8ο Ας υποθέσουμε ότι έχουμε προμηθευθεί τρεις άσπρες και τρεις μαύρες χάντρες και ότι αυτές κείνται επί ενός επιπέδου σχηματίζοντας κορυφές κανονικού εξαγώνου P. Έστω ΠερΣυμμ$(P) \cong \mathbb{Z}_6$ η ομάδα των περιστροφικών συμμετριών τού P και έστω Συμμ$(P) \cong D_6$ η πλήρης ομάδα συμμετριών τού P. Εάν ως X συμβολίσουμε το σύνολο *όλων των δυνατών σχηματισμών* κανονικών εξαγώνων αυτού τού είδους (ήτοι με τρεις άσπρες και τρεις μαύρες χάντρες ως κορυφές τους), τότε το ζητούμενο είναι ο προσδιορισμός τού πλήθους των *ουσιωδώς διαφορετικών* τρόπων κατασκευής ενός «συμμετρικού περιδέραιου» κάνοντας χρήση των 6 διαθέσιμων χαντρών, υπό την προϋπόθεση ότι δυο κανονικά εξάγωνα P, P' ανήκοντα στο X λογίζονται ως «ταυτιζόμενα» όταν υπάρχει $g \in G$ που απεικονίζει το P επί τού P', στις ακόλουθες περιπτώσεις: (i) $G = \text{ΠερΣυμμ}(P)$ και (ii) $G = \text{Συμμ}(P)$.

(Διευκρίνιση: Το ζητούμενο πλήθος των *ουσιωδώς διαφορετικών* τρόπων κατασκευής τού περιδέραιου προκύπτει ύστερα από καταμέτρηση των τροχιών ως προς τη φυσική δράση τής $\mathbb{Z}_6$ (στην περίπτωση (i)) και, αντιστοίχως, τής D_6 (στην περίπτωση (ii)) επί τού συνόλου X.)

ΘΕΜΑ 9ο Να αποδειχθούν τα ακόλουθα: (i) Κάθε ομάδα τάξεως 665 είναι ισόμορφη τής $\mathbb{Z}_{665}$.

(ii) Να ταξινομηθούν (μέχρις ισομορφισμού) οι πεπερασμένες ομάδες που διαθέτουν *μία και μόνον* γνήσια, μη τετριμμένη υποομάδα.

ΘΕΜΑ 10ο Η *άπειρη διεδρική ομάδα* D_∞ ορίζεται ως η υποομάδα των ισομετριών τής πραγματικής ευθείας $\mathbb{R}$, η οποία απαρτίζεται από τις ισομετρίες που στέλνουν το υποσύνολο των ακεραίων να απεικονισθεί στον εαυτό του. Δεν είναι δύσκολο να διαπιστωθεί ότι $D_\infty = \langle t, s \rangle$, όπου t η προς τα δεξιά μεταφορά κατά μία μονάδα, ήτοι η $t(x) = x + 1$, και s ο κατοπτρισμός ως προς το μηδέν, ήτοι η $s(x) = -x$. (Βλ. σχήμα.)



Προφανώς, $s^2 = e$, $st = t^{-1}s$, όπου e είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

(i) Ποια στοιχεία τής D_∞ έχουν πεπερασμένη τάξη; Σχηματίζουν αυτά μια υποομάδα τής D_∞;

(ii) Να αποδειχθεί ότι $|D_\infty : \langle t \rangle| = 2$.

(iii) Να αποδειχθεί ότι η D_∞ είναι *επιλύσιμη* (ήτοι ότι διαθέτει μια ορθόθετη σειρά, όλες οι πηλικοομάδες τής οποίας είναι αβελιανές).

- **Να απαντηθούν το πολύ 3 θέματα ανήκοντα σε μία εκ των δύο παρατιθέμενων κατηγοριών θεμάτων και το πολύ 2 θέματα ανήκοντα στην άλλη.**
- **Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει 2 μονάδες.**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως οι σημειώσεις θα παραμείνουν κλειστές.**
- **Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.**
- **Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!