ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΚΥΠΡΟΥ

ΜΑΣ 121- ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΔΕΥΤΕΡΗ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

13 Απριλίου 2002

(Εαρινό εξάμηνο 2002)

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ	
ΑΡ. ΦΟΙΤΗΤΙΚΗΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΟΣ	

ΚΑΝΟΝΕΣ ΔΙΕΞΑΓΩΓΗΣ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΣ

Τα θέματα που δίνονται είναι εν συνόλω **16** και υποδιαιρούνται σε δύο κατηγορίες: σε *θεωρητικά θέματα* και σε *θέματα σχετιζόμενα με τις εφαρμογές*. Οι φοιτητές/φοιτήτριες καλούνται να απαντήσουν το πολύ σε **6** εξ αυτών. Κάθε ορθώς απαντημένο θέμα (με ολοκληρωμένη αποδεικτική επιχειρηματολογία) βαθμολογείται με **5** μονάδες. Όσοι εκ των φοιτητών/φοιτητριών προτίθενται να απαντήσουν σε ακριβώς **6** θέματα *οφείλουν* να συμπεριλάβουν σε αυτά ένα θέμα από την πρώτη *και* ένα θέμα από τη δεύτερη κατηγορία. Πληρουμένων αυτών των προϋποθέσεων η λήψη τού βαθμού «άριστα» (στην προκειμένη ενδιάμεση εξέταση) επιτυγχάνεται με τη συγκέντρωση **30** μονάδων.

Υποσημειώσεις: (α) Όπως έχει ήδη διευκρινισθεί από τις πρώτες παραδόσεις τού μαθήματος, ο βαθμός τής δεύτερης ενδιαμέσου εξετάσεως αντιστοιχεί στο 30% τού τελικού (συνολικού) βαθμού ενός εκάστου εξεταζομένου.
(β) Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.
(γ) Η χρήση *πολύ* δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).
(δ) Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *πρώτο θεώρημα ισομορφισμών* R-μοδίων.

ΘΕΜΑ 2ο Να ορισθεί το *γραμμικό έγκλεισμα* $\mathrm{Lin}(A)$ ενός υποσυνόλου A ενός R-μοδίου V και να αποδειχθεί η ισότητα

$$\mathrm{Lin}(A) = \mathrm{Lin}\left(\mathrm{Lin}(A)\right).$$

ΘΕΜΑ 3ο Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεώρημα ανταλλαγής τού Steinitz.*

ΘΕΜΑ 4ο Έστω K ένα σώμα και έστω $f : V \longrightarrow W$ ένας ομομορφισμός K-γραμμικών χώρων πεπερασμένης διαστάσεως. Εάν υποθέσουμε ότι $\dim_K(V) = n$ και $\dim_K(W) = m$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει μια βάση $\mathcal{B}$ τού V και μια βάση $\mathcal{D}$ τού W, ούτως ώστε να ισχύει

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r\times(n-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r)\times r} & \mathbf{0}_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right),$$

όπου ο $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(f) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ είναι ο πίνακας που εκπροσωπεί τον ομομορφισμό f ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{D}$, και $r :=\mathrm{rank}(f)$ η βαθμίδα τού f.

ΘΕΜΑ 5ο Έστω K ένα σώμα. Εάν $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ και $b \in K^m$, να αποδειχθεί η ισοδυναμία των ακολούθων συνθηκών:

(i) Το σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$Ax = b, \quad x = (x_1, \ldots, x_n),$$

διαθέτει (τουλάχιστον) μία λύση.

(ii) $b \in \mathrm{Im}(f_A)$, όπου η

$$f_A : K^n \longrightarrow K^m, \quad f_A(x) := Ax,$$

είναι η K-γραμμική απεικόνιση (ομομορφισμός) που επάγεται από τον πίνακα A.

(iii) $r(A) = r(\widetilde{A})$, όπου ο $\widetilde{A}$ είναι ο επαυξημένος πίνακας τού A.

