Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών **Θεωρία Ομάδων (Μ 221)**

Εξέταση Ιανουαρίου 2010 **Εξεταστής: Δημήτριος Νταής**

ΜΕΡΟΣ Α. ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο Εάν η $f : G \longrightarrow H$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Η απεικόνιση

$$\mathbf{Subg}(G; \mathrm{Ker}(f)) \ni K \overset{\Psi_f}{\longmapsto} f(K) \in \mathbf{Subg}(\mathrm{Im}(f))$$

από το σύνολο $\mathbf{Subg}(G;\mathrm{Ker}(f))$ των υποομάδων τής G που περιέχουν τον πυρήνα τής f στο σύνολο $\mathbf{Subg}(\mathrm{Im}(f))$ των υποομάδων τής εικόνας $\mathrm{Im}(f)$ τής f είναι αμφιρριπτική έχουσα την

$$\mathbf{Subg}(\mathrm{Im}(f)) \ni L \overset{\Upsilon_f}{\longmapsto} f^{-1}(L) \in \mathbf{Subg}(G; \mathrm{Ker}(f))$$

ως αντίστροφό της. (Ειδικότερα, κάθε υποομάδα τής $\mathrm{Im}(f)$ οφείλει να είναι τής μορφής $f(K)$, όπου η K είναι μια υποομάδα τής G που περιέχει τον πυρήνα τής f.) Επιπροσθέτως, για οιεσδήποτε υποομάδες $K_1, K_2 \in \mathbf{Subg}(G;\mathrm{Ker}(f))$ αληθεύει η αμφίπλευρη συνεπαγωγή

$$K_1 \sqsubseteq K_2 \Longleftrightarrow \Psi_f(K_1) \sqsubseteq \Psi_f(K_2).$$

(ii) Για οιεσδήποτε $K_1, K_2 \in \mathbf{Subg}(G;\mathrm{Ker}(f))$ με $K_1 \sqsubseteq K_2$ ισχύει η ισότητα

$$|K_2 : K_1| = |\Psi_f(K_2) : \Psi_f(K_1)|\ (= |f(K_2) : f(K_1)|).$$

ΘΕΜΑ 2ο (i) Εάν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, να αποδειχθεί ότι δεν υφίσταται στοιχείο $\sigma \in \mathfrak{S}_n \smallsetminus \{\mathrm{id}\}$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\sigma \circ \varrho \circ \sigma^{-1} = \varrho, \ \forall \varrho \in \mathfrak{S}_n.$$

(ii) Εάν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, και εάν θεωρηθεί ως γνωστό το ότι οι εναλλάσσουσες ομάδες $\mathfrak{A}_n$ είναι απλές, να αποδειχθεί μέσω τού (i) ότι οι $\{\mathrm{Id}\}$, $\mathfrak{A}_n$ και $\mathfrak{S}_n$ είναι οι μόνες ορθόθετες υποομάδες τής $\mathfrak{S}_n$.

ΘΕΜΑ 3ο Έστω p ένας πρώτος αριθμός και έστω $(G, +)$ μια μη τετριμμένη πεπερασμένη (προσθετική) αβελιανή ομάδα τάξεως $|G| = p^\nu$ για κάποιον $\nu \in \mathbb{N}$. Ως γνωστόν, υπάρχει $s \in \mathbb{N}$ και

$$(k_1, \ldots, k_s) \in \mathbb{N}^s, \ \ k_1 \leq \cdots \leq k_s,$$

με $\sum_{j=1}^{s} k_j = \nu$, ούτως ώστε να ισχύει

$$G \cong \mathbb{Z}_{p^{k_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{k_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p^{k_s}}. \qquad (\star)$$

Να αποδειχθεί ότι η έκφραση $(\star)$ είναι μονοσημάντως ορισμένη, υπό την εξής έννοια:

Εάν $\exists t \in \mathbb{N}$ και εάν $\exists (l_1, l_2, \ldots, l_t) \in \mathbb{N}^t$, $l_1 \leq \cdots \leq l_t$ με $\sum_{\varrho=1}^{t} k_\varrho = \nu$, ούτως ώστε να υφίσταται ισομορφισμός

$$G \cong \mathbb{Z}_{p^{l_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{l_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p^{l_t}},$$

τότε $t = s$ και $l_j = k_j$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, s\}$.

ΘΕΜΑ 4ο Να διατυπωθούν τα τρία *θεωρήματα τού Sylow* και να δοθεί *πλήρης απόδειξη* ενός εξ αυτών.

ΘΕΜΑ 5ο Έστω G μια ομάδα και έστω $K \trianglelefteq G$. Εάν αμφότερες οι K και G/K είναι επιλύσιμες, να αποδειχθεί ότι και η ίδια η G είναι επιλύσιμη.

