Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών **Θεωρία Ομάδων (Μ 221)**

Εξέταση Σεπτεμβρίου 2010 **Εξεταστής: Δημήτριος Νταής**

ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Κάθε υποομάδα τής $(\mathbb{Z},+)$ είναι κυκλική, και μάλιστα τής μορφής $(d\,\mathbb{Z},+)$, για κάποιον $d \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Κάθε υποομάδα μιας κυκλικής ομάδας είναι κυκλική.

ΘΕΜΑ 2ο (i) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεώρημα τού Lagrange.*

(ii) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεώρημα τού Poincaré* (περί τής αριθμητικής συμπεριφοράς τού δείκτη υποομάδων εντός μιας δεδομένης ομάδας).

ΘΕΜΑ 3ο Να διατυπωθούν τα τρία *θεωρήματα ισομορφισμών ομάδων* και να δοθεί *πλήρης απόδειξη* ενός εξ αυτών.

ΘΕΜΑ 4ο Να αποδειχθούν τα ακόλουθα: (i) Εάν $n \geq 3$, τότε $Z(\mathfrak{S}_n) = \{\mathrm{Id}\}$.

(ii) Εάν $n \geq 5$ και εάν θεωρηθεί ως γνωστό το ότι οι εναλλάσσουσες ομάδες $\mathfrak{A}_n$ είναι απλές, να αποδειχθεί μέσω τού (i) ότι οι $\{\mathrm{Id}\}$, $\mathfrak{A}_n$ και $\mathfrak{S}_n$ είναι οι μόνες ορθόθετες υποομάδες τής $\mathfrak{S}_n$.

ΘΕΜΑ 5ο Να διατυπωθούν τα τρία *θεωρήματα τού Sylow* και να δοθεί *πλήρης απόδειξη* ενός εξ αυτών.

ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΘΕΜΑ 6ο (i) Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα για την οποία υπάρχει κάποιος $k \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε να ισχύει

$$(ab)^{k+j} = a^{k+j}b^{k+j},\ \ \forall (a,b) \in G \times G \ \text{ και } \ \forall j \in \{0,1,2\}.$$

Να αποδειχθεί ότι η εν λόγω ομάδα είναι αβελιανή.

(ii) Έστω $f : G_1 \longrightarrow G_2$ ένας ισομορφισμός ομάδων. Εάν $H_1 \trianglelefteq G_1$ και $H_2 := f(H_1) \trianglelefteq G_2$, να αποδειχθεί ότι $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$.

ΘΕΜΑ 7ο Έστω p ένας πρώτος αριθμός και έστω $\mathbb{Z}_{p^\infty} := \left\{ \frac{a}{p^i} + \mathbb{Z} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z},\ \ i \in \mathbb{N}_0 \right\} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Το $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ είναι μια άπειρη υποομάδα τής (προσθετικής) πηλικοομάδας $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(ii) $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \left\langle \left\{ p^{-n} + \mathbb{Z} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_0 \right\} \right\rangle$.

(iii) Κάθε στοιχείο τής $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ έχει τάξη ίση με p^n, για κάποιον $n \in \mathbb{N}_0$.

(iv) Έστω H μια υποομάδα τής $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, για την οποία υπάρχει άνω φράγμα τού συνόλου των τάξεων των στοιχείων της. Έστω $p^k := \max\{\, \mathrm{ord}(h) |\ h \in H\}$. Τότε ισχύει $H = \langle p^{-k} + \mathbb{Z} \rangle$ με $|H| = p^k$.

(v) Για οιαδήποτε υποομάδα H όπως στο (iv) ισχύει $\mathbb{Z}_{p^\infty}/H \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

ΘΕΜΑ 8ο Έστω G μια πεπερασμένη κυκλική ομάδα, όπου $G = \langle g \rangle$ και $|G| = n$. Εάν ο $m \in \mathbb{N}$ είναι ένας διαιρέτης τού n, να αποδειχθεί ότι:

(i) $|G/\langle g^m \rangle| = m$, και

(ii) $G/\langle g^m \rangle = \langle g\,\langle g^m \rangle \rangle$.

ΘΕΜΑ 9ο Να αποδειχθεί ότι κάθε ομάδα τάξεως 665 είναι ισόμορφη με την $\mathbb{Z}_{665}$.

<u>ΘΕΜΑ 10ο</u> Να ταξινομηθούν (μέχρις ισομορφισμού) οι πεπερασμένες ομάδες που διαθέτουν *μία και μόνον* γνήσια, μη τετριμμένη υποομάδα.

- **Να απαντηθούν το πολύ 3 θέματα ανήκοντα σε μία εκ των δύο παρατιθέμενων κατηγοριών θεμάτων και το πολύ 2 θέματα ανήκοντα στην άλλη.**
- **Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει 2 μονάδες**.
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως οι σημειώσεις θα παραμείνουν κλειστές.**
- **Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.**
- **Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!