Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών **Θεωρία Ομάδων (Μ 221)**

Εξέταση Σεπτεμβρίου 2006 **Εξεταστής: Δημήτριος Νταής**

ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεώρημα τού Cayley*.

ΘΕΜΑ 2ο Να διατυπωθούν τα τρία *θεωρήματα ισομορφισμών ομάδων* και να δοθεί *πλήρης απόδειξη* και (τουλάχιστον μία) *εφαρμογή* ενός εξ αυτών.

ΘΕΜΑ 3ο (i) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεώρημα τροχιών και σταθεροποιητών*.

(ii) Εάν μια ομάδα G δρα επί ενός (μη κενού) συνόλου X και $x \in X$, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(α) $G_{g \cdot x} = gG_xg^{-1}, \forall g \in G$, και (β) $G_x \cong G_y, \forall y \in G \cdot x$.

(iii) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί (κάνοντας χρήση τού (ii) (α), τού (i) και τού θεωρήματος τού Lagrange) το *θεώρημα καταμετρήσεως των* (διακεκριμένων) *τροχιών* (ως προς τη δράση μιας *πεπερασμένης* ομάδας G επί ενός *πεπερασμένου* συνόλου X).

ΘΕΜΑ 4ο Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Εάν η H είναι μια υποομάδα μιας ομάδας G και $|G : H| = 2$, τότε $H \trianglelefteq G$.

(ii) Εάν η G είναι μια ομάδα τάξεως $2p$, όπου p πρώτος αριθμός, τότε είτε $G \cong \mathbb{Z}_{2p}$ είτε $G \cong D_p$. [*Υπόδειξη*: Στην αποδεικτική διαδικασία υπεισέρχεται κατάλληλη εφαρμογή τού (i), καθώς και των θεωρημάτων των Lagrange και Cauchy.]

ΘΕΜΑ 5ο Να διατυπωθούν τα τρία *θεωρήματα τού Sylow* και να δοθεί *πλήρης απόδειξη* και (τουλάχιστον μία) *εφαρμογή* ενός εξ αυτών.

ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΘΕΜΑ 6ο Για οιαδήποτε μη τετριμμένη ομάδα G (με ουδέτερο στοιχείο της το e) να αποδειχθεί η ισοδυναμία των κάτωθι συνθηκών:

(a) Εάν η H είναι μια υποομάδα τής G, τότε είτε $H = G$ είτε $H = \{e\}$.

(b) $G = \langle g \rangle$ *για κάθε* $g \in G \smallsetminus \{e\}$.

(c) $|G| = p$, όπου p πρώτος αριθμός.

ΘΕΜΑ 7ο Έστω G μια πεπερασμένη κυκλική ομάδα, όπου $G = \langle g \rangle$ και $|G| = n$. Εάν ο $m \in \mathbb{N}$ είναι ένας διαιρέτης τού n, να αποδειχθεί ότι:

(i) $|G/\langle g^m \rangle| = m$, και

(ii) $G/\langle g^m \rangle = \langle g \langle g^m \rangle \rangle$.

ΘΕΜΑ 8ο Για την πολλαπλασιαστική ομάδα $(\mathbb{Z}_{25}^{\times}, \cdot)$ να προσδιορισθούν:

(i) όλες οι υποομάδες της και

(ii) το πλήθος των στοιχείων της που έχουν τάξη m, για όλους τους θετικούς διαιρέτες m τής $|\mathbb{Z}_{25}^{\times}|$.

<u>ΘΕΜΑ 9ο</u> Έστω G μια ομάδα και έστω

$$Z(G) := \{\, g \in G \mid \; gx = xg, \; \forall x \in G\}$$

το *κέντρο* της. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Το $Z(G)$ αποτελεί ορθόθετη, αβελιανή υποομάδα τής G και $[G = Z(G) \Longleftrightarrow$ η G είναι αβελιανή$]$.

(ii) Εάν η H είναι μια υποομάδα τής $Z(G)$, τότε $H \trianglelefteq G$.

(iii) Εάν η H είναι μια υποομάδα τής $Z(G)$ και η K μια υποομάδα τής G, τότε το *γινόμενο*

$$HK := \{\, hk \mid \; h \in H, \; k \in K\}$$

των H και K αποτελεί μια υποομάδα τής G.

(iv) Εάν $N \trianglelefteq G$ και η G είναι αβελιανή, τότε και η πηλικοομάδα G/N είναι αβελιανή.

(v) Εάν η K είναι μια υποομάδα τής G και η πηλικοομάδα $G/Z(G)$ είναι αβελιανή, τότε και η πηλικοομάδα $K/Z(K)$ είναι αβελιανή.

<u>ΘΕΜΑ 10ο</u> Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Δεν υπάρχει ομάδα τάξεως 56 που να είναι απλή.

(ii) Κάθε ομάδα τάξεως 75 είναι *επιλύσιμη*, ήτοι διαθέτει μια ορθόθετη σειρά, όλες οι πηλικοομάδες τής οποίας είναι αβελιανές. [*Υπόδειξη*: Να μελετηθούν εν πρώτοις οι 5-Sylow υποομάδες μιας ομάδας που έχει τάξη 75.]

- **Να απαντηθούν το πολύ 3 θέματα ανήκοντα σε μία εκ των δύο παρατιθέμενων κατηγοριών θεμάτων και το πολύ 2 θέματα ανήκοντα στην άλλη.**
- **Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει 2 μονάδες.**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως οι σημειώσεις και τα βιβλία θα παραμείνουν κλειστά.**
- **Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.**
- **Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!