ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΚΥΠΡΟΥ

ΜΑΣ 221- ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

22 Μαρτίου 2003

(Εαρινό εξάμηνο 2003)

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ	
ΑΡ. ΦΟΙΤΗΤΙΚΗΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΟΣ	

ΚΑΝΟΝΕΣ ΔΙΕΞΑΓΩΓΗΣ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΣ

Τα θέματα που δίνονται είναι εν συνόλω **15** και υποδιαιρούνται σε δύο κατηγορίες: σε *θεωρητικά θέματα* και σε *θέματα σχετιζόμενα με τις εφαρμογές*. Οι φοιτητές/φοιτήτριες καλούνται να απαντήσουν το πολύ σε **7** εξ αυτών, *υπό τον όρο ότι τα προς απάντησιν επιλεγόμενα θέματα τα οποία ανήκουν αποκλειστικώς σε μία εκ των δύο κατηγοριών δεν υπερβαίνουν τα* **4**. Κάθε ορθώς απαντημένο θέμα (με ολοκληρωμένη αποδεικτική επιχειρηματολογία) βαθμολογείται με **5** μονάδες. Πληρουμένων αυτών των προϋποθέσεων η λήψη τού βαθμού «άριστα» (στην προκειμένη ενδιάμεση εξέταση) επιτυγχάνεται με τη συγκέντρωση **35** μονάδων.

Υποσημειώσεις: (α) Όπως έχει ήδη διευκρινισθεί από τις πρώτες παραδόσεις τού μαθήματος, ο βαθμός τής ενδιαμέσου εξετάσεως αντιστοιχεί στο 35% τού τελικού (συνολικού) βαθμού ενός εκάστου εξεταζομένου.
(β) Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.
(γ) Η χρήση *πολύ* δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).
(δ) Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο Εάν το K είναι ένα σώμα, να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *πρώτο θεώρημα ισομορφισμών* διανυσματικών χώρων οριζομένων υπεράνω τού K.

ΘΕΜΑ 2ο Να ορισθεί το *γραμμικό έγκλεισμα* $\mathrm{Lin}(A)$ ενός υποσυνόλου A ενός K-διανυσματικού χώρου V και να αποδειχθεί η ισότητα

$$\mathrm{Lin}(A) = \mathrm{Lin}\left(\mathrm{Lin}(A)\right).$$

ΘΕΜΑ 3ο Έστω K ένα σώμα και έστω $f : V \longrightarrow W$ ένας ομομορφισμός K-διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διαστάσεως. Εάν υποθέσουμε ότι $\dim_K(V) = n$ και $\dim_K(W) = m$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει μια βάση $\mathcal{B}$ τού V και μια βάση $\mathcal{D}$ τού W, ούτως ώστε να ισχύει

$$M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r\times(n-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r)\times r} & \mathbf{0}_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right),$$

όπου ο $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(f) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ είναι ο πίνακας που εκπροσωπεί τον ομομορφισμό f ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{D}$, και $r :=\mathrm{rank}(f)$ η βαθμίδα τού f.

ΘΕΜΑ 4ο Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεμελιώδες θεώρημα τριγωνικοποιήσεως ενδομορφισμών* οιουδήποτε K-διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διαστάσεως.

ΘΕΜΑ 5ο Έστω K ένα σώμα και έστω V ένας K-διανυσματικός χώρος διαστάσεως $\dim_K(V) = n < \infty$. Εάν $f \in \mathrm{End}_K(V)$ και οι $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ είναι οι ιδιοτιμές τού f, να αποδειχθεί η ισοδυναμία των ακολούθων συνθηκών:

(i) Ο f είναι *διαγωνιοποιήσιμος*.

(ii) Εάν το

$$\chi_f(t) = \prod_{j=1}^{k} (\lambda_j - t)^{m_j}$$

είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο τού f, τότε

$$\dim_K(\mathrm{Eig}(f; \lambda_j)) = m_j, \quad \forall j \in \{1, \ldots, k\}.$$

(iii) $V = \mathrm{Eig}(f; \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Eig}(f; \lambda_k)$.

ΘΕΜΑ 6ο (i) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί *το θεώρημα των Cayley και Hamilton*.

(ii) Βάσει τού θεωρήματος των Cayley και Hamilton να προσδιορισθεί (και να αποδειχθεί) κλειστός τύπος υπολογισμού τού αντιστρόφου πίνακα ενός πίνακα $A \in \mathbf{GL}_n(K)$, όπου K ένα σώμα, συναρτήσει καταλλήλων δυνάμεων τού A.

ΘΕΜΑ 7ο Έστω K ένα σώμα και έστω V ένας K-διανυσματικός χώρος διαστάσεως $\dim_K(V) = n < \infty$. Εάν $f \in \mathrm{End}_K(V)$,

(i) να δοθεί ο ορισμός τού *ελαχίστου πολυωνύμου* $\psi_f(t) \in K[t]$ τού f,

(ii) να αποδειχθεί ότι $\psi_f(t) \,\big|\, \chi_f(t)$ και ότι $\chi_f(t) \,\big|\, \left(\psi_f(t)\right)^n$, και

(iii) να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *κριτήριο διαγωνιοποιησιμότητας* τού f στο οποίο υπεισέρχεται το είδος των θέσεων μηδενισμού τού $\psi_f(t)$.

ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΘΕΜΑ 8ο Να αποδειχθεί ότι το σύνολο

$$V := \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}, \;\; n \in \mathbb{N}, \; n \geq 2,$$

είναι ένας γραμμικός υπόχωρος τού $\mathbb{R}^n$ και να προσδιορισθεί μια βάση του.

ΘΕΜΑ 9ο Δίνεται ο ομομορφισμός δ.χ. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ο οριζόμενος μέσω τού τύπου:

$$f(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \\ -4x_1 + 3x_2 + x_3 \end{pmatrix}, \quad \forall\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Να αποδειχθεί ότι $r(f) = 2$.

(ii) Να προσδιορισθούν βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{D}$ τού διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$, τέτοιες ώστε να ισχύει

$$\mathbf{M}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ΘΕΜΑ 10ο Έστω $\mathbb{R}[t]$ ο $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και έστω $\mathbb{R}[t]_{\leq k}$ ο υπόχωρος τού $\mathbb{R}[t]$ ο αποτελούμενος από όλα τα πολυώνυμα τού $\mathbb{R}[t]$ βαθμού $\leq k$. Θεωρούμε τον ενδομορφισμό τού $\mathbb{R}[t]$

$$D : \mathbb{R}[t] \longrightarrow \mathbb{R}[t], \quad f(t) \longmapsto D(f(t)),$$

τον επαγόμενο μέσω τής (επιτύπου) παραγωγίσεως.

(i) Να αποδειχθεί ότι τόσο το σύνολο $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ όσο και το σύνολο $\mathcal{B}' = \{1, 1+t, 1+t^2, 1+t^3\}$ αποτελούν βάσεις τού $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$.

(ii) Ποιος είναι ο πυρήνας και ποια η εικόνα τού περιορισμού

$$D_{|\mathbb{R}[t]_{\leq 3}} : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}[t]$$

τού ενδομορφισμού D επί τού $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$; Ποιες είναι οι διαστάσεις τους;

(iii) Να προσδιορισθεί ο πίνακας $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(D_{|\mathbb{R}[t]_{\leq 3}})$ τού $D_{|\mathbb{R}[t]_{\leq 3}}$ ως προς την $\mathcal{B}$ (εάν αυτή θεωρηθεί ως *διατεταγμένη* βάση).

(iv) Να υπολογισθεί ο πίνακας $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(D_{|\mathbb{R}[t]_{\leq 3}})$ τού $D_{|\mathbb{R}[t]_{\leq 3}}$ ως προς την $\mathcal{B}'$ (εάν αυτή θεωρηθεί ως *διατεταγμένη* βάση).

ΘΕΜΑ 11ο Έστω K ένα σώμα και έστω $A \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(K)$, για κάποιον $n \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) $A \in \mathbf{GL}_n(K)$ εάν και μόνον εάν το 0_K δεν είναι ιδιοτιμή τού A.

(ii) $A \in \mathbf{GL}_n(K)$ εάν και μόνον εάν ο σταθερός όρος τού ελαχίστου πολυωνύμου $\psi_A(t) \in K[t]$ τού A είναι διάφορος τού 0_K.

(iii) Εάν $A \in \mathbf{GL}_n(K)$, τότε οι πίνακες A και A^{-1} έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα.

(iv) Εάν $A \in \mathbf{GL}_n(K)$ και οι ιδιοτιμές του είναι οι $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$, τότε οι $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_k^{-1}$ είναι οι ιδιοτιμές τού A^{-1}.

ΘΕΜΑ 12ο Έστω

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Να αποδειχθεί ότι $A^{2n+1} = A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

ΘΕΜΑ 13ο Δίνεται ο πίνακας

$$A := \begin{pmatrix} x-1 & -2 & 0 \\ x-2 & 2x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2x \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Για ποια $x \in \mathbb{R}$ είναι ο A διαγωνιοποιήσιμος;

ΘΕΜΑ 14ο Έστω f ο ενδομορφισμός

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ \ f(x,y) := (4x+y, -x+2y).$$

Να αποδειχθεί ότι ο f δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος, αλλ' εντούτοις είναι τριγωνικοποιήσιμος. Εν συνεχεία, να προσδιορισθεί μια βάση τού $\mathbb{R}^2$ ως προς την οποία ο πίνακας τού f είναι τριγωνικός.

ΘΕΜΑ 15ο Δίνεται ο πίνακας

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Να προσδιορισθούν το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο τού A, καθώς και οι ιδιόχωροι τού A, και να εξετασθεί το κατά πόσον υπάρχει ή δεν υπάρχει μια βάση τού $\mathbb{R}^3$ αποτελούμενη από τα ιδιοδιανύσματα τού A.