Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών **Άλγεβρα (Μ 110)**

Εαρινό Εξάμηνο 2009, Εξέταση Ιουνίου **Εξεταστής: Δημήτριος Νταής**

ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο Εάν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, οι $a_1, \ldots, a_n$ μη μηδενικοί ακέραιοι και $d := \text{μκδ}(a_1, \ldots, a_n)$, να αποδειχθεί ότι υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί $k_1, \ldots, k_n$, τέτοιοι ώστε να ισχύει η ισότητα $d = k_1 a_1 + \cdots + k_n a_n$.

ΘΕΜΑ 2ο Υποθέτοντας ότι οι H και K είναι δυο υποομάδες μιας ομάδας $(G, \cdot)$, να αποδειχθεί η αμφίπλευρη συνεπαγωγή: [το σύνολο HK είναι υποομάδα τής G] $\Longleftrightarrow HK = KH$.

ΘΕΜΑ 3ο Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί *το θεώρημα τού Cayley*.

ΘΕΜΑ 4ο Να διατυπωθούν το 1ο και το 3ο *θεώρημα ισομορφισμών δακτυλίων* και να αποδειχθεί το 3ο.

ΘΕΜΑ 5ο (i) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το λήμμα τού Gauss.

(ii) Να αποδειχθεί μέσω αυτού ότι, εάν ένα πολυώνυμο $f(\mathsf{X}) \in \mathbb{Z}[\mathsf{X}]$ είναι ανάγωγο εντός τού $\mathbb{Z}[\mathsf{X}]$, τότε είναι ανάγωγο και εντός τού $\mathbb{Q}[\mathsf{X}]$.

ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΘΕΜΑ 6ο (i) Έστω $\mathbb{N} \ni k \longmapsto \varphi(k) := \sharp\{\ell \in \mathbb{N} \mid \ell \leq k \text{ και μκδ}(\ell, k) = 1\}$ η *αριθμητική συνάρτηση φι τού Euler.* Εάν $m, n \in \mathbb{N}$ και μκδ$(m, n) = 1$, να αποδειχθεί ότι

$$m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \equiv 1 \,(\operatorname{mod} mn).$$

(ii) Να επιλυθεί η γραμμική ισοτιμία $5x \equiv 3 \,(\operatorname{mod} 24)$.

ΘΕΜΑ 7ο Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Κάθε πεπερασμένως παραγόμενη υποομάδα τής $(\mathbb{Q}, +)$ είναι κυκλική.

(ii) Η ίδια η $(\mathbb{Q}, +)$ δεν είναι πεπερασμένως παραγόμενη.

(iii) Εάν για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$ η H_n συμβολίζει την υποομάδα τής $(\mathbb{Q}, +)$ την παραγόμενη από το στοιχείο $\frac{1}{n!}$, τότε $H_1 \subsetneqq H_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq H_i \subsetneqq H_{i+1} \subsetneqq \cdots$ και

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n \geq 1} H_n.$$

(Ως εκ τούτου, η εν λόγω ομάδα γράφεται ως ένωση αριθμησίμου πλήθους κυκλικών υποομάδων της, χωρίς η ίδια να είναι κυκλική.)

(iv) Το υποσύνολο των ρητών αριθμών $U := \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}, \text{ όπου } a \equiv 0 (\operatorname{mod} 2),\ b \equiv 1 (\operatorname{mod} 2) \right\}$ αποτελεί μια γνήσια υποομάδα τής $(\mathbb{Q}, +)$ που δεν είναι κυκλική.

ΘΕΜΑ 8ο Εάν η $(G, \cdot)$ είναι μια ομάδα, τότε το υποσύνολό της

$$Z(G) := \{ g \in G \mid xg = gx,\ \forall x \in G \}$$

το αποτελούμενο από εκείνα τα στοιχεία τής G τα οποία μετατίθενται αμοιβαίως με κάθε στοιχείο τής G καλείται **κέντρο** τής G. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) $Z(G) \lhd G$.

(ii) Εάν η πηλικοομάδα $G/Z(G)$ είναι κυκλική, τότε η G είναι αβελιανή (και, ως εκ τούτου, η $G/Z(G)$

είναι τετριμμένη).

(iii) $Z(\mathbf{Q}) \cong \mathbb{Z}_2$, όπου $\mathbf{Q} := \langle \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle = \{\pm \mathbf{I}_2, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\} \subset \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ ($\mathbf{i} := \mathbf{jk}$) η *ομάδα των τετρανίων* που παράγεται από τα

$$\mathbf{j} := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[*Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιηθεί καταλλήλως το θεώρημα τού Lagrange και το (ii).]

(iv) $Z(\mathfrak{S}_n) \cong \{\mathrm{id}\}$, για κάθε $n \geq 3$. [*Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιηθεί καταλλήλως -θεωρούμενη ως γνωστή- η ισότητα $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = [\sigma(a_1)\, \sigma(a_2)\, \cdots\, \sigma(a_k)]$ που ισχύει για κάθε k-κύκλο $c = [a_1\, a_2\, \cdots\, a_k]$, $1 \leq k \leq n$, και κάθε $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.]

ΘΕΜΑ 9ο Έστω ότι τα K και L είναι δυο σώματα, η χαρακτηριστική των οποίων δεν ισούται ούτε με 2 ούτε με 3. Εάν η $f : K \longrightarrow L$ είναι μια απεικόνιση που πληροί τις συνθήκες

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in K, \quad f(1_K) = 1_L, \quad f(x^3) = f(x)^3,\ \forall x \in K,$$

να αποδειχθεί ότι η f είναι ένας ομομορφισμός σωμάτων.

ΘΕΜΑ 10ο (i) Δίδεται το πολυώνυμο

$$g(\mathsf{X}) = \mathsf{X}^4 + 5\mathsf{X}^3 - 9\mathsf{X}^2 - 14\mathsf{X} + 24 \in \mathbb{Z}[\mathsf{X}].$$

Για ποιους $r \in \mathbb{Q}$ ισχύει η ισότητα $g(r) = 0$;

(ii) Δοθέντων δυο ακεραίων αριθμών a, b, θεωρούμε το πολυώνυμο

$$f(\mathsf{X}) = \mathsf{X}^4 + a\mathsf{X}^2 + b^2 \in \mathbb{Z}[\mathsf{X}].$$

Να αποδειχθεί ότι το $f(\mathsf{X})$ δεν είναι ανάγωγο εντός τού $\mathbb{Q}[\mathsf{X}]$ *εάν και μόνον εάν* τουλάχιστον ένας εκ των $a^2 - 4b^2, 2b - a, -2b - a$ ισούται με το τετράγωνο κάποιου ακεραίου αριθμού. [*Υπόδειξη*: Για την απόδειξη τού "$\Rightarrow$" μπορεί, συν τοις άλλοις, να χρησιμοποιηθεί και το (ii) τού θέματος **5**.]

- **Να απαντηθούν το πολύ 3 θέματα ανήκοντα σε μία εκ των δύο παρατιθέμενων κατηγοριών θεμάτων και το πολύ 2 θέματα ανήκοντα στην άλλη.**
- **Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει 2 μονάδες. (Καθένα εκ των υποερωτημάτων των θεμάτων 5, 6 και 10 αξιολογείται βαθμολογικώς με μία μονάδα. Καθένα εκ των υποερωτημάτων των θεμάτων 7 και 8 αξιολογείται βαθμολογικώς με μισή μονάδα.)**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως σημειώσεις και βιβλία θα παραμείνουν κλειστά.**
- **Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.**
- **Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!