ΘΕΜΑ 6ο (i) Έστω R ένας μεταθετικός 1-δακτύλιος και έστω $n \in \mathbb{N}$. Εάν οι V και W είναι δυο R-μόδιοι, να εξηγηθεί το πότε μια απεικόνιση

$$f : V^n \longrightarrow W$$

χαρακτηρίζεται ως *πλειογραμμική* και πότε ως *εναλλάσσουσα*.

(ii) Εάν θεωρηθεί ως γνωστό το ότι για κάθε εναλλάσσουσα πλειογραμμική απεικόνιση

$$\delta : \mathrm{Mat}_{n\times n}(R) \longrightarrow R$$

ισχύει η ισότητα

$$\delta(A) = \delta(\mathbf{I}_n) \cdot \det(A), \ \ \forall A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R),$$

να αποδειχθεί ότι

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

για οιουσδήποτε τετραγωνικούς πίνακες $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$.

<u>ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ</u>

<u>ΘΕΜΑ 7ο</u> Δίνονται τα διανύσματα τού $\mathbb{R}^3$

$$x_1 = (2, 3, -1),\;\; x_2 = (1, -1, -2)\,,\;\; y_1 = (3, 7, 0),\;\; y_2 = (5, 0, -7)\,.$$

Να αποδειχθεί η ισότητα

$$\mathrm{Lin}\left(\{x_1, x_2\}\right) = \mathrm{Lin}\left(\{y_1, y_2\}\right).$$

<u>ΘΕΜΑ 8ο</u> Να αποδειχθεί ότι το σύνολο

$$V := \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\},\;\; n \geq 2,$$

είναι ένας γραμμικός υπόχωρος τού $\mathbb{R}^n$ και να προσδιορισθεί μια βάση του.

<u>ΘΕΜΑ 9ο</u> Ορίζουμε τους 3×3-πίνακες

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί η ισότητα $BA = B$ και να εκφρασθεί ο πίνακας A^n, $n \geq 2$, συναρτήσει των A και B μέσω κλειστού (εκπεφρασμένου) τύπου. (Υπόδειξη: Αφού αποδειχθεί κατ' αρχάς ότι $A^2 = 2A + B - \mathbf{I}_3$ και -αντιστοίχως- προσδιορισθεί ένας ανάλογος τύπος και για τον A^3, ο γενικός τύπος για τον A^n μπορεί να εκμαιευθεί εύκολα και να αποδειχθεί κατόπιν χρήσεως μαθηματικής επαγωγής.)

<u>ΘΕΜΑ 10ο</u> Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Εάν υποθέσουμε ότι

$$\sum_{j \in \{1,\ldots,n\} \smallsetminus \{i\}} |a_{ij}| < |a_{ii}|\,,\;\; \forall i \in \{1, \ldots, n\},$$

να αποδειχθεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος (ή, ισοδυνάμως, ότι οι στήλες του είναι γραμμικώς ανεξάρτητες).

<u>ΘΕΜΑ 11ο</u> Έστω $\mathbb{R}[t]$ ο $\mathbb{R}$-γραμμικός χώρος των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και έστω $\mathbb{R}\left[t\right]_{\leq k}$ ο υπόχωρος τού $\mathbb{R}[t]$ ο αποτελούμενος από όλα τα πολυώνυμα τού $\mathbb{R}[t]$ βαθμού $\leq k$. Θεωρούμε τον ενδομορφισμό τού $\mathbb{R}[t]$

$$D : \mathbb{R}[t] \longrightarrow \mathbb{R}[t],\quad f(t) \longmapsto D(f(t)),$$

τον επαγόμενο μέσω τής (επιτύπου) παραγωγίσεως.

(i) Να αποδειχθεί ότι τόσο το σύνολο $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ όσο και το σύνολο $\mathcal{B}' = \{1, 1+t, 1+t^2, 1+t^3\}$ αποτελούν βάσεις τού $\mathbb{R}\left[t\right]_{\leq 3}$.