<u>ΜΕΡΟΣ Β. ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ</u>

<u>ΘΕΜΑ 6ο</u> (i) Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Να αποδειχθεί ότι $G_1 \cong \mathbf{D}_n \cong G_2$, όπου

$$G_1 := \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta_n & 0 \\ 0 & \zeta_n^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle \sqsubseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

(με $\zeta_n := \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$) και

$$G_2 := \left\{ \begin{pmatrix} [\varepsilon]_n & [\lambda]_n \\ [0]_n & [1]_n \end{pmatrix} \middle| \varepsilon \in \{\pm 1\}, \ \lambda \in \mathbb{Z} \right\} \sqsubseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_n).$$

(ii) Να αποδειχθεί ότι η $\mathbf{D}_\infty$ είναι ισόμορφη με την ομάδα

$$G_3 := \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \varepsilon \in \{\pm 1\}, \ \lambda \in \mathbb{Z} \right\} \sqsubseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$$

και ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, υπάρχει $H \lhd \mathbf{D}_\infty$, τέτοια ώστε

$$\mathbf{D}_\infty / H \cong \mathbf{D}_n \quad \text{και} \quad H \cong n\mathbb{Z}.$$

(iii) Έστω $G := \langle a, b \rangle$ η υποομάδα τής $\mathfrak{S}_8$ η παραγόμενη από τα στοιχεία

$$a := [1\,2\,3\,4] \circ [5\,6\,7\,8] \quad \text{και} \quad b := [1\,5\,3\,7] \circ [2\,8\,4\,6].$$

Να αποδειχθεί ότι $|G| = 8$ και ότι $G \cong \mathbf{Q}$.

<u>ΘΕΜΑ 7ο</u> Να αποδειχθεί ότι όλες κυκλικές υποομάδες τής $\mathfrak{S}_8$ που έχουν τάξη 15 είναι συζυγείς.

<u>ΘΕΜΑ 8ο</u> (i) Έστω G μια ομάδα και έστω $H \trianglelefteq G$ με $|H| = 2$.

(α) Να αποδειχθεί ότι $H \sqsubseteq Z(G)$.

(β) Ισχύει κατ' ανάγκην ότι $H \sqsubseteq G'$;

(γ) Εάν η G έχει ακριβώς ένα στοιχείο x τάξεως 2, να αποδειχθεί ότι $\langle x \rangle \sqsubseteq Z(G)$.

(ii) Έστω G μια ομάδα και έστω $K \trianglelefteq G$ με $K \cap G' = \{e_G\}$.

Να αποδειχθούν τα εξής:

(α) $K \sqsubseteq Z(G)$.

(β) $Z(G/K) = Z(G)/K$.

<u>ΘΕΜΑ 9ο</u> (i) Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν απλές ομάδες τάξεως 56.

(ii) Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν απλές ομάδες τάξεως

$$2^m p^n, \quad \text{όπου} \quad m \in \{1, 2, 3\}, \ n \in \mathbb{N}$$

και p περιττός πρώτος. [*Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιηθούν καταλλήλως τα θεωρήματα τού Sylow, το τέχνασμα τού Poincaré και το (i).]

<u>ΘΕΜΑ 10ο</u> (i) Να αποδειχθεί ότι κάθε αβελιανή ομάδα που διαθέτει μια συνθετική σειρά οφείλει να είναι πεπερασμένη.

(ii) Έστω G μια ομάδα. Εάν $H \trianglelefteq G$ και $K \trianglelefteq G$, και εάν, επιπροσθέτως, οι πηλικοομάδες G/H, G/K είναι επιλύσιμες, να αποδειχθεί ότι αμφότερες οι πηλικοομάδες $K/(H \cap K)$ και $G/(H \cap K)$ είναι επιλύσιμες.

- **Ζητείται να απαντηθούν το πολύ 3 θέματα ανήκοντα σε μία εκ των δύο παρατιθέμενων κατηγοριών θεμάτων και το πολύ 2 θέματα ανήκοντα στην άλλη.**

- **Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει 2 μονάδες.**

- **Η εξέταση χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος της οι εξεταζόμενοι δίδουν τις απαντήσεις μόνον στα θεωρητικά θέματα τής επιλογής τους (από τα 1-5), χωρίς να χρησιμοποιούν σημειώσεις ή βιβλία. Ύστερα από την αποπεράτωση αυτής τής διαδικασίας παραδίδουν τις κόλλες τους στον επιτηρητή και (προκειμένου να μεταβούν στο δεύτερο μέρος τής εξετάσεως) λαμβάνουν άλλες κόλλες.**

- **Στο δεύτερο μέρος οι εξεταζόμενοι δίδουν τις απαντήσεις μόνον στα θέματα τής επιλογής τους (από τα 6-10) που σχετίζονται με τις εφαρμογές, έχοντας εκ παραλλήλου τη δυνατότητα χρησιμοποιήσεως των σημειώσεων τού διδάξαντος ή/και των βιβλίων που διενεμήθησαν για την παρακολούθηση τού μαθήματος.**

- **Εντός των γραπτών οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.**

- **Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).**

- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!