(ii) Ποιος είναι ο πυρήνας και ποια η εικόνα τού περιορισμού

$$D_{|\mathbb{R}[t]_{\leq 3}} : \mathbb{R}\left[t\right]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}\left[t\right]$$

τού ενδομορφισμού D επί τού $\mathbb{R}\left[t\right]_{\leq 3}$; Ποιες είναι οι διαστάσεις τους;

(iii) Να προσδιορισθεί ο πίνακας $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\left(D_{|\mathbb{R}[t]_{\leq 3}}\right)$ τού $D_{|\mathbb{R}[t]_{\leq 3}}$ ως προς την $\mathcal{B}$ (εάν αυτή θεωρηθεί ως *διατεταγμένη* βάση).

(iv) Να υπολογισθεί ο πίνακας $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}\left(D_{|\mathbb{R}[t]_{\leq 3}}\right)$ τού $D_{|\mathbb{R}[t]_{\leq 3}}$ ως προς την $\mathcal{B}'$ (εάν αυτή θεωρηθεί ως *διατεταγμένη* βάση).

ΘΕΜΑ 12ο Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη λύσεων το ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1, \\ \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 13ο Να διερευνηθεί (ως προς τις λύσεις) το ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ \\ 2x_1 + 3x_2 + \lambda x_3 = 3, \\ \\ x_1 + \lambda x_2 + 3x_3 = 2, \end{cases}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 14ο Να υπολογισθεί η ορίζουσα τού πίνακα $A \in \mathrm{Mat}_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} \\ 1-\frac{1}{n} & 2 & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} \\ 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & 2 & 1-\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} \\ 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & 2 & 1-\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1-\frac{1}{n} \\ 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} & 2 \end{pmatrix}$$

(Υπόδειξη: Να εκτελεσθούν κατάλληλοι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί στηλών, ούτως ώστε ο υπολογισμός τής $\det(A)$ να αναχθεί στον υπολογισμό τής ορίζουσας ενός κάτω ή ενός επάνω τριγωνικού πίνακα.)

ΘΕΜΑ 15ο (i) Εάν τα $\lambda_1, \lambda_2, .,.\lambda_n$ είναι n (≥ 2) το πλήθος διαφορετικά -ανά δύο- στοιχεία ενός σώματος K, να προσδιορισθεί κλειστός τύπος υπολογισμού τής *ορίζουσας τού Vandermonde*

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \cdots & \cdots & \lambda_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

(Υπόδειξη: Να γίνει χρήση μαθηματικής επαγωγής. Κατά την πορεία τής αποδεικτικής διαδικασίας επαληθεύεται η ισότητα

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n \left(\lambda_{n+1} - \lambda_1\right)\left(\lambda_{n+1} - \lambda_2\right)\cdots\left(\lambda_{n+1} - \lambda_n\right).)$$

(ii) Εάν ως $n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ συμβολίσουμε το «n παραγοντικό» τού φυσικού αριθμού $n \geq 1$, τότε κάνοντας χρήση τού (i) να αποδειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \cdots & \cdots & n^3 \\ 1 & 2^5 & 3^5 & \cdots & \cdots & n^5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \cdots & \cdots & n^{2n-1} \end{vmatrix} = 1!3!5! \cdots (2n-3)!(2n-1)!$$

(Υπόδειξη: Από την i-οστή στήλη εξαγάγετε εν πρώτοις τον προφανή κοινό παράγοντα, για κάθε δείκτη $i \in \{2, 3, ..., n\}$ και κατόπιν σχηματίστε κατάλληλη ορίζουσα τύπου Vandermonde.)

ΘΕΜΑ 16ο Να υπολογισθεί η ορίζουσα τού πίνακα $A \in \mathrm{Mat}_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \mu_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \mu_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_3 & \lambda_3 & \lambda_3 & \mu_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \lambda_n & \lambda_n & \lambda_n & \lambda_n & \cdots & \lambda_n & \mu_n \end{pmatrix}$$

και οι $\lambda_i, \mu_i, 1 \leq i \leq n$, είναι πραγματικοί αριθμοί. (Υπόδειξη: Η $\det(A)$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα οριζουσών ενός άνω τριγωνικού και ενός κάτω τριγωνικού πίνακα εάν ληφθεί υπ' όψιν η πλειογραμμικότητα τής $\det$ ως προς τις γραμμές και εν συνεχεία εκτελεσθούν κατάλληλοι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών.)